Вариант 3

1. Решить уравнение

$$arctg(x^2+4x+3+\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$$

2. Решить задачу.

Из A в C в 9 часов утра отправляется скорый поезд. В то же время из B, расположенном между A в C выходят два пассажирских поезда, первый из которых идет в A, а второй – в C. Скорости пассажирских поездов равны. Скорый встречает первый пассажирский не позже, чем через три часа после отправления, потом приходит в пункт B не ранее 14 часов того же дня и, наконец, прибывает в C одновременно со 2-м пассажирским через 12 часов после встречи с 1-м пассажирским. Найти время прибытия в A первого пассажирского поезда.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lg(2+y)+2\lg 2=\lg 2x \\ \sqrt{y^2+2}=x+y-4 \end{cases}$$

4. Найти множество значений параметра a, при которых дискриминант уравнения $ax^2+2x+1=0$ в 9 раз больше квадрата разности двух его различных корней.
5. Решить уравнение

$$6\sin^2 x-\frac{3}{2}\sin 2x-5\cos^2 x=2$$

6. Решить неравенство

$$\frac{1}{|x|}\geq\frac{1}{3}$$

7. Решить задачу.

Высота, проведенная к основанию треугольника, равна 72 см и делит его на отрезки 30 см и 96 см. Найти радиус описанной около треугольника окружности.

Критерии оценки выполнения задания

Задание	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Балл	**12**	**20**	**20**	**12**	**12**	**12**	**12**

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$arctg(x^2+4x+3+\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$$

Решение.

$$arctg(x^2+4x+3+\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$$

$$x^2+4x+3+\sqrt{3}=tg\frac{\pi}{3}$$

$$x^2+4x+3+\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

$$x^2+4x+3=0$$

$$(x+1)(x+3)=0$$

$x=-1$ или $x=-3$

Ответ: $\{-1,-3\}$.

2. Решить задачу.

Из *A* в *C* в 9 часов утра отправляется скорый поезд. В то же время из *B*, расположенном между *A* в *C* выходят два пассажирских поезда, первый из которых идет в *A*, а второй – в *C*. Скорости пассажирских поездов равны. Скорый встречает первый пассажирский не позже, чем через три часа после отправления, потом приходит в пункт *B* не ранее 14 часов того же дня и, наконец, прибывает в *C* одновременно со 2-м пассажирским через 12 часов после встречи с 1-м пассажирским. Найти время прибытия в *A* первого пассажирского поезда.

Решение.

Пусть S км – расстояние от *A* до *B*, T км – расстояние от *B* до *C*, y км/ч – скорость пассажирского поезда и x км/ч – скорого.

Встреча скорого и первого пассажирского поездов произошла через $\frac{S}{x+y}$ часов, а в пункт *B* скорый прибыл через $\frac{S}{x}$ часов. Значит, имеют место два неравенства:

$$\frac{S}{x+y}\le 3 \text{ и } \frac{S}{x}\ge 5.$$

Из того, что скорый прибыл в C одновременно со вторым пассажирским следует, что

$$\frac{S+T}{x}=\frac{T}{y}.$$

До встречи с первым пассажирским поездом скорый проехал $x\cdot\frac{S}{x+y}$ км, а через 12 часов $12x$, что составило остаток пути от *A* до *C*. Значит, имеем еще одно уравнение:

$$\frac{S\,x}{x+y}+12x=S+T\,.$$

Из последних двух уравнений можно исключить T и выразить S через x и y:

$$S=\frac{6x^2-6y^2}{y}\,.$$

Подставим S в первое неравенство:

$$\frac{6x-6y}{y}\le 3\Leftrightarrow x\le\frac{3}{2}y\,.$$

А теперь – во второе:

$$\frac{6x^2-6y^2}{xy}\ge 5\Leftrightarrow 6x^2-5xy-6y^2\ge 0\Leftrightarrow(3x+2y)(2x-3y)\ge 0\Leftrightarrow x\ge\frac{3}{2}y\,.$$

Следовательно, $x=\dfrac{3}{2}y$.

Нам надо найти время прибытия в A первого пассажирского поезда. Он прибыл в A через $\dfrac{S}{y}=\dfrac{6x^2-6y^2}{y^2}=6\dfrac{x^2}{y^2}-6=7{,}5$ часов. Вспомнив, что он отправлялся в 9 часов утра, получаем 16 часов 30 минут.

Ответ: первый пассажирский поезд прибыл в пункт A в 16 часов 30 минут.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\lg(2+y)+2\lg 2=\lg 2x\\ \sqrt{y^2+2}=x+y-4\end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases}4(2+y)=2x\\ 2+y>0\\ y^2+2=x^2+y^2+2xy-8x-8y+16\\ x+y-4>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=4+2y\\ y>-2\\ x^2+2xy-8x-8y+14=0\\ y>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=4+2y\\ y>0\\ (4+2y)^2+2(4+2y)y-8(4+2y)-8y+14=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 + 2y \\ y > 0 \\ 16 + 16y + 4y^2 + 8y + 4y^2 - 32 - 16y - 8y + 14 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 + 2y \\ y > 0 \\ 8y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 + 2y \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ответ: $\left(5; \dfrac{1}{2}\right)$.

4. Найти множество значений параметра a, при которых дискриминант уравнения $ax^2 + 2x + 1 = 0$ в 9 раз больше квадрата разности двух его различных корней.

Решение.

$D = 4 - 4a$

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \left(\frac{2}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{a} = \frac{4 - 4a}{a^2} = \frac{D}{a^2}.$$

Получаем уравнение: $\dfrac{D}{a^2} \cdot 9 = D$. Условию $D > 0$ удовлетворяет только корень $a = -3$.

Ответ: $\{-3\}$.

5. Решить уравнение

$$6\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin 2x - 5\cos^2 x = 2$$

Решение.

$6\sin^2 x - \dfrac{3}{2}\sin 2x - 5\cos^2 x = 2$

$6\sin^2 x - 3\sin x \cos x - 5\cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$

$4\sin^2 x - 3\sin x \cos x - 7\cos^2 x = 0$

$\cos x \neq 0$

$4tg^2x - 3tgx - 7 = 0$
$D = 9 + 112 = 121$
$tgx = \frac{3 \pm 11}{8}$
$tgx = -1$ или $tgx = \frac{7}{4}$
$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ или $x = arctg\frac{7}{4} + \pi k, k \in Z$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z\right), \left(arctg\frac{7}{4} + \pi k,\ k \in Z\right)$.

6. Решить неравенство

$$\frac{1}{|x|} \geq \frac{1}{3}$$

Решение.

1) $\begin{cases} x < 0 \\ \frac{1}{-x} \geq \frac{1}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0 \\ -x \leq 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0 \\ x \geq -3 \end{cases}$ $-3 \leq x < 0$

2) $\begin{cases} x > 0 \\ \frac{1}{x} \geq \frac{1}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0 \\ x \leq 3 \end{cases}$ $0 < x \leq 3$

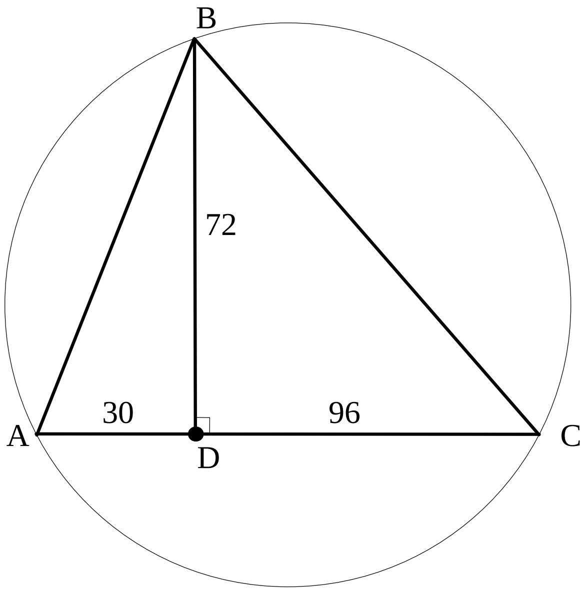
Ответ: $\{[-3;0),(0;3]\}$.

7. Решить задачу.

Высота, проведенная к основанию треугольника, равна 72 см и делит его на отрезки 30 см и 96 см. Найти радиус описанной около треугольника окружности.

Решение.

ΔABD и ΔBDC – прямоугольные треугольники (см. рисунок).



По теореме Пифагора:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = 30^2 + 72^2 = 6084; \quad AB = 78;$$

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 = 96^2 + 72^2 = 14400; \quad BC = 120;$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{BD \cdot AC}{2} = \frac{72 \cdot (30 + 96)}{2} = 4536 \ (см^2).$$

Найдем радиус описанной окружности по формуле:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S} = \frac{78 \cdot 120 \cdot 126}{4 \cdot 4536} = 65.$$

Ответ: 65см.