ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА
для поступающих в аспирантуру по группе научных специальностей

1.1 «МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

Программа вступительного экзамена включает в себя общие вопросы по группе научных специальностей 1.1 «Математика и механика» (Блок 1) и вопросы по научной специальности 1.1.4 «Теория вероятностей и математическая статистика» (Блок 2).

БЛОК 1. ВОПРОСЫ ПО ГРУППЕ НАУЧНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

1. Математический анализ

1. Числовые последовательности и их пределы. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности. Верхний и нижний пределы последовательности. Числовые ряды и признаки их сходимости.

2. Функции одного переменного. Предел функции. Непрерывные функции. Равномерная непрерывность. Теорема Вейерштрасса о достижении верхней и нижней граней непрерывной функции на отрезке.

3. Производная функции одного переменного, ее геометрический и физический смыслы. Дифференциал. Формулы дифференцирования. Производная обратной и сложной функции. Производные элементарных функций. Теоремы Ролля и Лагранжа о конечном приращении. Правило Лопиталя.

4. Локальные экстремумы функции. Исследование функций и построение их графиков (интервалы монотонности, выпуклости, точки экстремума, перегиба, асимптоты).

5. Производные высших порядков. Формула Тейлора. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора.

6. Интегрирование функции одного переменного. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных интегралов.

7. Определенный интеграл, его свойства и геометрический смысл. Теорема о среднем. Производная интеграла по верхнему пределу и формула Ньютона-Лейбница. Замена переменных в определенном интеграле. Интегрирование по частям. Несобственные интегралы и признаки их сходимости.

8. Функция нескольких переменных. Предел в точке и непрерывность. Теорема Вейерштрасса для функций нескольких переменных. Дифференцируемость: частные производные, полный дифференциал и его геометрический смысл. Градиент. Производная по направлению. Необходимые и достаточные условия локального экстремума функции.

2. Линейная алгебра

1. Определение векторного пространства. Свойства линейно зависимых и линейно независимых систем векторов. Понятие ранга системы векторов.

2. Конечномерные векторные пространства и их размерность. Арифметическое пространство R^n. Подпространства и аффинные многообразия в векторном пространстве, их размерности. Линейная оболочка системы векторов.

3. Операции с подпространствами. Прямая сумма подпространств. Связь размерностей суммы и пересечения двух подпространств.

4. Матрицы и операции с ними. Сложение и умножение матриц, умножение на скаляр. Транспонирование матриц. Клеточные матрицы. Обратные матрицы.

5. Системы линейных алгебраических уравнений. Матрица системы,

6. Условия существования решения системы при любой правой части. Условие единственности решения для совместной системы. Множества решений однородной и неоднородной систем, их размерность. Общее решение совместной системы.

7. Свойства систем с квадратной матрицей. Обратная матрица, ее единственность и условие существования. Определитель квадратной матрицы и его основные свойства. Способы вычисления определителя.

8. Общее понятие линейного оператора. Матрицы как линейные операторы в пространствах вида R^n. Образ и ядро линейного оператора, суперпозиция линейных операторов.

9. Линейные преобразования векторных пространств. Собственные векторы и собственные числа. Характеристический многочлен матрицы.

3. Обыкновенные дифференциальные уравнения

1. Система дифференциальных уравнений первого порядка. Теорема существования и единственности решения.

2. Система линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Теорема существования и единственности решения. Лемма Гронуолла.

3. Система линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Вид общего решения. Метод вариации постоянных.

4. Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка. Линейное однородное уравнение. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Линейное неоднородное уравнение.

5. Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Вид общего решения однородного уравнения. Вид частного решения в случае задания правой части квазимногочленом.

6. Разностные уравнения. Методы приближенного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнения.

7. Понятие устойчивости и асимптотической устойчивости. Функция Ляпунова и её свойства. Теорема Ляпунова об устойчивости.

4. Дифференциальные уравнения с частными производными

1. Классификация уравнений второго порядка с частными производными.

2. Уравнение колебания струны. Постановка задач на бесконечной прямой. Формула Даламбера.

3. Метод Фурье построения решений краевых задач для уравнения колебания струны.

4. Уравнение теплопроводности. Постановка начально-краевых задач.

5. Уравнение Лапласа. Постановка краевых задач.

6. Понятие о конечно-разностных методах решения краевых задач.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1,2. М., Физматлит, 2001.

2. Зорич В.А. Математический анализ. М.: МЦНМО, I и II части, 2002.

3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1,2. М., Наука, 1981.

4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., Наука, 1980.

5. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. М., Наука, 1970.

6. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М., Наука, 1974.

7.Ильин В.А., Ким Б.Г. Линейная алгебра. Изд-во МГУ, 1998.

8.Шилов Г.Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. М., Наука, 1963.

9. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М., Добросвет КДУ, 2006.

10. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971.

11.Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М., Комкнига, 2006.

12. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: ГИТТЛ, 1953 г. (и другие издания).

БЛОК 2. ВОПРОСЫ ПО НАУЧНОЙ СПЕЦИАЛЬНОСТИ 1.1.4 «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

1. Вероятность и ее свойства

1. Стохастический эксперимент и пространство элементарных исходов. События и операции над ними. Закон стабилизации частот. Статистическое определение вероятности. Классическое определение вероятности.

2. Вероятность на дискретных пространствах элементарных исходов.

3. Элементы комбинаторики. Выборки с возвращением и без возвращения. Основные комбинаторные формулы.

4. Аксиоматика теории вероятностей. Вероятность как счетно-аддитивная мера на s-алгебре событий. Лемма непрерывности.

5. Условная вероятность. Независимые события и формула произведения вероятностей.

6. Разбиения пространства элементарных исходов. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Апостериорная вероятность.

2. Последовательности однородных независимых испытаний с конечным числом исходов

1. Схема Бернулли. Биномиальное распределение (формула Бернулли). Связь биномиального и гипергеометрического распределений. Теорема Пуассона с оценкой скорости сходимости. Распределение Пуассона.

2. Нормальное приближение биномиального и полиномиального распределений. Локальная предельная теорема. Теорема Муавра-Лапласа.

3. Случайные величины (СВ)

1. Типы распределений СВ: дискретные, абсолютно непрерывные, сингулярные, смеси. Плотность распределения.

2. Функции распределения и их свойства. Преобразования СВ.

3. Совместное распределение и независимость конечной совокупности СВ. Плотность совместного распределения. Композиция (свёртка) распределений.

4. Моделирование случайных величин. Квантильные преобразования. Существование последовательностей независимых случайных величин.

5. Основные законы распределения СВ.

4. Моментные характеристики распределений

1. Математическое ожидание (МО) как абстрактный интеграл Лебега. Механическая интерпретация. Моменты. Формула замены переменной и интеграл Стилтьеса.

2. Вычисление МО функций от конечного набора СВ. Смешанные моменты. Теорема умножения. Моменты второго порядка: дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции. Ковариационная матрица.

3. Многомерное нормальное распределение. Приведение к каноническому виду. Некоррелируемость и независимость СВ.

4. Условные распределения. Условные квантильные преобразования. Моделирование последовательностей случайных величин с заданными совместными распределениями.

5. Основные предельные теоремы

1. Неравенство Чебышева и его обобщения. Законы больших чисел для последовательностей слабо зависимых СВ с конечными дисперсиями.

2. Нормальная аппроксимация сумм независимых СВ с конечными дисперсиями (центральная предельная теорема).

3. Оценка скорости сходимости средних в центральной предельной теореме. Метод композиции. Обобщение теоремы Пуассона. Обобщенное распределение Пуассона.

6. Простейшие случайные процессы

1. Способы задания распределений случайных процессов. Теорема Колмогорова. Процессы с независимыми приращениями. Винеровский процесс.

2. Марковские процессы со счетным множеством состояний (цепи Маркова). Марковское свойство показательного распределения.

3. Эргодическая теорема для цепей Маркова. Стационарное распределение.

7. Основные понятия и задачи математической статистики

1. Основные статистические задачи. Генеральная совокупность. Выборка. Репрезентативность выборки.

2. Выборочное (эмпирическое) распределение и выборочные характеристики: среднее, дисперсия, моменты. Вариационный ряд и эмпирическая функция распределения. Группировка наблюдений, гистограммы.

3. Вполне ограниченные классы множеств. Теоремы Гливенко-Кантелли. Сходимость выборочных характеристик к истинным.

4. Параметрические семейства распределений. Понятие плотности относительно некоторой меры. Классические семейства распределений.

8. Точечные и интервальные оценки параметров генеральной совокупности

1. Понятие оценки неизвестного параметра. Состоятельные оценки. Несмещенные и асимптотически несмещенные оценки. Принцип подстановки и метод моментов. Асимптотически нормальные оценки (АНО) и их сравнение. АНО для функций от параметров. Теорема о суперпозиции.

2. Функция правдоподобия. Оценки максимального правдоподобия (ОМП). Состоятельность ОМП. Достаточные статистики. Сравнение оценок. Эффективные оценки. Улучшение оценок с помощью достаточных статистик. Полнота и эффективность оценок.

3. Байесовские и минимаксные оценки. Состоятельность байесовских оценок.

4. Доверительные интервалы (точные и асимптотические). Принцип построения. Асимптотические доверительные интервалы, построенные с помощью АНО. Доверительные интервалы для классических семейств распределений с одномерным параметром.

5. Распределения "хи-квадрат" и Стьюдента. Лемма Фишера. Точные доверительные интервалы для параметров нормального распределения.

9. Проверка статистических гипотез

1. Основные понятия теории проверки конечного числа гипотез: простые и сложные гипотезы, критерии (статистические решающие функции), вероятности ошибок i-го рода. Естественное сравнение критериев.

2. Байесовские критерии для проверки конечного числа простых гипотез.

3. Проверка двух простых гипотез. Наиболее мощные критерии. Теорема Неймана – Пирсона. Равномерно наиболее мощные критерии для проверки простых гипотез против сложных альтернатив. Экспоненциальные семейства распределений

4. Принцип минимального расстояния. Критерии согласия. Непараметрические критерии. Критерии Колмогорова и "омега квадрат". Критерий "хи-квадрат" для проверки простых и сложных гипотез. Теорема Пирсона. Построение критериев согласия с помощью доверительных интервалов.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие. – М.: Юрайт, 2014. – 479 с.

2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: учебник для студентов математических специальностей университетов. – М.: Либроком, 2011, - 488 с.

3. Карлов А.М. Теория вероятностей и математическая статистика для экономистов: учебник для вузов. - М.: КНОРУС, 2011. – 260 с.

4. Попов А.М., Сотников В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник. - М.: Юрайт, 2011. - 440 с.

5. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. - 552 с.

6. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учебник для студентов высших технических учебных заведений. - М.: КНОРУС, 2010, - 658 с.

Дополнительная

7. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие. - Москва : Юрайт, 2014. - 404 с.

8. Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов: учебник. - М.: Физматлит, 2002. – 318 с.

9. Кобзарь, А.И. Прикладная математическая статистика: учебник. – М.: Физматлит, 2006. – 816 с.

10. Сикан А.В. Методы статистической обработки гидрометеорологической информации: учебник. - Санкт-Петербург: Изд-во РГГМУ, 2007. – 279 с.

11. Наумов В.А. Методы обработки гидрологической информации: учебное пособие. – Калининград: Изд-во ФГБОУ ВПО «КГТУ», 2015. – 91 с.

12. Наумов В.А. Прикладная математика: учебное пособие по решению профессиональных задач в среде Mathcad. – Калининград: Изд-во ФГБОУ ВПО «КГТУ», 2014. – 144 с.