ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО РЫБОЛОВСТВУ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Калининградский государственный технический университет»

Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота

Н.Н. АВДЕЕВА
А.И. РУДЕНКО

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие
для курсантов и студентов,
обучающихся по специальностям:
25.05.03 «Техническая эксплуатация транспортного радиооборудования», 26.05.06 «Эксплуатация судовых энергетических установок», 16.03.03 «Холодильная, криогенная техника и системы жизнеобеспечения»
очной и заочной форм обучения
(2-е издание, переработанное и дополненное)

Калининград
Издательство БГАРФ
2020

УДК 517.53

Авдеева, Н.Н. Специальные разделы математики: учебное пособие / Н.Н. Авдеева, А.И. Руденко. 2-е изд., переработанное и дополненное. – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2020. – 100 с.

В учебном пособии приведен обзор основных понятий и положений дисциплины «Специальные разделы математики», даны методические рекомендации по их изучению, выделены типовые задачи с решениями, представлены контрольные вопросы для самопроверки и задачи для самоподготовки по данной дисциплине, приведены варианты контрольных заданий для курсантов и студентов заочной формы обучения.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Балтийской государственной академии рыбопромыслового флота.

Рецензенты: **Шпилевой А.А.,** канд. физ.-мат. наук, доцент, первый заместитель директора Института физико-математических наук и информационных технологий БФУ им. И. Канта;
Алексеева С.М., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Калининградского государственного технического университета

ISBN **978-5-7481-0441-8**

© БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ», 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 5

Тема 1. Комплексные числа 6
1.1. Основные понятия 6
1.2. Геометрическое изображение комплексных чисел. 7
1.3. Формы записи комплексного числа 8
1.4. Действия над комплексными числами. 9
1.5. Вопросы для самопроверки 12

Тема 2. Функции комплексного переменного 13
2.1. Основные определения 13
2.2. Элементарные функции комплексного переменного 15
2.3. Понятие предела и непрерывности функции комплексного переменного в точке. 19
2.4. Дифференцирование функции комплексного переменного. Условия Эйлера-Даламбера 20
2.5. Задачи для самостоятельного решения. 23
2.6. Интегрирование функции комплексного переменного. 25
2.7. Вопросы для самопроверки 30
2.8. Задачи для самостоятельного решения. 30
2.9. Особые точки 31
2.10. Вычеты. 32
2.11. Задачи для самостоятельного решения. 35

Тема 3. Ряды в комплексной плоскости 37
3.1. Числовые ряды. 37
3.2. Степенные ряды. 38
3.3. Ряд Тейлора. 39
3.4. Ряд Лорана. 41
3.5. Примеры разложения функций в ряд Лорана 43
3.6. Изолированные особые точки и ряды Лорана в окрестности этих точек 47
3.7. Задачи для самостоятельного решения. 49

Тема 4. Операционное исчисление 51
4.1. Преобразование Лапласа. Оригиналы и их изображения 52
4.2. Свойства преобразования Лапласа. 54
4.3. Таблица оригиналов и изображений 58
4.4. Нахождение оригиналов по заданным изображениям в простейших случаях 59
4.5. Задачи для самостоятельного решения. 63

4.6. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и систем линейных дифференциальных уравнений 66
4.7. Передаточная функция 69
4.8. Вопросы для самопроверки 71
4.9. Задачи для самостоятельного решения. 71

Тема 5. Комплексная форма ряда Фурье 73
5.1. Задачи для самостоятельного решения. 75

Тема 6. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье 76
6.1. Преобразование Фурье 79
6.2. Задачи для самостоятельного решения. 81

Тема 7. Элементы теории графов 82
7.1. Основные определения 82
7.2. Задачи для самостоятельного решения. 87

Тема 8. Задачи для контрольных заданий студентов заочной формы обучения 89
8.1. Решение типовых задач 93

Список использованной литературы 100

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие и контрольные задания составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины «Высшая математика» на основании:

– примерной программы дисциплины «Математика» для направления 550000 («Технические науки». Министерство образования Российской Федерации. – М., 2000);

– учебного плана по специальностям: 25.05.03 «Техническая эксплуатация транспортного радиооборудования», 26.05.06 «Эксплуатация судовых и энергетических установок», 16.03.03 «Холодильная, криогенная техника и системы жизнеобеспечения» очной и заочной форм обучения.

В результате изучения специальных разделов математики студент должен:

знать основные базовые понятия и методы теории комплексных чисел, функции комплексного переменного, операционного исчисления;

уметь применять теоретические знания для исследования простейших радиотехнических схем, систем и процессов;

иметь опыт:

– употребления математической символики для выражения количественных и качественных отношений объектов;

– аналитического и численного решения уравнений, содержащих комплексные числа;

– исследования аналитического и численного решения дифференциальных уравнений операционным методом;

– перевода технической задачи на математический язык;

– составления математической модели физических и технических процессов;

– использования справочной математической и технической литературы.

ТЕМА 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Основные понятия. Геометрическое изображение комплексных чисел. Формы записи комплексного числа. Действия над комплексными числами.

1.1. Основные понятия

Понятие о мнимой единице возникло в связи с решением уравнения $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$.

Полученному уравнению нельзя поставить в соответствие никакое действительное число. В середине 18 столетия Леонардом Эйлером был введен символ i для обозначения мнимой единицы.

Мнимой единицей i называется число, квадрат которого равен -1.

Таким образом, мнимая единица i является одним из решений указанного уравнения, вторым его решением будет число -i.

Важно знать значения натуральных степеней числа i

$$i^1=i;\ i^2=-1;\ i^3=i^2\cdot i=-i;$$
$$i^4=i^2\cdot i^2=1;\ i^5=i^4\cdot i=i;\ i^6=i^4\cdot i^2=-1 \text{ и т. д.}$$

Заметим, что результаты возведения числа i в натуральную степень периодически повторяются. Периодом является число 4.

Комплексным числом z называется выражение вида $z=x+iy$, где x и y действительные числа; i – мнимая единица.

Если $x=0$, то число iy называется чисто мнимым; если $y=0$, то $z=x$ – действительное число. Это значит, что действительные числа являются подмножеством комплексных чисел. Число x называется действительной частью комплексного числа и обозначается $\operatorname{Re} z=x$; y – мнимая часть, обозначается $\operatorname{Im} z=y$.

Два комплексных числа равны, если равны их действительные и мнимые части. Соотношения «больше», «меньше» для комплексных чисел не определены.

Два комплексных числа $z_1=x+iy; z_2=x-iy$, различающиеся знаком мнимой части, называются сопряженными.

1.2. Геометрическое изображение комплексных чисел

Рассмотрим прямоугольную систему координат XOY. Любое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой $M(x, y)$ (рис. 1).

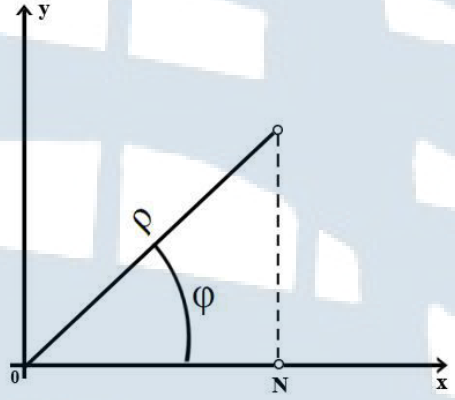


Рис. 1. Комплексное число на плоскости

При этом плоскость XOY называется комплексной плоскостью. Ось OX называют действительной осью, так как на ней находятся действительные числа $z = x$ $(y = 0)$. Ось OYназывают мнимой, так как на ней лежат чисто мнимые числа. Комплексное число часто задают радиусом-вектором $\vec{OM}$. ***Длина этого радиуса-вектора называется модулем числа*** z **:** $\rho = |z| = |\vec{OM}|$**.**

Величина угла между положительным направлением действительной оси OX и вектором $\vec{OM}$ называется аргументом комплексного числа и обозначается $Argz = \phi$.

Каждому комплексному числу соответствует единственное значение модуля и бесконечно много значений аргумента $Argz = arg\, z + 2\pi k$ $(k \in Z)$, где $arg\, z$ – главное значение аргумента. Его обычно берут в промежутке $[0,2\pi]$. Иногда в качестве главного значения выбирают угол $-\pi \leq \phi \leq \pi$.

1.3. Формы записи комплексного числа

Запись комплексного числа в виде $z = x + iy$ называют алгебраической формой комплексного числа. Модуль и аргумент комплексного числа можно рассматривать как полярные координаты точки M (см. рис. 1). Тогда $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

Следовательно, комплексное число можно записать в виде $z = x + iy = \rho\cos\phi + i\rho\sin\phi$ или $\boldsymbol{z = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)}$.

Такая запись называется тригонометрической формой комплексного числа. Комплексное число можно записать в **показательной форме** $z = \rho e^{i\phi}$ (см. 2.2).

Пример. Записать комплексные числа $z_1 = -1 + i$; $z_2 = 3$; $z_3 = 2i$ в тригонометрической и показательной формах. Изобразить эти числа на комплексной плоскости.

Решение. Изобразим числа на комплексной плоскости (рис. 2).

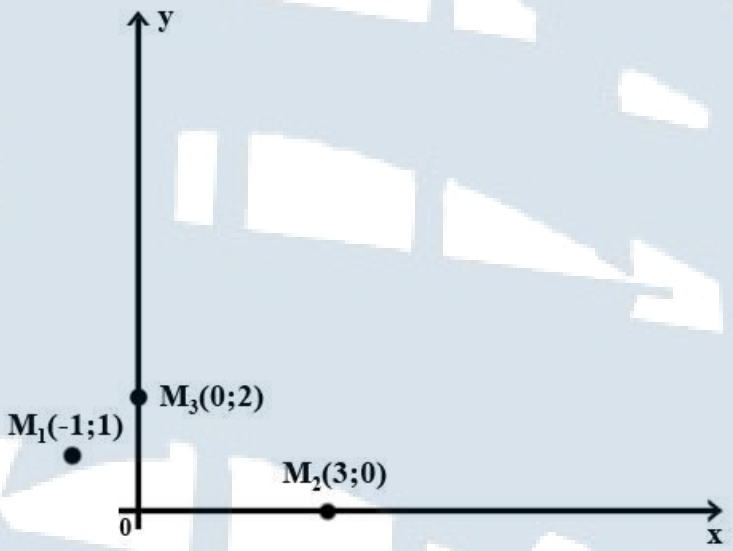


Рис. 2. Комплексные числа на плоскости

$z_1 = -1 + i \Leftrightarrow M_1(-1,1)$;

$z_2 = 3 \Leftrightarrow M_2(3,0)$;

$z_3 = 2i \Leftrightarrow M_3(0,2)$.

1. Запишем число $z_1 = -1 + i$ в тригонометрической форме: $x = -1$; $y = 1$.

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2};$

$\cos\varphi = \dfrac{x}{\rho} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \prec 0;\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\rho} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \succ 0.$

Угол, косинус которого отрицателен, а синус положителен, находится во второй четверти: $\varphi = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$.

Тригонометрическая форма этого числа

- $z_1 = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{2}(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4})$.

Показательная форма - $z_1 = \rho e^{i\varphi} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

2. $z_2 = 3;\ X = 3;\ Y = 0;$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 3;\ \ cos\,\phi = \dfrac{x}{\rho} = 1;\ \ sin\,\phi = \dfrac{y}{\rho} = 0 \Rightarrow \phi = 0.$

$z_2 = 3(cos\,0 + i\,sin\,0),\quad z_2 = 3e^{i\cdot 0}.$

3) $z_3 = 2i;\quad X = 3;\quad Y = 2;\quad \rho = 2,\quad \varphi = \dfrac{\pi}{2},\quad z_3 = 2(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}),$

$z_3 = 2e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}.$

1.4. Действия над комплексными числами

Действия над комплексными числами в алгебраической форме определяют по правилам действий над многочленами.

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1; z_2 = x_2 + iy_2$.

1. Сложение и вычитание: $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$.

2. Умножение:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 =$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Например, $(2+i)(1-3i) = 2 - 6i + i - 3i^2 = 5 - 5i.$

Заметим, что произведение сопряженных комплексных чисел является действительным числом.

$(x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2.$

Например, $(3 + 2i)(3 - 2i) = 9 - 4i^2 = 13.$

Можно показать, что ***при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются:***

$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (cos(\phi_1 + \phi_2) + i\, sin(\phi_1 + \phi_2))$.

Это правило распространяется на любое конечное число сомножителей. В частности,

$z^n = \rho^n (cos\, n\, \phi + i\, sin\, n\, \phi)$ – формула Муавра.

Пример. Найти $(1+i)^{10}$.

Решение. Запишем число $z = 1 + i$ в тригонометрической форме.

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$, $\cos\varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$,

$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

По формуле Муавра получим

$z^{10} = (1+i)^{10} = (\sqrt{2})^{10}(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}) =$

$= 32(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}) = 32(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 32i$.

3. Деление: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$. Умножим числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю. Тогда в знаменателе получим действительное число.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Например, $\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i+2i+i^2}{4-i^2} = \frac{1+3i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$.

При делении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули делятся, а аргументы вычитаются:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

4. Извлечение корней из комплексных чисел.

Пусть $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Обозначим $\sqrt[n]{z} = \omega \Rightarrow z = \omega^n$. Пусть $\omega = r(cos\,\theta + i\, sin\,\theta)$.

Тогда получим

$z = \omega^n \Leftrightarrow \rho(\cos\phi + i\sin\phi) = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$

Из последнего имеем

$r^n = \rho \Rightarrow r = \sqrt[n]{\rho},$

$n\theta = \varphi + 2k\pi \Rightarrow \theta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}, k \in Z.$

Окончательно получим $\omega = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}(\cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n})$,

где $k = 0,1,2...(n-1)$.

Корень n-й степени из комплексного числа имеет n различных значений, модули которых совпадают, а аргументы отличаются на $\dfrac{2\pi}{n}$. Отсюда следует, что корни n-й степени из любого комплексного числа располагаются в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $|\omega| = \sqrt[n]{|z|}$.

Пример. Найти все значения $\sqrt[3]{1}$.

Решение. Представим число $z = 1$ в тригонометрической форме: $z = 1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$.

$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\rho}(\cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{3})$, где $k = 0,1,2.$

$\sqrt[3]{z} = 1(\cos\dfrac{0 + 2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{0 + 2k\pi}{3})$, где $k = 0,1,2.$

1) $k = 0 \quad \omega_1 = 1(\cos 0 + i\sin 0) = 1;$

2) $k = 1 \quad \omega_2 = 1(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}) = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2};$

3) $k = 2 \quad \omega_3 = 1(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}) = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

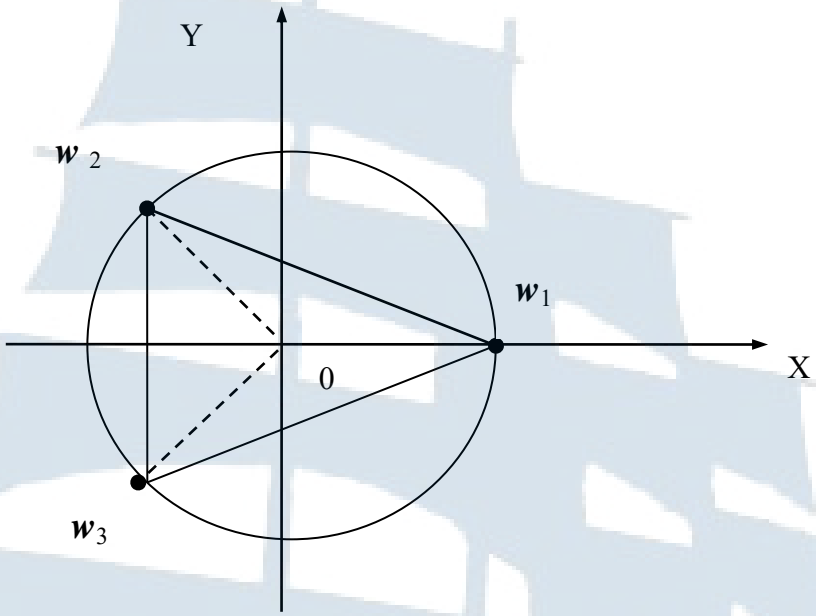


Рис. 3. Кубические корни из единицы

Литература: [1, глава I, § 1-5] или [2, глава 1, § 1,2].

1.5. Вопросы для самопроверки

1. Как определяется число i ? Чему равны степени этого числа?
2. Какие числа называются комплексными?
3. Как комплексные числа изображаются на комплексной плоскости? Что называется модулем и аргументом комплексного числа?
4. Как записать комплексное число в алгебраической, тригонометрической и показательной формах?
5. Как выполняется сложение, вычитание, умножение, деление комплексных чисел?
6. Запишите формулу Муавра.
7. Как извлекается корень из комплексного числа? Сколько значений он имеет?

ТЕМА 2. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Основные определения. Элементарные функции комплексного переменного. Понятие предела и непрерывности функции комплексного переменного в точке. Дифференцирование функции комплексного переменного. Условия Эйлера-Даламбера. Интегрирование функции комплексного переменного. Теоремы Коши. Формула Коши. Особые точки. Вычеты. Основные теоремы о вычетах.

2.1. Основные определения

Пусть заданы два множества D и E комплексных чисел. Если каждому числу $z = x + iy$, принадлежащему множеству D, по некоторому правилу поставлено в соответствие определенное число $\omega = u + iv$, принадлежащее E, то говорят, что на множестве D задана однозначная функция комплексного переменного $\omega = f(z)$.

Множество D называется областью определения функции, E – множество ее значений.

В дальнейшем будем рассматривать такие множества D и E, которые являются областями. Областью на комплексной плоскости называется множество точек, обладающих следующими свойствами:

1) около любой точки области можно описать круг достаточно малого радиуса с центром в этой точке так, что он целиком будет лежать в этой области (свойство открытости);

2) любые две точки области можно соединить ломаной линией так, что все ее точки будут принадлежать этой области (свойство связанности).

Простейшим примером области может быть открытый круг с центром в точке z_0 и радиусом R. Все внутренние точки круга удовлетворяют неравенству $|z - z_0|<\mathrm{R}$. В этом легко убедиться, если неравенство представить в векторной форме (рис. 4). Рассмотрим окружность с центром в точке M_0 и радиусом R.

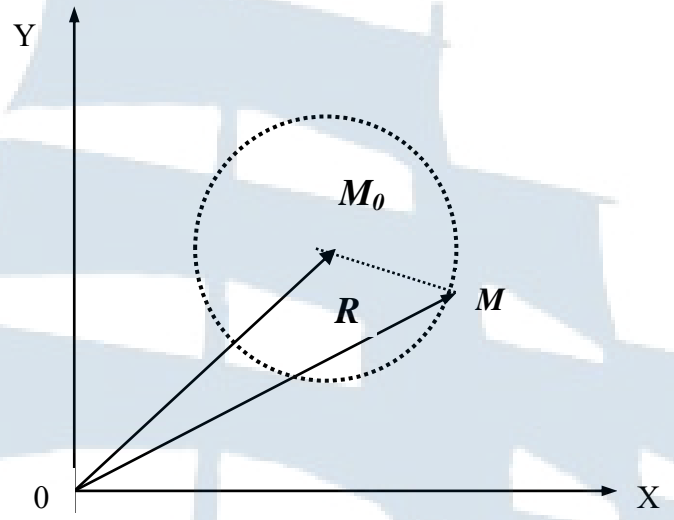


Рис. 4. Простейшая область определения функции

Пусть M – произвольная точка окружности.

$$\vec{OM} - \vec{OM_0} = \vec{M_0M} \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{OM} - \vec{OM_0}\right| = \left|\vec{M_0M}\right| \Leftrightarrow \quad |z - z_0| = R.$$

Таким образом, уравнение $|z - z_0| = R$ определяет окружность радиуса R с центром в точке z_0. Тогда внутренние точки круга можно определить неравенством $|z - z_0| < R$, где ε – ***окрестность точки*** z_0 ***и называется открытым кругом радиуса*** ε ***с центром в точке*** $\mathbf{z_0}$.

Граница замкнутой области может состоять из одной, двух и более связанных частей. В этих случаях область называется односвязной, двухсвязной, многосвязной. На рис. 5 показана трехсвязная область.

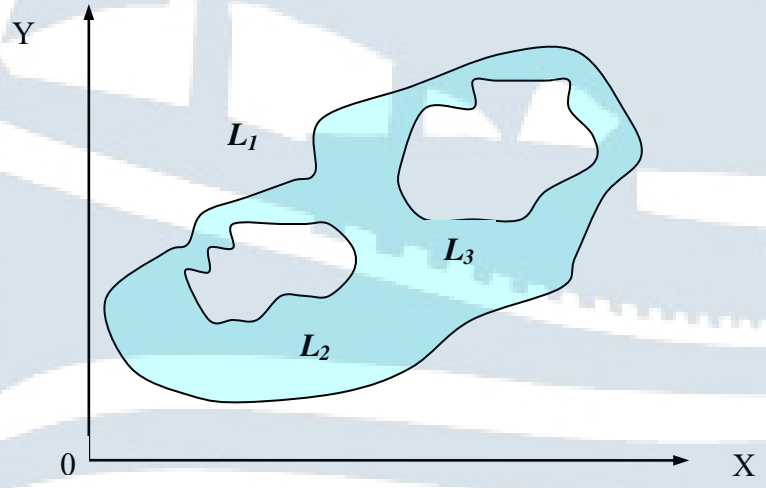


Рис. 5. Трехсвязная область

Граничной точкой области называется такая точка, которая сама не принадлежит области, но в любой ее окрестности лежат точки этой области. Совокупность граничных точек называется границей области. Область с присоединенной к ней границей называется замкнутой.

Функцию $\omega = f(z)$ можно записать в виде

$$\omega = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Функция $u(x, y)$ называется действительной частью рассматриваемой функции и обозначается $\mathrm{Re}\,\omega$, функция $v(x, y)$ – мнимая часть $Im\,\omega$.

Таким образом, задание функции комплексного переменного равносильно заданию двух функций действительных переменных x и y.

Пример. Найти действительную и мнимую части функции $\omega = z^2$.

Решение. Запишем данную функцию в виде $\omega = (x + iy)^2 = = x^2 + 2xyi + i^2y^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$

Отсюда следует, что

$$Re\,\omega = u(x, y) = x^2 - y^2; Im\,\omega = v(x, y) = 2xy.$$

2.2. Элементарные функции комплексного переменного

Элементарные функции комплексного переменного являются естественным распространением на комплексную плоскость элементарных функций действительного переменного. Однако все эти функции в комплексной области требуют своего определения и обладают некоторыми своеобразными свойствами.

1. Степенная функция

Определение этой функции введем в соответствии с действиями возведения в натуральную степень комплексного числа и извлечения корня из комплексного числа, рассмотренными выше. Случай, когда n – целое отрицательное число, не рассматриваем.

На основании формулы Муавра $z^n = \rho^n(cos(n\phi) + i\,sin(n\phi))$ степенной функции можно придать следующий вид:

$$z^n = |z|^n(cos(n \cdot arg\,z) + i\,sin(n \cdot arg\,z)).$$

Степенной функции с дробным показателем можно придать вид

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right),$$

где $k = 0,1,2,\ldots(n-1)$.

Отметим, что функция $\omega = \sqrt[n]{z}$ является многозначной.

2. Показательная функция

Запишем известные разложения функций $e^x, \sin x, \cos x$ в степенной ряд для действительных значений x.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{2n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots.$$

Разложим в ряд функцию e^{iy}, пользуясь формально разложением e^x.

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{i^2y^2}{2!} + \frac{i^3y^3}{3!} + \frac{i^4y^4}{4!} + \frac{i^5y^5}{5!} + \cdots.$$

Применяя свойства степеней числа i, получим

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} + \ldots \text{ или}$$

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots\right).$$

Видим, что в первой скобке получилось разложение $\cos x$ в степенной ряд, а во второй – разложение $\sin x$. Полученному результату можно придать следующий вид:

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y.$$

Эта формула называется формулой Эйлера.

Применим формально формулу Эйлера к функции e^z.

$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, т. е.

$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Полученная формула принимается за определение показательной функции в комплексной области. Важно отметить, что при таком определении показательной функции остаются справедливыми известные правила умножения, деления, возведения в степень. Однако приобретается новое свойство периодичности. Действительно,

$$e^{z+2\pi\cdot i} = e^z e^{2\pi\cdot i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

Из последнего следует, что показательная функция на комплексной плоскости является периодической с периодом $2\pi \cdot i$, так как $e^{2\pi\cdot i} = (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 1$.

Формула Эйлера позволяет любое комплексное число записать в **показательной форме**

$$z = \rho(\cos\phi + i \sin\phi) = \rho \cdot e^{i\phi}.$$

Пример 1. Доказать справедливость равенства $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

Решение

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) =$$

$$= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) = e^{z_1+z_2}.$$

Пример 2. Найти действительную и мнимую часть функции $f(z) = e^{z^2}$.

Решение

$$f(z) = e^{z^2} = e^{(x+iy)^2} = e^{x^2+2ixy+i^2y^2} =$$

$$= e^{x^2-y^2} e^{2ixy} = e^{x^2-y^2}(\cos(2xy) + i \sin(2xy)).$$

Действительная часть данной функции $u(x, y) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$, мнимая часть – $v(x, y) = e^{x^2-y^2}\sin(2xy)$.

3. Тригонометрические функции

Если формально применить формулу Эйлера к функциям e^{iz} и e^{-iz}, т. е. заменить в ней y на z и $-z$, то получим

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$
$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z.$$

Из этих равенств выразим $\cos z$ и $\sin z$.

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Полученные формулы тоже называются формулами Эйлера. Правые части этих формул при комплексных значениях z принимают за определения функций $\cos z$ и $\sin z$ в комплексной области; $tg\ z$ и $ctg\ z$ определяются по формулам

$$tg\ z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}; \quad ctg\ z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{(e^{iz} - e^{-iz})}.$$

Отметим, что многие свойства тригонометрических функций, в частности все тождественные равенства, справедливы для комплексных значений z. Отметим также, что некоторые свойства не распространяются на комплексную плоскость. Например, $\sin z$ и $\cos z$ могут принимать значения, большие единицы. Например,

$\cos 3i = \dfrac{e^{i3i} + e^{-i3i}}{2} = \dfrac{e^{-3} + e^{3}}{2}$. Если учесть, что $e \approx 2{,}7$, то $\cos 3i \succ 1$.

4. Гиперболические функции

В преобразованиях различных выражений, содержащих показательные функции, и во многих практических приложениях применяются так называемые гиперболические функции. Приведем их определение.

Гиперболический синус $shZ = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$.

Гиперболический косинус $chZ = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$.

Гиперболический тангенс $thZ = \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$.

Гиперболический котангенс $cthZ = \dfrac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$.

Часто гиперболические функции удобно выражать через тригонометрические функции и наоборот:

$$sh(iz) = i \cdot \sin z; \quad ch(iz) = \cos z;$$

$$\sin(iz) = i \cdot shz; \quad \cos(iz) = chz.$$

5. Логарифмическая функция

Логарифмическая функция определяется как функция, обратная показательной. Число ω называется логарифмом числа z, если $e^{\omega} = z$ и обозначается $\omega = ln\, z$.

Обозначим $\omega = u + iv$.

Тогда $z = e^{\omega} = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv} = e^u(cos\, v + i\, sin\, v)$.

Запишем число z в тригонометрической форме

$$z = |z| \cdot (cos(\, arg\, z) + i\, sin(\, arg\, z)).$$

Два комплексных числа равны, если их модули равны, а аргументы могут отличаться на число, кратное 2π.

Следовательно, $e^{\omega} = |z| \Rightarrow \omega = ln|z|$; $v = arg\, z + 2k\pi$, где k – любое целое число. В результате получим:

$$\omega = ln\, z = u + iv = ln|z| + i \cdot (arg\, z + 2k\pi).$$

Пример. Найти $ln(\, 1 + i)$.

Решение. Найдем модуль и аргумент числа $z = 1 + i$.

$|z| = \sqrt{2}, arg\, z = \frac{\pi}{4}$.

$$ln\, z = ln(\, 1 + i) = ln\sqrt{2} + i \cdot (\frac{\pi}{4} + 2k\pi).$$

2.3. Понятие предела и непрерывности функции комплексного переменного в точке

Допустим, что функция $\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ однозначно определена в окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$. В этом случае на функцию комплексного переменного можно распространить опреде-

ление предела для функции действительного переменного, т. е. $\lim f(z)$ существует при $z \to z_0$, если существуют пределы:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0 \text{ и } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0.$$

При этом $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = u_0 + iv_0 = \omega_0$.

Исключительно важно отметить, что в соответствии с данным определением функция стремится к своему пределу **независимо от способа приближения точки z к точке z_0 в комплексной области**, т. е., если предел существует, то он один и тот же при $z \to z_0$ любым способом (по любому пути).

Функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, если она определена в самой точке и ее окрестности и $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Для непрерывности функции $f(z)$ в точке z_0 необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были непрерывны в точке (x_0, y_0).

Функция называется непрерывной в некоторой области, если она непрерывна в каждой точке этой области.

2.4. Дифференцирование функции комплексного переменного. Условия Эйлера-Даламбера

Пусть задана функция $f(z)$ в некоторой комплексной области. Придадим z приращение $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Получим приращение функции $\Delta\omega = f(z + \Delta z) - f(z)$. Составим отношение $\dfrac{\Delta\omega}{\Delta z} = \dfrac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$.

Определение. Производной функции $\omega = f(z)$ в комплексной области называется предел отношения приращения функции $\Delta\omega$ к приращению аргумента Δz при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, т. е.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Предполагается, что этот предел имеет одно и то же значение **независимо** от способа стремления приращения аргумента к нулю.

Сформулируем исключительно важное условие дифференцируемости функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Теорема. Если функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки z, причем в этой точке функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы, то для дифференцируемости функции комплексного переменного $f(z)$ в точке z необходимо и достаточно, чтобы в этой точке имели место соотношения $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Эти соотношения называются условиями Эйлера-Даламбера или условиями Коши-Римана. Докажем необходимость этих условий.

Предположим, что существует предел

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Так как этот предел не зависит от направления стремления приращения Δz к нулю, выберем для простоты направления, параллельные осям координат.

1. Предположим, что точка $(z + \Delta z)$ приближается к точке z **по прямой, параллельной действительной оси** OX **.**

В этом случае $\Delta z = \Delta x; i\Delta y = 0$.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}.$$

2. Предположим теперь, что точка $(z + \Delta z)$ приближается к точке z **по прямой, параллельной мнимой оси** OY **.**

В этом случае $\Delta x = 0$; $\Delta z = i \cdot \Delta y$.

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{i \cdot \Delta y} + i \cdot \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{i \cdot \Delta y} =$$

$$= \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Результаты для первого и второго случаев должны быть равными, т. е.

$\frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$; отсюда следует, что $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Полученные равенства являются не только необходимыми, но и достаточными условиями дифференцируемости функции комплексного переменного.

Определение. Функция $f(z)$, дифференцируемая в каждой точке комплексной области, называется **аналитической** в этой области.

Условия Эйлера-Даламбера можно рассматривать как необходимые и достаточные условия аналитичности функции в заданной области. Следует помнить, что под аналитической функцией всегда понимается однозначная функция.

Отметим, что все элементарные функции являются аналитическими за исключением отдельных точек. Например, для tgz исключаются значения z, для которых $\cos z = 0$.

С учетом условий Эйлера-Даламбера производную дифференцируемой функции можно найти по одной из формул:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}; \qquad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}; \qquad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y};$$

Можно доказать, что дифференцирование элементарных функций комплексного переменного можно производить по тем же формулам, по которым дифференцируются соответствующие функции действительного переменного.

Пример. Проверить аналитичность функции $\omega = e^z$ и доказать справедливость формулы $(e^z)' = e^z$.

Решение. По определению $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Действительная часть функции – $u(x, y) = e^x \cos y$, мнимая – $v(x, y) = e^x \sin y$.

Найдем частные производные этих функций:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y.$$

Из полученных результатов видно, что условия аналитичности выполнены.

Производную функции найдем по формуле $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$.

$(e^z)' = e^x \cos y + i \cdot e^x \sin = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$.

2.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Даны комплексные числа $z_1 = -2 + 3i,\ z_2 = 1 + 4i$.

Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $(z_1 + \bar{z}_2)(\bar{z}_1 + z_2)$, $(z_1 + z_2)^2$.

Построить эти числа на комплексной плоскости.

2. Построить области на комплексной плоскости:

$|z| \le 1$,

$|z + 2i| < 1$,

$|z - i - 1| \ge 2$,

$1 \le |z| \le 3$,

$\operatorname{Im} z < -2$,

$|z + 2i + 3| \le 1$,

$1 \le \operatorname{Re} z \le 3$,

$\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{3}$,

$\operatorname{Im} z^2 = 2$.

3. Вычислить: $\frac{(3-2i)^2(2+i)}{6-i} - \left(\frac{(3-i)(1+2i)}{1-i}\right)^2$.

4. Найти действительные корни уравнения:

$(4 + 2i)x + (5 - 3i)y = 13 + i$.

5. Решить уравнение: $z^3 - 8 = 0$.

6. Найти все комплексные числа, удовлетворяющие условию:

$\bar{z} = z^2$.

7. Найти образы точек при указанных отображениях.

$w(z) = z^2, z_0 = -i,$

$w(z) = (z - i)^2, z_0 = 1 - i,$

$w(z) = \frac{\bar{z}}{z}, z_0 = 2 + 3i.$

8. Дана функция $f(z) = z^2 + 2\bar{z}$. Вычислить $f(1 + i)$.

9. Записать в тригонометрической форме комплексные числа:

$z_1 = 1 + \sqrt{3}i;\ z_2 = -1 + i;\ z_3 = 2;\ z_4 = 3i$.

10. Записать в показательной форме числа:

$z_1 = 1 + i;\ z_2 = 2i;\ z_3 = \sqrt{3} + i.$

11. Даны комплексные числа: $z_1 = 3(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$; $z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$. Найти $z_1 z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$. Записать результат в алгебраической форме.

12. Вычислить $\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{10}$, $\left(\sqrt{3} - i\right)^5$.

13. Найти все значения $\sqrt[4]{-1}$. Изобразить корни на комплексной плоскости.

14. Найти: $\sqrt[5]{i}$; $\sqrt[3]{1+i}$; $\sqrt[3]{1 - i\sqrt{3}}$.

15. Дана функция $f(z) = (x^2 - y^2) + i4xy$. Вычислить $f(2-3i)$; $f(3)$; $f(2i)$.

16. Доказать справедливость равенств:

$\frac{e^{z1}}{e^{z2}} = e^{z_1 - z2},$

$(e^z)^n = e^{nz},$

$\sin 2z = 2\sin z\cos z,$

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$

$\cos^2 z - \sin^2 z = \cos 2z$ на комплексной плоскости.

17. Найти $\cos\ 5i$.

18. Найти решение уравнения $\sin z = 0$ на комплексной плоскости.

19. Доказать тождество $ch^2 z - sh^2 z = 1$.

20. Найти действительную и мнимую части числа e^{2-i}, функции e^{z^2}, функции $\cos\ z$.

21. Показать, что функция $f(z)$ является аналитической на всей комплексной плоскости. Найти ее производную в точке z_0.

$f(z)=2z^2+2i,$ $\quad z_0=1-i,$

$f(z)=e^z,$ $\quad z_0=2+i,$

$f(z)=(iz)^3,$ $\quad z_0=2,$

$f(z)=iz^2+3z,$ $\quad z_0=i.$

22. Доказать справедливость формулы: $(\cos z)'=-\sin z$.

23. Показать, что функция $f(z)=z\bar{z}$ дифференцируема только в точке $z=0$.

24. Найти аналитическую функцию $f(z)$ по ее действительной части:

а) $u(x,y)=2e^x\cos y$; б) $v(x,y)=x^2-y^2+2x$, если $f(i)=2i-1$.

2.6. Интегрирование функции комплексного переменного

Пусть в каждой точке некоторой гладкой кривой L с началом в точке z_0 и концом в точке z определена непрерывная функция $f(z)$.

Разобьем кривую L на n частей (элементарных дуг) в направлении от z_0 к z точками $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n = z$. На каждой элементарной дуге $(z_{k-1}, z_k)(k = 1,2,\ldots n)$ выберем произвольную точку C_k и составим интегральную сумму $\sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k$, где $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

Предел такой интегральной суммы при стремлении к нулю длины наибольшей из элементарных дуг, если он существует, называется интегралом от функции $f(z)$ по кривой (по контуру) L и обозначается $\int_L f(z)dz$.

Интеграл существует, если L – гладкая кривая, а $f(z)$ – непрерывная однозначная функция.

Обозначим $f(z) = u + i\cdot v;\ \ z = x + i\cdot y;\ \ dz = dx + i\cdot dy.$

Подставим эти выражения под знак интеграла. Получим

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u + i \cdot v)(dx + i \cdot dy) =$$

$$= \int_L (udx - vdy) + i \cdot (vdx + udy) = \int_L (udx - vdy) + i \cdot \int_L (vdx + udy).$$

Полученная формула показывает, что вычисление интеграла от функции комплексного переменного сводится к вычислению двух криволинейных интегралов от действительных функций действительных переменных.

Свойства интеграла в комплексной области аналогичны свойствам криволинейного интеграла.

Пример. Вычислить $\int_L f(z)dz$, если $f(z) = y + i \cdot x$, контур L – ломаная OAB с вершинами в точках $z_0 = 0, z_A = i, z_B = 1 + i$.

Решение. По условию $f(z) = y + i \cdot x$, следовательно, $u = y$, $v = x$. Искомый интеграл принимает вид:

$$\int_L f(z)dz = \int_L (udx - vdy) + i \cdot \int_L (vdx + udy) = \int_L (ydx - xdy) + i \cdot \int_L (xdx + ydy).$$

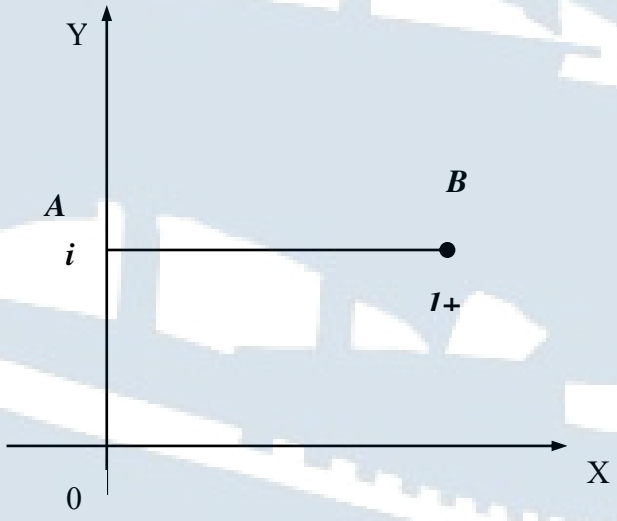


Рис. 6. Контур интегрирования

Разобьем контур интегрирования на две части: OA и AB. Вычислим интеграл по этим контурам.

1) $OA: x=0, dx=0, \ y\in[0,1]$.

$$I_{OA}=\int_L (ydx-xdy)+i\cdot\int_L (xdx+ydy)=\int_0^1 i\cdot y\cdot dy=i\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^1=\frac{i}{2}.$$

2) $AB: y=1, dy=0, \ x\in[0,1]$.

$$I_{AB}=\int_L (ydx-xdy)+i\cdot\int_L (xdx+ydy)=\int_0^1 dx+i\cdot x\cdot dx=(x+i\cdot\frac{x^2}{2})\Big|_0^1=1+\frac{i}{2}.$$

3) $\int_L f(z)dz=I_{OA}+I_{AB}=\frac{i}{2}+1+\frac{i}{2}=1+i.$

Теорема Коши для односвязной области

Если функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области и ее производная непрерывна, то для всех кривых L, соединяющих любые две заданных точки, интеграл $\int_L f(z)dz$ имеет одно и тоже значение.

Доказательство

Мы показали, что $\int_L f(z)dz=\int_L (udx-vdy)+i\cdot\int_L (vdx+udy)$. Необходимым и достаточным условием аналитичности функции являются условия Эйлера-Даламбера (Коши-Римана): $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. Из математического анализа известно, что условиями независимости криволинейного интеграла $\int_L Pdx+Qdy$ от контура интегрирования является равенство: $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$. Справедливость этого равенства подтверждается условиями Эйлера-Даламбера, т. е. криволинейные интегралы $\int_L udx-vdy$ и $\int_L vdx+udy$ не зависят от контура интегрирования, а зависят только от начальной и конечной точек.

Следствие

Если функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области и ее производная непрерывна, то интеграл по любому замкнутому контуру, лежащему в этой области, равен нулю: $\oint_L f(z)dz=0$.

Теорема Коши для многосвязной области

Если функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой многосвязной области, то ее интеграл вдоль границы этой области равен нулю, если обход производить так, чтобы область оставалась с одной стороны (например, слева). $\oint\limits_{L_0} f(z)dz + \oint\limits_{L_1} f(z)dz + \oint\limits_{L_2} f(z)dz = 0$.

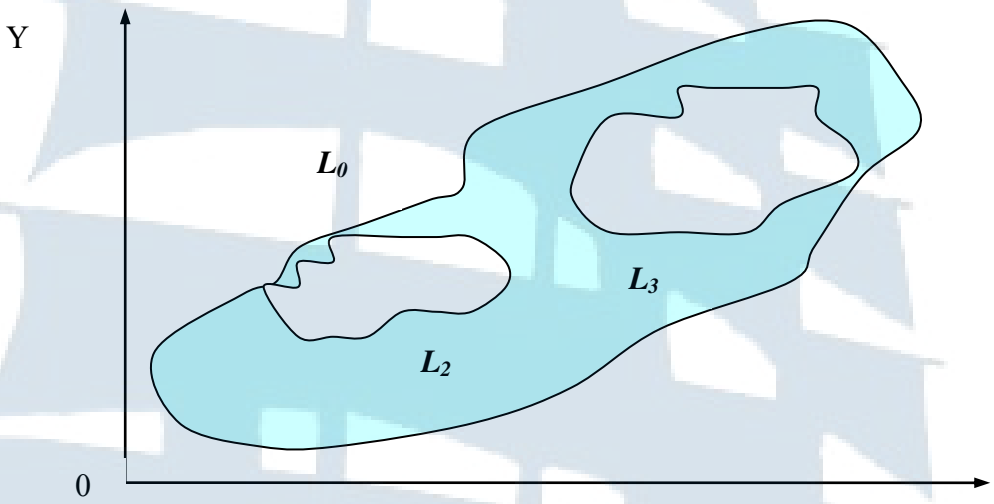


Рис. 7. Область интегрирования

Следствие

Для аналитической функции в многосвязной области интеграл по внешнему контуру равен сумме интегралов по внутренним контурам при условии, что интегралы по внешнему и внутренним контурам берутся в одном направлении.

$$\oint\limits_{L_0} f(z)dz = \oint\limits_{L_1} f(z)dz + \oint\limits_{L_2} f(z)dz.$$

Для аналитической в замкнутой области функции $f(z)$ интеграл от нее не зависит от контура интегрирования, а зависит только от начальной и конечной точек. В этом случае пользуются обозначением: $\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz$. Если зафиксировать точку z_0, а точку z менять, то указанный интеграл будет функцией от z: $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz$. Можно доказать, что для аналитической в замкнутой области функции $f(z)$ функция $F(z)$ также является аналитической, причем

$F'(z) = (\int_{z_0}^{z} f(z)dz)' = f(z)$. Функция $F(z)$ называется первообразной для функции $f(z)$. Совокупность всех первообразных функции $f(z)$ называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается символом: $\int f(z)dz = F(z) + C$. Легко показать, что справедлива и формула Ньютона-Лейбница: $\int_{z_0}^{z} f(z)dz = F(z) - F(z_0)$.

Интегралы от элементарных функций комплексного переменного в области их аналитичности вычисляются с помощью тех же формул и методов, что и в действительном анализе. Например, $\int e^z dz = e^z + C$, $\int \sin z dz = -\cos z + C$.

Интегральная формула Коши

Если функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой, ограниченной контуром L, области и z_0 – любая внутренняя точка области, то $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz$, где контур обходится так, что область остается слева.

Эта формула позволяет вычислить некоторые интегралы, к которым не применима теорема Коши.

Пример. Вычислить по формуле Коши $\int_L \frac{e^z}{z-2} dz$, если L – окружность: а) $|z| = 1$; б) $|z| = 3$.

Решение

а. Точка $z_0 = 2$, в которой подынтегральная функция не является аналитической, лежит вне круга $|z| \le 1$. Поэтому по следствию из теоремы Коши для односвязной области интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю.

б. Точка $z_0 = 2$, в которой подынтегральная функция не является аналитической, лежит внутри круга $|z| \le 3$.

$f(z) = e^z; f(z_0) = f(2) = e^2.$

Литература: [1, глава II, § 1-5]; [2, глава III,V § 28, 29] или [3, глава 1, § 2, 5].

2.7. Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение области на комплексной плоскости. Какая точка называется граничной? Как определяется граница области?

2. Дайте определение степенной функции на комплексной плоскости.

3. Как определяется показательная функция на комплексной плоскости? Сохраняются ли ее свойства? Какое новое свойство она приобретает? Выведите формулу Эйлера. Запишите комплексное число в показательной форме.

4. Как определяются тригонометрические функции $f(x) = \sin x$ *и* $f(x) = \cos x$ на комплексной плоскости?

5. Дайте определение логарифмической функции на комплексной плоскости.

6. Сформулируйте определения предела и непрерывности функции комплексного переменного в точке.

7. Дайте определение производной функции комплексного переменного. Какая функция называется аналитической? Выведите необходимые и достаточные условия аналитичности функции.

8. Как определяется интеграл от функции комплексного переменного?

9. Сформулируйте теоремы Коши для односвязной и многосвязной области и следствия из них.

10. Как применяется формула Коши для вычисления некоторых интегралов?

2.8. Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L z^2 dz$, если контур L:

а) ломаная OAB с вершинами в точках $z_0 = 0, z_A = 1, z_B = 1 + i$;

б) отрезок, соединяющий точки $z_0 = 0, z_1 = 1 + i$.

2. Вычислить интеграл $\int\limits_L (1 + i - 2z) dz$, если контур L:

а) отрезок, соединяющий точки $z_0 = 0, z_1 = -1 + i$;

б) часть параболы $y = x^2$, соединяющей эти точки.

3. Вычислить интеграл $\int\limits_L |z|dz$, если контур L:

а) отрезок, соединяющий точки $z_0 = 0, z_1 = -1 + i$; .

4. Вычислить по формуле Коши:

а) $\int\limits_L \frac{e^{z^2}}{z(z-6)}dz$, если L – окружность:

1) $|z-2| = 1$;

2) $|z-2| = 3$;

б) $\int\limits_L \frac{\sin z}{z^2+4}dz$, если L - $|z+3i| = 3$;

в) $\int\limits_L \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+z}dz$, если L - $|z-1| = \frac{1}{2}$;

г) $\int\limits_L \frac{e^z \cos \pi z}{z^2+2z}dz$, если L - $|z| = 1$.

2.9. Особые точки

Определение. Точки, в которых нарушается аналитичность функции, называются особыми.

Точка z_0 называется **изолированной особой точкой**, если существует окрестность этой точки, в которой функция является аналитической, за исключением самой точки.

Отметим, что это определение справедливо только для односвязной области.

Различают три типа изолированных особых точек.

1. Точка z_0 называется **устранимой особой точкой**, если существует конечный предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = C, но C \neq f(z_0)$.

2. **Полюсом порядка К** называется такая изолированная особая точка z_0, в которой $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) = C \neq 0$. Если $K = 1$, полюс называется простым.

3.Точка z_0 называется **существенно особой точкой**, если при $z \to z_0$ функция $f(z)$ не имеет предела (ни конечного, ни бесконечного).

Пример 1. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$. Точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой, так как

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1, но 1 \neq f(z_0).$$

Пример 2. $f(z) = \dfrac{5}{(z-1)^2(z-2)}$. Точка $z_0 = 1$ является полюсом второго порядка, а точка $z_0 = 2$ является простым полюсом.

Пример 3. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Точка $z_0 = 0$ является существенно особой точкой, так как $\lim\limits_{z \to -0} e^{\frac{1}{z}} = 0$, а $\lim\limits_{z \to +0} e^{\frac{1}{z}} = \infty$.

Задачи для самостоятельного решения

Установить вид особых точек для следующих функций:

1) $f(z) = \dfrac{1-e^z}{2z}$; 2) $f(z) = \dfrac{3}{(z+1)(z^2-4)}$; 3) $f(z) = e^{\frac{1}{3-z}}$.

2.10. Вычеты

Понятие вычета является одним из важнейших понятий теории функций комплексного переменного. Если функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области, то $\oint\limits_{L_0} f(z) \cdot dz = 0$, где L_0 – любой замкнутый контур, лежащий в этой области. Если внутри контура L_0 есть единственная изолированная точка z_0 функции $f(z)$, то этот интеграл, не равен нулю. Значение интеграла не зависит от контура интегрирования. Величина указанного интеграла, умноженная на $\dfrac{1}{2\pi i}$, называется вычетом.

Определение. Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется число, равное $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_0} f(z)\cdot dz$, где L_0 – окружность достаточно малого радиуса с центром в точке z_0, в которой функция является аналитической.

Обозначается вычет: $resf(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_0} f(z)\cdot dz$.

Теорема 1. Вычет функции $f(z)$ относительно устранимой особой точки равен нулю.

Доказательство. Пусть z_0 является устранимой особой точкой. Доопределим функцию $f(z)$ так, чтобы она стала аналитической во всех точках окрестности, ограниченной контуром L_0.

$$\varphi(z)=\begin{cases} f(z) при z\neq z_0 \\ C при z=z_0 \end{cases}.$$

Тогда по теореме Коши $\oint\limits_{L_0}\varphi(z)\cdot dz=0$. На контуре L_0 функция $f(z)=\varphi(z)$. Поэтому и $\oint\limits_{L_0} f(z)\cdot dz=0$.

Следовательно, $resf(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_0} f(z)\cdot dz=0$.

Теорема 2. Если функция $f(z)$ имеет в точке z_0 простой полюс, то $resf(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$.

Доказательство. По определению простого полюса $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=C\neq 0$. Отсюда следует, что в окрестности точки z_0 функция $\varphi(z)=\begin{cases}(z-z_0)f(z) при z\neq z_0 \\ C при z=z_0\end{cases}$ является аналитической. По теореме Коши имеем $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_0}\frac{\varphi(z)}{z-z_0}\cdot dz=\varphi(z_0)=C$. Принимая во внимание то, что на контуре L_0 $\varphi(z)=(z-z_0)f(z)$, получим

$$resf(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_0} f(z)\cdot dz=\varphi(z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

Пример. Найти вычет функции $f(z)=\dfrac{z^3-1}{(z+2)^2(z-3)}$ относительно особой точки $z_0=3$.

Решение. Заданная точка является простым полюсом. Поэтому

$$resf(z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\lim_{z\to 3}(z-3)\frac{z^3-1}{(z+2)^2(z-3)}=\lim_{z\to 3}\frac{z^3-1}{(z+2)^2}=\frac{26}{25}.$$

Теорема 3. Если функция $f(z)$ имеет в точке z_0 полюс порядка К, то $resf(z_0)=\dfrac{1}{(K-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{d^{(K-1)}}{dz^{(K-1)}}(z-z_0)^K f(z)$.

Например, для полюса второго порядка эта формула принимает вид: $resf(z_0)=\dfrac{1}{(2-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{d}{dz}(z-z_0)^2 f(z)$.

Для полюса третьего порядка $resf(z_0)=\dfrac{1}{(3-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{d^2}{dz^2}(z-z_0)^3 f(z)$.

Пример. Найти вычет функции $f(z)=\dfrac{ze^z}{(z-1)^3}$ относительно точки $z_0=1$.

Решение. $z_0=1$ – полюс третьего порядка. Поэтому

$$resf(z_0)=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^2}{dz^2}(z-z_0)^3 f(z)=\frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}(z-1)^3\frac{ze^z}{(z-1)^3}=\frac{1}{2}\lim_{z\to 1}(ze^z)''.$$

Найдем производную второго порядка данной функции.

$(ze^z)'=e^z+ze^z$,

$(ze^z)''=(e^z+ze^z)'=e^z(2+z)$.

С учетом этого результата получим:

$$resf(z_0)=\frac{1}{2}\lim_{z\to 1}(ze^z)''=\frac{1}{2}\lim_{z\to 1}e^z(2+z)=\frac{3}{2}e^2.$$

Теорема 4. Основная теорема о вычетах (теорема Коши, 1825 г.).

Если функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой области D, ограниченной контуром L, кроме конечного числа изолированных особых точек внутри области D, то интеграл по замкнутому кон-

туру L равен произведению числа $2\pi i$ на сумму вычетов относительно особых точек, лежащих внутри контура L.

Доказательство. По теореме Коши для многосвязной области

$\oint\limits_L f(z)dz = \oint\limits_{L_1} f(z)dz + \oint\limits_{L_2} f(z)dz + \ldots + \oint\limits_{L_n} f(z)dz$, где $z_1, z_2, \ldots z_n$ – особые точки; $L_1, L_2, \ldots L_n$ – окружности достаточно малых радиусов с центрами в этих точках. Применяя определение вычетов, каждый интеграл правой части можно заменить произведением $2\pi i$ на соответствующий вычет. Получим:

$$\oint\limits_L f(z)dz = 2\pi i(resf(z_1) + resf(z_2) + \ldots resf(z_n)).$$

Пример. Вычислить $I = \oint\limits_L \frac{\sin z}{(z+1)^2(z-i)}dz$, где L – окружность $|z| = 4$.

Решение. Подынтегральная функция имеет две особые точки: $z = -1$ – полюс 2 порядка и $z = i$ – простой полюс. По основной теореме о вычетах имеем: $I = 2\pi i(resf(-1) + resf(i))$.

1) $resf(-1) = \frac{1}{(2-1)!}\lim\limits_{z\to -1}\frac{d}{dz}(z+1)^2\frac{\sin z}{(z+1)^2(z-i)} = \lim\limits_{z\to -1}(\frac{\sin z}{z-i})' = \lim\limits_{z\to -1}\frac{\cos z\cdot(z-i) - \sin z}{(z-i)^2} =$

$= \frac{\sin 1 - \cos 1 - i\cos 1}{(1+i)^2} = \frac{\sin 1 - \cos 1 - i\cos 1}{2i}$.

2) $resf(i) = \lim\limits_{z\to i}(z-i)\frac{\sin z}{(z+1)^2(z-i)} = \frac{\sin i}{(i+1)^2} = \frac{\sin i}{2i}$.

3) $I = 2\pi i(\frac{\sin 1 - \cos 1 - i\cos 1}{2i} + \frac{\sin i}{2i}) = \pi(\sin 1 - \cos 1 - i\cos 1 + \sin i)$.

2.11. Задачи для самостоятельного решения

1. Определить вычеты функции относительно ее особых точек:

а) $f(z) = \frac{z+3}{(z-1)(z+1)^2}$; б) $f(z) = \frac{ze^z}{(z-1)^3}$; в) $f(z) = \frac{e^z}{z^2+1}$;

г) $f(z) = \frac{5}{z^2-4}$; д) $f(z) = \frac{z^3+1}{(z-3)(z+2)^2}$.

2. С помощью вычетов вычислить интегралы:

а) $\oint\limits_L \frac{\sin z}{z(z-\frac{\pi}{2})}dz$, где L : $x^2+y^2=4$;

б) $\oint\limits_L \frac{e^z}{(z^2+4)(z^2-1)}dz$, где L : $|z|=\frac{3}{2}$;

в) $\oint\limits_L \frac{\sin \pi z}{(z-1)^2(z-2)^2}dz$, где L : $x^2+y^2=\frac{9}{4}$;

г) $\oint\limits_L \frac{1}{z^2+1}dz$, где L : $|z-i|=1$;

д) $\oint\limits_L \frac{1}{z(z+2)(z+4)}dz$, где L : $1)|z|=1, 2)|z|=3, 3)|z|=5$;

е) $\oint\limits_L \frac{1}{z^3(z^2+4)}dz$, где L : $1)|z|=1, 2)|z+2i|=3$.

ТЕМА 3. РЯДЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

3.1. Числовые ряды

Рассмотрим ряд с комплексными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots, \qquad (1)$$

где $z_n = x_n + i \cdot y_n$.

Ряд (1) может быть представлен в виде суммы двух рядов с действительными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n + iy_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \cdot \sum_{n=1}^{\infty} y_n . \qquad (2)$$

Очевидно, ряд (1) сходится тогда и только тогда, тогда сходятся оба ряда в сумме (2).

Ряд (1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| ..$$

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}$.

Решение. $\cos\ z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $z = in$; $\cos\ in = \frac{e^{i^2 n} + e^{-i^2 n}}{2} = \frac{e^{-n} + e^{n}}{2}$.

Преобразуем данный ряд, учитывая полученный результат.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n} + e^{n}}{2 \cdot 2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{2^n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n}}{2^n} .$$

Таким образом, задача сводится к исследованию на сходимость двух рядов с действительными членами. Первый ряд сходится по признаку Даламбера, а второй ряд расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости. Данный ряд расходится.

3.2. Степенные ряды

Степенным рядом в комплексной плоскости называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots, \quad (3)$$

где c_0, $c_1, \ldots c_n$ – комплексные числа – коэффициенты ряда, z, z_0 – комплексные числа.

Если $z_0=0$, то ряд принимает вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots + c_n z^n + \ldots. \quad (4)$$

Областью сходимости ряда называется множество всех значений z, при которых данный ряд сходится. Область сходимости степенного ряда определяется ***теоремой Абеля***.

Теорема. Если степенной ряд (4) сходится в точке $z_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях z, удовлетворяющих условию $|z| < |z_0|$.

Если степенной ряд (4) расходится в точке z_1, то он расходится при любом значении z, для которого $|z| > |z_1|$.

Из теоремы Абеля следует, что существует такое число R, что при всех z, удовлетворяющих условию $|z| < R$, ряд сходится, а при $|z| > R$ – расходится.

Таким образом, область сходимости степенного ряда есть круг радиуса R. Внутри круга ряд сходится, вне круга – расходится. На окружности |z|=R могут находиться как точки сходимости, так и точки расходимости. Если $R=0$, то степенной ряд (4) сходится в одной точке z=0, если $R=\infty$, то ряд сходится на всей комплексной плоскости. Радиус сходимости степенного ряда можно определить по формулам

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \quad или \quad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}},$$ получаемым после применения признака Даламбера или алгебраического признака Коши.

Пример 1. Определить радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n \cdot 2^n}$.

Решение. $c_n = \dfrac{1}{n \cdot 2^n}$, $c_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}$,

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) \cdot 2^{n+1}}{n \cdot 2^n} = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 2 \cdot$$

Ряд сходится в круге |z|<2.

Пример 2. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-i)^n}{\sqrt{n}}$ и исследовать его сходимость в точках $z_1 = 2$ $z_2 = -0{,}5i$.

Решение. $c_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $c_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1$.

Ряд сходится в круге $|z-i| < 1$ (круг радиуса 1 с центром в точке $z = i$).

В точке $z_1 = 2$ ряд расходится, так как она находится вне области сходимости, а в точке $z_2 = 0{,}5i$ ряд сходится.

3.3. Ряд Тейлора

В теории степенных рядов функций действительного аргумента мы показали, что каждую функцию f(x), имеющую производные любого порядка в заданной точке x_0, можно представить в виде ряда Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots, \quad (5)$$

который сходится к данной функции, если его остаток стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности. Так как каждая функция f(z), аналитическая в точке z_0, имеет в этой точке производные любого порядка, то, очевидно, ее можно представить в виде суммы ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \quad (6)$$

который сходится в некотором круге $|z-z_0| < R$.

Возьмем произвольную точку z внутри данного круга и проведем окружность с центром в точке z_0 и радиусом r < R так, чтобы точка z находилась внутри круга $|z-z_0| < r$. Так как функция f(z) является аналитической в круге $|z-z_0| < r$ и на его границе L , то значение функции в точке z можно найти по формуле Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \cdot i} \oint_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \ , \tag{7}$$

где ξ произвольная точка на окружности L. Напомним, что, если функция f(z) является аналитической в замкнутой области, ограниченной контуром L, то ее значение в любой внутренней точке z_0 этой области можно вычислить по формуле Коши:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \cdot i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz \, .$$

Контур L обходится против часовой стрелки. Переменную z мы обозначили через ξ. Если функция f(z) является аналитической в точке z, то она бесконечное число раз дифференцируема в этой точке. Путем последовательного дифференцирования формулы (7) по переменной z получим:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \cdot i} \oint_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \, . \tag{8}$$

Тогда коэффициенты ряда (6) можно найти по формуле:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi \cdot i} \oint_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi ,$$

где L произвольная окружность с центром в точке z_0 , лежащая внутри круга сходимости.

Вывод. Любая аналитическая в круге $|z-z_0| < R$ функция *f(x)* может быть единственным образом разложена в этом круге в степенной ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n , \tag{9}$$

коэффициенты которого определяются формулой

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi \cdot i} \oint_{L} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \text{ (n=0,1,2,…)}, \qquad (10)$$

где L – произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащая внутри круга сходимости.

Рассмотрим теперь ряд, расположенный по целым отрицательным степеням $(z-z_0)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}. \qquad (11)$$

Пусть в ряде (11) $\frac{1}{z - z_0} = \omega$, то ряд принимает вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \cdot \omega^n . \qquad (12)$$

Преобразование $\frac{1}{z - z_0} = \omega$ каждой конечной точке z $(z \neq z_0)$ ставит в соответствие точку ω; точке z_0 – бесконечно удаленную точку $\omega = \infty$; точке $z = \infty$ – точку $\omega = 0$. Отсюда следует: если $|\omega| < R$ круг сходимости ряда (12), то область $|z-z_0| > 1/R = r$ является областью сходимости ряда (11).

В частности, если $R = \infty$ (ряд (12) сходится на всей комплексной плоскости), то $r = 0$ и ряд (11) сходится на всей плоскости, кроме точки $z = z_0$. Если $R = 0$, то $r = \infty$ и ряд (11) не сходится ни в одной конечной точке.

3.4. Ряд Лорана

Рядом, обобщающим понятия ряда, расположенного только по целым неотрицательным степеням $(z-z_0)$ (9) и ряда, расположенного по целым отрицательным степеням $(z-z_0)$ (11), является ряд, представляющий сумму этих рядов:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n . \qquad (13)$$

Определение. Ряд (13), где z_0 – фиксированная точка комплексной плоскости; z – переменная точка; c_n – некоторые комплексные числа (коэффициенты ряда), называется рядом Лорана.

Ряд (13) сходится, если сходятся ряды (9) и (11). Областью сходимости ряда (9) является круг с центром в точке z_0 и радиусом R: $|z-z_0| < R$. Ряд (11) сходится в области $|z-z_0| > r$.

Таким образом, областью сходимости ряда (13) является кольцо: $r < |z-z_0| < R$.

Сформулируем без доказательства следующую теорему.

Теорема. Всякая аналитическая в кольце $r < |z-z_0| < R$ функция $f(z)$ может быть разложена в этом кольце в ряд Лорана $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, коэффициенты которого определяются формулой:

$$c_n = \frac{1}{2\pi \cdot i} \oint \frac{f(\xi)}{L(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{14}$$

где L – произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащая внутри данного кольца. Контур L обходится в положительном направлении.

Ряд Лорана (13) состоит из двух частей.

Первое слагаемое, т. е. ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ называется правильной частью ряда Лорана. Этот ряд сходится к функции $f_1(z)$ внутри круга $|z-z_0| < R$.

Второе слагаемое $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ называется главной частью ряда Лорана. Этот ряд сходится к функции $f_2(z)$ вне круга $|z-z_0| > r$.

Ряд Лорана сходится к функции $f_1(z) + f_2(z)$ в кольце $r < |z-z_0| < R$. При этом кольцо может вырождаться в круг с выколотым центром: $0 < |z-z_0| < R$ или во внешнюю часть круга: $r < |z-z_0| < \infty$.

Использование формулы (14) для вычисления коэффициентов ряда Лорана приводит к громоздким вычислениям. Поэтому на практике пользуются известными разложениями элементарных функций и геометрической прогрессией:

$$\frac{b_1}{1-q} = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + \ldots, \quad |q| < 1;$$

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots, \quad |z| < \infty;$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots, \quad |z| < \infty;$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots, \quad |z| < \infty;$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \ldots, \quad |z| < 1.$$

Замечание. Напомним, что вычетом функции f(z) в изолированной особой точке z_0 называется $\operatorname{Re} s(z_0) = \frac{1}{2\pi \cdot i} \oint_L f(z)dz$, где L – окружность с центром в точке z_0, лежащая в области аналитичности функции. Если в формуле (14) положить n = -1, получим

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi \cdot i} \oint_L f(z)dz, \text{ т. е. } c_{-1} = \operatorname{Re} s(z_0).$$

3.5. Примеры разложения функций в ряд Лорана

Пример 1. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию $f(z) = \frac{1}{3z-4}$ в окрестности точки $z = 0$.

Решение. Представим функцию *f(z)* в виде

$$f(z) = \frac{1}{3z-4} = -\frac{1}{4-3z} = -\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{3z}{4}}.$$

В окрестности точки $z = 0$ выполняется неравенство $|3z/4| < 1$. Поэтому полученную дробь можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = -1/4$ и знаменателем $q = 3z/4$.

Получим: $f(z) = \frac{1}{3z-4} = -\frac{1}{4} - \frac{3z}{16} - \frac{9z^2}{64} - \ldots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} \cdot z^{n-1}}{4^n}$.

Полученное разложение содержит только правильную часть ряда Лорана. Из неравенства $|3z/4| < 1$ заключаем, что областью сходимости этого ряда является круг $|z| > 4/3$.

Пример 2. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию $f(z) = \dfrac{1}{3z-4}$ в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$.

Решение. Представим данную функцию в виде

$$f(z) = \frac{1}{3z-4} = \frac{\frac{1}{3z}}{1-\frac{4}{3z}}.$$

В окрестности точки $z = \infty$ выполняется неравенство $|4/3z| < 1$. Поэтому данную функцию можно представить в виде суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1/3z$ и знаменателем $q = 4/3z$.

$$f(z) = \frac{1}{3z-4} = \frac{1}{3z} + \frac{4}{9z^2} + \frac{16}{27z^3} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{3^n z^n} \quad .$$

В полученном разложении нет правильной части, оно содержит только главную часть. Ряд сходится в области $|4/3z| < 1$ или $|z| > 3/4$.

Пример 3. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию $f(z) = \dfrac{1}{z^2-3z+2}$ в областях: 1) $|z| < 1$; 2) $1 < |z| < 2$; 3) $|z| > 2$.

Решение

1. Пусть $|z| < 1$. Данная функция имеет две особые точки: $z = 1$ и $z = 2$.

В круге $|z| < 1$ она является аналитической. Разложим функцию на простейшие дроби: $f(z) = \dfrac{1}{z^2-3z+2} = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1}$.

В рассматриваемом круге полученные дроби можно представить в виде суммы сходящихся геометрических прогрессий:

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}}+\frac{1}{1-z}=$$

$$=-\frac{1}{2}(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+...+\frac{z^{n-1}}{2^{n-1}}+...)+\frac{1}{2}(1+z+z^2+...+z^{n-1}+...).$$

Ряд Лорана содержит только правильную часть:

$$f(z)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^2+...+\frac{2^{n-1}-1}{2^n}z^{n-1}+...\,.$$

2. Пусть $1<|z|<2$ (кольцо, образованное окружностями радиуса 1 и 2).

Принимая во внимание указанное неравенство, можно записать

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}}-\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}=$$

$$=-\frac{1}{2}(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+...+\frac{z^{n-1}}{2^{n-1}}+...)-(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+...+\frac{1}{z^n}+...)\ .$$

Первый ряд сходится при $|z|<2$, второй – при $|z|>1$. Оба ряда сходятся в кольце $1<|z|<2$.

Итак, $f(z)=-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{2^{n-1}}\quad-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$.

Отметим, что ряд Лорана имеет для одной и той же функции разный вид для разных областей.

3. Пусть $|z|>2$.

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{2}{z}}-\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}=$$

$$=(\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{4}{z^3}+...+\frac{2^{n-1}}{z^n}+...)-(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+...+\frac{1}{z^n}+...),$$

$$f(z)=\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^3}+...+\frac{2^n-1}{z^{n+1}}+...\ .$$

Пример 4. Разложить функцию $f(z)$ = 1/z-3 в ряд Лорана по степеням $(z\text{-}1)$ (в окрестности точки $z = 1$).

Решение. Данная функция является аналитической в окрестности точки $z = 1$. Представим ее в виде

$$f(z)=\frac{1}{z-3}=\frac{1}{(z-1)-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}.$$

Полученную дробь можно рассматривать как сумму геометрической прогрессии с первым членом b_1=1 и знаменателем $q=\frac{z-1}{2}$. Прогрессия будет сходиться, если $|q|=\left|\frac{z-1}{2}\right|\prec 1\Rightarrow|z-1|\prec 2$, т. е. в круге с центром в точке $z = 1$ и радиусом 2.

$$f(z)=\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}=-\frac{1}{2}(1+\frac{z-1}{2}+\frac{(z-1)^2}{4}+\ldots=-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^n}.$$

Пример 5. В окрестности точки z = 3 разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\cos\frac{1}{z-3}$.

Решение. Используем разложение:

$\cos\omega=1-\frac{\omega^2}{2!}+\frac{\omega^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{\omega^{2n}}{(2n)!}+\ldots,$ справедливое на всей комплексной плоскости. Положим в этом разложении $\omega=\frac{1}{z-3}$. Получим $\cos\frac{1}{z-3}=1-\frac{1}{(z-3)^2\,2!}+\frac{1}{(z-3)^4\,4!}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{(z-3)^{2n}(2n)!}+\ldots.$

Это разложение справедливо для любой точки комплексной плоскости z ≠ 3, т. е. «выколота» одна точка $z = 3$. Полученное «кольцо» можно определить следующим соотношением: 0 < |z-3| < ∞.

Пример 6. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\frac{2z+3}{z^2-3z+2}$ в окрестности ее особых точек.

Решение. Особые точки этой функции $z = 1$, $z = 2$.

Представим функцию в виде $\dfrac{2z+3}{z^2-3z+2} = -\dfrac{5}{z-1} + \dfrac{7}{z-2}$.

1. Разложим данную функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z = 1$, т. е. по степеням $(z-1)$.

$$f(z) = -\frac{5}{z-1} + \frac{7}{z-2} = -\frac{5}{z-1} - \frac{7}{1-(z-1)} = -\frac{5}{z-1} - 7(1+(z-1)+(z-1)^2+(z-1)^3+...).$$

Это разложение справедливо в кольце $0 < |z-1| < 1$.

2. Разложим теперь функцию в окрестности точки z = 2.

$$f(z) = \frac{7}{z-2} - \frac{5}{z-1} = \frac{7}{z-2} - \frac{5}{1+(z-2)} = \frac{7}{z-2} - 5(1-(z-2)+(z-2)^2-(z-2)^3+...).$$

$0 < |z-2| < 1$.

3.6. Изолированные особые точки и ряды Лорана в окрестности этих точек

1. Пусть z_0 устранимая особая точка. Тогда существует конечный предел

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = C \neq f(z_0).$$

Доопределив функцию в точке z_0 (положим $f(z_0) = C$), получим аналитическую функцию, для которой разложение в ряд Лорана не содержит отрицательных степеней. Можно дать следующее определение.

Определение. Если ряд Лорана не содержит главной части, т. е. в ряде нет членов с отрицательными степенями, то точка z_0 является устранимой особой точкой.

Пример. Функция $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ имеет устранимую особую точку z = 0. Разложим ее в ряд Лорана в окрестности этой точки.

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\sin z = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ...\right),$$

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - ...\,.$$

Этот ряд сходится в точке $z_0 = 0$. Его сумма равна 1. Поэтому, полагая $f(0) = 1$, мы получаем аналитическую функцию.

2. Пусть z_0 полюс порядка κ, т. е. $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) = C \neq 0$.

Для функции $\varphi(z) = (z - z_0)^k f(z)$ точка z_0 является устранимой особой точкой. Тогда

$$\varphi(z) = (z - z_0)^k f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) +$$
$$+ c_2(z - z_0)^2 + \ldots + c_k(z - z_0)^k + c_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \ldots .$$

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \varphi(z) = \frac{c_0}{(z - z_0)^k} + \frac{c_1}{(z - z_0)^{k-1}} +$$
$$+ \frac{c_2}{(z - z_0)^{k-2}} + \ldots + c_k + c_{k+1}(z - z_0) + c_{k+2}(z - z_0)^2 + \ldots .$$

Таким образом, если z_0 – полюс, то разложение функции в ряд Лорана содержит конечное число членов с отрицательными степенями.

Определение. Если ряд Лорана содержит в главной части конечное число членов, т. е. членов с отрицательными степенями, то точка z_0 является полюсом.

Пример. Функция $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)^3}$ имеет в точке $z = 1$ полюс третьего порядка. Разложим ее в ряд Лорана в окрестности этой точки.

$$\frac{e^z}{(z-1)^3} = \frac{e \cdot e^{z-1}}{(z-1)^3} = \frac{e}{(z-1)^3}\left(1 + \frac{z-1}{1!} + \frac{(z-1)^2}{2!} + \frac{(z-1)^3}{3!} + \frac{(z-1)^4}{4!} + \frac{(z-1)^5}{5!} + \ldots\right)$$

$$\frac{e^z}{(z-1)^3} = e \cdot \left(\frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{(z-1)^2 1!} + \frac{1}{(z-1)2!} + \frac{1}{3!} + \frac{(z-1)}{4!} + \frac{(z-1)^2}{5!} + \ldots\right).$$

Видим, что главная часть ряда Лорана содержит три члена.

3. Пусть z_0 существенно особая точка.

Пример. Функция $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ имеет существенно особую точку $z=0$. Разложение в ряд Лорана этой функции для всех $z \neq 0$ имеет вид:

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{3!\,z^3}+\ldots+\frac{1}{n!\,z^n}+\ldots.$$

Разложение содержит в своей главной части бесконечное множество членов.

Определение. Если ряд Лорана содержит в своей главной части бесконечно много членов с отрицательными степенями, то z_0 является существенно особой точкой.

3.7. Задачи для самостоятельного решения

1. Исследовать на сходимость следующие ряды.

1.1. $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^2}$.

1.2. $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot\sin in}{3^n}$.

2. Найти радиусы сходимости следующих рядов.

2.1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{in}\cdot z^n$. Ответ: R = 1.

2.2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+i)^n\cdot z^n$. Ответ: R = 1/√2.

2.3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{1-i})^n$. Ответ: R = √2.

2.4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+i)^n\cdot z^n$. Ответ: R = 1.

3. Найти область сходимости ряда.

3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{z^n}$. Ответ: |z| > √2.

3.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n (z+1)^n}$. Ответ: |z| > 1/4.

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n}$. Ответ: |z| > 5.

4. Разложить в ряд Лорана следующие функции и найти область сходимости полученных рядов.

4.1. $f(z) = \frac{1}{2z-5}$ в окрестности точки z = 0.

4.2. $f(z) = \frac{1}{2z-5}$ в окрестности точки z = ∞.

4.3. $f(z) = \sin(2z+1)$ в окрестности точки z = -1.

4.4. $f(z) = \cos z$ в окрестности точки z = $-\frac{\pi}{4}$.

4.5. $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$:

а) в окрестности точки z = 1;
б) в окрестности точки z = ∞;
в) в кольце 1 < |z| < 3.

4.6. $f(z) = \frac{z^2}{1-z}$:
а) в окрестности точки z = 0;
б) в окрестности точки z = ∞.

4.7. $f(z) = z^2 \cos\frac{1}{z}$ в окрестности точки z = 0.

4.8. $f(z) = \frac{2}{z^2-1}$ в кольце 1 < |z+2| < 3.

4.9. $f(z) = \frac{z+2}{z^2-4z+3}$ в кольце 2 < |z-1| < ∞.

4.10. $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ в кольце 0 < |z-3| < 2.

ТЕМА 4. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Преобразование Лапласа. Оригиналы и их изображения. Свойства преобразования Лапласа. Таблица оригиналов и изображений. Нахождение оригиналов по заданным изображениям в простейших случаях. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и систем дифференциальных уравнений.

Методы операционного исчисления с успехом применяются в инженерной практике при изучении переходных явлений в электрических цепях, в расчетах различных систем автоматического регулирования процессов и т. д. Правила операционного исчисления созданы английским инженером – электриком О. Хевисайдом (1850-1925) без достаточно строгого математического обоснования. Однако эти правила позволили легкими и эффективными приемами находить решения дифференциальных уравнений, которые получались при изучении явлений в различных областях техники. В настоящее время операционное исчисление является самостоятельной отраслью математического анализа.

Методы операционного исчисления предполагают следующую схему решения задач.

Допустим, что необходимо найти решение заданного дифференциального уравнения. Реализуем следующий алгоритм:

1. От искомых функций переходят к некоторым другим функциям – их изображениям. Определяют изображения всех составляющих данного уравнения.
2. Составляют вспомогательное, так называемое операторное, уравнение, из которого легко находят изображение неизвестной функции.
3. Получив результат при действиях над изображениями, возвращаются к самим функциям.

Хорошей аналогией с операционным исчислением может служить применение логарифмов к вычислению значений выражений.

В качестве преобразования, позволяющего перейти от функции к ее изображению, будем применять преобразование Лапласа.

4.1. Преобразование Лапласа. Оригиналы и их изображения

Пусть $f(t)$ – действительная функция действительного переменного. Поставим ей в соответствие функцию комплексной переменной p следующим образом:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt.$$

Функция $F(p)$ называется **изображением** функции $f(t)$. Интеграл, стоящий в правой части равенства (1), называется **интегралом Лапласа**. Нахождение изображения $F(p)$ для данной функции $f(t)$ называется **преобразованием Лапласа.** Интеграл (1) является несобственным и существует не для всех функций$f(t)$. Поэтому на функцию $f(t)$ накладывают определенные ограничения и называют ее при этом оригиналом.

Определение. Функцией-оригиналом называется функция $f(t)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $f(t) \equiv 0$ при $t \prec 0$;

2) при $t \succ 0$ функция $f(t)$ может иметь на каждом конечном отрезке лишь конечное число точек разрыва первого рода;

3) при $t \to \infty$ функция $f(t)$ имеет ограниченную степень роста, т. е. существуют такие числа $M \succ 0$ и $s_0 \succ 0$, что для всех t будет выполняться неравенство $|f(t)| \prec M \cdot e^{s_0 \cdot t}$. Это значит, что модуль функции $f(t)$ не может возрастать быстрее показательной функции. Число s_0 называется показателем роста функции. Если $s_0 = 0$, функция называется ограниченной.

Требования, предъявляемые к функции $f(t)$, вполне объяснимы с точки зрения физики. Обычно t – время, наблюдения начинаются с момента $t = 0$. Отметим, что на основании пункта (2) оригиналами не могут быть функции, которые при некоторых значениях обращаются в бесконечность. Например, $\frac{1}{t-2}$; tgt и др.

Для оригинала и изображения применим сокращенные обозначения:

$f(t) \div F(p)$, где $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$.

Можно показать, что интеграл Лапласа сходится абсолютно для всех значений комплексной переменной p, удовлетворяющих условию $Re\, p \succ s_0$, где s_0 – показатель степени роста оригинала, т. е. сходится в полуплоскости $s \succ s_0$.

Пример. Найти изображение показательной функции $f(t) = e^{at}$.

Решение. Данная функция является оригиналом. По определению

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}dt = \int_0^\infty e^{at}\cdot e^{-pt}dt = \int_0^\infty e^{t(a-p)}dt =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(p-a)t}dt = -\lim_{b\to\infty}\frac{1}{p-a}e^{-(p-a)t}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{p-a} - \frac{e^{-(p-a)b}}{p-a}\right) = \frac{1}{p-a},$$

если $\operatorname{Re}\ (p-a) \succ 0$.

Таким образом, $e^{at} \div \dfrac{1}{p-a}$.

Пример. Найти изображение единичной функции $f(t) = 1 (t \succ 0)$.

Решение. Данная функция является оригиналом. Поэтому

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\cdot 1dt = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^b\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{p}e^{-pb} + \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p}.$$

Таким образом, $1 \div \dfrac{1}{p}$.

Пример. Найти изображение функции $f(t) = \cos t$.

Решение. Данная функция является оригиналом. Поэтому

$$F(p) = \int_0^\infty \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}e^{-pt}dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty (e^{(i-p)t} + e^{(-i-p)t})dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{p+i+p-i}{p^2-i^2} = \frac{p}{p^2+1}, \qquad \text{где } (\operatorname{Re} p \succ 0).$$

Таким образом: $\cos t \div \dfrac{p}{p^2+1}$.

4.2. Свойства преобразования Лапласа

1. Свойство линейности

Если $f_1(t) \div F_1(p)$ и $f_2(t) \div F_2(p)$, то при любых комплексных постоянных C_1 и C_2 справедливо соотношение

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \div C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p).$$

Свойство вытекает из основных свойств интеграла. Оно говорит о том, что изображение суммы нескольких слагаемых равно сумме изображений отдельных слагаемых, при этом постоянный множитель можно выносить за знак изображения.

Пример. Пользуясь свойством линейности, найти изображение функции $f(t) = \sin t$.

Решение. $\sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \div \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{p-i} - \dfrac{1}{p+i}\right) = \dfrac{1}{p^2+1}$.

2. Теорема подобия. Если $f(t) \div F(p)$, то для любого постоянного $a \succ 0$ справедливо соотношение $f(at) \div \dfrac{1}{a} F(\dfrac{p}{a})$, т.е. умножение аргумента оригинала на положительное число приводит к делению изображения и его аргумента на это число.

Доказательство. По определению имеем $f(at) \div \int\limits_0^\infty f(at) e^{-pt} dt$.

Заменим $at = u \Rightarrow t = \dfrac{u}{a} \Rightarrow dt = \dfrac{du}{a}$; при $t = 0$ $u = 0$, при $t = \infty$ $u = \infty$. Следовательно,

$$f(at) \div \frac{1}{a} \int\limits_0^\infty f(u) e^{-\frac{p}{a}u} du = \frac{1}{a} F(\frac{p}{a}),$$ что и требовалось доказать.

Пример. Найти изображение функции $f(t) = \cos at$.

Решение. Мы показали, что $\cos t \div \dfrac{p}{p^2+1}$. По теореме подобия имеем $\cos at \div \dfrac{1}{a} \dfrac{\frac{p}{a}}{\frac{p^2}{a^2}+1} = \dfrac{p}{p^2+a^2}$.

3. Теорема запаздывания (оригинала). Если $f(t) \div F(p)$, то для любого положительного τ справедливо соотношение $f(t-\tau) \div e^{-p\tau} \cdot F(p)$, т. е. запаздывание оригинала на положительную величину τ приводит к умножению изображения функции $f(t)$ на величину $e^{-p\tau}$.

Доказательство. Найдем изображение функции

$$f(t-\tau) \div \int_0^\infty e^{-pt} f(t-\tau)dt = \int_0^\tau e^{-pt} f(t-\tau)dt + \int_\tau^\infty e^{-pt} f(t-\tau)dt.$$

Первый интеграл равен нулю, так как $f(t-\tau)=0$ при $t \prec \tau$, во втором интеграле сделаем замену переменной.

$$f(t-\tau) \div \int_\tau^\infty e^{-pt} f(t-\tau)dt = \begin{vmatrix} t-\tau = u \\ t = u+\tau \\ dt = du \\ u_1 = 0, u_2 = \infty \end{vmatrix} = \int_0^\infty e^{-p(u+\tau)} f(u)du = e^{-p\tau} \int_0^\infty e^{-pu} f(u)du =$$

$= e^{-p\tau} F(p)$, что и требовалось доказать.

Пример. Найти изображение функций $e^{t-\tau}; \sin(t-\tau); \cos(t-\tau)$.

Решение. $e^t \div \dfrac{1}{p-1}$; $\quad e^{t-\tau} \div \dfrac{e^{-p\tau}}{p-1}$;

$\sin t \div \dfrac{1}{p^2+1}$; $\quad \sin(t-\tau) \div \dfrac{e^{-p\tau}}{p^2+1}$;

$\cos t \div \dfrac{p}{p^2+1}$; $\quad \cos(t-\tau) \div \dfrac{e^{-p\tau} \cdot p}{p^2+1}$;

Теорему запаздывания удобно применять при отыскании изображений функций, заданных несколькими аналитическими выражениями.

Функция $1(t-\tau) = \begin{cases} 0, если t \prec \tau \\ 1, если t \succ \tau \end{cases}$ называется обобщенной единичной функцией. Так как $1(t) \div \dfrac{1}{p}$, то $1(t-\tau) \div \dfrac{1}{p} e^{-p\tau}$.

С помощью этой функции запаздывающую функцию можно представить в виде $\varphi(t) = f(t-\tau)1(t-\tau)$.

Пример. Найти изображение функции $f(t) = \begin{cases} 0, если t \prec 0 \\ 1, если 0 \prec t \prec 3 \\ 0, если t \succ 3 \end{cases}$.

Решение. Данная функция равна нулю при $t \prec 0$. В момент времени $t = 0$ «включается» функция, равная 1, а в момент $t = 3$ она «снимается». С помощью единичной функции можно записать:

$$f(t) = 1 \cdot 1(t) - 1 \cdot 1(t-3) \div \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-3t}.$$

Пример. Найти изображение функции $f(t) = \begin{cases} 0, если t \prec 0 \\ t+1, если 0 \prec t \prec 1 \\ 3t, если 1 \prec t \prec 4 \\ 0, если t \succ 4 \end{cases}$.

Решение. Функция $f(t) = 0$ при $t \prec 0$. В момент времени $t = 0$ «включается» функция, равная $t+1$, а в момент $t = 1$ она «снимается» и «включается» функция $3t$, которая «снимается» в момент $t = 4$. Поэтому

$$f(t) = (t+1) \cdot 1(t) - (t+1) \cdot 1(t-1) + 3t \cdot 1(t-1) - 3t \cdot 1(t-4) =$$
$$= (t+1) \cdot 1(t) + (2t-1) \cdot 1(t-1) - 3t \cdot 1(t-4).$$

Чтобы найти изображение этой функции с помощью теоремы запаздывания, ее нужно представить в виде

$$f(t) = \varphi_1(t) \cdot 1(t) + \varphi_2(t-1) \cdot 1(t-1) + \varphi_3(t-4) \cdot 1(t-4).$$

Имеем: $f(t) = (t+1) \cdot 1(t) - (2(t-1)+1) \cdot 1(t-1) - (3(t-4)+12) \cdot 1(t-4)$.

Так как $\varphi_1(t) = t+1 \div \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$,

$$\varphi_2(t) = 2t+1 \div \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p},$$

$$\varphi_3(t) = 3t+12 \div \frac{3}{p^2} + \frac{12}{p},$$

то, применяя теорему запаздывания, получим искомое изображение:

$$F(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}+(\frac{2}{p^2}+\frac{1}{p})e^{-p}-(\frac{3}{p^2}+\frac{12}{p})e^{-4p}.$$

Теорема смещения (изображения). Если $f(t)\div F(p)$, то для любого комплексного числа ω имеет место соотношение

$$e^{\omega t}\cdot f(t)\div F(p-\omega).$$

Пример. $e^{\omega t}\sin at\div\dfrac{a}{(p-\omega)^2+a^2}$; $e^{\omega t}\cos at\div\dfrac{p-\omega}{(p-\omega)^2+a^2}$.

3. Дифференцирование оригинала. Если $f(t)\div F(p)$ и функции $f'(t), f''(t),..., f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то

$$f'(t)\div p\cdot F(p)-f(0),$$
$$f''(t)\div p^2\cdot F(p)-p\cdot f(0)-f'(0),$$
$$f'''(t)\div p^3\cdot F(p)-p^2\cdot f(0)-p\cdot f'(o)-f''(0),$$
$$\text{..... ....}$$
$$f^{(n)}(t)\div p^n\cdot F(p)-p^{n-1}\cdot f(0)-....-f^{(n-1)}(0).$$

Доказательство. Докажем первое соотношение. По определению изображения находим $f'(t)\div\int\limits_0^\infty f'(t)\cdot e^{-pt}dt$.

По формуле интегрирования по частям, обозначив $u=e^{-pt}$; $du=-pe^{-pt}$; $dv=f'(t)dt$; $v=f(t)$, получим $f'(t)\div e^{-pt}f(t)\Big|_0^\infty-(-p)\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt=-f(0)+p\cdot F(p)$, что и требовалось доказать.

4. Дифференцирование изображения. Если $\dfrac{f(t)}{t}$, то

$$F'(p)\div -tf(t);\quad F''(p)\div t^2f(t);\quad F'''(p)\div -t^3f(t).$$

5. Интегрирование оригинала. Если функция $f(t)$ непрерывна при всех значениях t в интервале $(0,\infty)$ и $f(t)\div F(p)$, то $\int\limits_0^t f(u)du\div\dfrac{F(p)}{p}$.

6. Интегрирование изображения. Если $f(t) \div F(p)$ и интеграл $\int\limits_p^\infty F(p)dp$ сходится, то он служит изображением функции $\frac{f(t)}{t}$, т. е.

$$\frac{f(t)}{t} \div \int\limits_p^\infty F(p)dp.$$

4.3. Таблица оригиналов и изображений

Составим краткую таблицу, устанавливающую соответствие между часто встречающимися на практике оригиналами и их изображениями.

Таблица оригиналов и изображений

№ п/п	**Оригинал** $f(t)$	**Изображение** $F(p) = \int\limits_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} dt$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$
4	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
5	$\cos bt$	$\frac{p}{p^2+b^2}$
6	$\sin bt$	$\frac{b}{p^2+b^2}$
7	$e^{at}\cos bt$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$
8	$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(p-a)^2+b^2}$
9	$t^n \cdot e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$

Окончание таблицы

№ п/п	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)=\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}dt$
10	$\frac{t^n}{n!}\cdot e^{at}$	$\frac{1}{(p-a)^{n+1}}$
11	$t\cdot\cos bt$	$\frac{p^2-b^2}{(p^2+b^2)^2}$
12	$t\cdot\sin bt$	$\frac{2b}{(p^2+b^2)^2}$
13	$f'(t)$	$p\cdot F(p)-f(0)$
14	$f''(t)$	$p^2\cdot F(p)-p\cdot f(0)-f'(0)$
15	$f'''(t)$	$p^3\cdot F(p)-p^2\cdot f(0)-p\cdot f'(0)-f''(0)$
16	$sh(bt)$	$\frac{b}{p^2-b^2}$
17	$ch(bt)$	$\frac{p}{p^2-b^2}$
18	Свертка оригиналов	$f(t)*\varphi(t)=\int_0^t f(u)\cdot\varphi(t-u)du$
19	Теорема умножения изображений	$f(t)*\varphi(t)\div F_1(p)F_2(p)$

4.4. Нахождение оригиналов по заданным изображениям в простейших случаях

Задача восстановления оригинала по известному изображению является одной из основных задач операционного исчисления. Мы рассмотрим лишь простейшие приемы.

4.4.1. Если рассмотреть таблицу преобразований Лапласа для простейших функций, то нетрудно убедиться, что почти все изображения имеют вид простейших рациональных дробей. Поэтому если изображение удастся представить в виде суммы простейших рациональных дробей, то с помощью таблицы можно легко найти оригинал.

Пример. Найти оригинал $f(t)$ по известному изображению $F(p)=\dfrac{p+8}{p^2+4p+5}$.

Решение. Выделив в знаменателе полный квадрат, получим: $F(p)=\dfrac{p+8}{(p+2)^2+1}$.

В данном случае можно применить формулы пунктов 7 и 8 таблицы, если представить изображение в виде

$$F(p)=\frac{p+8}{(p+2)^2+1}=\frac{p+2}{(p+2)^2+1}+\frac{6}{(p+2)^2+1}.$$

По указанным формулам определим оригинал

$$f(t)=e^{-2t}\cos t+6e^{-2t}\sin t.$$

Пример. Найти $f(t)$, если $F(p)=\dfrac{3p+2}{(p-1)(p^2+4)}$.

Решение. Разложим данную рациональную дробь на простейшие дроби.

$$F(p)=\frac{3p+2}{(p-1)(p^2+4)}=\frac{A}{p-1}+\frac{Bp+C}{p^2+4}=\frac{A(p^2+4)+Bp(p-1)+C(p-1)}{(p-1)(p^2+4)}.$$

Отсюда имеем

$$3p+2=A(p^2+4)+Bp(p-1)+C(p-1).$$

При $p=1$ получим: $5=5A\Rightarrow A=1$.

При $p=0$ получим: $2=4A-C\Rightarrow C=2$.

Приравняем коэффициенты при p^2 в левой и правой частях равенства.

$$p^2\Big|0=A+B\Rightarrow B=-A\Rightarrow B=-1.$$

Следовательно,

$$F(p)=\frac{3p+2}{(p-1)(p^2+4)}=\frac{1}{p-1}+\frac{-p+2}{p^2-4}=\frac{1}{p-1}-\frac{p}{p^2+4}+\frac{2}{p^2+4}.$$

По формулам пунктов 4, 5 и 6 таблицы определим искомый оригинал $f(t) = e^t - \cos 2t + \sin 2t$.

4.4.2. Отыскание оригиналов с помощью свертки функций

В математическом анализе **сверткой** функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ называется интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\cdot\varphi(t-u)du$, который является функцией от t. Если рассматриваемые функции являются оригиналами, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\cdot\varphi(t-u)du = \int\limits_{-\infty}^{0} f(u)\cdot\varphi(t-u)du + \int\limits_{0}^{t} f(u)\cdot\varphi(t-u)du + \int\limits_{t}^{\infty} f(u)\cdot\varphi(t-u)du .$$

Первый и третий интегралы в правой части этого равенства равны нулю, так как по определению оригинала $f(u) = 0$ при $t \prec 0$ и $\varphi(t-u) = 0$ при $t - u \prec 0 \Rightarrow u \succ t$.

Свертка оригиналов обозначается: $f(t) * \varphi(t)$. Можно показать, что свертка оригиналов обладает переместительным свойством.

Таким образом, $f(t) * \varphi(t) = \int\limits_{0}^{t} f(u)\cdot\varphi(t-u)du = \int\limits_{0}^{t} \varphi(u)\cdot f(t-u)du$.

Пример. Найти свертку функций $f(t) = t$ и $\varphi(t) = e^{at}$.

Решение. $f(t) * \varphi(t) = \int\limits_{0}^{t} f(u)\cdot\varphi(t-u)du = \int\limits_{0}^{t} ue^{a(t-u)}du = e^{at}\int\limits_{0}^{t} ue^{-au}du$.

Пользуясь формулой интегрирования по частям, получим:

$$f(t) * \varphi(t) = -\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{e^{at}}{a^2} = \frac{e^{at} - 1}{a^2} - \frac{t}{a}.$$

Понятие свертки тесно связано с теоремой умножения изображений.

Теорема умножения изображений (теорема Э. Бореля)

Произведение изображений двух оригиналов является изображением свертки этих оригиналов, т. е. если $f(t) \div F_1(p)$ и $\varphi(t) \div F_2(p)$, то $f(t) * \varphi(t) \div F_1(p)F_2(p)$.

Пример. Найти оригинал по его изображению

$$F(p)=\frac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}.$$

Решение. Представим данную функцию в виде произведения двух функций: $F(p)=\frac{p}{p^2+4}\cdot\frac{p}{p^2+9}=F_1(p)F_2(p)$.

$$F_1(p)=\frac{p}{p^2+4}\div\cos 2t=f(t),\ F_2(p)=\frac{p}{p^2+9}\div\cos 3t=\varphi(t).$$

Искомый оригинал равен: $f(t)*\varphi(t)=\int_0^t f(u)\cdot\varphi(t-u)du\ =$

$$=\int_0^t \cos 2u\cdot\cos(3t-3u)du=\frac{1}{2}\int_0^t(\cos(5u-3t)+\cos(3t-u))du=$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{5}\sin(5u-3t)-\sin(3t-u))\ \Big|_0^t=\frac{3}{5}\sin 3t-\frac{2}{5}\sin 2t\ .$$

4.4.3. Отыскание оригиналов с помощью вычетов

При отыскании оригиналов часто пользуются следующей теоремой, которую мы рассмотрим без доказательства.

Теорема. Если функция $f(t)$ является оригиналом, а функция $F(p)$ ее изображением, то $f(t)=\sum resF(p)e^{pt}$, т. е. оригинал равен сумме всех вычетов относительно особых точек функции $F(p)e^{pt}$.

Пример. Найти оригинал по заданному изображению

$$F(p)=\frac{2p+3}{(p-1)^2(p-2)}.$$

Решение. Составим функцию $F(p)e^{pt}=\frac{(2p+3)e^{pt}}{(p-1)^2(p-2)}$.

Особыми точками этой функции являются точки 1 и 2.

Поэтому $f(t)=\sum resF(p)e^{pt}=resF(p)e^{pt}(1)+resF(p)e^{pt}(2)$.

Точка $p=1$ является полюсом 2 порядка.

$$resF(p)e^{pt}(1)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\frac{(2p+3)e^{pt}}{(p-1)^2(p-2)}(p-1)^2=\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\frac{(2p+3)e^{pt}}{p-2}=$$

$$=\lim_{p\to 1}\frac{(2e^{pt}+te^{pt}(2p+3))(p-2)-(2p+3)e^{pt}}{(p-2)^2}=-5te^t-7e^t.$$

Точка $p=2$ – простой полюс.

$$resF(p)e^{pt}(2)=\lim_{p\to 2}\frac{(2p+3)e^{pt}}{(p-1)^2(p-2)}(p-2)=7e^{2t}.$$

Искомый оригинал равен: $f(t)=7e^{2t}-5te^t-7e^t$.

Подводя итог, отметим, что функцию-оригинал можно найти следующим образом. Прежде всего необходимо воспользоваться таблицей оригиналов и изображений. Если не удается найти табличное значение оригинала, то функцию $F(p)$ стараются представить в виде суммы простейших рациональных дробей, а затем, пользуясь свойством линейности, определяют оригиналы. Наконец, можно использовать свойство умножения изображений (теорема Бореля) или теорему о вычетах.

4.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Являются ли оригиналами следующие функции?

$1)\, f(t)=e^{5t};\, 2)\, f(t)=\dfrac{2}{t-3};\, 3)\, f(t)=e^{t^2}$.

2. Пользуясь определением, найти изображения заданных функций-оригиналов.

$1)\, f(t)=t;\, 2)\, f(t)=cht;\, 3)\, f(t)=te^t$

3. Используя таблицы и свойства преобразования Лапласа, найти изображения следующих функций:

$1)\, f(t)=e^{-t}+t^3+2t^2+3t+4;\, 2)\, f(t)=(t+1)^2e^{3t};\, 3)\, f(t)=\cos 2t;$

$4)\, f(t)=\sin 3t+4t^4;\, 5)\, f(t)=e^{4t}cos3t;\, 6)\, f(t)=t\sin 5t$

4. С помощью единичной функции выразить аналитически функции, представленные графически.

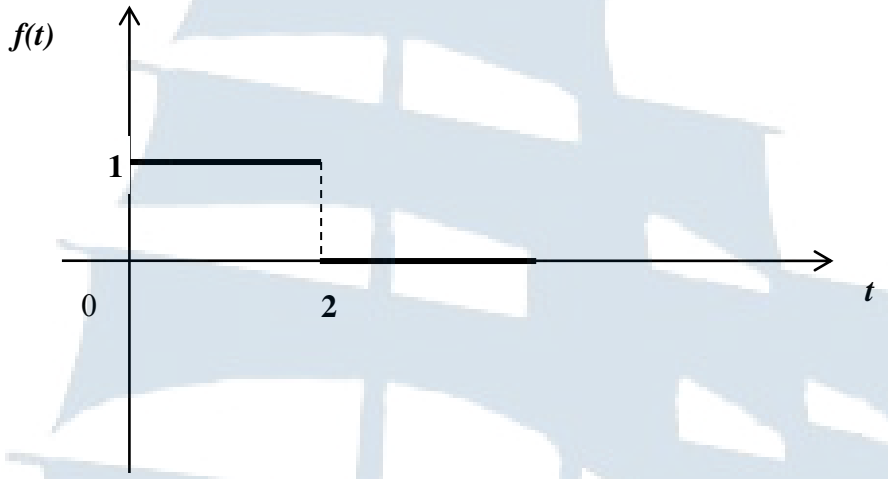


Рис. 8

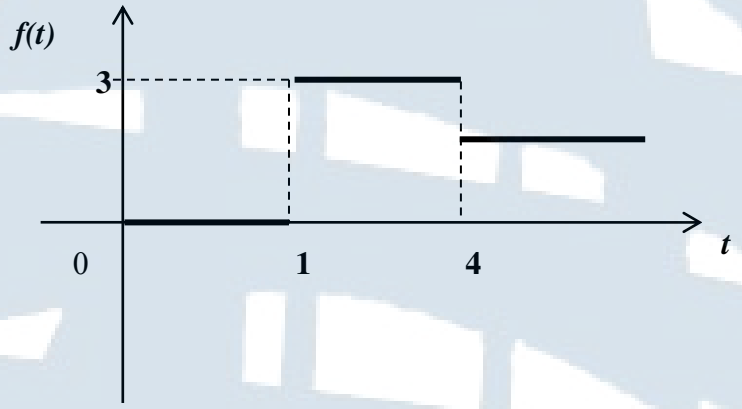


Рис. 9

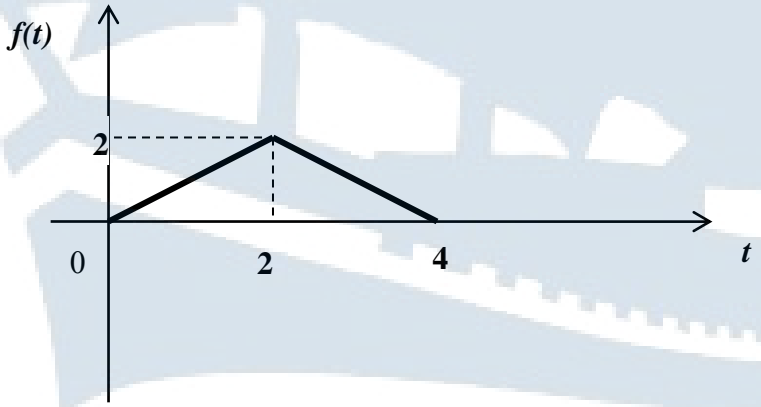


Рис. 10

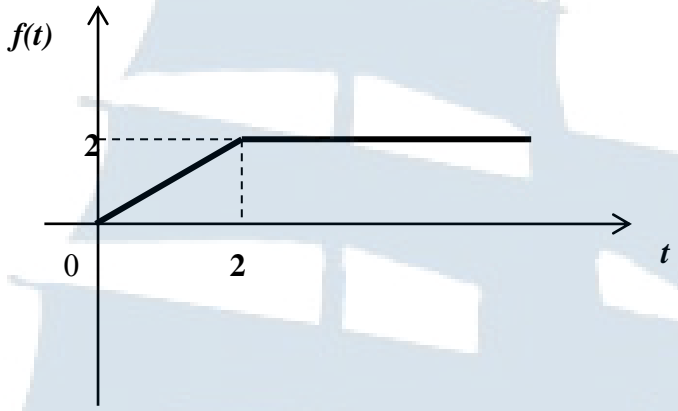


Рис. 11

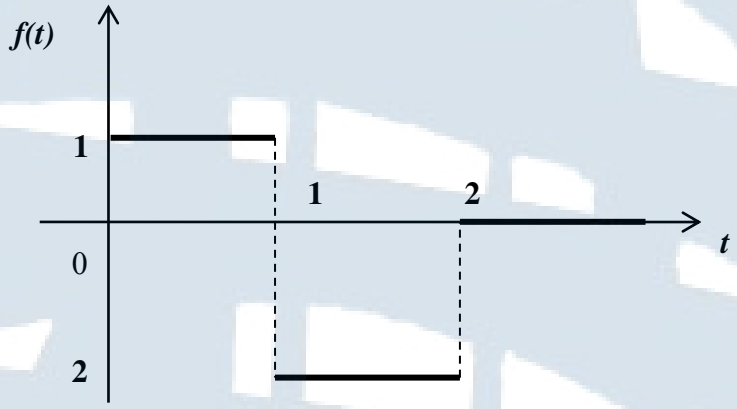


Рис. 12

5. С помощью таблицы оригиналов и соответствующих им изображений найти оригиналы функций.

$$1)\,F(p)=\frac{1}{p^5}-\frac{4}{p^3}+\frac{1}{p^2+4};\ 2)\,F(p)=\frac{1}{p+3}+\frac{p}{p^2+3};\ 3)\,F(p)=\frac{1}{(p-3)^3};$$

$$4)\,F(p)=\frac{p}{p^2-25};\ 5)\,F(p)=\frac{p+1}{p^2+3p};\ 6)\,F(p)=\frac{1}{(p-2)^2+9};$$

$$7)\,F(p)=\frac{1}{p^2-2p+5};\ 8)\,F(p)=\frac{p}{p^2+6p+13};\ 9)\,F(p)=\frac{p-2}{p^2-4p+5}$$

$$10)F(p)=\frac{p+2}{p^2(p-1)};\ 11)F(p)=\frac{p+2}{p(p^2+1)}.$$

6. С помощью свертки найти оригиналы функций.

$$1)F(p)=\frac{1}{p^2(p-1)};\ 2)F(p)=\frac{1}{(p^2+6p+13)(p^2-6p+10)};$$

$$3)F(p)=\frac{4}{p^2(p^2+16)}.$$

7. Используя вычеты, найти оригиналы функций.

1) $F(p)=\frac{3p}{(p-1)(p-3)(p+4)}$; 2) $F(p)=\frac{p-1}{p(p^2-9)}$; 3) $F(p)=\frac{1}{(p-3)^2(p+5)}$.

4.6. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и систем линейных дифференциальных уравнений

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения $x''-x'=e^{2t}$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=0$; $x'(0)=0$.

Решение. Будем считать, что искомая функция вместе со своими производными являются оригиналами. Обозначим искомую функцию $x(t)$, а ее изображение $\bar{x}(p)$.

Определим изображения всех компонент дифференциального уравнения. По теореме о дифференцировании оригинала определим изображения производных. Получим

$$x(t) \div \bar{x}(p),$$

$$x'(t) \div p\bar{x}(p)-x(0)=p\bar{x}(p),$$

$$x''(t) \div p^2\vec{x}(p)-px(0)-x'(0)=p^2\bar{x}(p),$$

$$e^{2t} \div \frac{1}{p-2}.$$

Подставим эти изображения в данное дифференциальное уравнение. Получим вспомогательное (операторное) уравнение

$$p^2\bar{x}(p) - p\bar{x}(p) = \frac{1}{p-2}.$$

Из этого уравнения найдем $\bar{x}(p)$.

$$\bar{x}(p)(p^2 - p) = \frac{1}{p-2},$$

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{p(p-1)(p-2)}.$$

Чтобы определить оригинал (решение уравнения) $x(t)$, представим полученную рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей.

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{p(p-1)(p-2)} =$$

$$= \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p-2} = \frac{A(p-1)(p-2) + Bp(p-2) + Cp(p-1)}{p(p-1)(p-2)}.$$

Две дроби с одинаковыми знаменателями тождественно равны, когда равны их числители, т. е. $1 = A(p-1)(p-2) + Bp(p-2) + Cp(p-1)$.

Это равенство является тождеством. Оно верно при любых значениях p.

При $p = 0$ получим $1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$.

При $p = 1$ получим $1 = -B \Rightarrow B = -1$.

При $p = 2$ получим $1 = 2C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$.

Итак, $\bar{x}(p) = \frac{1}{p(p-1)(p-2)} = \frac{1/2}{p} - \frac{1}{p-1} + \frac{1/2}{p-2}$.

По таблице, пользуясь формулами пунктов 1 и 4, определим искомое частное решение данного дифференциального уравнения:

$$x(t) = \frac{1}{2} - e^t + \frac{1}{2}e^{2t}.$$

Пример. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = 3y - x \\ y' = x + y + e^t \end{cases}$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 1; y(0) = 0$.

Решение. Предположим, что искомые функции и их производные являются оригиналами. Пусть

$$x(t) \div \bar{x}(p), \quad x'(t) \div p\bar{x}(p) - x(0) = p\bar{x} - 1,$$

$$y(t) \div \bar{y}(p), \quad y'(t) \div p\bar{y}(p) - y(0) = p\bar{y},$$

$$e^t \div \frac{1}{p-1}.$$

Составим вспомогательную систему уравнений.

$$\begin{cases} p\bar{x} - 1 = 3\bar{y} - \bar{x}, \\ p\bar{y} = \bar{x} + \bar{y} + \dfrac{1}{p-1}. \end{cases}$$

Решим полученную систему линейных уравнений по правилу Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+1; & -3 \\ -1; & p-1 \end{vmatrix} = (p^2 - 1) - 3 = p^2 - 4;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1; & -3 \\ \dfrac{1}{p-1}; & p-1 \end{vmatrix} = p - 1 + \frac{3}{p-1} = \frac{p^2+2}{p-1};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p+1; & 1 \\ -1;. & \dfrac{1}{p-1} \end{vmatrix} = \frac{p+1}{p-1} + 1 = \frac{2p}{p-1}.$$

$$\bar{x}(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{p^2+2}{(p-1)(p^2-4)}, \quad \bar{y}(p) = \frac{2p}{(p-1)(p^2-4)}.$$

По полученным изображениям определим оригиналы $x(t)$ и $y(t)$. Для этого представим полученные рациональные дроби в виде суммы простейших дробей.

$$\bar{x}(p) = \frac{p^2+2}{(p-1)(p^2-4)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p+2} =$$

$$= \frac{A(p-2)(p+2) + B(p-1)(p+2) + C(p-1)(p-2)}{(p-1)(p-2)(p+2)},$$

$$p^2 + 2 = A(p-2)(p+2) + B(p-1)(p+2) + C(p-1)(p-2).$$

Пусть $p=1 \Rightarrow 3=-3A \Rightarrow A=-1,$

$p=2 \Rightarrow 6=4B \Rightarrow B=\frac{3}{2},$

$p=-2 \Rightarrow 6=12C \Rightarrow C=\frac{1}{2}.$

Итак, $\bar{x}(p)=\frac{-1}{p-1}+\frac{3/2}{p-2}+\frac{1/2}{p+2}.$

Пользуясь таблицей, определим $x(t)=-e^{t}+\frac{3}{2}e^{2t}+\frac{1}{2}e^{-2t}.$

$$\bar{y}(p)=\frac{2p}{(p-1)(p^2-4)}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p-2}+\frac{C}{p+2}=$$

$$=\frac{A(p-2)(p+2)+B(p-1)(p+2)+C(p-1)(p-2)}{(p-1)(p-2)(p+2)},$$

$$2p=A(p-2)(p+2)+B(p-1)(p+2)+C(p-1)(p-2).$$

Пусть $p=1 \Rightarrow 2=-3A \Rightarrow A=-\frac{2}{3},$

$p=2 \Rightarrow 4=4B \Rightarrow B=1,$

$p=-2 \Rightarrow -4=12C \Rightarrow C=-\frac{1}{3}.$

$$\bar{y}(p)=\frac{-2/3}{p-1}+\frac{1}{p-2}+\frac{-1/3}{p+2},$$

$$y(t)=-\frac{2}{3}e^{t}+e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-2t}.$$

Искомое частное решение данной системы дифференциальных уравнений имеет вид:

$$x(t)=-e^{t}+\frac{3}{2}e^{2t}+\frac{1}{2}e^{-2t};$$

$$y(t)=-\frac{2}{3}e^{t}+e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-2t}.$$

4.7. Передаточная функция

Понятие передаточной функции широко используется в теории автоматического регулирования.

Пусть требуется найти решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами при нулевых начальных условиях. Ограничимся рассмотрением уравнений второго порядка. Найдем частное решение дифференциального уравнения $a_0x'' + a_1x' + a_2x = f(t)$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0$; $x'(0) = 0$.

Будем считать, что искомая функция вместе со своими производными являются оригиналами. Обозначим искомую функцию $x(t)$, а ее изображение $\bar{x}(p)$.

По теореме о дифференцировании оригинала определим изображения производных:

$$x(t) \div \bar{x}(p),$$

$$x'(t) \div p\bar{x}(p) - x(0) = p\bar{x}(p),$$

$$x''(t) \div p^2\bar{x}(p) - px(0) - x'(0) = p^2\bar{x}(p),$$

$$f(t) \div F(p).$$

Подставим эти изображения в данное дифференциальное уравнение. Получим вспомогательное (операторное) уравнение.

$$a_0p^2\bar{x}(p) + a_1p\bar{x}(p) + a_2\bar{x}(p) = F(p),$$

$$\bar{x}(p)(a_0p^2 + a_1p + a_2) = F(p) \Rightarrow \bar{x}(p) = \frac{F(p)}{a_0p^2 + a_1p + a_2}.$$

Функцию $K(p) = \dfrac{1}{a_0p^2 + a_1p + a_2}$ называют передаточной функцией данного дифференциального уравнения. Изображение решения этого уравнения с помощью передаточной функции можно записать в виде $\bar{x}(p) = K(p) \cdot F(p)$.

Пусть $k(t)$ – оригинал, для которого изображением служит передаточная функция. Тогда по теореме свертывания оригиналов $\bar{x}(p) = K(p) \cdot F(p) \div k(t) * f(t)$, т. е. $x(t) = \int_0^t k(u)f(t-u)du$.

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения $x'' - 3x' + 2x = e^t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0$; $x'(0) = 0$.

Решение. Составим передаточную функцию

$K(p)=\dfrac{1}{p^2-3p+2}=\dfrac{1}{(p-2)(p-1)}=\dfrac{1}{p-2}-\dfrac{1}{p-1}$. Тогда $k(t)=e^{2t}-e^{t}$.

Искомое решение равно:

$$x(t)=k(t)*f(t)=\int_0^t (e^{2u}-e^{u})e^{t-u}du=\int_0^t (e^{t+u}-e^{t})du=$$

$$=(e^{t+u}-ue^{t})\Big|_0^t=e^{2t}-te^{t}-e^{t}.$$

Литература: [2, глава IX, § 32-34]; [3, глава II, § 11-18] или [4, глава 14, § 16-17].

4.8. Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение преобразования Лапласа. Что называется функцией-оригиналом и ее изображением?

2. Найдите изображения единичной функции, показательной функции $f(t)=e^{at}$, тригонометрических функций $f(t)=\sin t,\ \ f(t)=\cos t$.

3. Сформулируйте следующие свойства преобразования Лапласа:

а) свойство линейности;

б) теорему подобия;

в) теорему запаздывания;

г) теорему смещения.

4. Если $f(t)\div F(p)$, то какие изображения имеют производные $f'(t);\ \ f''(t);\ \ f'''(t),...;\ \ f^{(n)}(t)$?

5. Как определить оригинал по известному изображению?

6. Изложите суть операционного метода решения дифференциальных уравнений и их систем.

4.9. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти частное решение дифференциального уравнения.

1) $x''-3x'+2x=e^{2t},\ x(0)=0, x'(0)=0$;

2) $x''+2x'-3x=e^{-t},\ x(0)=0, x'(0)=1$;

3) $x''+2x'+x=\sin t,\ x(0)=0, x'(0)=-1$;

4) $x'' - 2x' + x = e^t$, $x(0) = 0, x'(0) = 1$;

5) $x'' - 2x' + 2x = 1$, $x(0) = 0, x'(0) = 0$;

6) $x'' + 2x' + 5x = 3$, $x(0) = 1, x'(0) = 0$;

7) $x''' + x' = t$, $x(0) = 1, x'(0) = -1, x''(0) = 0$;

8) $x''' + x'' = \sin t$, $x(0) = 1, x'(0) = 1, x''(0) = 0$;

9) $x''' + x = 0$, $x(0) = 1, x'(0) = -1, x''(0) = 2$.

2. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений.

1) $\begin{cases} x' + x = y + e^t \\ y' + y = x + e^t \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 1$;

2) $\begin{cases} x' + y = 0 \\ y' + x = 0 \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = -1$;

3) $\begin{cases} 3x' + 2x + y' = 1 \\ x' + 4y' + 3y = 0 \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 0$;

4) $\begin{cases} x' = y + z - x \\ y' = z + x - y \\ z' = x + y + z \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 0$;

5) $\begin{cases} x' - y - z = 0 \\ y' - z - x = 0 \\ z' - x - y = 0 \end{cases}$ $x(0) = -1, y(0) = -1, z(0) = 0$.

3. С помощью передаточной функции найти частное решение дифференциального уравнения.

1) $x'' - 2x' + 2x = e^t$, $x(0) = 0, x'(0) = 0$,

2) $x'' - 5x' + 6x = e^{3t}$, $x(0) = 0, x'(0) = 0$,

3) $x'' + x = e^{-t}$, $x(0) = 0, x'(0) = 0$.

ТЕМА 5. КОМПЛЕКСНАЯ ФОРМА РЯДА ФУРЬЕ

Рассмотрим периодическую функцию $f(x)$ с периодом $T = 2\pi$, удовлетворяющую условиям Дирихле. Ряд Фурье, составленный для этой функции, имеет вид $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$, где $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$; $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx$; $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx$.

В приложениях ряды Фурье часто применяются в комплексной форме. Преобразуем ряд Фурье и его коэффициенты, используя формулы Эйлера, выражающие синус и косинус через показательную функцию: $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$; $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

Тогда получим: $a_k \cos kx + b_k \sin kx = a_k \frac{e^{ikzx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} =$

$= e^{ikx}\frac{a_k - ib_k}{2} + e^{-ikx}\frac{a_k + ib_k}{2}$.

Обозначим $c_0 = \frac{a_0}{2}, c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$.

Ряд Фурье принимает вид

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx} \qquad (1)$$

Определим комплексные коэффициенты этого ряда.

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx;$$

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx - i\sin kx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx;$$

$$c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx + i\sin kx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}dx.$$

Замечание. В преобразованиях использованы формулы:

$e^{ix} = \cos x + i\sin x,\ e^{-ikx} = \cos x - i\sin x$.

Таким образом, формулу (1) можно записать в виде:

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}\ , \qquad (2)$$

где $c_k=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$.

Равенство (2) называется **комплексной формой ряда Фурье.**

Если $f(x)$ периодическая функция с периодом $T=2l$, то ряд Фурье в комплексной форме принимает вид

$f(x)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{ikx}{l}}$, где $c_k=\dfrac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)e^{-\frac{ikx}{l}}dx$.

В электротехнике и радиотехнике члены указанного ряда называют гармониками, коэффициенты c_k – комплексными амплитудами гармоник, а числа $\omega_k=\dfrac{k\pi}{l}(k=0,\pm1,\pm2,...)$ – волновыми числами функции $f(x)$. Совокупность чисел $(c_1,c_2,...,c_k,...)$ называется амплитудным спектром. Графически амплитудный спектр изображается в виде вертикальных отрезков длиной c_k, расположенных в точках $\omega_k=\dfrac{k\pi}{l}(k=0,\pm1,\pm2,...)$.

Пример. Построить ряд Фурье в комплексной форме для функции

$$f(x)=\begin{cases}0, если\ x\in[-\pi,0)\\ 1, если\ x\in[0,\pi]\end{cases}.$$

Решение. Запишем ряд Фурье в виде $f(x)=c_0+\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\ k\neq0}}^{\infty} c_k e^{\frac{ikx}{l}}$

и определим его коэффициенты: $c_0=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}1\cdot dx=\dfrac{1}{2}$;

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}1\cdot e^{-ikx}dx=\frac{1}{2\pi}(-\frac{1}{ik})e^{-ikx}\Big|_0^{\pi}=-\frac{1}{2\pi ki}(e^{-ik\pi}-1)=$$

$$=\frac{i}{2k\pi}(\cos k\pi-i\sin k\pi-1)=\frac{i}{2k\pi}((-1)^k-1).$$

Иначе, $c_k = -\dfrac{i}{(2k-1)\pi}$.

С учетом полученных формул ряд Фурье в комплексной форме для заданной функции в точках непрерывности принимает вид

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} -\frac{i}{(2k-1)\pi} e^{i(2k-1)x} = \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{e^{i(2k-1)x}}{2k-1}.$$

В точках разрыва сумма ряда равна $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

5.1. Задачи для самостоятельного решения

Построить ряд Фурье в комплексной форме для следующих функций.

1. $f(x) = \begin{cases} 0, если\, x \in [-1, 0) \\ 1, если\, x \in [0, 1] \end{cases}$.

2. $f(x) = \begin{cases} 0, если\, x \in [-\pi, 0) \\ x, если\, x \in [0, \pi] \end{cases}$.

3. $f(x) = e^x,\ x \in [0, 2\pi], T = 2\pi.$

ТЕМА 6. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Если функция $f(x)$ (периодическая или непериодическая) удовлетворяет на отрезке $[-l,l]$ условиям Дирихле, то ее можно представить рядом Фурье.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\omega_k x+b_k\sin\omega_k x\ ; \qquad (1)$$

где

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx\ ,\ a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\omega_k x dx\ ; \qquad (2)$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\omega_k x dx\ ; \qquad (3)$$

$$\omega_k=\frac{k\pi}{l}\ .$$

Это разложение справедливо на всей числовой оси, если функция является периодической. Рассмотрим случай, когда функция $f(x)$ является непериодической, заданной на всей числовой оси, т. е. $l=\infty$. Будем предполагать, что на любом конечном отрезке $[-l,l]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле и является **абсолютно интегрируемой, т. е. сходится несобственный интеграл**

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=M\ . \qquad (4)$$

Подставляя в ряд (1) коэффициенты (2) и (3), получим

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)(\cos\omega_k t\cdot cos\omega_k x+\sin\omega_k t\cdot\sin\omega_k x)dt=$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\omega_k(t-x)dt=$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(\int_{-l}^{l}f(t)\cos\omega_k(t-x)dt)\frac{\pi}{l},\ где\ \omega_k=\frac{k\pi}{l}(k=1,2,...) \qquad (5)$$

Числа $\omega_1 = \frac{\pi}{l}, \omega_2 = \frac{2\pi}{l}, \omega_3 = \frac{3\pi}{l}, \ldots$ образуют арифметическую прогрессию, разность которой $\Delta\omega = \frac{\pi}{l}$.

Будем неограниченно увеличивать $l(l \to \infty)$. Тогда первое слагаемое в формуле (5) стремится к нулю в силу равенства (4), а второе слагаемое напоминает интегральную сумму для функции

$$\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)dt.$$

Предел этой суммы есть интеграл $\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\varphi(\omega)d\omega$.

Поэтому, переходя в равенстве (5) к пределу при $l \to \infty$, получим, что $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)dt)d\omega$, или

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)dt. \qquad (6)$$

Формула (6) называется формулой Фурье, а интеграл в правой части формулы – **интегралом Фурье.** Формула Фурье справедлива в точках непрерывности функции $f(x)$. В точках разрыва интеграл Фурье равен $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

Формулу (6) можно записать в другом виде.

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos\omega t \cdot cos\omega x + \sin\omega t \cdot \sin\omega x)dt =$$

$$= \int_0^{\infty} d\omega((\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt)\cos\omega x + (\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt)\sin\omega x) \text{ или}$$

$$f(x) = \int_0^{\infty}(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x)d\omega,$$

где $A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt,\ B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$. (7)

В формуле (7) видна аналогия интеграла Фурье с рядом Фурье. В обоих случаях функция раскладывается на сумму гармонических составляющих. Ряд Фурье суммируется по индексу «к», принимающему дискретные значения 1,2,3…. В интеграле Фурье ведется интегрирование по непрерывной переменной ω.

Замечания

1. Если $f(x)$ четная функция, то интеграл Фурье принимает вид

$$f(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x d\omega, \text{ где } A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\cos\omega t dt.$$

2. Если $f(x)$ нечетная функция, то

$$f(x)=\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x d\omega, \text{ где } B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\sin\omega t dt.$$

3. Если функция задана в интервале $(0,\infty)$, то ее можно доопределить (продолжить) на интервал $(-\infty,0)$ четным или нечетным образом.

4. Интеграл Фурье в комплексной форме имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \text{ или}$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)e^{i\omega x}d\omega, \text{ где } c(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt.$$

Пример. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } 0\prec x\prec 1,\\ \frac{1}{2} \text{ при } x=0 \text{ и } x=1\\ 0 \text{ при } x\prec 0 \text{ и } x\succ 1\end{cases}.$$

Решение. Данная функция имеет конечное число точек разрыва (x = 0 и x = 1). Она является абсолютно интегрируемой, так как отлична от нуля на конечном интервале. Поэтому существует несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$. Следовательно, данную функцию можно представить интегралом Фурье.

$$f(x)=\int_0^\infty (A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x)d\omega;$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt=\frac{1}{\pi}\int_0^1 1\cdot\cos\omega t dt=\frac{1}{\pi\omega}\sin\omega t\Big|_0^1=\frac{1}{\pi\omega}\sin\omega;$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt=\frac{1}{\pi}\int_0^1 1\cdot\sin\omega t dt=-\frac{1}{\pi\omega}\cos\omega t\Big|_0^1=\frac{1}{\pi\omega}(1-\cos\omega)=\frac{2}{\pi\omega}\sin^2\frac{\omega}{2}.$$

Подставим найденные коэффициенты в формулу Фурье.

$$f(x)=\int_0^\infty (A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x)d\omega=$$

$$=\int_0^\infty (\frac{1}{\pi\omega}\sin\omega\cos\omega x+\frac{2}{\pi\omega}\sin^2\frac{\omega}{2}\sin\omega x)d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}(\cos\frac{\omega}{2}\cos\omega x+\sin\frac{\omega}{2}\sin\omega x)d\omega .$$

Итак, $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}\cos(\frac{\omega}{2}-\omega x)d\omega$.

6.1. Преобразование Фурье

Формулу Фурье можно представить в симметричном виде, если положить: $\mathrm{A}(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\mathrm{A}(\omega)$; $\mathrm{B}(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\mathrm{B}(\omega)$.

Если $f(x)$ четная, абсолютно интегрируемая функция, то интеграл Фурье имеет вид

$$f(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x d\omega \text{, где } A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\cos\omega t dt . \qquad (1)$$

Преобразуем формулу (1) следующим образом:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty (\int_0^\infty f(t)cos\omega t dt)\cos\omega x d\omega=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty (\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos\omega t dt)\cos\omega x d\omega). \qquad (2)$$

Обозначим

$$A(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos\omega t\, dt \ . \qquad (3)$$

Выражение (3) называется **прямым косинус-преобразованием Фурье.**

Подставляя выражение (3) в формулу (2), получим **обратное косинус-преобразование Фурье:** $f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x\, d\omega$.

В случае нечетной функции аналогично получим:

$B(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin\omega t\, dt$ – **прямое синус-преобразованием Фурье.**

$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x\,d\omega$ – **обратное синус-преобразование Фурье.**

В комплексной форме имеем:

$E(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)e^{-i\omega t}\,dt$ – **прямое преобразованием Фурье.**

$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty E(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$ – **обратное преобразованием Фурье.**

Пример. Найти прямое и обратное косинус-преобразование Фурье для функции $f(x)=\begin{cases}\sin x \ при\, 0\le x\le\pi,\\ 0 \ при\, x\prec 0 \ и \ x\succ\pi\end{cases}$.

Решение. Данная функция является абсолютно интегрируемой, так как задана на конечном интервале. Определим прямое косинус-преобразование Фурье.

$$A(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos\omega t\,dt$$

$$A(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi \sin t\cos\omega t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi\frac{1}{2}(\sin(t+\omega t)+\sin(t-\omega t))\,dt=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2}(-\frac{1}{1+\omega}\cos t(1+\omega)-\frac{1}{1+\omega}\cos t(1-\omega))\Big|_0^\pi=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2}(-\frac{1}{1+\omega}\cos\pi(1+\omega)+\frac{1}{1+\omega}-\frac{1}{1-\omega}\cos\pi(1-\omega)+\frac{1}{1-\omega})=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\frac{2}{1-\omega^2}(\cos\pi\omega+1).$$

Окончательно имеем $A(\omega)=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\cos^2\frac{\pi\omega}{2}}{1-\omega^2}$.

Обратное косинус-преобразование Фурье:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}A(\omega)\cos\omega x\,d\omega=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\cos^2\frac{\pi\omega}{2}}{1-\omega^2}\cos\omega x\,d\omega=$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos^2\frac{\pi\omega}{2}}{1-\omega^2}\cos\omega x\,d\omega.$$

6.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Представить интегралом Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}1-\frac{x}{2}\ при\ 0\le x\le 2,\\ 0\ при\ \ x\succ 2\end{cases}$, доопределив ее четным (нечетным) образом для отрицательных значений x.

2. Представить интегралом Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}5x+3\ при\ 0\le x\le 2,\\ 0\ при\ x\prec 0\ и\ \ x\succ 2\end{cases}$.

3. Представить интегралом Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}x+2\ при\ 0\le x\le 4,\\ 0\ при\ \ x\succ 4\end{cases}$, доопределив ее четным (нечетным) образом для отрицательных значений x.

4. Найти прямое и обратное косинус-преобразование Фурье для функции $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{x}{2}\ при\ 0\le x\le \pi,\\ 0\ при\ x\prec 0\ и\ \ x\succ \pi\end{cases}$.

5. Найти прямое и обратное косинус и синус-преобразование Фурье для функции $f(x)=e^x$.

Найти прямое косинус и синус-преобразование Фурье для функции $f(x)=\begin{cases}-1\,при\,-1\le x\le -\frac{1}{2},\\ 0\,при\ -\frac{1}{2}\prec x\prec \frac{1}{2},\\ 1\,при\,\frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$.

ТЕМА 7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

7.1. Основные определения

Графом G (V, E) называется конечное непустое множество вершин V и конечное множество ребер E. Каждое ребро связывает пару вершин. Если ребро e соединяет вершины v_1 и v_2, то говорят, что ребро e и вершины v_1, v_2 *инцидентны*.

Два ребра, связывающие одну и ту же пару вершин v_1 и v_2, называются *кратными*; ребро, связывающее вершину саму с собой, называется *петлей*.

Степенью вершины графа называется число ребер графа, инцидентных этой вершине (петли считаются дважды). Степень вершины v обозначается $d(v)$. Вершина степени 0 называется *изолированной*, вершина степени 1 – *висячей*. Вершина графа называется *четной*, если ее степень четна, и *нечетной*, если нечетна.

Поскольку ребро, соединяющее вершины v_1 и v_2, добавляет по единице в степени этих ребер $d(v_1)$ и $d(v_2)$, справедливо соотношение: $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$, где m – количество ребер графа.

Граф называется *полным*, если каждые две различные его вершины соединены одним и только одним ребром.

Матрицей смежности графа $G(V, E)$ называется квадратная матрица $A(G)$ n-го порядка (n – число вершин) с элементами:

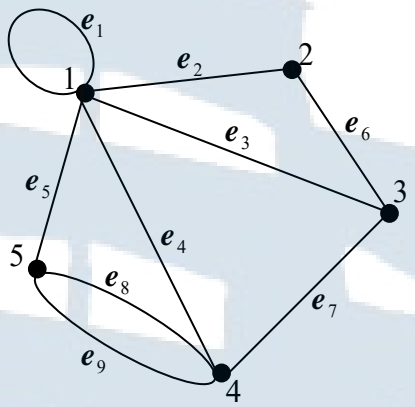
$$a_{ij} = \begin{cases} k, & \text{если в графе } G \text{ вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ соединены } k \text{ ребрами;} \\ 0, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

Если в графе нет петель, то на главной диагонали матрицы смежности стоят нули. Если же в графе нет кратных ребер, то все элементы матрицы равны либо нулю, либо единице.

Матрицей инцидентности графа $G(V, E)$ называется матрица $B(G)$ размера $n \times m$ (n – число вершин; m – число ребер) с элементами:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ – концевая вершина ребра } e_j; \\ 0, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

Пример 1. Для графа, изображенного на рисунке, построить матрицы смежности и инцидентности.



Решение. Начнем с построения матрицы смежности $A(G)$. У данного графа пять вершин, следовательно, матрица смежности будет иметь размер 5×5. Поскольку у графа есть петля и она находится в первой вершине, то на главной диагонали элемент $a_{11} = 1$, а все остальные $a_{22} = a_{33} = a_{44} = a_{55} = 0$.

Ребро e_2 соединяет первую и вторую вершины; других ребер, соединяющих эти же вершины, нет, следовательно, элементы $a_{12} = a_{21} = 1$.

Аналогично, $a_{13} = a_{31} = 1$; $a_{14} = a_{41} = 1$; $a_{15} = a_{51} = 1$; $a_{23} = a_{32} = 1$; $a_{34} = a_{43} = 1$.

Ребра $\boldsymbol{e}_8$ и $\boldsymbol{e}_9$ соединяют четвертую и пятую вершины и являются кратными, поэтому $a_{45} = a_{54} = 2$. Все остальные элементы $\boldsymbol{a}_{ij}$ равны нулю.

Таким образом, матрица смежности имеет вид:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь построим матрицу инцидентности $B(G)$. Так как у графа 5 вершин и 9 ребер, матрица $B(G)$ будет иметь размер 5×9. Первое ребро – это петля в первой вершине, поэтому в первом столбце, который соответствует первому ребру, только один элемент $b_{11} = 1$, а все остальные нулевые.

Второе ребро соединяет первую и вторую вершины, следовательно, $b_{12} = b_{22} = 1$, а остальные элементы второго столбца – нулевые. Рассуждая аналогично, получаем матрицу инцидентности:

$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Направленные ребра графа, т. е. ребра, для которых определены вершины, из которых они выходят, и вершины, в которые входят, называются *дугами*. Если все ребра графа направлены, то он называется *ориентированным* или *орграфом*.

Матрицей смежности ориентированного графа $G(V, E)$ называется квадратная матрица $A(G)$ n-го порядка (n – число вершин) с элементами:

$$a_{ij} = \begin{cases} k, \ \textit{если в графе } G \textit{ есть } k \textit{ дуг из } i-\textit{й вершины в } j-\textit{ю}; \\ 0, \ \textit{если иначе.} \end{cases}$$

Матрицей инцидентности ориентированного графа $G(V, E)$ называется матрица $B(G)$ размера $n \times m$ (n – число вершин; m – число ребер) с элементами:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \ \textit{если } j-\textit{я дуга начинается в } i-\textit{й вершине}; \\ -1, \ \textit{если } j-\textit{я дуга заканчивается в } i-\textit{й вершине}; \\ 0, \ \textit{если иначе.} \end{cases}$$

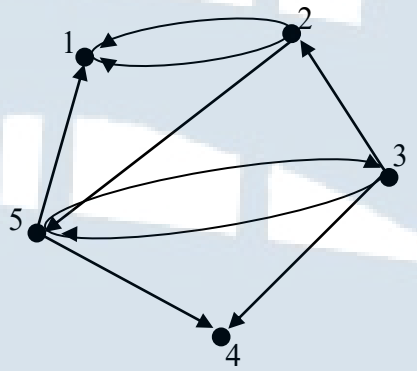
Пример 2. Построить орграфы по матрицам смежности и инцидентности:

1) $$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2)\quad B(G)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

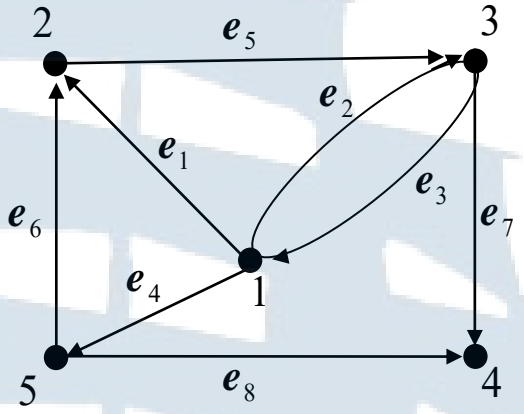
Решение

1. Даная матрица смежности – квадратная матрица пятого порядка, следовательно, у рассматриваемого графа пять вершин. Первая и четвертая строки смежной матрицы нулевые, т. е. из первой и четвертой вершин не выходит ни одной дуги. Во второй строке два элемента отличны от нуля, причем, $a_{21}=2,\quad a_{25}=1,$ следовательно, из второй вершины выходят три дуги: две в первую вершину и одна в пятую.



В третьей и пятой строках по три единицы: $a_{32}=a_{34}=a_{35}=1$ и $a_{51}=a_{53}=a_{54}=1,$ т. е. из третьей и пятой вершин выходят по три дуги: из третьей вершины – во вторую, четвертую и пятую вершины, а из пятой вершины – в первую, третью и четвертую.

2. Матрица инцидентности имеет размерность 5×8, т. е. у искомого графа пять вершин и восемь дуг. В первом столбце $a_{11}=1,\quad a_{21}=-1,$ следовательно, первое ребро выходит из первой вершины и входит во вторую. Второе ребро выходит из первой вершины и входит в третью и т. д. Искомый граф представлен на рисунке.



Граф $G' = (V', E')$, вершины и ребра которого являются вершинами и ребрами графа G (V, E), т.е. $V' \subset V$, $E' \subset E$, называется *подграфом* графа G.

Подграф $G' = (V', E')$ графа G (V, E), являющийся полным графом, называется *кликой*. *Максимальная клика* – это клика с максимально возможным числом вершин среди всех существующих клик графа.

Дополнением графа $G(V, E)$ называется граф $\overline{G}(V, \overline{E})$, множество вершин которого совпадает с множеством вершин исходного графа, а множество ребер является дополнением множества E, т. е.

$$\overline{E} = \{e \in V_1 \times V_1 : e \notin E\}.$$

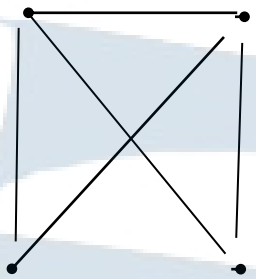
Объединением графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ таких, что $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$ и $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$, называется граф $G_1 \cup G_2$, множеством вершин которого является множество $V_1 \cup V_2$, а множеством ребер – множество $E_1 \cup E_2$.

Пересечением графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называется граф $G_1 \cap G_2$, множеством вершин которого является множество $V_1 \cap V_2$, а множеством ребер – множество $E_1 \cap E_2$.

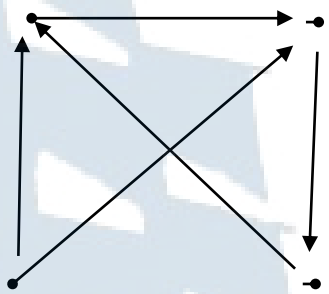
7.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Составить матрицу смежности вершин и матрицу инцидентности графа:

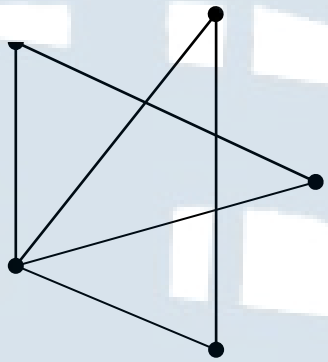
а)



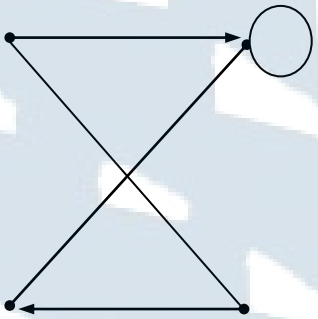
б)



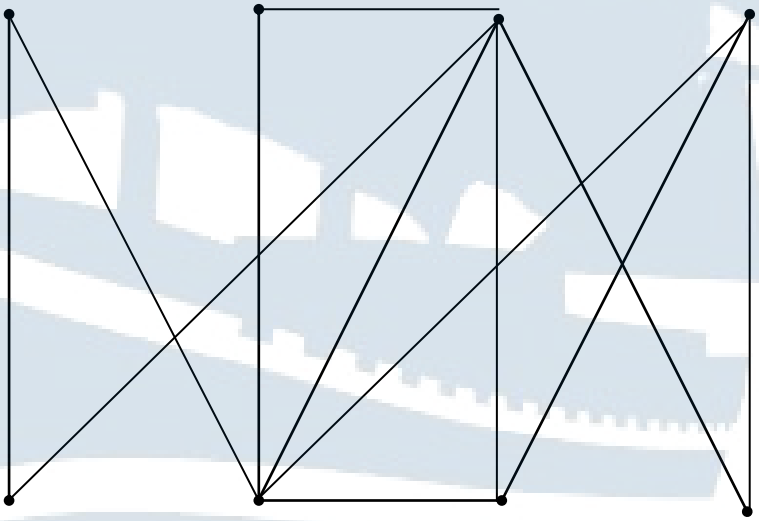
в)



г)



д)

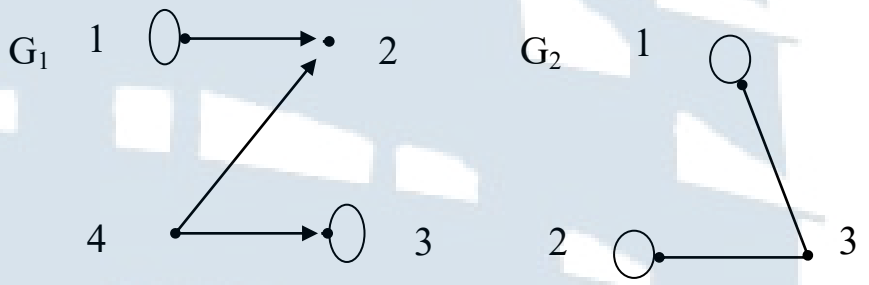


2. Изобразить граф, заданный матрицей смежности или матрицей инцидентности.

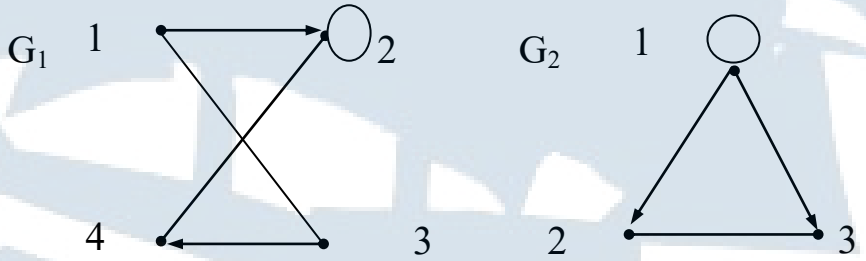
а) $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; б) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Даны графы G_1 и G_2. Найдите $G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2$, $G_1 \oplus G_2$. Для графа $G_1 \cup G_2$ найдите матрицы смежности, инцидентности, сильных компонент, маршрутов длины 2 и все маршруты длины 2, исходящие из вершины 1.

а)



б)



ТЕМА 8. ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

1. Записать комплексное число Z в алгебраической, тригонометрической и показательной формах. Найти все значения корня n-й степени из числа Z.

1.1. $Z=\frac{2\sqrt{2}}{1-i}$; n = 4. 1.2. $Z=\frac{2\sqrt{2}}{1+i}$; n = 3. 1.3. $Z=-\frac{2\sqrt{2}}{1-i}$; n = 3.

1.4. $Z=\frac{4}{1-i\sqrt{3}}$; n = 3. 1.5. $Z=\frac{4}{1+i\sqrt{3}}$; n = 3. 1.6. $Z=\frac{1}{\sqrt{3}-i}$; n = 4.

1.7. $Z=\frac{1}{\sqrt{3}+i}$; n = 4. 1.8. $Z=\frac{1}{1-i\sqrt{3}}$; n = 3. 1.9. $Z=\frac{1}{1+i\sqrt{3}}$; n = 3.

1.10. $Z=\frac{2}{1-i}$; n = 4.

2. Представить заданную функцию $\omega(z)$ в виде

$\omega(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

Проверить, является ли она аналитической. Если да, то найти значение производной функции $\omega(z)$ в точке z_0.

2.1. $\omega=2z^2+z+1;\ z_0=1-2i.$ 2.2. $\omega=z^3-iz^2;\ z_0=2-i.$

2.3. $\omega=z^2+3z+2i;\ z_0=1-i.$ 2.4. $\omega=4z^2i+2z;\ z_0=1-2i.$

2.5. $\omega=(z^3-2z)i;\ z_0=2.$ 2.6. $\omega=z^3i-z^2;\ z_0=2i.$

2.7. $\omega=z^2i+4z;\ z_0=1-i.$ 2.8. $\omega=3z^2+iz;\ z_0=2i.$

2.9. $\omega=i(1+z^2)-3z;\ z_0=2+i.$ 2.10. $\omega=z^3+2i;\ z_0=1-i.$

3. Найти, пользуясь таблицей, изображения *F(p)* данных функций *f(t)*.

3.1. а) $f(t)=(t+1)^2e^{3t}$; б) $f(t)=\cos 4t$.

3.2. а) $f(t)=(t+2)e^{4t}$; б) $f(t)=\sin 4(t-1)$.

3.3. а) $f(t)=(t-2)^2 e^{3t}$; б) $f(t)=e^{4t}\cos 3t$.

3.4. а) $f(t)=e^{-t}+t^2+2t+3$; б) $f(t)=e^{2t}\sin 3t$.

3.5. а) $f(t)=e^{-2t}+t^3$; б) $f(t)=t\sin 3t$.

3.6. а) $f(t)=t^2+2t+5$; б) $f(t)=t\cos 2t$.

3.7. а) $f(t)=t^2 e^{-2t}$; б) $f(t)=\sin 5t$.

3.8. а) $f(t)=t^3+3t^2$; б) $f(t)=e^{2t}\cos 4t$.

3.9. а) $f(t)=e^t(t^2+2)$; б) $f(t)=e^{3t}\sin 4t$.

3.10. а) $f(t)=(t+3)^2 e^t$; б) $f(t)=\sin 2(t-3)$.

4. Найти оригинал *f(t)* по заданному изображению *F(p)*.

4.1. а) $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+5}$; б) $F(p)=\dfrac{1}{(p-3)^3}$.

4.2. а) $F(p)=\dfrac{2p}{p^2+6p+10}$; б) $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^4}$.

4.3. а) $F(p)=\dfrac{4p+3}{p^2+2p+5}$; б) $F(p)=\dfrac{1}{p-1}+\dfrac{2}{p^3}$.

4.4. а) $F(p)=\dfrac{p+2}{p^2+2p+2}$; б) $F(p)=\dfrac{1}{p-1}+\dfrac{4}{p}+\dfrac{1}{p^2}$.

4.5. а) $F(p)=\dfrac{p}{p^2+4p+13}$; б) $F(p)=\dfrac{2}{p^2}+\dfrac{3}{p}+\dfrac{5}{p-1}$.

4.6. а) $F(p)=\dfrac{3p+2}{p^2-4p+13}$; б) $F(p)=\dfrac{1}{p^4}+\dfrac{2}{p}+\dfrac{6}{p-2}$.

4.7. а) $F(p)=\dfrac{p+1}{p^2+4p+13}$; б) $F(p)=\dfrac{1}{p-1)^5}+\dfrac{4}{p}+\dfrac{1}{p-4}$.

4.8. а) $F(p)=\dfrac{p+2}{p^2-2p+5}$; б) $F(p)=\dfrac{3}{p^3}+\dfrac{4}{p^2}-\dfrac{7}{p-2}$.

4.9. а) $F(p)=\dfrac{3p-1}{p^2-2p+5}$; б) $F(p)=\dfrac{1}{p-1}+\dfrac{3}{(p-2)^2}+\dfrac{1}{p^3}$.

4.10. а) $F(p)=\dfrac{3p+1}{p^2+6p+13}$; б) $F(p)=\dfrac{3}{p}-\dfrac{2}{p^3}+\dfrac{4}{p-3}$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

5.1. $x'''+x'=e^t$; $x(0)=0$; $x'(0)=2$; $x''(0)=0$.

5.2. $x''-x'=te^t$; $x(0)=1$; $x'(0)=0$.

5.3. $x''-2x'+x=t-\sin t$; $x(0)=x'(0)=0$.

5.4. $x''+3x'+2x=1+t+t^2$; $x(0)=0$; $x'(0)=1$.

5.5. $x''-5x'+6x=e^t$; $x(0)=0$; $x'(0)=1$.

5.6. $x''+x'=\cos t$; $x(0)=2$; $x'(0)=0$.

5.7. $x''+x'=t^2+2t$; $x(0)=4$; $x'(0)=2$.

5.8. $x''-9x=e^{-2t}$; $x(0)=1$; $x'(0)=1$.

5.9. $x''+2x'+x=\cos t$; $x(0)=0$; $x'(0)=0$.

5.10. $x''+2x'+x=\sin t$; $x(0)=x'(0)=0$.

6. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

6.1. $\begin{cases} x'' + y = 1 \\ y'' + x = 0 \end{cases}$ $x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0$.

6.2. $\begin{cases} x' + y' = 0 \\ x' - 2y' + x = 0 \end{cases}$ x(0) = 1; y(0) = -1.

6.3. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$ x(0) = 1; y(0) = 0.

6.4. $\begin{cases} x' + y' = 0 \\ x' - 4y' + x = 0 \end{cases}$ x(0) = 1; y(0) = -1.

6.5. $\begin{cases} x' - x - 2y = 0 \\ y' - 2x - y = 0 \end{cases}$ x(0) = 2; y(0) = 4.

6.6. $\begin{cases} x' + 7x - y = 0 \\ y' + 2x + 5y = 0 \end{cases}$ x(0) = y(0) = 1.

6.7. $\begin{cases} x' + 4x - y = 0 \\ y' + 2x + y = 0 \end{cases}$ x(0) = 2; y(0) = 3.

6.8. $\begin{cases} x' - 4x - y = 0 \\ y' + 2x + y = 0 \end{cases}$ x(0) = 2; y(0) = 3.

6.9. $\begin{cases} x' + 7x - y = 0 \\ y' + 2x + 5y = 0 \end{cases}$ x(0) = y(0) = 1.

6.10. $\begin{cases} x' + x - 8y = 0 \\ y' - x - y = 0 \end{cases}$ x(0) = 1; y(0) = 2.

БГАРФ

8.1. Решение типовых задач

Задача 1

Записать число $z=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}i}$ в алгебраической, тригонометрической и показательной формах. Найти все значения $\sqrt[3]{z}$.

Решение

1. Чтобы записать данное число в алгебраической форме $z=x+iy$, умножим числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю.

$$z=\frac{1}{1+\sqrt{3}i}=\frac{1-\sqrt{3}i}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}=\frac{1-\sqrt{3}i}{1-3i^2}=\frac{1-\sqrt{3}i}{4}=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i.$$ (Напомним, что $i^2=-1$).

Алгебраическая форма данного числа: $z=\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}i.$

2. Запишем это число в тригонометрической форме

$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi).$

В данном числе $x=\dfrac{1}{4},\ \ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{4},\ \ \rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\dfrac{1}{16}+\dfrac{3}{16}}=\dfrac{1}{2}.$

$$\cos\varphi=\frac{x}{\rho}=\frac{1/4}{1/2}=\frac{1}{2}\succ 0;\ \ \sin\varphi=\frac{y}{\rho}=\frac{-\sqrt{3}/4}{1/2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\prec 0.$$

Угол, для которого косинус положителен, а синус отрицателен, находится в четвертой четверти. $\varphi=2\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{3}.$

Данное число в тригонометрической форме имеет вид $z=\dfrac{1}{2}(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}).$

3. Запишем данное число в показательной форме $z=\rho\cdot e^{i\varphi}$: $z=\dfrac{1}{2}\cdot e^{i\cdot\frac{5\pi}{3}}$.

4. Найдем все значения $\sqrt[3]{z}.$

$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{\rho}(\cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{3}+i\sin\dfrac{\varphi+2k\pi}{3})$, где к = 0,1,2.

$$\omega = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}(\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{3}),$$ где к = 0,1,2.

1) к = 0: $\omega_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9})$.

2) к = 1: $\omega_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}(\cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9})$.

3) к = 2: $\omega_3 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}(\cos\frac{17\pi}{9} + i\sin\frac{17\pi}{9})$.

Задача 2

Представить заданную функцию $\omega(z)$ в виде $\omega(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Проверить, является ли она аналитической. Если да, то найти производную $\omega'(z)$ в точке z_0.

$\omega = z^3 + 2i; z_0 + 1 - i$.

Решение

Воспользуемся формулой $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

$$\omega = z^3 + 2i = (x+iy)^3 + 2i = x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^3 + 2i = \begin{vmatrix} i^2 = -1 \\ i^3 = i^2 \cdot i = -i \end{vmatrix} =$$

$$= x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3 + 2i = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3 + 2).$$

Действительная часть этой функции равна $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$, мнимая – $v(x,y) = 3x^2y - y^3 + 2$.

Проверим, выполняются ли условия Эйлера-Даламбера аналитичности данной функции: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Найдем частные производные функций u(x,y) и v(x,y) и сравним их.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2.$$

Видно, что условия Эйлера-Даламбера выполняются. Следовательно, функция является аналитической. Найдем ее производную по формуле $\omega' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$:

$$\omega'(z) = (3x^2 - 3y^2) + 6xyi.$$

В точке $z_0 = 1 - i$ x = 1, y = -1. $\omega'(z_0) = -6i$.

Заметим, что производную можно найти иначе по известным формулам.

$$\omega = z^3 + 2i \Rightarrow \omega' = 3z^2 = 3(x+iy)^2 = 3(x^2 + 2xyi + i^2y^2) = 3(x^2 - y^2) + 6xyi.$$

Мы получили такой же результат.

Задача 3

Найти, пользуясь таблицей, изображения F(p) данных функций f(t).

а) $f(t) = (t-3)^2 e^{5t}$; б) $f(t) = \sin 3(t-1)$.

Решение

1. Представим функцию f(t) в виде:

$$f(t) = (t^2 - 6t + 9)e^{5t} = t^2e^{5t} - 6te^{5t} + 9e^{5t}.$$

Пользуясь свойством линейности преобразования Лапласа и формулами (9) и (4) получим

$$F(p) = \frac{2!}{(p-5)^3} - 6\frac{1!}{(p-5)^2} + 9\frac{1}{p-5} = \frac{2}{(p-5)^3} - \frac{6}{(p-5)^2} + \frac{9}{p-5}.$$

2. Воспользуемся формулой пункта 6 таблицы и теоремой запаздывания $(\beta = 3;\ \tau = 1)$.

Получим $F(p) = e^{-p}\frac{3}{p^2+9}$.

Задача 4

Найти оригинал f(t) по заданному изображению F(p).

а) $F(p) = \frac{2p+1}{p^2+2p+10}$; б) $F(p) = \frac{4}{p^3} + \frac{5}{p-3} + \frac{7}{p}$.

Решение

1. Выделим в знаменателе полный квадрат и преобразуем выражение так, чтобы можно было применить формулы пунктов 7 и 8 таблицы.

$$F(p)=\frac{2p+1}{(p+1)^2+9}=\frac{(2p+2)-2+1}{(p+1)^2+9}=$$

$$=\frac{2(p+1)-1}{(p+1)^2+9}=2\frac{p+1}{(p+1)^2+9}-\frac{1}{(p+1)^2+9}.$$

Тогда, используя свойство линейности, получим:

$$f(t)=2e^{-t}\cos 3t-e^{-t}\sin 3t=e^{-t}(2\cos 3t-\sin 3t).$$

2. По пунктам 2, 4 и 1 и свойству линейности получим:

$$f(t)=4\frac{t^2}{2!}+5e^{3t}+7=2t^2+5e^{3t}+7.$$

Задача 5

Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

$$x'''+x''=t,\quad x(0)=-3,\quad x'(0)=1,\quad x''(0)=0.$$

Решение

Предположим, что искомая функция и ее производные первого, второго и третьего порядков являются оригиналами. Обозначим искомую функцию *x(t)*, а ее изображение $\bar{x}(p)$. Найдем изображения левой и правой частей дифференциального уравнения и составим вспомогательное (операторное) уравнение.

$$x(t)\div\bar{x}(p),$$

$$x'(t)\div p\bar{x}(p)-px(0)=p\bar{x}(p)+3,$$

$$x''(t)\div p^2\bar{x}(p)-px(0)-x'(0)=p^2\bar{x}(p)+3p-1,$$

$$x'''(t)\div p^3\bar{x}(p)-p^2x(0)-px'(0)-x''(0)=p^3\bar{x}(p)+3p^2-p,$$

$$t\div\frac{1}{p^2}.$$

Чтобы составить вспомогательное уравнение, подставим полученные изображения в данное дифференциальное уравнение. Получим $p^3\bar{x}(p)+3p^2-p+p^2\bar{x}(p)+3p-1=\frac{1}{p^2}$.

Выразим из этого уравнения $\bar{x}(p)$:

$$\bar{x}(p)(p^3+p^2)=\frac{1}{p^2}-3p^2-2p+1,$$

$$\bar{x}(p)p^2(p+1)=\frac{1-3p^4-2p^3+p^2}{p^2},$$

$$\bar{x}(p)=\frac{-3p^4-2p^3+p^2+1}{p^4(p+1)}.$$

По полученному изображению определим оригинал – искомую функцию *x(t)*. Чтобы использовать таблицу изображений, представим полученное выражение в виде суммы простейших рациональных дробей.

$$\frac{-3p^4-2p^3+p^2+1}{p^4(p+1)}=\frac{A}{p^4}+\frac{B}{p^3}+\frac{C}{p^2}+\frac{D}{p}+\frac{E}{p+1}=$$

$$=\frac{A(p+1)+Bp(p+1)+Cp^2(p+1)+Dp^3(p+1)+Ep^4}{p^4(p+1)}$$

$$-3p^4-2p^3+p^2+1=A(p+1)+Bp(p+1)+Cp^2(p+1)+Dp^3(p+1)+Ep^4 \qquad (*)$$

Это равенство является тождеством, оно верно при любых значениях p.

При p = 0 получим: A = 1. Пусть $p=-1\Rightarrow -3+2+1+1=E\Rightarrow E=1.$

Значения B, C и D определим методом неопределенных коэффициентов. Для этого приравняем коэффициенты при одинаковых степенях «p» в левой и правой частях равенства (*).

$$p^4\Big|-3=D+E\Rightarrow D=-3-E=-3-1\Rightarrow D=-4,$$

$$p^3\Big|-2=C+D\Rightarrow C=-2-D\Rightarrow C=2,$$

$$p^2\Big|1=B+C\Rightarrow B=1-C\Rightarrow B=-1.$$

Итак, $\bar{x}(p)=\frac{1}{p^4}-\frac{1}{p^3}+\frac{2}{p^2}-\frac{4}{p}+\frac{1}{p+1}$.

Пользуясь таблицей, определим оригинал:

$$x(t)=\frac{t^3}{3!}-\frac{t^2}{2!}+2t-4+e^{-t},$$

$$x(t)=\frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{2}+2t+e^{-t}-4.$$

Искомое частное решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$x(t)=\frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{2}+2t+e^{-t}-4.$$

Задача 6

Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

$$\begin{cases} x'=2y-3x \\ y'=y-2x \end{cases} \quad x(0)=3,\ y(0)=1.$$

Решение

Обозначим искомые функции *x(t)* и *y(t)*, а их изображения $\bar{x}(p)$; $\bar{y}(p)$.

$$x(t)\div\bar{x}(p),$$
$$y(t)\div\bar{y}(p),$$
$$x'(t)\div p\bar{x}(p)-x(0)=p\bar{x}(p)-3,$$
$$y'(t)\div p\bar{y}(p)-y(0)=p\bar{y}(p)-1.$$

Составим вспомогательную систему уравнений.

$$\begin{cases} p\bar{x}(p)-3=2\bar{y}(p)-3\bar{x}(p) \\ p\bar{y}(p)-1=\bar{y}(p)-2\bar{x}(p) \end{cases};$$

$$\begin{cases} \bar{x}(p)(p+3)-2\bar{y}(p)=3 \\ 2\bar{x}(p)+\bar{y}(p)(p-1)=1 \end{cases}.$$

Решим систему по правилу Крамера.

$$\Delta=\begin{vmatrix} p+3; & -2 \\ 2; & p-1 \end{vmatrix}=(p+3)(p-1)+4=p^2+2p+1=(p+1)^2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3; & -2 \\ 1; & p-1 \end{vmatrix} = 3(p-1)+2 = 3p-1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p+3; & 3 \\ 2; & 1 \end{vmatrix} = p+3-6 = p-3.$$

$$\bar{x}(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3p-1}{(p+1)^2}; \quad \bar{y}(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{p-3}{(p+1)^2}.$$

Определим искомые функции, используя таблицу преобразований Лапласа. Для этого предварительно преобразуем полученные выражения.

$$\bar{x}(p) = \frac{3p-1}{(p+1)^2} = \frac{3p+3-3-1}{(p+1)^2} = \frac{3(p+1)-4}{(p+1)^2} = \frac{3}{p+1} - \frac{4}{(p+1)^2},$$

$$x(t) = 3e^{-t} - 4te^{-t};$$

$$\bar{y}(p) = \frac{p-3}{(p+1)^2} = \frac{p+1-4}{(p+1)^2} = \frac{1}{p+1} - \frac{4}{(p+1)^2},$$

$$y(t) = e^{-t} - 4te^{-t}.$$

Искомое частное решение данной системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = 3e^{-t} - 4te^{-t} \\ y(t) = e^{-t} - 4te^{-t} \end{cases}.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бокарев М.Ю. Комплексные числа и комплексные функции в приложениях и задачах: учебное пособие для курсантов (студентов) вузов водного транспорта. – Калининград, БГАРФ, 2001. – 53 с.

2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: (в 2 ч.). Ч. 2 / Д. Письменный. – 6-е изд. – М.: Айрис–Пресс, 2008. – 256 с.

3. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1971. – 215 с.

4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Части 1, 2. – М.: Высшая школа, 1999. – 416 с.

5. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Век, 1997. – 420 с.

6. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1967. – 394 с.

7. Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике. – Киев, Наукова думка, 1973. – 634 с.

8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1986. – 720 с.

9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: 1981. – 186 с.

10. Мантуров О.В., Солнцев Ю.К., Соркин Ю.И., Федин Н.Г. Толковый словарь математических терминов. – М.: Просвещение, 1975. – 135 с.

11. Дискретная математика: учебно-методическое пособие для студентов второго курса бакалавриата, обучающихся по направлению 38.03.01 «Экономика» / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Финуниверситет, 2012.

978980002272

Нина Николаевна Авдеева
Алексей Иванович Руденко

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие
для курсантов и студентов,
обучающихся по специальностям:
25.05.03 «Техническая эксплуатация транспортного радиооборудования», 26.05.06 «Эксплуатация судовых энергетических установок», 16.03.03 «Холодильная, криогенная техника и системы жизнеобеспечения»
очной и заочной форм обучения
(2-е издание, переработанное и дополненное)

Ведущий редактор М.Б. Априянц
Младший редактор Г.В. Деркач

Компьютерное редактирование
И.В. Леонова

Подписано в печать 29.09.2020 г.
Усл. печ. л. 6,3. Уч.-изд. л. 6,0.

Лицензия № 021350 от 28.06.99.

Печать офсетная.

Формат 60 x 90 1/16.

Заказ № 1598. Тираж 60 экз.

Доступ к архиву публикации и условия доступа к нему:
http://lib.bgarf.ru/

БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»

Издательство БГАРФ,
член Издательско-полиграфической ассоциации высших учебных заведений
236029, Калининград, ул. Молодежная, 6.