Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**Н. П. Зубарева**

# МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины
для студентов по направлению подготовки
05.03.06 Экология и природопользование

Калининград
Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ»
2023

УДК 51(07)

Рецензент
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информационных технологий института цифровых технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет»
С. М. Алексеева

Зубарева, Н. П.

Математика: учебно-методическое пособие по изучению дисциплины для студентов направления подготовки 05.03.06 Экология и природопользование / Н. П. Зубарева. – Калининград: Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ». – 2023. – 96 с.

В учебно-методическом пособии приведен тематический план, представлены методические указания по изучению дисциплины, рекомендации по подготовке к промежуточной аттестации. Пособие подготовлено в соответствии с требованиями рабочей программы математического и естественнонаучного модуля основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 05.03.06 Экология и природопользование.

Табл. 2, рис. 9, список лит. – 12 наименований

Учебно-методическое пособие рассмотрено и одобрено в качестве локального электронного методического материала на заседании кафедры прикладной математики и информационных технологий института цифровых технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» 26 января 2023 г., протокол № 1

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины рекомендовано к использованию в учебном процессе в качестве локального электронного методического материала методической комиссией ИЦТ 17 февраля 2023 г., протокол № 1

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины рекомендовано к использованию в учебном процессе в качестве локального электронного методического материала методической комиссией ИРА от 25.09.2023 г., протокол № 17

УДК 51(07)

## ОГЛАВЛЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие представляет комплекс систематизированных материалов для самостоятельного изучения дисциплины Математика для студентов по направлению подготовки 05.03.06 Экология и природопользование.

Дисциплина относится к дисциплинам обязательной части Блока 1 ОПОП ВО математического и естественнонаучного модуля.

При изучении дисциплины используются знания, умения и навыки довузовской подготовки по математике (умение проводить алгебраические преобразования, решать уравнения и неравенства, знание основных тригонометрических формул, умение проводить тригонометрические преобразования и решать тригонометрические уравнения и неравенства, понимание функции, графика функции и основных ее свойств, знание основных геометрических фигур, умение находить их площади, знать основные виды многогранников и тел вращения и уметь вычислять их площади и объемы).

При реализации дисциплины «Математика» организуется практическая подготовка путем проведения практических занятий, предусматривающих участие обучающихся в выполнении отдельных элементов работ, связанных с будущей профессиональной деятельностью.

Дисциплина является базой при изучении дисциплин математического и естественнонаучного модуля, профессионального модуля.

В результате освоения дисциплины студент должен:

знать:

– основные понятия алгебры и геометрии, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, а также их простейшие приложения в профессиональных дисциплинах;

– методы решения математических задач до числового или другого требуемого результата (графика, формулы и т. п.);

– основные применения теории вероятностей и математической статистики в профессиональных приложениях;

уметь:

– использовать в профессиональной деятельности базовые знания математики;

– ставить цели и формулировать математическую постановку задач, связанных с реализацией профессиональных функций;

– прогнозировать возможный результат предлагаемого математического решения, уметь оценивать его значения;

– переводить профессиональные задачи с описательного языка на язык математики;

– строить математические модели прикладных задач с оптимальным выбором их решения, анализа и оценки полученных результатов;

– оперировать с абстрактными объектами и быть корректными в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений;

владеть:

– методами анализа и навыками самостоятельного изучения учебной и научной математической литературы;

– математическими, статистическими и количественными методами решения типовых профессиональных задач;

– математической логикой, необходимой для формирования суждений по соответствующим профессиональным проблемам;

– способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения.

В пособии представлен тематический план, структурированный по видам учебных занятий. Приведены сведения об изучаемых вопросах каждого раздела дисциплины, по которым студент может ориентироваться в случае пропуска каких-то занятий, а также методические рекомендации преподавателя для самостоятельной подготовки студента. В пособии подробно решены 39 типовых задачи по всем разделам. Контрольные вопросы для самопроверки должны помочь студенту выяснить уровень понимания им изучаемой темы.

Представлен перечень контрольных работ, индивидуальных домашних заданий, мероприятий промежуточной аттестации и текущего контроля, перечислены условия положительной оценки работы студента по видам его работы по изучению учебных тем дисциплины.

Учебно-методическое обеспечение дисциплины (модуля), включает перечень основной и дополнительной литературы.

Помимо данного пособия, студентам следует использовать учебные материалы, размещенные в соответствующем данной дисциплине разделу ЭИОС. В ЭИОС представлены задания по темам индивидуальных домашних заданий (ИДЗ) для студентов по двум уровням сложности; каждое из заданий содержит по тридцать вариантов. Студент выполняет один из вариантов каждой темы ИДЗ. Номер варианты выбирается студентом по порядковому номеру студента в журнале учебной группы.

## 1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Тематический план лекционных и практических занятий представлен в таблицах 1, 2.

Таблица 1. Объём (трудоёмкость освоения)

| Номер темы | Содержание лекции | Кол-во ч | |
|---|---|---|---|
| | | очная | заочная |
| 1 семестр | | | |
| 1 | Элементы линейной алгебры | 6 | 2 |
| 2 | Векторная алгебра | 4 | 1 |
| 3 | Аналитическая геометрия на плоскости | 2 | 1 |
| 4 | Аналитическая геометрия в пространстве | 4 | |

| Номер темы | Содержание лекции | Кол-во ч | |
|---|---|---|---|
| | | очная | заочная |
| 5 | Введение в математический анализ | 4 | 2 |
| 6 | Дифференциальное исчисление функции одной переменной | 8 | – |
| 7 | Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных | 2 | – |
| Итого | | 30 | 6 |
| 2 семестр | | | |
| 8 | Интегральное исчисление функции одной переменной. Неопределенный интеграл. | 2 | 2 |
| 9 | Интегральное исчисление функции одной переменной. Определенный и несобственный интеграл. | 2 | – |
| 10 | Дифференциальные уравнения | 2 | – |
| 11 | Теория вероятностей случайных событий | 4 | 2 |
| 12 | Теория вероятностей случайных величин. | 4 | – |
| 13 | Элементы математической статистики. | 2 | – |
| Итого | | 16 | 4 |

Таблица 2. Объём (трудоёмкость освоения)

| Номер ПЗ | Содержание практического занятия | Кол-во ч | |
|---|---|---|---|
| | | очная | заочная |
| 1 семестр | | | |
| 1 | Элементы линейной алгебры | 6 | 2 |
| 2 | Векторная алгебра | 4 | – |
| 3 | Аналитическая геометрия на плоскости | 4 | 1 |
| 4 | Аналитическая геометрия в пространстве | 4 | 1 |
| 5 | Введение в математический анализ | 4 | 2 |
| 6 | Дифференциальное исчисление функции одной переменной | 4 | – |
| 7 | Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных | 4 | – |
| Итого | | 30 | 6 |
| 2 семестр | | | |
| 8 | Интегральное исчисление функции одной переменной. Неопределенный интеграл. | 4 | 1 |
| 9 | Интегральное исчисление функции одной переменной. Определенный и несобственный | 2 | 1 |

| Номер ПЗ | Содержание практического занятия | Кол-во ч | |
|---|---|---|---|
| | | очная | заочная |
| | интеграл. | | |
| 10 | Дифференциальные уравнения | 2 | – |
| 11 | Теория вероятностей случайных событий. | 2 | – |
| 12 | Теория вероятностей случайных величин. | 2 | 2 |
| 13 | Элементы математической статистики. | 2 | – |
| Итого | | 14 | 4 |

# 2. СОДЕРЖАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Курс предмета «Математика» разбит на 13 тем.

## 2.1. Элементы линейной алгебры

**Перечень изучаемых вопросов.**

Основные понятия, классификация матриц. Действия над матрицами. Невырожденные матрицы. Обратная матрица. Ранг матрицы. Определители, свойства. Системы линейных уравнений, основные понятия. Решение систем линейных уравнений: теорема Кронекера-Капелли, формулы Крамера, метод Гаусса, матричный метод. Системы линейных однородных уравнений.

**Методические указания.**

Важно хорошо усвоить свойства определителей, так как без их применения практически невозможно вычислять определители высших порядков (выше третьего). Умение вычислять определители пригодится при решении задач Векторной алгебры и Аналитической геометрии. Понятие матрицы тесно связано с исследованием и решением систем линейных уравнений.

**Литература.** В предлагаемой литературе [5], [8, 9], [11, 12] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

**Контрольные вопросы.**

1. Матрица. Определение.
2. Частные виды матриц. Единичная матрица.
3.Транспонирование матриц.
4. Сложение матриц.
5. Умножение матриц на число.
6. Умножение матриц.
7. Обратная матрица.
8. Определители второго и третьего порядков. Их вычисление.
9. Свойства определителей.
10. Системы линейных уравнений.
11. Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера.

11. Решение систем линейных уравнений средствами матричного исчисления.

12. Решение систем линейных уравнений по методу Гаусса.

13. Однородные системы.

14. Понятие о ранге матрицы.

15. Теорема Кронекера-Капелли.

**Решение типовых задач.**

**Пример 1**. Расширенную матрицу с помощью элементарных преобразований привести к ступенчатому виду.

Решение:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на (–2).

Почему первую строку умножаем именно на –2? Для того чтобы во второй строке получить ноль вместо цифры 2 после сложения.

Можно упростить вторую строку. Делим вторую строку на 3.

Цель элементарных преобразований заключается в том, что матрица приводится к ступенчатому виду (он часто называется трапециевидный

вид или треугольный вид): $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$.

**Пример 2.** Вычислить определитель методом «треугольников» (правило Саррюса) и по теореме Лапласа.

*Решение*:

а) метод «треугольников» (правило Саррюса):

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 9 + (-7)\cdot(-2)\cdot 6 + 4\cdot 8\cdot 3 - (-7)\cdot 0\cdot 3 - 1\cdot 8\cdot 6 - 4\cdot(-2)\cdot 9 =$$

$$= 0 + 84 + 96 - 0 - 48 + 72 = 204$$

б) разложением определителя по первой строке (по теореме Лапласа):

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= (0\cdot 9 - 8\cdot 6) + 2\cdot(4\cdot 9 - (-7)\cdot 6) + 3\cdot(4\cdot 8 - (-7)\cdot 0) =$$

$$= 0 - 48 + 2\cdot(36 + 42) + 3\cdot(32 - 0) = -48 + 156 + 96 = 204$$

**Пример 3.** Решить систему уравнений по методу Гаусса

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -1 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ x + 2y - z = 9 \end{cases}$$

*Решение*: Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

Наша цель – с помощью элементарных преобразований привести матрицу к ступенчатому виду. С чего начать действия?

Сначала смотрим на левое верхнее число. Удобнее производить преобразования матрицы к ступенчатому виду, если находиться на этом месте единица. Как организовать единицу?

Преобразование первое: меняем местами первую и третью строки:

Теперь первая строка у нас останется неизменной до конца решения.

Нужно получить нули вместо цифры 2 во второй строке и нуль вместо цифры 3 на третьей строке вот на этих местах - цифры обведены:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Сначала разбираемся со второй строкой (2, –1, 3, 13):
что нужно сделать, чтобы на первой позиции получить ноль вместо 2? Нужно ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на (–2). Мысленно или на черновике умножаем первую строку на (–2):

(–2, –4, 2, –18).

И последовательно проводим (опять же мысленно или на черновике) сложение, ко второй строке прибавляем первую строку, уже умноженную на (–2):
Результат записываем во вторую строку.

$$\begin{array}{cccc} 0 & -5 & 5 & -5 \\ \| & \| & \| & \| \\ -2 & -4 & 2 & -18 \\ + & + & + & + \\ 2 & -1 & 3 & 13 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Аналогично разбираемся с третьей строкой (3, 2, –5, –1).

Чтобы получить на первой позиции ноль вместо цифры 3, нужно к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на (–3).

Результат записываем в третью строку:

$$\begin{array}{cccc} 0 & -4 & -2 & -28 \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ -3 & -6 & 3 & -27 \\ + & + & + & + \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

На практике эти действия обычно выполняются устно и записываются в один шаг.

Далее можно упростить вторую строку, получить единицу на следующей «ступеньке», вместо цифры (–5).

Вторую строку делим на (–5) (поскольку там все числа делятся на 5 без остатка). Заодно делим третью строку на (–2), ведь чем меньше числа, тем проще решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

На заключительном этапе элементарных преобразований нужно получить еще один ноль на третьей строке вместо цифры 2.

Для этого к третьей строке прибавляем вторую строку, умноженную на (–2).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Продолжаем решение системы уравнений.

Обратный ход метода Гаусса: при помощи коэффициентов полученной матрицы создаем новую систему уравнений.

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная исходной системе уравнений новая система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 9 \\ y - z = 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

В третьем уравнении у нас уже готовый результат: z= 4.
Смотрим на второе уравнение. Значение «зет» уже известно z = 4.
Находим значение y:

$$y - z = 1$$
$$y - 4 = 1$$
$$y = 5$$

И, наконец, в первое уравнение подставляем «игрек» и «зет» известные:

$$x + 2y - z = 9$$
$$x + 10 - 4 = 9$$
$$x = 3.$$

Рекомендуется выполнить проверку, подставив найденные значения x =3, y =5 и z =4 в первоначальную систему уравнений и убедиться в правильности равенства каждой строки системы уравнений.

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -1 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ x + 2y - z = 9 \end{cases}$$

$$9 + 10 - 20 = -1$$
$$6 - 5 + 12 = 13$$
$$3 + 10 - 4 = 9.$$

Ответ: x =3, y =5 и z =4.

**Пример 4.** Решить систему уравнений методом Крамера

*Решение*:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases}$$

Составим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

Получим в этом определителе нули для упрощения вычислений.

Для получения нулей в строках определителя воспользуемся свойством определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

величина определителя не изменится, если к элементам любой его строки (столбца) прибавить элементы любой другой строки (столбца), умноженной (-го) на число.

Первую строку умножаем на (–1) и прибавляем ко второй, запишем результат во второй строке.

Затем первую строку умножаем на (–1) и прибавляем к третьей строке, запишем результат сложения на третьей строке.

Применим свойство о разложении определителя по элементам любой строки (столбца) по теореме Лапласа.

Этот определитель удобно вычислить по теореме Лапласа, разложив определитель по первому столбцу. Получим:

$$\Delta = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2$$

Составим вспомогательные определители и вычислим их:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -17 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 2 \begin{vmatrix} -5 & -17 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= 2(-15 + 17) = 4$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 6 \qquad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

Значения $x_1$, $x_2$, $x_3$ вычисляются по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}$$

$$x_1 = \frac{4}{2} = 2; \quad x_2 = \frac{6}{2} = 3; \quad x_3 = \frac{-2}{2} = -1$$

Рекомендуется делать проверку, подставив найденные значения неизвестных в первоначальную систему уравнений. Проверку выполнить самостоятельно.

Ответ: $x_1 = 2; \; x_2 = 3; \; x_3 = -1.$

**Пример 5.** Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases}$$

*Решение*:

Для решения системы матричным методом введем обозначения матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Запишем матричное уравнение и выразим матрицу X:

$$AX = B \quad X = A^{-1}B.$$

Вычисляем определитель матрицы А.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

Так как $\Delta = 2 \neq 0,$ то для матрицы А существует обратная матрица $A^{-1}$.

Найдем обратную матрицу. Для этого вычислим алгебраические дополнения всех элементов главного определителя $\Delta$ системы:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&4\\3&9\end{vmatrix}=6;\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1&4\\1&9\end{vmatrix}=-5;\quad A_{13}=\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=1.$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1&1\\3&9\end{vmatrix}=-6;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1&1\\1&9\end{vmatrix}=8;\quad A_{31}=\begin{vmatrix}1&1\\2&4\end{vmatrix}=2;$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&4\end{vmatrix}=-3;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1.$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}=-(3-1)=-2$$

Составляем матрицу из алгебраических дополнений:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}6&-5&1\\-6&8&-2\\2&-3&1\end{pmatrix}$$

Транспонируем матрицу алгебраических дополнений.

Полученную транспонированную матрицу называют союзной матрицей А* или транспонированной матрицей.

Получаем после транспонирования для матрицы А союзную матрицу:

$$A^{*}=\begin{pmatrix}6&-6&2\\-5&8&-3\\1&-2&1\end{pmatrix}$$

Ранее вычислили $\Delta=2$. Обратная матрица $А^{-1}$ получается делением союзной матрицы на $\Delta=2$,

$$\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}3&-3&1\\-\frac{5}{2}&4&-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Находим матрицу X из уравнения

$$AX=B\quad X=A^{-1}B.$$

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3*4-3*4+1*2 \\ -\frac{5}{2}*4+4*4-\frac{3}{2}*2 \\ \frac{1}{2}*4-1*4+\frac{1}{2}*2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

После умножения матриц получаем:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 2;\ \ x_2 = 3;\ \ x_3 = -1.$$

Рекомендуется выполнить проверку, подставив найденные значения в первоначальную систему уравнений. Проверку выполнить самостоятельно.

Ответ: $x_1 = 2;\ \ x_2 = 3;\ \ x_3 = -1.$

## 2.2. Векторная алгебра

**Перечень изучаемых вопросов.**

Векторы, основные понятия. Линейные операции над векторами. Проекции вектора на ось; координаты точки и вектора; модуль, направляющие косинусы вектора. Разложение вектора по ортам координатных осей. Линейные операции над векторами. Равенство, коллинеарность, ортогональность, компланарность векторов. Нелинейные операции над векторами: скалярное, векторное и смешанное произведения, их свойства, выражения в координатах, геометрические приложения.

**Методические указания.**

Понятие вектора в современной математике является довольно широким понятием, связанным с понятием линейных операций (сложением и умножением на число). Для решения различного рода геометрических, физических, экономических задач, производственных задач различных отраслей широко применяются скалярное, векторное и смешанное произведения векторов. Пояснение всех терминов, используемых в задачах даны в методических рекомендациях по изучению данной темы в рекомендуемой литературе.

**Литература.** В предлагаемой литературе [6], [1], [8, 9], [11, 12] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

**Контрольные вопросы.**

1. Векторы. Основные определения. Линейные операции над векторами: сложение, вычитание, умножение вектора на число.

2. Условие коллинеарности векторов.

3. Проекция вектора на ось.

4. Линейная комбинация векторов. Линейно зависимые и линейно независимые векторы.

5. Прямоугольная декартова система координат на плоскости и в пространстве.

6. Разложение вектора по координатному базису. Координаты вектора.

7. Линейные операции над векторами, заданными своими координатами.

8. Координаты вектора, заданного двумя точками.

9. Расстояние между двумя точками.

10. Направляющие косинусы вектора.

11. Скалярное произведение векторов.

12. Векторное произведение векторов.

13. Смешанное произведение векторов.

14. Вычисление площади параллелограмма и треугольника с помощью векторного произведения.

15. Вычисление объема параллелепипеда, объема тетраэдра при помощи смешанного произведения векторов.

16. Условие компланарности векторов.

17. условие ортогональности векторов.

## Решение типовых задач.

**Пример 6.** Даны две точки плоскости A(2; 1) и B(-2; 3). Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$

*Решение*:

Если даны две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то координаты вектора $\overline{AB}$ находят по формуле $\overline{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$

$$\overline{AB}(-2-2; 3-1) = \overline{AB}(-4; 2)$$

Ответ: $\overrightarrow{AB}(-4; 2)$

**Пример 7.** Даны точки А(-3; 5) и В(1; -3). Найти длину отрезка АВ (модуль вектора АВ).
Решение:

Если даны две точки плоскости $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ длину отрезка АВ (модуль вектора) можно вычислить по формуле

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(1-(-3))^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Ответ: $4\sqrt{5}$.

**Пример 8.** Даны векторы $\overline{a}(1; -2)$ и $\overline{b}(2; 3)$. Найти координаты вектора $\overline{a} - \overline{b}$

Решение:

$$\overline{a} - \overline{b} = \{1 - 2; -2 - 3\} = (-1; -5).$$

**Пример 9.** Найти скалярное произведение векторов $\overline{a}(2; -5)$ и $\overline{b}(-1; 0)$

*Решение*:

$$\overline{a}\overline{b} = 2 \cdot (-1) + (-5) \cdot 0 = -2 + 0 = -2.$$

**Пример 10.** Даны три вершины треугольника А (-1; 0), В (3; 2) и С (5; -4) Найти $\angle ABC$ (угол при вершине В), (рисунок 1).

$$|AB| = 4\sqrt{5} \text{ ед.} \approx 8{,}94 \text{ ед.}$$

*Решение*:

Найдём векторы:

$\overline{BA}(-1-3; 0-2) = \overline{BA}(-4; -2)$

$\overline{BC}(5-3; -4-2) = \overline{BC}(2; -6)$

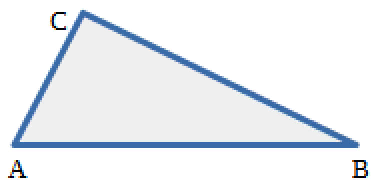


Рисунок 1

Вычислим скалярное произведение этих векторов:

$\overline{BA}\cdot\overline{BC} = -4\cdot 2 - 2\cdot(-6) = -8 + 12 = 4$

Вычисляем длины векторов:

$$\left|\overline{BA}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Косинус угла:

$$\cos\angle(\overline{BA};\ \overline{BC}) = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{BA}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|} = \frac{4}{2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

Ответ: $\cos B = \frac{1}{5\sqrt{2}}$.

**Пример 11.** Найти векторное произведение векторов $\overline{a}(-1;\ 2;\ -3),\ \overline{b}(0;\ -4;\ 1)$ и длину (модуль) полученного вектора.

*Решение*:

1) Найдём векторное произведение:

$$\overline{N} = \left[\overline{a}\times\overline{b}\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}\cdot\overline{i} - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\cdot\overline{j} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}\cdot\overline{k} =$$

$$= (2-12)\cdot\overline{i} - (-1-0)\cdot\overline{j} + (4-0)\cdot\overline{k} = -10\overline{i} + \overline{j} + 4\overline{k}$$

В результате получен вектор $\overline{N} = -10\overline{i} + \overline{j} + 4\overline{k}$, можно записать его координаты $\overline{N}(-10;\ 1;\ 4)$.

2) Вычислим длину векторного произведения:

$$\left|\overline{N}\right| = \sqrt{(-10)^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{100+1+16} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}.$$

Ответ: $\vec{a}\times\vec{в} = (-10; 1; 4)$, $|a\times b|$ $=3\sqrt{13}$

**Пример 12.** Даны векторы $\overline{a}(1;\ -1;\ 2),\ \overline{b}(0;\ 4;\ 3),\ \overline{c}(3;\ 2;\ -6)$.

Вычислить:

а) объём параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ (рисунок 2);

б) объём тетраэдра, построенного на векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ (рисунок 3).

*Решение*:

а)

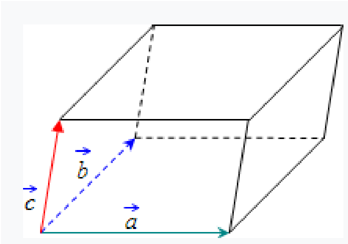


Рисунок 2

Объём параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ , равен модулю смешанного произведения данных векторов $\vec{a} \times \vec{в} \cdot \vec{c}$ :

$$p = (\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (-24-6) + 3 \cdot (-3-8) = -30 - 33 = -63$$

$$V_{п-пипеда} = |p| = |-63| = 63 \text{ ед}^3.$$

б)

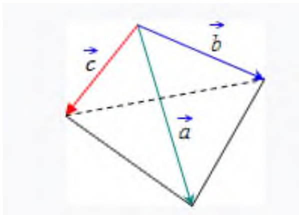


Рисунок 3

Объём тетраэдра, построенного на данных векторах в шесть раз меньше объема параллелепипеда, построенного на этих же векторах:

$$V_{тетраэдра} = \frac{1}{6} \cdot |p| = \frac{1}{6} \cdot |-63| = \frac{63}{6} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2} \text{ ед}^3.$$

**2.3. Аналитическая геометрия на плоскости**

**Перечень изучаемых вопросов.**

Основные понятия: система координат на плоскости, расстояние между двумя точками, деление отрезка в данном отношении, площадь треугольника, линии на плоскости. Уравнения прямой на плоскости: с угловым коэффициентом, общее, в отрезках, каноническое, параметрическое, нормальное. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Угол между двумя прямыми, расстояние от точки до прямой, взаимное расположение двух прямых на плоскости. Линии второго порядка на плоскости: окружность, эллипс, гипербола, парабола: канонические уравнения.

**Методические указания.**

Аналитическая геометрия - область математики, в которой геометрические задачи решаются алгебраическим способом. Важно научиться анализировать геометрические свойства линии на основе анализа их уравнений.

**Литература.** В предлагаемой литературе [1], [8, 9], [10–12] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

**Контрольные вопросы.**

1. Задание множеств точек уравнениями и неравенствами. Уравнение линии на плоскости.

2. Прямая на плоскости. Общее уравнение.

3. Угловой коэффициент прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

4. Уравнение прямой, проходящей через две точки.

5. Уравнение прямой в отрезках.

6. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых.

7. Понятие о кривых второго порядка. Канонические уравнения эллипса, окружности, параболы, гиперболы.

## Решение типовых задач.

**Пример 13.** Найти угол между прямыми $3x-4y+1=0$ и $5x-12y+3=0$.

*Решение*:

Уравнения прямых записаны в виде уравнения прямой с нормальным вектором $Ax+By+C=0$ (рисунок 4).

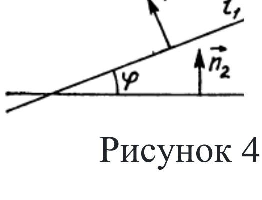


Рисунок 4

Можно записать нормальный вектор каждой из заданных прямых: $\overrightarrow{n_1}(3;-4)$ и $\overrightarrow{n_2}(5;-12)$.

Угол между прямыми равен углу между нормальными векторами этих прямых.

По формуле угла между векторами

$$\cos\varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

найдем угол между прямыми: имеем

$$\cos\varphi = \frac{3 \cdot 5 + (-4) \cdot (-12)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{15 + 48}{5 \cdot 13} = \frac{63}{65} \approx 0{,}96,$$

$$\varphi = \arccos 0{,}96.$$

Ответ: $\varphi = \arccos 0{,}96.$

**Пример 14.** Написать уравнение прямой, проходящей через т. А (–1; –4) и т. В (3; –5).

*Решение*:

Уравнение прямой проходящей через две заданные точки находят по формуле:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Подставим в формулу $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $y_1 = -4$, $y_2 = -5$

$$\frac{y - (-4)}{-5 - (-4)} = \frac{x - (-1)}{3 - (-1)}.$$

Преобразуем полученное выражение к виду А$x$ + В$y$ + С = 0:

$$\frac{y + 4}{-5 + 4} = \frac{x + 1}{3 + 1}.$$

$$4(y + 4) = -1\,(x + 1)$$

$$x + 4y + 17 = 0$$

Ответ: уравнение прямой $x + 4y + 17 = 0$.

**Пример 15.** Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через т. А (–1; –4) и т. В (3; –5).

*Решение*:

Если известны две точки прямой, угловой коэффициент прямой находим по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Координаты точек для данной задачи $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $y_1 = -4$, $y_2 = -5$

$$k = \frac{-5 - (-4)}{3 - (-1)} = \frac{-1}{4}$$

Ответ: $k = \frac{-1}{4}$

**Пример 16.** Прямая задана уравнением $y = -2x + 3$. Требуется написать уравнение прямой, параллельной заданной прямой и проходящей через точку М (4; 3).

*Решение*:

Решить задачу можно двумя способами.

*Способ 1.* По условию прямые параллельны, следовательно, их угловые коэффициенты должны быть равны. Угловой коэффициент прямой $y = -2x + 3$ равен $k = -2$.

По формуле $\boldsymbol{y - y_1 = k\,(x - x_1)}$ запишем уравнение прямой, проходящей через точку М (4; 3) с угловым коэффициентом прямой $k = -2$.

$$y - 3 = k(x - 4).$$
$$y - 3 = -2(x - 4)$$
$$y = -2x + 11.$$

*Способ 2.* Эту же задачу можно решить по формуле

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) = 0$$

– это уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0;\ y_0)$ с нормальным вектором $\overrightarrow{n_1}$ (А; В).

Прямая задана уравнением $y = -2x + 3$.

Для нахождения координат нормального вектора уравнение прямой перепишем в виде $2x + y - 3 = 0$.

Нормальный вектор этой прямой имеет координаты $\overrightarrow{n_1}\ (2; 1)$.

Прямые параллельны, следовательно, коллинеарны и нормальные вектора этих прямых.

Один из нормальных векторов нужной нам прямой имеет координаты $n1$ (2;1). Подставляем координаты точки М (4; 3) и нормального вектора $\overrightarrow{n_1}$ (2;1) в формулу $A(x - x_0) + B\,(y - y_0) = 0$

$$2(x-4)+1\,(y-3)=0$$

$$2x+y-11=0 \text{ или } y=-2x+11.$$

Ответ: $y = -2x + 11$

**Пример 17.** Написать уравнение прямой, приходящей через точку М(5; –3) и перпендикулярную заданной прямой $2x + 4y + 7 = 0$.

*Решение*:

Из уравнения прямой $2x + 4y + 7 = 0$ можно найти координаты нормального вектора $\overrightarrow{PM_1}(2;4)$. Этот вектор будет направляющим для нужной нам прямой и уравнение этой прямой можно найти по формуле

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}.$$

l = 2, m = 4, $y_0 = -3$, $x_0 = 5$

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y-(-3)}{4}$$

$$2\,(y+3)=4\,(x-5)$$

$$2(y+3)-4\,(x-5)=0$$

$$2y+6-4x+20=0$$

$$4x-2y-26=0$$

$$2x-y-13=0$$

Можно проверить выполнение условия перпендикулярности этих прямых.

Нормальный вектор полученной прямой имеет координаты (2; –1), а нормальный вектор заданной прямой $\overrightarrow{PM_1}(2;4)$, эти два вектора будут ортогональны, так как прямые взаимно перпендикулярны, следовательно, скалярное произведение этих векторов должно быть равно нулю:

$2\cdot 2+(-1)\cdot 4=0$. Верно.

Ответ: $2x - y - 13 = 0$.

**Пример 18.** Найти расстояние от т. А (2; 0) до прямой $3x - 5y + 4 = 0$.

*Решение*:

Расстояние от точки М($x_0$; $y_0$) до прямой заданной уравнением

$Ax + By + C = 0$ находим по формуле

$$d=\left|\frac{A\cdot x_0+B\cdot y_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

$x_0 = 2$, $y_0 = 0$, A = 3, B = - 5, C = 4.

$$d = \left| \frac{3 \cdot 2 + (-5) \cdot 0 + 4}{\sqrt{3^2 + (-5)^2}} \right| = \frac{10}{\sqrt{34}} = \frac{10}{5{,}83} = 1{,}72$$

Ответ: $d = 1{,}72$.

**Пример 19.** Даны вершины треугольника $A(0;\ 1)$, $B(6;\ 5)$ и $C(12;\ -1)$. Найти уравнение высоты треугольника, опущенной из вершины $C$ на сторону (рисунок 5).

*Решение*:

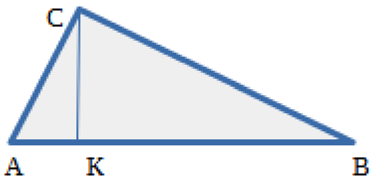


Рисунок 5

Найдем угловой коэффициент стороны AB по двум точкам прямой A(0; 1) и B(6; 5) по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

$k_2$ – угловой коэффициент прямой AB.

$$k_2 = k_{AB} = \frac{5-1}{6-0} = \frac{2}{3}.$$

По условию задачи высота $CK$ перпендикулярна основанию треугольника $AB$, следовательно, произведение углового коэффициента прямой AB на угловой коэффициент прямой CK равно минус единице

$$K_{CK} \cdot K_{AB} = -1.$$

Из этого равенства можно вычислить угловой коэффициент прямой CK

$$k_{CK} = -\frac{1}{\kappa_{AB}} = -\frac{1}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}.$$

По формуле $y - y_1 = k(x - x_1)$ найдем уравнение высоты $CK$, где

$(x_1;\ y_1)$ координаты точки $C$ (12; –1) и, соответственно, равны $x_1 = 12$, $y_1 = -1$.

Получаем:

$$y + 1 = -\frac{3}{2}(x - 12)$$

$$3x + 2y - 34 = 0.$$

Ответ: $3x + 2y - 34 = 0$ – уравнение высоты треугольника, опущенной из вершины $C$ на сторону $AB$.

**Пример 20.** Даны вершины треугольника $A(0;\ 1)$, $B(6;\ 5)$ и $C(12;\ -1)$. Найти уравнение медианы треугольника, проведенной из вершины $C$.

*Решение*:

Обозначим точкой Д середину стороны АВ, медиана соединяет вершину треугольника с серединой противоположной стороны (рисунок 6).

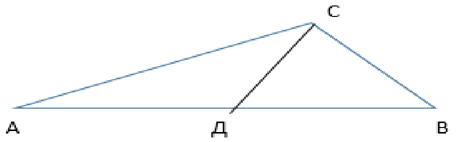


Рисунок 6

Найдем координаты середины стороны $AB$, т.е. координаты точки Д по формулам

$$x = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0+6}{2} = 3$$

$$y = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+5}{2} = 3.$$

Д(3; 3).

Уравнение медианы находим с помощью уравнения прямой, проходящей через две точки $C$ (12; –1) и Д (3; 3) по формуле

$$\frac{x - x_C}{x_D - x_C} = \frac{y - y_C}{y_D - y_C}.$$

Подставим значения координат точек С и Д

$$\frac{x-12}{3-12} = \frac{y+1}{3+1}$$

$$\frac{x-12}{-9} = \frac{y+1}{4}$$

$$4\ (x - 12) = -9\ (y + 1)$$

$$4x + 9y - 39 = 0$$

Ответ: $4x + 9y - 39 = 0$ – уравнение медианы треугольника, проведенной из вершины $C$.

## 2.4. Аналитическая геометрия в пространстве

**Перечень изучаемых вопросов.**

Уравнения плоскости в пространстве: уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору; общее уравнение плоскости; уравнение плоскости, проходящей через три данные точки; уравнение плоскости в отрезках, нормальное уравнение плоскости. Угол между двумя плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей, расстояние от точки до плоскости, взаимное расположение двух плоскостей в пространстве.

Уравнения прямой в пространстве: канонические, параметрические. Уравнение прямой, проходящей через две точки; общее уравнение прямой. Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых, взаимное расположение двух прямых в пространстве, угол между прямой и плоскостью, точка пересечения двух прямых, точка пересечения прямой и плоскости, условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости, условие принадлежности прямой плоскости.

**Методические рекомендации.**

**Основные формулы.**

1. Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

2. Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и $M_1(x_1; y_1; z_1)$, имеют вид:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

4. Угол $\varphi$ между прямой

$$\frac{(x-x_0)}{1}=\frac{(y-y_0)}{m}=\frac{(z-z_0)}{n}$$

и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ находится с помощью формулы

$$\sin\varphi=\frac{(Al+Bm+Cn)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{1^2+m^2+n^2}}$$

**Литература.** В предлагаемой литературе [1], [8–12] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

**Контрольные вопросы.**

1. Уравнение линии в пространстве.
2. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
3. Угол между двумя прямыми.
4. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых.
5. Уравнение плоскости.
6. Расстояние от точки до плоскости.
7. угол между прямой и плоскостью.

**Решение типовых задач.**

**Пример 21.** Даны координаты вершин $A_1A_2A_3A_4$ пирамиды:

$$A_1(4;4;10),\ A_2(4;10;2),\ A_3(2;8;4),\ A_4(9;6;4)$$

Найти длину ребра $A_1A_2$

*Решение*:

$$d=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$$

$$d=\sqrt{(4-4)^2+(10-4)^2+(2-10)^2}=\sqrt{6^2+(-8)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$$

Ответ: $|A_1A_2|=10$

**Пример 22.** Даны координаты вершин $A_1A_2A_3A_4$ пирамиды (рисунок 7):

$$A_1(4;4;10),\ A_2(4;10;2),\ A_3(2;8;4),\ A_4(9;6;4)$$

Найти угол между ребрами $A_1A_2$ и $A_1A_4$.

*Решение*: Угол между прямыми найдем как угол между векторами
Находим координаты векторов: $\{x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0\}$

$\overrightarrow{A_1A_2} = (4-4;10-4;2-10)$

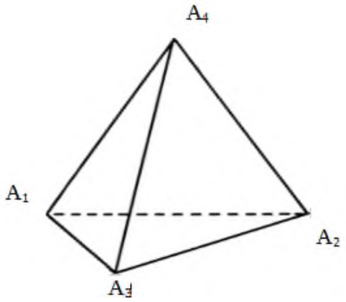


Рисунок 7

$\overrightarrow{A_1A_2} = (0;6;-8)$

$\overrightarrow{A_1A_4} = (9-4;6-4;4-10)$

$\overrightarrow{A_1A_4} = (5;2;-6)$

Угол между векторами $\overrightarrow{A_1A_2} = (0;6;-8)$ и $\overrightarrow{A_1A_4} = (5;2;-6)$ вычисляется по формуле:

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + z_1^{\ 2}} \cdot \sqrt{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2} + z_2^{\ 2}}}$$

$$\cos\alpha = \frac{0\cdot 5 + 6\cdot 2 + (-8)\cdot(-6)}{\sqrt{0^2 + 6^2 + (-8)^2} \quad \cdot \sqrt{5^2 + 2^2 + (-6)^2}} = \frac{60}{10\sqrt{65}} = \frac{6}{\sqrt{65}}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{6}{\sqrt{65}}\right)$$

Ответ: $\alpha = \arccos\left(\frac{6}{\sqrt{65}}\right)$.

**Пример 23.** Даны координаты вершин $A_1A_2A_3A_4$ пирамиды: $A_1(4;4;10)$, $A_2(4;10;2)$, $A_3(2;8;4)$, $A_4(9;6;4)$ (рисунок7, см. выше). Найти угол между ребром $A_1A_4$ и гранью $A_1A_2A_3$.

*Решение*: Координаты вектора

$$\overrightarrow{A_1A_4} = (5;2;-6)$$

Находим уравнение плоскости, содержащей точки $A_1,\ A_2,\ A_3$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-4 & z-10 \\ 4-4 & 10-4 & 2-10 \\ 2-4 & 8-4 & 4-10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-4 & y-4 & z-10 \\ 0 & 6 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= (-4)6(-6) + (y-4)(-8)(-2) + (z-10)0 \cdot 4 - (z-10)6(-2) -$$

$$-(y-4)0(-6) - (x-4)4(-8) =$$

$$= -36x + 144 + 16y - 64 + 12z - 120 + 32x - 128 =$$

$$= -4x + 16y + 12z - 168 = 0$$

$$-4x + 16y + 12z - 168 = 0$$

Сократим на (-4) и получаем уравнение плоскости  x – 4y -3z +42 =0

Вектор нормали к этой плоскости имеет координаты $\vec{n}(1;-4;-3)$.

Косинус угла между плоскостью и вектором равен синусу угла между этим вектором и вектором нормали плоскости.

$\vec{n}(1;-4;-3)$  $\overrightarrow{A_1A_4} = (5;2;-6)$

$$\sin\alpha = \frac{1\cdot 5 + (-4)\cdot 2 + (-3)\cdot(-6)}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-3)^2}\cdot\sqrt{5^2 + 2^2 + (-6)^2}} = \frac{15}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{65}} = \frac{15}{13\sqrt{10}}$$

$$x - 4y - 3z + 42 = 0$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{15}{13\sqrt{10}}\right)$$

Ответ: $\alpha = \arcsin\left(\frac{15}{13\sqrt{10}}\right)$ .

**Пример 24.** Даны координаты вершин $A_1A_2A_3A_4$ пирамиды: $A_1(4;4;10)$, $A_2(4;10;2)$, $A_3(2;8;4)$, $A_4(9;6;4)$ .

Найти площадь грани $A_1A_2A_3$ (рисунок7, см. выше).

*Решение*:

Грань $A_1A_2A_3$ – треугольник, его площадь вычислим по формуле $S=\frac{1}{2}|a\times b|$ , $|a\times b|$ – модуль векторного произведения

двух векторов (сторон треугольника) равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

Находим векторное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$

$\overrightarrow{A_1A_2}=(0;6;-8)$

$\overrightarrow{A_1A_3}=(2-4;8-4;4-10)$

$\overrightarrow{A_1A_3}=(-2;4;-6)$

$$\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 6 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix}=-36i+16j+12k+32i=-4i+16j+12k$$

Результатом векторного произведения будет вектор с координатами (-4; 16; 12), найдем длину этого вектора (модуль вектора):

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\sqrt{(-4)^2+16^2+12^2}=\sqrt{416}=4\sqrt{26}$$

Длина полученного вектора численно равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах. Площадь треугольника равна

$$S=\frac{1}{2}4\sqrt{26}=2\sqrt{26}$$

Ответ: $S=2\sqrt{26}$

**Пример 25.** Даны координаты вершин $A_1A_2A_3A_4$ пирамиды: $A_1(4;4;10)$, $A_2(4;10;2)$, $A_3(2;8;4)$, $A_4(9;6;4)$ (рисунок 7, см. выше).

Найти объем пирамиды.

*Решение*:

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right)\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right|$$

где $\left(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right)\cdot\overrightarrow{A_1A_4}$ – смешанное произведение векторов, выходящих из одной точки:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (0;6;-8) \qquad \overrightarrow{A_1A_3} = (-2;4;-6) \qquad \overrightarrow{A_1A_4} = (5;2;-6)$$

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right) \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \\ 5 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-6) \cdot 5 + (-2) \cdot 2 \cdot (-8) + 8 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot (-6) \cdot 6 =$$

$$-180 + 32 + 160 - 72 = -60$$

$$V = \frac{1}{6} 60 = 10$$

Ответ: $V = 10$

**Пример 26.** Даны координаты вершин $A_1A_2A_3A_4$ пирамиды:

$$A_1(4;4;10),\ A_2(4;10;2),\ A_3(2;8;4),\ A_4(9;6;4)$$

(рисунок 7, см. выше). Найти уравнение прямой $A_1A_2$

*Решение*:

Каноническое уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

где $(x_1, y_1, z_1)$ – точка, принадлежащая прямой – $A_1(4;4;10)$, $(a, b, c)$ – направляющий вектор этой прямой – $\overrightarrow{A_1A_2} = (0;6;-8)$.

$$\frac{x - 4}{0} = \frac{y - 4}{6} = \frac{z - 10}{-8}$$

Ответ: $\frac{x-4}{0} = \frac{y-4}{6} = \frac{z-10}{-8}$

**Пример 27.** Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(4;4;10),\ A_2(4;10;2),\ A_3(2;8;4),\ A_4(9;6;4)$$

Найти уравнение высоты, опущенной из вершины $A_4$ на грань $A_1A_2A_3$

*Решение*:

Находим уравнение прямой, проходящей через точку $A_4(9;6;4)$ и параллельную нормальному вектору плоскости.

Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ надо найти по формуле уравнения плоскости, проходящей через три точки.

Получили

$x-4y-3z+42=0$ (уравнение этой плоскости найдено в примере 23).

Вектор нормали к этой плоскости имеет координаты $\vec{n}(1;-4;-3)$, т. е. он и будет направляющим вектором высоты - прямой, перпендикулярной этой плоскости.

Уравнение высоты:

$$\frac{x-9}{1}=\frac{y-6}{-4}=\frac{z-4}{-3}$$

Ответ: $\frac{x-9}{1}=\frac{y-6}{-4}=\frac{z-6}{-3}$

**Пример 28.** Построить плоскость 3x – 2y + 4z –12 = 0. Определить отрезки, отсекаемые этой плоскостью на осях координат.

*Решение*:

Перепишем заданное уравнение в другом виде, в виде «в отрезках» на осях координат:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Для этого перенесем в правую часть свободный член и поделим на 12 обе части уравнения:

$$3x-2y+4z-12=0.$$

$$3x-2y+4z=12$$

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{3}=1,$$

Получаем: a= 4, b = –6, c= 3. На оси ох откладываем a=4, на оси оy откладываем b = –6, на оси oz откладываем c=3. Соединяем эти полученные точки.

Зная отрезки, которые отсекает плоскость на осях координат, легко построить плоскость (часть плоскости) (рисунок 8).

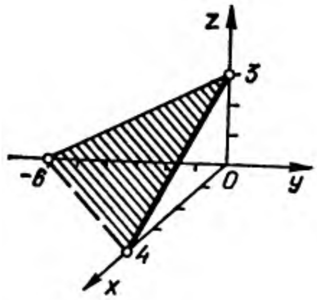


Рисунок 8

**2.5. Введение в математический анализ**

**Перечень изучаемых вопросов.**

Множества: основные понятия. Числовые множества. Числовые промежутки. Окрестность точки. Отображение множеств. Взаимно однозначное соответствие. Общее понятие функции действительной переменной, способы задания. Основные характеристики функции действительной переменной. Обратная функция. Сложная функция. Основные элементарные функции и их графики. Функции натурального аргумента (числовые последовательности). Предел числовой последовательности. Предел функции в точке. Основные теоремы о пределах. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Практическое отыскание пределов функций. Односторонние пределы функции. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых функций, эквивалентные бесконечно малые. Непрерывность функции в точке, непрерывность суммы, произведения и частного, классификация точек разрыва функции, непрерывность функции на сегменте.

**Методические указания.**

Понятие функции – одно из наиболее важных в математике и ее приложениях. В самом общем понимании функция – это зависимость между двумя переменными. В курсе математического анализа изучают главным образом числовые функции. Наглядное представление о числовой функции дает ее график. Это – некоторое множество точек на координатной плоскости, обычно – некоторая линия. Задать функцию означает: указать область определения функции и описать правило, позволяющее по данному значению аргумента находить соответствующее значение функции.

Важно усвоить понятия предела функции, бесконечно малых и бесконечно больших функций и методы вычисления приделов. Изучив эту главу студент будет готов к восприятию понятий производной и интеграла.

**Литература.** В предлагаемой литературе [1], [8, 9], [11] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

**Контрольные вопросы.**

1. Функция и способы ее задания. Область определения функции.
2. Основные элементарные функции и их графики.
3. Понятие предела функции.
4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
5. Основные теоремы о пределах.
6. Понятие о неопределенных выражениях. Раскрытие неопределенностей.
7. Первый и второй замечательный пределы.
8. Непрерывность функции. Понятие о точках разрыва функции.

### Решение типовых задач.

**Пример 29.** Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

*а)* $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$ *б)* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}$

*в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x-3}{2x^3+4x+3}$ *г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}$

*Решение*:

*а)* $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$

Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Для ее раскрытия разложим квадратные трехчлены в числителе и знаменателе на линейные множители по формуле

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Имеем:

$$\lim_{x\to -2}\frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}=\lim_{x\to -2}\frac{5(x+2)\left(x+\frac{3}{5}\right)}{3(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)}$$

Сократив общий множитель $(x+2)$, получим:

$$\lim_{x\to -2}\frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}=\lim_{x\to -2}\frac{5x+3}{3x-4}=\frac{7}{10}=0{,}7$$

*б)* $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}$

Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Для ее раскрытия умножим, и числитель, и знаменатель данной дроби на выражение, сопряженное числителю, а именно, на выражение $\sqrt{21+x}+5$.

Имеем:

$$\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{21+x}-5)(\sqrt{21+x}+5)}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)}=$$

Для упрощения числителя воспользуемся формулой:

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, где $a=\sqrt{21+x}-5$, $b=\sqrt{21+x}+5$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{21+x})^2-5^2}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)}=\lim_{x\to 4}\frac{21+x-25}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)}=$$

Разложим первый сомножитель знаменателя по формуле:

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, где $a=x,\quad b=4$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)}{(x-4)(x^2+8x+16)(\sqrt{21+x}+5)}=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{1}{(x^2+8x+16)(\sqrt{21+x}+5)}=\frac{1}{480}$$

*в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x-3}{2x^3+4x+3}$

Если числитель и знаменатель дроби представляют собой алгебраические многочлены и имеется неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, то для раскрытия этой неопределенности и числитель, и знаменатель делят на x в старшей степени. В данном случае старшая степень x в знаменателе равна 3, поэтому, и числитель, и знаменатель делим на $x^3$, имеем:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{10x}{x^3}-\frac{3}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{4x}{x^3}+\frac{3}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{10}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{2+\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=$$

(по теореме о пределе частного, имеем)

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{10}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}=$$

(по теореме о пределе суммы, имеем)

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{10}{x^2}-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x^3}}{\lim\limits_{x\to-\infty}2+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x^3}}=\frac{0}{2}=0$$

*г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}$

Имеем неопределенность вида: $1^{\infty}$.

Для ее раскрытия воспользуемся вторым замечательным пределом:

$\lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^{u}=e$ и преобразуем выражение в скобках для выделения единицы:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3+3}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x-3}+\frac{3}{2x-3}\right)^{2-5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-3}{3}}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x-3}{3}}\right)^{\frac{2x-3}{3}}\right)^{\frac{3}{2x-3}\cdot(2-5x)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3}{2x-3}\cdot(2-5x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2-5x)\cdot 3}{2x-3}}=e^{-\frac{15}{2}}$$

**2.6. Дифференциальное исчисление функции одной переменной**

**Перечень изучаемых вопросов.**

Приращение аргумента и функции, понятие производной непрерывной функции. Правила дифференцирования (производная суммы, произведения, частного и т.д.). Производная элементарных функций, сложной, неявно заданной, параметрически заданной функции. Геометрический и механический смысл производной. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков. Дифференциал, его свойства, геометрический смысл. Дифференциалы высших порядков. Основные теоремы о дифференцируемых функциях. Применение дифференциального исчисления к нахождению пределов (правило Лопиталя), к общему исследованию функции и построению ее графика (возрастание, убывание функции, необходимые и достаточные условия экстремумов функции, определение выпуклостей и точек перегиба).

**Методические указания.**

Понятие производной – одно из основных понятий математического анализа. Всякий процесс или явление, протекающее во времени, характеризуются наряду с другими показателями такой важной характеристикой, как скорость. Можно говорить о задаче нахождения скорости неравномерного движения, химической реакции, нагревания и остывания нагретого тела, производительности труда и т.д. Все эти задачи приводят к однотипным вычислениям, результат которых называют производной. Важно усвоить понятие производной, способы ее вычисления, а также научиться применять это понятие при решении прикладных задач.

**Литература.** В предлагаемой литературе [1], [8, 9], [11] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

**Контрольные вопросы.**

1. Определение производной. Ее механический и геометрический смысл. Уравнение касательной к графику функции.

2. Свойства производной. Основные правила нахождения производных.

3. Таблица производных основных элементарных функций.

4. Производные высших порядков.

5. Дифференциал функции. Геометрический смысл. Использование в приближенных вычислениях.

6. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей для вычисления пределов.

7. Признаки возрастания и убывания функций в интервале.

8. Экстремум функции. Необходимые и достаточные условия экстремума функции.

9. Направление выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции.

10. Схема исследования функции и построения ее графика.

## Решение типовых задач.

**Пример 30**. Найти производные следующих функций**:**

*а)* $y=\sqrt{5+2x^2}+\dfrac{4}{(x^2-4x+5)^3}$ *в)* $y=\dfrac{\cos^2(3x+2)}{x^2-2x}$

*б)* $y=\sin^5(3x+1)\cdot\arccos\sqrt{x}$

*Решение*:

*а)* $$y=\sqrt{5+2x^2}+\frac{4}{(x^2-4x+5)^3}$$

При нахождении производной данной функции воспользуемся следующими формулами:

$$(u\pm v)'=u'\pm v'$$

$$(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$$

Имеем:

$$y'=\left(\left(5+2x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)'+\left(4\left(x^2-4x+5\right)^{-3}\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}\left(5+2x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4x-12\left(x^2-4x+5\right)^{-4}(2x-4)$$

$$y' = 2x\left(5+2x^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{12(2x-4)}{\left(x^2-4x+5\right)^4}$$

*б)* $y = \sin^5(3x+1)\cdot\arccos\sqrt{x}$

При вычислении производной данной функции воспользуемся формулой:

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

Имеем:

$$y' = (\sin^5(3x+1))'\cdot\arccos\sqrt{x} + \sin^5(3x+1)(\arccos\sqrt{x}) \qquad (*)$$

При вычислении производной первого сомножителя воспользуемся формулой

$(u^n)' = n\cdot u^{n-1}\cdot u'$, где

$$u = \sin(3x+1) \Rightarrow (\sin^5(3x+1))' =$$

$$= 5\sin^4(3x+1)\cdot\cos(3x+1)\cdot 3 = 15\sin^4(3x+1)\cdot\cos(3x+1)$$

При вычислении производной второго сомножителя воспользуемся следующей формулой:

$$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$$

$$(\arccos\sqrt{x})' = -\frac{1}{\sqrt{1-(x^{\frac{1}{2}})^2}}\cdot(x^{\frac{1}{2}})' = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Подставляя вычисленные производные в равенство (*), имеем:

$$y' = 15\sin^4(3x+1)\cdot\cos(3x+1)\cdot\arccos\sqrt{x} - \sin^5(3x+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$$

*в)* $y = \dfrac{\cos^2(3x+2)}{x^2-2x}$

В данном случае сначала воспользуемся формулой:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$y' = \frac{(\cos^2(3x+2))' \cdot (x^2-2x) - \cos^2(3x+2) \cdot (x^2-2x)'}{(x^2-2x)^2}$$

Производную числителя и знаменателя вычисляем, используя формулу $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

$$(\cos^2(3x+2))' = 2\cos(3x+2) \cdot (-\sin(3x+2)) \cdot 3 = -3\sin(2(3x+2)),$$

так как $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha$ и $(x^2-2x)' = 2x-2$.

В результате получаем:

$$y' = \frac{-3\sin(6x+4) \cdot (x^2-2x) - \cos^2(3x+2) \cdot (2x-2)}{(x^2-2x)^2}.$$

## 2.7. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

**Перечень изучаемых вопросов.**

Функции двух переменных, основные понятия. Частные производные первого и второго порядков. Полный дифференциал, его применение к приближенным вычислениям. Экстремум функции двух переменных (необходимые и достаточные условия экстремума). Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области.

**Методические указания.**

В данной теме рассматриваются переменные величины, зависящие от нескольких других переменных величин. Необходимость изучения такого вида зависимостей вызваны тем, что во многих процессах и явлениях, встречающихся в природе, технике, в практической деятельности человека, числовые значения одной величины определяются набором из двух, трех и большего количества независимых переменных. При изучении этих явлений используют понятие функции нескольких переменных.

**Литература.** В предлагаемой литературе [1], [8], [11] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы

**Контрольные вопросы.**

1. Функции двух переменных. Область определения.
2. Линии уровня.  Понятие о функциях трех и более переменных.
3. Предел функции.
4. Непрерывность.

5. Частные производные. Их геометрический и механический смысл.

6. Полный дифференциал, его приложение к приближенным вычислениям.

7. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков.

8. Экстремумы функции двух переменных.

9. Необходимые условия. Понятие о достаточных условиях экстремума.

**Решение типовых задач.**

**Пример 31**. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

функции $z = \ln \sin \frac{x+a}{\sqrt{y}}$

*Решение*:

Считая y постоянной величиной (тогда и $\sqrt{y}$ также постоянная величина), а x переменной, получаем частную производную по x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sin \frac{x+a}{\sqrt{y}}} \cos \frac{x+a}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}} ctg \frac{x+a}{\sqrt{y}}$$

Считая x постоянной величиной, а y переменной, получаем частную производную по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sin \frac{x+a}{\sqrt{y}}} \cos \frac{x+a}{\sqrt{y}} \cdot \left( \frac{x+a}{\sqrt{y}} \right)_y^{/} = \frac{-(x+a)}{2y\sqrt{y}} \cdot ctg \frac{x+a}{\sqrt{y}}$$

**2.8. Неопределенный интеграл**

**Перечень изучаемых вопросов.**

Понятие неопределенного интеграла, свойства, таблица основных неопределенных интегралов. Основные методы интегрирования (непосредственного, подстановкой, по частям). Интегрирование рациональных дробей, тригонометрических и иррациональных функций.

**Методические рекомендации.**

Интегрирование – действие, обратное нахождению производной. Важно усвоить основные формулы интегрирования и методы интегрирования, так как интеграл применяется при решении многих практических задач.

**Литература.** В предлагаемой литературе [1], [4], [11] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

**Контрольные вопросы.**

1. Первообразная функция.
2. Неопределенный интеграл и его свойства.
3. Таблица основных интегралов.
4. Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование.
5. Основные методы интегрирования: замена переменной.
6. Основные методы интегрирования: интегрирование по частям.
7. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование.
8. Правильные и неправильные рациональные дроби.
9. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие.
10. Интегрирование дробно-рациональных функций.
11. Интегрирование некоторых видов тригонометрических функций.
12. Универсальная тригонометрическая подстановка.
13. Интегралы вида: $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$
14. Интегрирование некоторых видов иррациональных выражений.

### Решение типовых задач.

**Пример 32**. Найти неопределенный интеграл.

$$\int \cos(\ln x)\frac{dx}{x}.$$

*Решение*:

Решим "внесением переменной под знак дифференциала".

Так как $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$, то

$$\int \cos(\ln x)\frac{dx}{x} = \int \cos(\ln x) d(\ln x) = \sin(\ln x) + C$$

Проверка:

$$d(\sin(\ln x) + C = \cos(\ln x)\frac{1}{x}dx$$

**Пример 33**. Найти неопределенный интеграл $\int \ln x dx.$

*Решение*:

Решаем этот интеграл "по частям"

Положим $u = \ln x \quad dv = dx.$

Находим $du = \frac{dx}{x}; \quad v = \int dx = x.$

Применяя формулу интегрирования по частям $\int udv = u \cdot v - \int v \cdot du$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

**Пример 34**. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x^3 + x + 1}{x \cdot (x^2 + 1)} dx$

*Решение*:

Данная подынтегральная дробь – неправильная, поэтому сначала выделим целую часть

$$\frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{x^3 + x + 1}{x^3 + x} = 1 + \frac{1}{x^3 + x}$$

Представим дробь $\frac{1}{x^3 + x}$ в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{x^3 + x} = \frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + D}{x^2 + 1} = \frac{A(x^2 + 1) + x(Bx + D)}{x(x^2 + 1)} = \frac{Ax^2 + Bx^2 + A + Dx}{x(x^2 + 1)} =$$
$$\frac{x^2(A + B) + Dx + A}{x(x^2 + 1)}$$

Методом «неопределенных коэффициентов» находи значения A, B и D, т. е. приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях неизвестных в числителях дробей:

Тогда

$A + B = 0, D = 0, A = 1$,

следовательно $A = 1, B = -1, D = 0$.

Получим

$$\int \frac{x^3 + x + 1}{x \cdot (x^2 + 1)} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2 + 1}\right) dx = \int dx + \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = x + \ln|x| + \ln|x^2 + 1| + C$$

**Пример 35**. Найти неопределенный интеграл $\int \cos^4 x dx$

*Решение*:

Применим формулу понижения степени:

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

$$\int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left( \frac{1+\cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left( x + \sin 2x + \int \frac{1+\cos 4x}{2} dx \right) = \frac{1}{4}\left( x + \sin 2x + \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x \right) \right) + C$$

## 2.9. Определенный и несобственный интеграл

**Перечень изучаемых вопросов.**

Определенный интеграл как предел интегральной суммы, геометрический смысл, основные свойства, формула Ньютона-Лейбница, методы вычисления определенных интегралов (заменой переменной, по частям). Несобственные интегралы I и II рода. Геометрические приложения определенного интеграла (вычисления площадей плоских фигур, длины дуги плоской кривой, объема тела.

**Методические указания.**

Формула Ньютона-Лейбница устанавливает связь между двумя основными понятиями интегрального исчисления: неопределенным и определенным интегралами. Она позволяет вычислять определенные интегралы путем нахождения первообразных. Геометрические приложения определенного интеграла многочисленны: вычисление: площадей плоских фигур, объема тел вращения, длин дуг.

Многие задачи механики, физики, биологии , экономики можно решить, используя методы интегрирования.

**Литература.** В предлагаемой литературе [1], [4], [11] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

**Контрольные вопросы.**

1. Геометрический смысл определенного интеграла.
2. Основные свойства определенного интеграла.
3. Формула Ньютона-Лейбница.
4. Замена переменной в определенном интеграле.
5. Формула интегрирования по частям для определенного интеграл.
6. Несобственные интегралы (случай бесконечных пределов интегрирования).
7. Несобственные интегралы (интегралы от разрывных функций).
8. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых координатах.

9. Вычисление объемов тел вращения.

**Решение типовых задач.**

**Пример 33**. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x + 2, \quad y = 2x - \frac{x^2}{2} + 6.$$

*Решение*:

Найдем абсциссы точек пересечения прямой с параболой, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x + 2, \\ y = 2x - \dfrac{x^2}{2} + 6. \end{cases}$$

Решая эту систему получим $x_1 = -2, \quad x_2 = 1.$

Это и будут пределы интегрирования.

Итак, данные линии пересекаются в точках $A(-2;\,0)$, $B(4;\,6)$.

Эти линии образуют замкнутую фигуру (рисунок 9), площадь которой равна определенному интегралу:

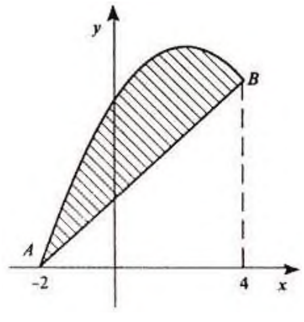


Рисунок 9

$$S = \int_{-2}^{4}\left(2x - \frac{x^2}{2} + 6 - x - 2\right)dx = \int_{-2}^{4}\left(x - \frac{x^2}{2} + 4\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x\right)\Bigg|_{-2}^{4} =$$

$$\frac{16}{2} - \frac{64}{6} + 16 - \frac{4}{2} - \frac{8}{6} + 8 = 18$$

**2.10. Дифференциальные уравнения**

**Перечень изучаемых вопросов.**

Общие понятия. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, линейные, второго порядка с постоянными коэффициентами. Понижение порядка уравнения.

**Методические указания.**

Многочисленные задачи естествознания, техники, механики, биологии, химии и других отраслей знаний сводятся к тому, что по заданным свойствам некоторого процесса или явления необходимо найти математическую модель самого процесса в виде формулы, связывающей переменные величины в виде функциональной зависимости. При изучении таких задач используют дифференциальные уравнения.

**Литература.** В предлагаемой литературе [1], [4], [11] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

**Контрольные вопросы.**

1. Дифференциальные уравнения первого порядка.
2. Общее и частное решения.
3. Задача Коши.
4. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши.
5. Интегрирование простейших типов дифференциальных уравнений первого порядка.
6. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
7. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
8. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
9. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.
10. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Однородные уравнения.
11. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
12. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.
13. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

## Решение типовых задач.

**Пример 34**. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка

$$\left(1+e^{x}\right)y dy = e^{x} dx\left(1+y^{2}\right).$$

*Решение*:

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными так как коэффициент при $dx$ представляет собой произведение двух сомножителей: $e^x$ зависит только от $x$, а выражение $(1+y^2)$ – только от $y$. Аналогично, коэффициент при $dy$ тоже является произведением двух сомножителей: $(1+e^x)$ зависит только от x, а второй сомножитель зависит только от $y$.

Чтобы привести его к виду уравнения с разделяющимися переменными, разделим все члены уравнения на произведение $(1+e^x)(1+y^2)$, в результате получим:

$$\frac{ydy}{1+y^2}=\frac{e^x dx}{1+e^x}$$

Решим это уравнение интегрированием. Здесь произвольную постоянную удобнее взять в виде $\ln C$.

$$\int\frac{ydy}{1+y^2}=\int\frac{e^x dx}{1+e^x}+\ln C$$

Левый интеграл решаем подстановкой $t=\frac{y}{1+y^2}$,

а правый интеграл решаем подстановкой $z=\frac{e^x}{1+e^x}$,

получаем:

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\ln(1+e^x)+\ln C$$

По свойствам логарифмических функций:

$$\ln\sqrt{1+y^2}=\ln C(1+e^x)$$

$\sqrt{1+y^2}=C(1+e^x)$ - это общий интеграл исходного уравнения.

**Пример 35**. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка:

$$y'''=x+\sin x.$$

*Решение*:

Общее решение этого уравнения находим последовательным трехкратным интегрированием, последовательно понижаем порядок производной. Имеем:

$$y''=\int(x+\sin x)dx=\frac{x^2}{2}-\cos x+c_1,$$

$$y'=\int\left(\frac{x^2}{2}-\cos x+c_1\right)dx=\frac{x^3}{6}-\sin x+c_1x+c_2,$$

$$y=\int\left(\frac{x^3}{6}-\sin x+c_1x+c_2\right)dx=\frac{x^4}{24}+\cos x+c_1\frac{x^2}{2}+c_2x+c_3.$$

## 2.11. Теория вероятностей случайных событий

**Перечень изучаемых вопросов.**

Классификация событий. Статистическое, классическое, геометрическое определение вероятности. Свойства вероятностей. Условная вероятность. Формула полной вероятности, формула Байеса. Повторные испытания. Формула Бернулли. Предельные теоремы Муавра-Лапласа.

**Методические указания.**

Теория вероятностей изучает объективные закономерности массовых случайных событий. Создаются математические модели, в которых учитываются наиболее существенные особенности изучаемого явления с допущениями. Она является теоретической базой для математической статистики, занимающейся разработкой методов сбора, описания и обработки результатов наблюдений.

**Литература.** В предлагаемой литературе [1–4] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

**Контрольные вопросы.**

1. Случайные события. Классическое, статистическое, геометрическое определения вероятности.
2. Произведение событий.
3. Зависимые и независимые события.
4. Теоремы умножения вероятностей.
5. Сумма событий. Теоремы сложения.
6. Следствия из теорем сложения и умножения.
7. Формула полной вероятности.
8. Формулы Бейеса.
9. Основные формулы комбинаторики. Повторение испытаний. Формула Бернулли.
10. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.

### Решение типовых задач.

**Пример 36**. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобрали 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 6 отличников.

*Решение*:

Общее число возможных элементарных исходов испытания n равно числу способов, которыми можно отобрать 9 студентов из 12, т. е. числу *сочетаний* из 12 элементов по 9 элементов:

n= $C^9_{12}$

Определим число исходов m, благоприятствующих интересующему нас событию $\boldsymbol{A}$ (среди 9 студентов 6 отличников). Надо выбрать 6 студентов отличников из 8 отличников $\boldsymbol{C^6_8}$ способами.

При этом остальные 9 – 6 = 3 студента не отличники. Выбрать трех студентов не отличников из 12 – 8 = 4 можно $\boldsymbol{C^3_4}$ способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно

m= $\boldsymbol{C^6_8 \cdot C^3_4}$.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{C}_8^6\,\mathrm{C}_4^3}{\mathrm{C}_{12}^9} = \frac{\frac{8!}{6!\ (8-6)!}\frac{4!}{3!\,(4-3)!}}{\frac{12!}{9!\,(12-9)!}} = \frac{8!\,4!\,9!\,(12-9)!}{6!\,2!\,3!\,(4-3)!\,12!} = \frac{14}{55}$$

$$\mathrm{P(A)} = \frac{14}{55}$$

Ответ: Вероятность того, что среди отобранных 9 студентов 6 отличников равна 14/55.

**Пример 37**. Монету бросают пять раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет: а) ровно два раза; б) менее двух раз; в) не менее двух раз.

*Решение*:

Вероятность того, что выпадет "герб" равна p = $\frac{1}{2}$ = 0.5, не «герб» (решка) равна q = 1 – p = 0,5. Монету бросают пять раз, значит n = 5.

Применим формулу Бернулли:

а) вероятность того, что «герб» выпадет ровно два раза

$$\mathbf{P_5\,(2)} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}p^k q^{n-k} = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!}0{,}5^2\,0{,}5^{5-2} = \frac{5!}{2!3!}0{,}5^{\,5} = \frac{4\cdot 5}{2\cdot 32} = \frac{5}{16}$$

б) вероятность того, что «герб» выпадет менее двух раз

$$\mathrm{P}_5\,(k<2) = P_5\,(0) + \mathrm{P}_5\,(1) = \frac{5!}{0!\cdot 5!}\,(0{,}5)^5 \cdot (0{,}5)^0 + \frac{5!}{1!\cdot 4!}\,(0{,}5)^4 \cdot (0{,}5)^1 = \frac{3}{16}$$

в) вероятность того, что «герб» выпадет не менее двух раз

$P_5(k \geq 2) = 1 - P_5(k < 2) = 1 - 3/16 = 13/16.$

Ответ: Вероятность того, что «герб» выпадает ровно два раза равна 5/16, менее двух раз – равна 3/16, не менее двух раз равна 13/16.

## 2.12. Теория вероятностей случайных величин

**Перечень изучаемых вопросов.**

Определение случайной величины, дискретность и непрерывность. Закон распределения, функция распределения, плотность распределения. Числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, их свойства. Основные законы распределения случайных величин (биномиальный, Пуассона, равномерного распределения, нормальный).

**Методические указания.**

Необходимо выяснить особенности случайных величин и их применение на практике. Случайная величина - это количественная характеристика испытаний, а случайное событие -качественная характеристика испытаний. Случайные величины делятся на дискретные и на непрерывные.

**Литература**. В предлагаемой литературе [1–4] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

**Контрольные вопросы.**

1. Интегральная функция распределения и ее свойства.
2. Непрерывные и дискретные случайные величины.
3. Дифференциальная функция распределения (плотность вероятности) и ее свойства.
4. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.
5. Равномерный закон распределения.
6. Показательный закон распределения. Функция надежности.
7. Нормальный закон распределения. Вероятность попадания значений случайной величины и заданный интервал для нормального закона.

### Решение типовых задач.

**Пример 38**. Некоторая случайная величина имеет следующий закон распределения:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $X$ | –5 | 2,5 | 10 |
| | 0,5 | 0,4 | 0,1 |

.

Найти математическое ожидание и дисперсию.

*Решение*:

Находим математическое ожидание $M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$.

$M(X) = -5 \cdot 0{,}5 + 2{,}5 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}1 = -2.5 + 1 + 1 = -0{,}5$

$M(X) = -0{,}5$.

Вычислим дисперсию по формуле $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$.

Найдём математическое ожидание $M(X^2)$ – квадрата случайной величины $X$.

$$M(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 + \ldots + x_n^2 p_n$$

В данном случае:

$M(X^2) = (-5)^2 \cdot 0{,}5 + (2{,}5)^2 \cdot 0{,}4 + 10^2 \cdot 0{,}1 = 12{,}5 + 2{,}5 + 10 = 25$

$M(X) = -0{,}5$

Вычисляем дисперсию:

$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 25 - (-0{,}5)^2 = 25 - 0{,}25 = 24{,}75$

Ответ: $M(X) = -0{,}5$, $D(X) = 24{,}75$

## 2.13. Элементы математической статистики

**Перечень изучаемых вопросов.**

Генеральная и выборочная совокупности, их числовые характеристики. Статистические оценки параметров распределения. Функциональная, статистическая, корреляционная зависимости. Выборочные уравнения регрессии. Выборочный коэффициент корреляции.

**Методические указания.**

Математическая статистика используется там, где для изучения процессов и явлений недостаточно только качественной характеристики. Изучаются способы сбора результатов наблюдений и их обработка. Теория вероятностей изучает объективные закономерности массовых случайных событий. Она является теоретической базой для математической статистики, занимающейся разработкой методов сбора, описания и обработки результатов наблюдений

**Литература**. В предлагаемой литературе [1–4] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

**Контрольные вопросы.**

1. Генеральная и выборочная совокупности, их числовые характеристики.
2. Статистические оценки параметров распределения.
3. Функциональная, статистическая, корреляционная зависимости.
4. Выборочные уравнения регрессии. Выборочный коэффициент корреляции.

**Решение типовых задач.**

**Пример 39**. Получена таблица частот оценок по контрольной работе у 40 учащихся класса:

| Оценка | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| Частота | $\frac{3}{40}$ | $\frac{8}{40}$ | $\frac{25}{40}$ | $\frac{4}{40}$ |

Найдите: выборочное среднее значение оценки; выборочную дисперсию; исправленную выборочную дисперсию; выборочное среднее квадратическое отклонение; исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.

*Решение*:

1. Выборочное среднее находим по формуле:

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i = \frac{2\cdot3+3\cdot8+4\cdot25+5\cdot4}{40} = 3{,}75$$

2. Выборочную дисперсию находим по формуле

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i \cdot x_i^2 - (\dddot{x}_b)^2$$

3. Исправленную выборочную дисперсию находим по формуле

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}} = \frac{40}{39} \cdot 0{,}5375 \approx 0{,}55$$

4. Выборочное среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}} = \sqrt{0{,}5375} \approx 0{,}73$$

5. Исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0{,}55} \approx 0{,}74$$

# 3. ТРЕБОВАНИЯ К АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

## 3.1. Текущий контроль и промежуточная аттестация

Основными видами аудиторных учебных занятий по дисциплине являются лекции и практические занятия. Формирование знаний студентов обеспечивается проведением лекционных занятий. Изучение всех разделов тематического плана сопровождается практическими занятиями, в ходе которых происходит закрепление теоретических знаний, формирование и совершенствование умений, навыков и компетенций.

Контроль знаний в ходе изучения дисциплины осуществляется в виде текущего контроля и промежуточной аттестации *в форме зачета в первом семестре и экзамена во втором учебном семестре* в соответствии с рабочим планом.

Текущий контроль (контроль выполнения заданий на самостоятельную работу) предназначен для проверки хода и качества усвоения студентами учебного материала и стимулирования их учебной работы. Текущий контроль предполагает постоянный контроль преподавателем качества усвоения учебного материала, активизацию учебной деятельности студентов на занятиях, побуждение их к самостоятельной систематической работе. Он необходим обучающимся для самоконтроля на разных этапах обучения. Результаты текущего контроля учитываются выставлением преподавателем оценок в журнале учета успеваемости и в ходе ежемесячной аттестации. Студенту рекомендуется проверять уровень своего знания учебной дисциплины путем выполнения тестовых заданий.

В приложении 1 ссылки на тестовые задания.

При текущем контроле успеваемости учитывается:

– выполнение студентами всех работ и заданий, предусмотренных рабочей программой дисциплины, а именно выполнение заданий на практических занятиях;

– самостоятельную работу студента;

– посещаемость аудиторных занятий (или занятий с применением дистанционных образовательных технологий- ДОТ).

### 3.2. Критерии выставления оценок и система оценок

Результаты текущего контроля успеваемости оцениваются по пятибалльной шкале:

оценка **«отлично» (5)** – график самостоятельной работы и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся на 100 % и более (с опережением);

оценка **«хорошо» (4)** – график самостоятельной работы и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся на 75 % и более;

оценка **«удовлетворительно» (3)** – график самостоятельной работы и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся на 50 % и более;

оценка **«неудовлетворительно» (2)** – график самостоятельной работы и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся менее чем на 50 %.

оценка «**0 баллов» (0)** - нет данных для аттестации (в случае неявки студента на учебные занятия и консультации по неустановленной причине и др.).

К экзамену и зачету допускаются студенты, имеющие по всем формам текущего контроля положительные оценки.

Положительная оценка на зачете ставится студенту по результатам текущей успеваемости за первый семестр.

Экзамен проводятся в соответствии с перечнем вопросов к экзамену. Вопросы и образцы практических заданий по программе первого семестра на экзамен представлены в приложении 2**,** вопросы и образцы заданий по темам, изучаемым во втором семестре, на экзамен представлены в приложении 3 данного пособия.

Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса и три практических задания.

В ходе подготовки к экзамену преподаватель проводит консультацию, на которой студентам доводится порядок проведения экзамена и даются ответы на вопросы, вызвавшие затруднения у студентов в процессе подготовки к экзамену.

Если требуется уточнить оценку или степень знаний обучающегося по тому или иному вопросу, преподавателем на экзамене задаются студенту дополнительные вопросы.

На экзамене не разрешается пользоваться конспектами, учебниками, учебными пособиями и иными дополнительными материалами, раскрывающими содержание вопросов.

Знания, умения и навыки студентов на экзамене определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно». Общая оценка объявляется студенту сразу же после окончания его ответа на все вопросы экзаменационного билета.

**Шкала промежуточной аттестации** по дисциплине, то есть оценивания результатов освоения дисциплины на экзамене, основана на четырехбалльной системе.

**Оценка «отлично»** выставляется в случае, если студент исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно излагал ответы на вопросы билета, обосновывая их в числе прочего и знаниями из общеобразовательных дисциплин, умеет делать обобщения и выводы, владеет основными терминами и понятиями, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, использовал в ответе материал дополнительной литературы, дал правильные ответы на дополнительные вопросы.

**Оценка «хорошо»** выставляется в случае, если студент грамотно и по существу излагал ответ на вопросы билеты, не допуская существенных неточностей, но при этом его ответы были недостаточно обоснованы, владеет основными терминами и понятиями, правильно применяет теоретические положения при решении задач, использует в ответе материал только основной литературы; владеет основными умениями; при ответе на дополнительные вопросы допускал неточности и незначительные ошибки.

**Оценка «удовлетворительно»** выставляется в случае, если студент при ответе на вопросы продемонстрировал знания только основного материала, но допускал неточности, использовал недостаточно правильные формулировки, испытывает затруднения при решении задач; использовал при ответе только лекционный материал; при ответе на дополнительные вопросы допускал ошибки.

**Оценка «неудовлетворительно»** выставляется в случае, если студент не смог объяснить смысл написанного им при подготовке к ответу текста; не ориентируется в терминологии дисциплины; не может ответить на дополнительные вопросы.

Компетенции в той части, в которой они должны быть сформированы в рамках изучения дисциплины, могут считаться сформированными в случае, если студент получил на экзамене положительную оценку.

Положительная оценка («отлично», «хорошо», «удовлетворительно») заносится в ведомость и зачетную книжку по окончании экзамена.

**Результаты выполнения ИДЗ** оцениваются по пятибалльной шкале:

оценка **«отлично» (5)** – ИДЗ выполнено и сдано в установленные сроки, задания выполнены студентом на 100%, верно выполнены задания всех предложенных уровней сложности;

оценка **«хорошо» (4)** – ИДЗ выполнено и сдано в установленные сроки, выполнены на 75 % задания всех уровней сложности;

оценка **«удовлетворительно» (3)** – ИДЗ выполнено и сдано в установленные сроки, выполнены на 100% задания первого уровня сложности;

оценка **«неудовлетворительно» (2)** – ИДЗ выполнено и сдано не в установленные сроки, выполнены менее чем на 50 % задания первого уровня сложности;

оценка «**0 баллов» (0)** - нет данных для аттестации (в случае неявки на учебные занятия и консультации по неустановленной причине и др.).

**Задания для выполнения контрольных работ № 1 и № 2** для студентов заочной формы обучения представлены в приложениях 4 и 5**,** а подробно методические указания по их выполнению и оформлению приведены в учебных пособиях [4] и [8].

Шкала оценивания результатов выполнения контрольной работы обучающимся заочной формы обучения основана на четырехбалльной системе.

Оценка **«отлично»** выставляется в случае, если задания выполнены по правильным формулам и алгоритмам и без ошибок.

Оценка **«хорошо»** выставляется в случае, если задания выполнены по правильным формулам и алгоритмам, но с некоторыми ошибками.

Оценка **«удовлетворительно»** выставляется в случае, если задания выполнены по правильным формулам и алгоритмам, но со множеством ошибок.

Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется в случае, если задания выполнены с использованием неправильных алгоритмов и формул.

Результаты измерений индикатора считаются положительными при положительной оценке за выполнение задания.

К зачету в первом семестре допускаются студенты заочной формы обучения, выполнившие на положительную оценку контрольную работу № 1. После исправления ошибок, допущенных студентом при выполнении контрольной работы, студент во время проведения зачета отвечает на вопросы преподавателя по учебному материалу и поясняет решения задач контрольной работы.

К экзамену во втором семестре допускаются студенты, выполнившие на положительную оценку контрольную работу № 2.

## 4. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

### 4.1. Самостоятельная работа

Внеаудиторная самостоятельная работа в рамках данной дисциплины включает в себя:

– подготовку к аудиторным занятиям (лекциям, практическим занятиям) и выполнение соответствующих заданий;

– самостоятельную работу над отдельными темами учебной дисциплины в соответствии с тематическим планом;

– выполнение контрольных работ;

– подготовку к зачету и экзамену.

При организации самостоятельного изучения ряда тем лекционного курса студент работает в соответствии с указаниями, выданными преподавателем. Студенту рекомендуется составлять опорный конспект, в котором должно быть отражено: название темы, основные вопросы темы, характеристика основных понятий и определений, выписаны наиболее важные фрагменты текстов рекомендуемых источников, даны ответы на контрольные вопросы, предназначенные для самопроверки знаний.

При ответе на вопросы, поставленные в ходе самостоятельной подготовки, студент вырабатывает в себе способность логически мыслить, искать в анализе событий причинно-следственные связи.

### 4.2. Подготовка к лекционным занятиям

При подготовке к лекции рекомендуется повторить ранее изученный материал, что дает возможность получить необходимые разъяснения преподавателя непосредственно в ходе занятия. Рекомендуется вести конспект, главное требование к которому - быть систематическим, логически связанным, ясным и кратким. По окончанию занятия в часы самостоятельной подготовки, по возможности в день аудиторных занятий, повторить изучаемый материал и доработать конспект.

### 4.3. Подготовка к практическим занятиям

Подготовка к практическим занятиям предусматривает:

– изучение теоретических положений, лежащих в основе будущих расчетов или методики расчетов;

– детальную проработку учебного материала, рекомендованной учебной литературы и/или методической разработки на предстоящее занятие.

### 4.4. Подготовка к экзамену

При подготовке к экзамену большую роль играют правильно подготовленные заранее записи и конспекты. В этом случае остается лишь повторить пройденный материал, учесть то, что было пропущено, восполнить пробелы, закрепить ранее изученный материал.

**4.5. По выполнению контрольных работ**

Учебным планом для студентов заочной формы обучения предусмотрено выполнение двух контрольных работ. **Задания для выполнения контрольных работ № 1 и № 2** для студентов заочной формы обучения представлены в приложениях 4 и 5**,** а подробно методические указания по их выполнению и оформлению приведены в учебных пособиях [4] и [8]. Вариант контрольной работы выбирается по последней цифре номера зачетной книжки студента.

**4.6. По выполнению индивидуальных домашних заданий (ИДЗ)**

В первом и во втором семестрах студентами очной формы обучения должно быть выполнено по одному индивидуальному домашнему заданию по всем изученным темам.

Цель индивидуальных домашних заданий - выявить знания студентов по указанным разделам математики, умение ими производить расчеты, привить студентам навыки самостоятельной работы с применением математических методов. В ходе выполнения ИДЗ студент должен проявить умение самостоятельно работать с учебной и научной математической литературой, применять математическую методологию в анализе конкретных данных.

Выполнение ИДЗ включает следующие этапы: ознакомление с нужным разделом дисциплины Математика, методическими рекомендациями по выполнению работы, проработку соответствующих разделов по рекомендованной учебной литературе и конспектам лекций, выполнение расчетов с применением освоенных методов.

Завершенная работа представляется для проверки преподавателю в установленные учебным графиком сроки. Преподаватель проверяет качество работы, отмечает положительные стороны, недостатки работы и оценивает ее.

При выполнении ИДЗ студент должен показать умение применять математические методы расчетов, делать на их основе аргументированные выводы. Условия задач в расчетной части должны быть приведены полностью. Решение задач следует сопровождать развернутыми расчетами, ссылками на математические формулы, анализом и выводами.

## 5. ПЕРЕЧЕНЬ РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


### Основная литература

1. Зайцев, И. А. Высшая математика: учеб. / И. А. Зайцев. – 4-е изд., стер. – Москва: ДРОФА, 2005. – 398 с.
2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 12-е изд. – Москва: Юрайт, 2014. – 478 с.

### Дополнительная литература

1. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 11-е изд., перераб. и доп. – Москва: Юрайт, 2014. – 404 с.
2. Зубарева, Н. П. Учебно-методическое пособие по выполнению контрольной работы № 2 по дисциплинам Математика и математическая статистика по направлениям подготовки 35.03.04, 35.03.03 и Математика по направлениям подготовки 36.03.02, 36.03.01 и 35.03.08 в бакалавриате студентами заочной формы обучения / Н. П. Зубарева. – Калининград: КГТУ, 2021. – 117 с.
3. Вялова, А. В. Матрицы и системы линейных уравнений: учеб. пособие / А. В. Вялова. – Калининград: ФГОУ ВПО «КГТУ». – 2009. – 63 с.
4. Вялова, А. В. Элементы векторной алгебры: учеб.-метод. пособие по дисциплине «Алгебра и аналитическая геометрия» / А. В. Вялова. – Калининград: ФГОУ ВПО «КГТУ». – 2011. – 70 с.
5. Елисеева, Н. А. Дифференциальные уравнения: метод. указ. к решению задач для студентов направления 020800.62 - Экология и природопользование / Н. А. Елисеева. – Калининград: КГТУ, 2008. – 30 с.
6. Винницкая, Ж. И. Математика: учеб.-метод. пособие по освоению дисциплины для студентов заоч. формы обучения по направлениям подгот. в бакалавриате / Ж. И. Виницкая, Т. А. Кутузова, Н. К. Мозговая. – Калининград: КГТУ, 2020. – Ч. 1. – 2020. – 109 с.
7. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие / П. Е. Данко [и др.]. – 7-е изд., испр. – Москва: АСТ: Мир и Образование; Минск: Харвест, 2014. – 815 с.
8. Клетеник, Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии: учеб. пособие / Д. В. Клетеник; под ред. Н. В. Ефимова. – 17-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Профессия, 2005. – 199 с.
9. Шипачев, В. С. Задачник по высшей математике: учеб. пособие / В. С. Шипачев. – 3-е изд., стер. – Москва: Высшая школа, 2003. – 304 с.
10. Вялова, А. В. Алгебра и геометрия: учеб.-метод. пособие/ А. В. Вялова, Н. А. Елисеева, Т. В. Ермакова. – Калининград: Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ», 2021. – 189с.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

**Приложение 1**

## Тестовые задания

Тестовые задания содержат вопросы, которые соответствуют разделам тематического плана дисциплины. Каждый тест включает 20 заданий закрытого типа с возможностью одиночного выбора правильного ответа.

– Тестовые задания разработаны в программной среде «Moodle» (ссылка на электронный ресурс:

https://eios.klgtu.ru/course/view.php?id=9542;

https://cloud.mail.ru/public/Ep4h/8GzWA3pxp).

– Итоговый тест содержит 32 задания закрытого типа с возможностью одиночного выбора правильного ответа.

– Содержание теста определяется в соответствии с содержанием дисциплины пропорционально учебному времени, отведенному на изучение разделов, перечисленных в рабочей программе модуля.

– Время выполнения итогового теста 120 мин.

Типовой вариант теста и ключи с правильными ответами к тестовым заданиям приведены в ФОС.

**Приложение 2**

## Типовые вопросы и образцы практических заданий на экзамен по программе первого семестра

1. Определители. Их свойства
2. Определители и их вычисление.
3. Матрицы и действия над ними.
4. Обратная матрица.
5. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матрицы.
6. Системы линейных уравнений: метод Крамера.
7. Системы линейных уравнений: метод Гаусса.
8. Системы линейных уравнений: матричный метод.
9. Линейные операции над векторами.
10. Проекции вектора на ось.
11. Координаты точки и вектора, модуль.
12. Направляющие косинусы вектора.
13. Разложение вектора по ортам координатных осей.
14. Равенство, коллинеарность, ортогональность, компланарность векторов.
15. Нелинейные операции над векторами: скалярное произведение, выражения в координатах, их свойства.
16. Нелинейные операции над векторами: векторное произведение, их свойства. выражения в координатах, геометрические приложения.
17. Нелинейные операции над векторами: смешанное произведения, их свойства, выражения в координатах, геометрические приложения.
18. Расстояние между двумя точками, деление отрезка в данном отношении.
19. Уравнения прямой на плоскости: с угловым коэффициентом, общее, в отрезках.
20. Уравнения прямой на плоскости: каноническое, параметрическое, нормальное.
21. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Угол между двумя прямыми.
22. Расстояние от точки до прямой, взаимное расположение двух прямых на плоскости.
23. Линии второго порядка на плоскости: окружность, эллипс.
24. Линии второго порядка на плоскости: гипербола, парабола.

25. Уравнения плоскости в пространстве: уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору; общее уравнение плоскости; уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

26. Уравнения плоскости в пространстве: уравнение плоскости в отрезках, нормальное уравнение плоскости.

27. Уравнения плоскости в пространстве: угол между двумя плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей, расстояние от точки до плоскости, взаимное расположение двух плоскостей в пространстве.

28. Уравнения прямой в пространстве: канонические, параметрические. Уравнение прямой, проходящей через две точки; общее уравнение прямой.

29. Уравнения прямой в пространстве: угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых, взаимное расположение двух прямых в пространстве.

30. Уравнения прямой в пространстве: угол между прямой и плоскостью, точка пересечения двух прямых, точка пересечения прямой и плоскости.

31. Уравнения прямой в пространстве: условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости, условие принадлежности прямой плоскости.

32. Предел числовой последовательности. Предел функции в точке.

33. Основные теоремы о пределах.

34. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

35. Односторонние пределы функции.

36. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел.

37. Сравнение бесконечно малых функций, эквивалентные бесконечно малые.

38. Непрерывность функции в точке. Классификация точек разрыва функции.

39. Производная непрерывной функции.

40. Касательная и нормаль к графику дифференцируемой функции.

41. Правила дифференцирования (производная суммы, произведения, частного и т. д.).

42. Производная элементарных функций, сложной, неявно заданной, параметрически заданной функции.

43. Геометрический и механический смысл производной.

44. Логарифмическое дифференцирование.

45. Производные высших порядков.

46. Дифференциал, его геометрический смысл. Дифференциалы высших порядков.

47. Применение дифференциального исчисления к нахождению пределов (правило Лопиталя).

48. Применение дифференциального исчисления к общему исследованию функции и построению ее графика (возрастание, убывание функции, необходимые и достаточные условия экстремумов функции, определение выпуклостей и точек перегиба).

49. Частные производные первого и высших порядков.

50. Полный дифференциал, его применение к приближенным вычислениям.

**Образцы практических заданий**

Вычислить смешанное произведение трех векторов

$a = 2i - 3j + k$, $в = j + 4k$, $c = 5i + 2j - 3k$.

Вычислить смешанное произведение трех векторов

$a = 3i + 4j + k$, $в = i - 2j + 7k$, $c = 3i - 6j + 21k$.

Найти модуль векторного произведения векторов

$a = 2i - 4j - 2k$ *и* $в = 7i + 3j$.

Проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора

$a = 2i - 3j + k$ *и* $в = j + 4k$.

Найти модуль векторного произведения векторов

$a = 2i - 4j - 2k$ и $c = 3i + 5j - 7k$.

Найти модуль векторного произведения векторов

$a = -4i + 2j - k$ и $в = 3i + 5j - 2k$.

Вычислить скалярное произведение двух векторов

$a = -4i + 2j - k$ и $в = 3i + 5j - 2k$.

Вычислить скалярное произведение двух векторов

$a = -4i + 2j - k$ и $c = j + 5k$.

Вычислить скалярное произведение двух векторов

$a = -4i + 2j - k$ и $c = 3j - 5k$.

10. Проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора

$a = 3i + 4j + k$ и $в = i - 2j + 7k$.

11. Проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора

$в = i - 2j + 7k$ *и* $c = 3i - 6j + 21k$.

12. Проверить, будут ли компланарны три вектора

$a = 2i - 3j + k$, $в = j + 4k$, $c = 5i + 2j - 3k$.

13. Проверить, будут ли компланарны три вектора

$a = 3i + 4j + k$, $в = i - 2j + 7k$, $c = 3i - 6j + 21k$;

14. Проверить, будут ли компланарны три вектора

$a = -4i + 2j - k, \quad в = 3i + 5j - 2k, \quad c = j + 5k.$

15. Найти модуль вектора $a + 3в - c$, если даны векторы

$a = 2i - 3j + k, \quad в = j + 4k$ и $c = 5i + 2j - 3k.$

16. Найти модуль вектора $2a - 3в - 3c$, если даны векторы

$a = 2i - 3j + k, \quad в = j + 4k$ и $c = 5i + 2j - 3k.$

17. Найти модуль вектора $3a - в - c$, если даны векторы

$a = 2i - 3j + k, \quad в = j + 4k$ и $c = 5i + 2j - 3k.$

18. Даны вершины A(3; 1), B(7; -4) и C(4; 5) треугольника. Найти длину стороны *AB*.

Даны вершины треугольника A(3; 1), B(7; -4) и C(4; 5. Найти длину стороны *AC*.

20. Найти сумму матриц $C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

21. Даны вершины треугольника.

A (1; -1), B (-5; 2) C (-2; 3)

Найти уравнение высоты, проведенной через вершину C.

22. Даны вершины треугольника.

A (-1; -1), B (-7; 2) C (-4; 3)

Найти уравнение высоты, проведенной через вершину C.

23. Даны вершины треугольника.

A (4; 1), B (6; 4) C (3; 5)

Найти уравнение медианы, проведенной через вершину C.

24. Даны вершины треугольника.

A (1; 0), B (5; 3) C (4; 4)

Найти уравнение медианы, проведенной через вершину C.

25. Даны вершины треугольника.

A (3; 0), B (5; - 3) C (1; 4)

Найти уравнение медианы, проведенной через вершину C.

26. Составьте уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат,

$\varepsilon = 0{,}6$ и $2b = 10$.

27. Составьте уравнение гиперболы, если расстояние между фокусами $2c = 10$, уравнения асимптот имеют вид $y = 0{,}5x$.

Эллипс задан уравнением $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$ Найти координаты фокусов эллипса, фокусное расстояние и эксцентриситет.

29. Найдите эксцентриситет гиперболы $25x^2 - 49y^2 = 1225$.

Найдите координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет эллипса, заданного уравнением $16x^2 + 25y^2 = 400$.

Даны вершины треугольника А(1; -1; 2), В(5; -6; 2) и С(2; 3; -1). Вычислить длину его высоты, проведенной из вершины В на сторону АС.

Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках

А(1; 3; -1), В(1; -1; 3), С(5; -6; 2).

33. Дана пирамида с вершинами в точках $A_1$(3; 1; 4), $A_2$(-1; 6; 1), $A_3$(-1; 1; 6), $A_4$(0; 4; -1). Найти длину высоты, проведенной из вершины $A_4$ на грань $A_1$ $A_2$ $A_3$.

34. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 2\bar{\imath} + \bar{\jmath} - \bar{k}, \bar{b} = \bar{\imath} - 3\bar{\jmath} + \bar{k}$.

35. Вершины треугольной пирамиды находятся в точках А(0; 0; 0), В(3; 4; -1), С(2; 3; 5) и Д(6; 0; -3). Найти длину высоты, проведенной из вершины С.

36. Доказать, что точки А(0;1; 5), В(2; 1; 3), С(-1; 2; 1), Д(1; 2; -1) лежат в одной плоскости.

37. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^2-3x+1}$

38. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{\sin 10x}$

39. Вычислить $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$

40. Найти алгебраическое дополнение $A_{32}$ для элемента $a_{32}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

41. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x-1}$

42. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-5}\right)^{x^2}$

43. Найти экстремум функции $y = \frac{x^3+4}{x^2}$

44. Найти точки перегиба функции $y = \frac{x^3+4}{x^2}$

45. Найти промежутки возрастания и убывания функции $y = \frac{x^3+4}{x^2}$

Найти частные производные первого порядков функции двух переменных
$z = arcsin\sqrt{xy}$
Найти частные производные первого порядков функции двух переменных
$z = cos\left(x - \sqrt{xy^3}\right)$
48. Найти значение x

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 8, \\ 3x - 2y + 5z = 14, \\ 5x + 3y - 3z = 2. \end{cases}$$

Найти значение y

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 8, \\ 3x - 2y + 5z = 14, \\ 5x + 3y - 3z = 2. \end{cases}$$

**Приложение 3**

## Типовые вопросы и образцы практических заданий на экзамен по программе второго семестра

1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Основная таблица интегралов.

2. Методы интегрирования: непосредственное, заменой переменной.

3. Интегрирование по частям.

4. Интегрирование простейших рациональных дробей.

5. Интегрирование иррациональных дробей.

6. Интегрирование тригонометрических функций.

7. Метод неопределенных коэффициентов

8. Универсальная тригонометрическая подстановка.

9. Интегрирование квадратических иррациональных функций.

10. Интегрирование иррациональных функций. Дробно – линейная подстановка.

11. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.

12. Интегрирование по частям и заменой переменной в определенном интеграле.

13. Вычисление площади плоской фигуры с помощью определенного интеграла.

14. Вычисление длины дуги плоской кривой с помощью определенного интеграла.

15. Вычисление объемов тел вращения с помощью определенного интеграла.

16. Вычисление объемов тел по поперечным сечениям.

17. Несобственные интегралы.

18. Основные понятия комбинаторики.

19. Случайные события. Классическое определение вероятности.

20. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

21. Теорема полной вероятности.

22. Формула Байеса.

23. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли.

24. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.

25. Дискретная случайная величина. Закон и функция распределения дискретной случайной величины.

26. Числовые характеристики дискретной случайной величины. Математическое ожидание дискретной случайной величины.

27. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины.

28. Непрерывная случайная величина. Функция распределения.

29. Плотность распределения.

30. Числовые характеристики непрерывных случайных величин. Математическое ожидание непрерывной случайной величины.

31. Дисперсия непрерывной случайной величины.

32. Биномиальный закон распределения.

33. Распределение Пуассона.

34. Равномерное распределение.

35. Нормальное распределение.

36. Выборочный метод: статистическое распределение выборки, эмпирическая функция распределения.

37. Статистическая оценка параметров распределения.

38. Методы расчета характеристик выборки.

39. Линейная корреляция. Выборочный коэффициент корреляции.

40. Выборочные уравнения регрессии.

41. Проверка статистических гипотез.

## Образцы практических заданий

| 1. Найти неопределенный интеграл: | | | |
|---|---|---|---|
| $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$ | $\int \sin x \cdot \cos^3 x dx$ | $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5} dx$ | $\int \frac{xdx}{\sqrt{3x+1}+1}$ |
| $\int \frac{(x^3+12)dx}{x^2-4}$ | $\int \frac{(\sqrt{2x-1}+1)dx}{x}$ | $\int \frac{(x^3+3)dx}{9-x^2}$ | $\int (2x-5)\cos x dx$ |
| $\int (5x-3)e^{-x} dx$ | $\int (4x+3)\sin 2x dx$ | $\int \frac{x^3+2x}{x^2-16} dx$ | $\int (3x-2)\cos 2x dx$ |

| 2. Вычислить определенный интеграл: | | | |
|---|---|---|---|
| $\int_0^1 (2x-1)e^{-x}\mathrm{dx}$ | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{cosxdx}$ | $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{xdx}}{\sin^2 x}$ | $\int_0^4 e^{\sqrt{2x+1}}\mathrm{dx}$ |
| $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\mathrm{sinxdx}}{\cos^3 x}$ | $\int_1^e \frac{\mathrm{dx}}{x(\ln^2 \mathrm{x}+1)}$ | $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\mathrm{sinxdx}}{\cos^3 x}$ | $\int_0^{e-1} \ln(\mathrm{x}+2)$ |
| 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость: | | | |
| $\int_1^\infty \frac{\mathrm{dx}}{\left(\sqrt{x}\right)^3}$ | $\int_2^\infty \frac{\mathrm{lnxdx}}{x}$ | $\int_0^\infty \frac{\mathrm{xdx}}{\sqrt{1+\mathrm{x}^2}}$ | $\int_2^\infty \frac{\mathrm{dx}}{x\ln x}$ |
| $\int_0^\infty \frac{\mathrm{xdx}}{(1+\mathrm{x})^2}$ | $\int_0^\infty \frac{\mathrm{dx}}{x^2+2\mathrm{x}+5}$ | $\int_1^\infty \frac{\mathrm{dx}}{\left(\sqrt{\mathrm{x}+3}\right)^5}$ | $\int_1^\infty \frac{\mathrm{dx}}{\left(\sqrt{\mathrm{x}+3}\right)^5}$ |
| Вычислить площадь, ограниченную линиями $y = 4 - x^2, y = 0$ | | | |
| Вычислить площадь, ограниченную линиями $y = 3 - 2x - x^2, y = 0$ | | | |
| Вычислить площадь, ограниченную линиями $y = x^2, y = 2 - x^2$ | | | |
| Вычислить площадь, ограниченную линиями $y = 6x - x^2, y = 0$ | | | |
| Определить объём тела вращения вокруг оси ох вращением фигуры, ограниченной линиями $\mathrm{xy} = 4, x = 1, x = 4, y = 0$ | | | |
| Вычислить площадь, ограниченную линиями $y = x^2 + 4x, y = x + 4$ | | | |

| | |
|---|---|
| Определить объём тела вращения вокруг оси ох, вращением фигуры. ограниченной линиями $xy = 4, x = 1, x = 4, y = 0$ | |
| | |
| Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям: | |
| $y'(x^2+1) - 2x\sqrt{y^2-1} = 0, \quad y(0) = 1$ | $2xyy' - y^2 = 1, \quad y(1) = 0$ |
| $2y'' - y' - y = x, x = 0, y = 1, y' = 1$ | $xy' - y = x, x = 2, y = 1$ |
| $y'e^x + y' - y\ln y = 0, \quad y(0) = e$ | $2xyy' - y^2 = 1, \quad y(1) = 0$ |
| Решить дифференциальное уравнение: | |
| $y'' - 4y' + 3y = 0$ | $y'' = x^2 + 2x$ |
| $xy' = x + y$ | $y'' - y = \cos x$ |
| $y(e^x + 4)dy + e^x dx = 0$ | $y'' + 6y' + 13y = 0$ |

**Задачи раздела теории вероятностей.**

1. Случайная величина X задана интегральной функцией (функцией распределения) F(x).

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0 \\ \frac{x^2}{100} \text{ при } 0 < x \le 10 \\ 1 \text{ при } x > 10 \end{cases}$$

Найти дифференциальную функцию (плотность вероятности) на промежутке $0 < x \leqslant 10$ .

2. В урне 5 черных и 3 белых шара. Найти вероятность того, что в одном испытании будет вынут белый шар.

3. В каждой из двух урн содержится 6 черных и 4 белых шаров. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую. Найти вероятность того, что шар, извлеченный из второй урны, окажется черным.

4. В каждой из двух урн содержится 8 черных и 2 белых шара. Из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в первую. Найти вероятность

того, что шар, извлеченный из первой урны, окажется черным.

5. Три стрелка произвели залп по цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,7; для второго и третьего стрелков эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что только один из стрелков поразит цель.

6. Три стрелка произвели залп по цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,7; для второго и третьего стрелков эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что только два стрелка поразят цель.

7. Три стрелка произвели залп по цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,7; для второго и третьего стрелков эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что все три стрелка поразят цель.

8. Студент знает 40 из 50 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает 2 вопроса, содержащиеся в его экзаменационном билете.

9. Две команды по 20 спортсменов производят жеребьевку для присвоения номеров участникам соревнований. Два брата входят в состав различных команд. Найти вероятность того, что братья будут участвовать в соревновании под одним и тем же номером 18.

10. Вероятность хотя бы одного попадания при двух выстрелах равна 0,99. Найти вероятность четырех попаданий при пяти выстрелах.

11. Вероятность появления событий в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие наступит 60 раз в 100 испытаниях.

12. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти вероятность того, что в 100 испытаниях событие появится не менее 20 и не более 30 раз.

13–18.

| Случайная величина X задана интегральной функцией (функцией распределения) F(x). Требуется найти дифференциальную функцию (плотность вероятности): | |
|---|---|
| $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{100} \text{ при } 0 < x \le 10 \\ 1 \text{ при } x > 10 \end{cases}$ | $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{81} \text{ при } 0 < x \le 9 \\ 1 \text{ при } x > 9 \end{cases}$ |

| | |
|---|---|
| $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0 \\ \frac{x^2}{64} \text{ при } 0 < x \le 8 \\ 1 \text{ при } x>8 \end{cases}$ | $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0 \\ \frac{x^2}{49} \text{ при } 0 < x \le 7 \\ 1 \text{ при } x>7 \end{cases}$ |
| $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0 \\ \frac{x^2}{36} \text{ при } 0 < x \le 6 \\ 1 \text{ при } x>6 \end{cases}$ | $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0 \\ \frac{x^2}{25} \text{ при } 0 < x \le 5 \\ 1 \text{ при } x>5 \end{cases}$ |

19. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

| X | 0,1 | 0,8 | 1,5 | 2,2 |
|---|---|---|---|---|
| p | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,1 |

Найти функцию распределения F(x).

20. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

| X | 0,1 | 0,8 | 1,5 | 2,2 |
|---|---|---|---|---|
| p | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,1 |

Найти математическое ожидание M(x).

21. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

| X | 0,1 | 0,8 | 1,5 | 2,2 |
|---|---|---|---|---|
| p | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,1 |

Найти дисперсию D(x).

22. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

| X | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 |
|---|---|---|---|---|
| p | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,3 |

Найти среднее квадратическое отклонение σ(x).

23. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

| X | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 |
|---|---|---|---|---|
| p | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,3 |

Построить полигон распределения.

24. В некотором водоёме караси составляют 80 % от всего количества

рыбы. Определить наивероятнейшее число k карасей, в партии из 8 рыб, выловленных в водоёме.

25. В некотором водоёме караси составляют 80 % от всего количества рыбы. Определить модальную вероятность.

**Приложение 4**

**Контрольная работа № 1**
**для выполнения студентами заочной формы обучения.**

Номер варианта студент выбирает по последней цифре номера зачетной книжки студента.

Таблица. Номера задач для выполнения контрольной работы № 1

| Вариант | Номер задачи |
|---|---|
| Вар.1 | №№ 1, 11 (1, 2, 3), 21(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), 31(1, 2), 41(2, 2, 3), 51, 61 |
| Вар. 2 | №№ 2, 12 (1, 2, 3), 22(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), 32(1, 2), 42(2, 2, 3), 52, 62 |
| Вар. 3 | №№ 3, 13(1, 2, 3), 23(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), 33(1, 2), 43(2, 2, 3), 53, 63 |
| Вар. 4 | №№ 4, 14(1, 2, 3), 24(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), 34(1, 2), 44(2, 2, 3), 54, 61 |
| Вар. 5 | №№ 5, 15 (1, 2, 3), 25(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), 35(1, 2), 45(2, 2, 3), 55, 65 |
| Вар. 6 | №№ 6, 16 (1, 2, 3), 26(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), 36(1, 2), 46(2, 2, 3), 56, 66 |
| Вар. 7 | №№ 7, 17 (1, 2, 3), 27(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), 37(1, 2), 47(2, 2, 3), 57, 67 |
| Вар. 8 | №№ 8, 18 (1, 2, 3), 28(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), 38(1, 2), 48(2, 2, 3), 58, 68 |
| Вар. 9 | №№ 9, 19 (1, 2, 3), 29(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), 39(1, 2), 49(2, 2, 3), 59, 69 |
| Вар. 10 | №№ 10, 20 (1, 2, 3), 30(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), 40(1, 2), 50(2, 2, 3), 60, 70 |

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

**Задачи №№ 1-10.**

Дана система уравнений с тремя неизвестными. Требуется найти ее решение с помощью формул Крамера. Правильность вычисления проверить, подставив полученные значения в заданную систему уравнений.

| Задача | | Задача | |
|---|---|---|---|
| № 1 | $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_2 - 5x_3 = -9. \end{cases}$ | № 2 | $\begin{cases} -2x_2 - 5x_3 = -12, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$ |
| № 3 | $\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 3x_3 = 10 \\ -2x_2 - x_3 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$ | № 4 | $\begin{cases} -x_1 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 10, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$ |
| № 5 | $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -15 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ -x_1 + 3x_3 = 7. \end{cases}$ | № 6 | $\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -1 \\ -2x_2 - 3x_3 = -8. \end{cases}$ |
| № 7 | $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ -x_1 + 3x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$ | № 8 | $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -5, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$ |
| № 9 | $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -11 \\ -2x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$ | № 10 | $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$ |

**Задачи № 11-20**.

Даны координаты вершин треугольника ABC.

Найти:

1) уравнение стороны AC;
2) уравнение высоты BH;
3) уравнение медианы BD.

Задача 11. A(-2; 1), B(1; 5), C(9; 11)

Задача 12. A(2; 4), B(6; 7), C(-6; 2)

Задача 13. A(-4; 1), B(4; -7), C(8; -10)

Задача 14. A(5; 1), B(1; -3). C(-4, 6)

Задача 15. A(-2; 1), B(6; 7), C(-6; -9)
Задача 16. A(-3; 3), B(9; 8), C(-7; -4)
Задача 17. A(5; 2), B(-3; -4), C(2; 8)
Задача 18. A(1; -1), B(-7; 5), C(-3; 8)
Задача 19. A(1; -3), B(-5; 5), C(-1; 2)
Задача 20. A(2; -5), B(-3; 7), C(5; 1)

**Задачи № 21-30**.

По координатам вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ найти:

1) длины ребер $A_1A_2$ и $A_1A_3$;
2) угол между ребрами $A_1A_2$ и $A_1A_3$;
3) площадь грани $A_1A_2A_3$;
4) объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$;
5) уравнения прямой $A_1A_2$;
6) уравнения плоскостей $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$;
7) угол между плоскостью $A_1A_2A_3$ и прямой $A_1A_4$.

Задача 21. $A_1$(-1; 2; 1); $A_2$(-2; 2; 5); $A_3$(-3; 3; l); $A_4$(-l; 4; 3).
Задача 22. $A_1$(-2; 1; -1); $A_2$(-3; 1; 3); $A_3$(-4; 2; -1); $A_4$(-2; 3; 1).
Задача 23. $A_1$(1; 1; 2); $A_2$(0; 1; 6); $A_3$(-1; 2; 2); $A_4$(1; 3; 4).
Задача 24. $A_1$(-1; -2; 1); $A_2$(-2; -2; 5); $A_3$(-3; -1; 1); $A_4$(-1; 0; 3).
Задача 25. $A_1$(2; -1; 1); $A_2$(1; -1; 5); $A_3$(0; 0; 1); $A_4$(2; 1; 3).
Задача 26. $A_1$(-1; 1; -2); $A_2$(-2; 1; 2); $A_3$(-3; 2; -2); $A_4$(-1; 3; 0).
Задача 27. $A_1$(1; 2; 1); $A_2$(0; 2; 5); $A_3$(-1; 3; 1); $A_4$(1; 4; 3).
Задача 28. $A_1$(-2; -1; 1); $A_2$(-3; -1; 5); $A_3$(-4; 0; 3); $A_4$(-2; 1; 3).
Задача 29. $A_1$ ( l; -1; 2); $A_2$(0; -1; 6); $A_3$(-1; 0; 2); $A_4$(1; 1; 4).
Задача 30. $A_1$( l; -2; 1); $A_2$(0; -2; 5); $A_3$(-1; -1; 1); $A_4$(1; 0; 3).

**Задачи № 31-40**.

Вычислить пределы функций, не пользуясь средствами дифференциального исчисления.

| Задача | | Задача | |
|---|---|---|---|
| № 31 | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x}{-5x^2+x+1}$ | № 32 | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^2+7x+2}{-5x^2+x+1}$ |

| Задача | | Задача | |
|---|---|---|---|
| | ) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$ | | ) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$ |
| № 33 | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x^2-x}{3x^2+7x+1}$ | № 34 | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x+5}{-5x^2+3x}$ |
| | ) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-4x-3}{5x^2+2x-7}$ | | ) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$ |
| № 35 | 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^2-x}{2x^2+3x+2}$ | № 36 | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^2+5x+2}{x^2+4x}$ |
| | $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$ | | $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$ |
| № 37 | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^2+5x}{x^2+4x+3}$ | № 38 | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x-1}{-2x^2+3x}$ |
| | ) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-6x^2-12x-8}{x^3-3x^2+4}$ | | $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$ |
| № 39 | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-7x^2+4x}{3x^2-x+2}$ | № 40 | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2-3x-1}{4x^2+2x}$ |
| | $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}$ | | $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$ |

**Задачи № 41-50**.

Найти производные первого порядка данных функций, используя правила вычисления производных.

| Задача | | Задача | |
|---|---|---|---|
| № 41 | 1) $y = \sin^3\frac{x}{3} + e^{arctg\frac{x}{5}}$<br>2) $y = sinx^{\cos x}$<br>3) $\begin{cases} x = arcsin2t \\ y = \frac{1}{1-4t^2} \end{cases}$ | № 42 | 1) $y = 4\sqrt[4]{x} + arctgx$<br>2) $y = cosx^{\sin x}$<br>3) $\begin{cases} x = \ln(1-t^4) \\ y = \arccos t^2 \end{cases}$ |
| № 43 | 1) $y = \frac{ctgx}{x^4}$<br>2) $y = x^{ln(\sin x)}$<br>3) $\begin{cases} x = \arccos t \\ y = \sqrt{(1-t^2)^3} \end{cases}$ | № 44 | 1) $y = e^{arctg\frac{x}{3}}$<br>2) $y = x^{\mathrm{ctg}\, x}$<br>3) $\begin{cases} x = 3e^{-t} \\ y = (2+e^{-t})^3 \end{cases}$ |
| № 45 | 1) $y = 6\sqrt[3]{x^2} - 7tgx$<br>2) $y = x^{arccosx}$<br>3) $\begin{cases} x = arctg(1+t)^2 \\ y = \sqrt{t^2+2t+2} \end{cases}$ | № 46 | 1) $y = \frac{e^x}{arcsinx}$<br>2) $y = (ctgx)^x$<br>3) $\begin{cases} x = te^{-4t} \\ y = (1-4t)^2 \end{cases}$ |
| № 47 | 1) $y = tg^5\left(\frac{2x}{5}\right)$<br>2) $y = x^{sinx}$<br>3) $\begin{cases} x = \ln(5-3t) \\ y = arctg(5-3t) \end{cases}$ | № 48 | 1) $y = arcsin\sqrt[3]{4-5x}$<br>2) $y = (tgx)^x$<br>3) $\begin{cases} x = ctg(1-5t) \\ y = \frac{1}{\cos^2(1-5t)} \end{cases}$ |
| № 49 | 1) $y = \cos\ln(1-x^2)$<br>2) $y = x^{\cos x}$<br>3) $\begin{cases} x = \sin^2(2-5t) \\ y = \cos^2(2-5t) \end{cases}$ | № 50 | 1) $y = \frac{lnx}{arccosx}$<br>2) $y = x^{\mathrm{tg}\, x}$<br>3) $\begin{cases} x = (t-1)^2 \\ y = \sin(t-1)^2 \end{cases}$ |

**Задачи № 51-60**.

Произвести полное исследование функции и построить ее график.

| Задача | | Задача | |
|---|---|---|---|
| № 51 | $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ | № 52 | $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ |
| № 53 | $y = \frac{2}{x^2 + 2x}$ | № 54 | $y = \frac{4x^2}{3 + x^2}$ |
| № 55 | $y = \frac{12}{x^2 + 9}$ | № 56 | $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ |
| № 57 | $y = \frac{4 - x^3}{x^2}$ | № 58 | $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$ |
| № 59 | $y = \frac{2x^3 + 1}{x^2}$ | № 60 | $y = \frac{(x - 1)^2}{x^2}$ |

**Задачи № 61-70**.

Найти частные производные первого порядка функции двух переменных.

| Задача | | Задача | |
|---|---|---|---|
| № 61 | $z = ln(y^2 - e^{-x})$ | № 62 | $z = arcsin\sqrt{xy}$ |
| № 63 | $z = ctg\sqrt{xy^2}$ | № 64 | $z = arccos\left(\frac{y}{x}\right)$ |
| № 65 | | № 66 | $z = arctg\left(\frac{x^2}{y^2}\right)$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $z = sin\sqrt{\frac{y}{x+y}}$ | | |
| № 67 | $z = cos\left(x - \sqrt{xy^3}\right)$ | № 68 | $z = tg\left(\frac{2x - y^2}{x}\right)$ |
| № 69 | $z = sinx^{cosy}$ | № 70 | $z = x^y + y^x$ |

**Приложение 5**

## Контрольная работа №2
## для выполнения студентами заочной формы обучения.

Таблица. Номера задач для выполнения контрольной работы № 2

| Вари-ант | Номера задач | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Вар. 1 | 71(а; б; в) | 81(а; б) | 91 | 101 | 111(1(а; б; в), 2(а; б; в), 3(а; б; в; г), 4(а; б; в; г; д), 5(а; б; в; г; д)) |
| Вар. 2 | 72(а; б; в) | 82(а; б) | 92 | 102 | 112 (1(а; б; в), 2(а; б; в), 3(а; б; в; г), 4(а; б; в; г; д), 5(а; б; в; г; д)) |
| Вар. 3 | 73(а; б; в) | 83(а; б) | 93 | 103 | 113 (1, 2(а; б; в), 3(а; б; в; г), 4(а; б; в; г; д), 5(а; б; в; г; д)) |
| Вар. 4 | 74(а; б; в) | 84(а; б) | 94 | 104 | 114 (1(а; б; в), 2(а; б; в), 3(а; б; в; г), 4(а; б; в; г; д), 5(а; б; в; г; д)) |
| Вар. 5 | 75(а; б; в) | 85(а; б) | 94 | 105 | 115 (1, 2(а; б; в), 3(а; б; в; г), 4(а; б; в; г; д), 5(а; б; в; г; д)) |
| Вар. 6 | 76(а; б; в) | 86(а; б) | 96 | 106 | 116 (1, 2(а; б; в), 3(а; б; в; г), 4(а; б; в; г; д), 5(а; б; в; г; д)) |
| Вар. 7 | 77(а; б; в) | 87(а; б) | 97 | 107 | 117 (1, 2(а; б; в), 3(а; б; в; г), 4(а; б; в; г; д), 5(а; б; в; г; д)) |
| Вар. 8 | 78(а; б; в) | 88(а; б) | 98 | 108 | 118 (1, 2(а; б; в), 3(а; б; в; г), 4(а; б; в; г; д), 5(а; б; в; г; д)) |
| Вар. 9 | 79(а; б; в) | 89(а; б) | 99 | 108 | 119(1(а; б; в), 2(а; б; в), 3(а; б; в; г), 4(а; б; в; г; д), 5(а; б; в; г; д)) |
| Вар. 10 | 80(а; б; в) | 90(а; б) | 100 | 110 | 120 (1, 2(а; б; в), 3(а; б; в; г), 4(а; б; в; г; д), 5(а; б; в; г; д)) |

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 2

**Задачи № 71-80**.

| Задача | Найти неопределенный интеграл | Задача | Найти неопределенный интеграл |
|---|---|---|---|
| № 71 | **а)** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3x+1}+1}$ <br> **б)** $\int \frac{(x^3+12)\,dx}{x^2-4}$ <br> **в)** $\int (2x-5)\cos x\,dx$ | № 72 | **а)** $\int \frac{(\sqrt{2x-1}+1)\,dx}{x}$ <br> **б)** $\int \frac{(x^3+3)\,dx}{9-x^2}$ <br> **в)** $\int (5x-3)e^{-x}\,dx$ |
| № 73 | **а)** $\int \frac{(\sqrt{1-4x})\,dx}{4x-5}$ <br> **б)** $\int \frac{(x^3+4x^2-10)\,dx}{x^2-5x}$ <br> **в)** $\int (1-5x)\ln x\,dx$ | № 74 | **а)** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x+1}-1}$ <br> **б)** $\int \frac{(x^3-5x+6)\,dx}{x^2+3x}$ <br> **в)** $\int (4x+3)\sin 2x\,dx$ |
| № 75 | **а)** $\int \frac{(1-\sqrt{3x+1})\,dx}{3x+2}$ <br> **б)** $\int \sin\sqrt{2x}\,dx$ <br> **в)** $\int \frac{x^3+2x}{x^2-16}\,dx$ | № 76 | **а)** $\int \frac{(\sqrt{x+1})\,dx}{x-1}$ <br> **б)** $\int \cos\sqrt{4x}\,dx$ <br> **в)** $\int \frac{x^3-5x+9}{x^2-3x}\,dx$ |
| № 77 | **а)** $\int \frac{dx}{(\sqrt{x-1}+2)^2}$ | № 78 | **а)** $\int \frac{x\,dx}{(3-\sqrt{x+2})^2}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **б)** $\int \frac{(x^3+2x+3)\ dx}{x^2-x}$<br>**в)** $\int (5x-1)\ e^{2x}\ dx$ | | **б)** $\int \frac{(x^3-x^2+4)\ dx}{x^2+2x}$<br>**в)** $\int (3x-2)\cos 2x\ dx$ |
| № 79 | **а)** $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}-1}$<br>**б)** $\int \frac{x^3+3x-2}{x^2+x} dx$<br>**в)** $\int \mathrm{arctg}x\ dx$ | № 80 | **а)** $\int \frac{(\sqrt{x}-1)\ dx}{\sqrt{x}\ +1}$<br>**б)** $\int \frac{x^3+5x^2-8}{x^2-2x} dx$<br>**в)** $\int \arcsin x\ dx$ |

**Задачи № 81-90**.

| Задача | Найти определенный интеграл | Задача | Найти определенный интеграл |
|---|---|---|---|
| № 81 | **а)** $\int_0^1 (2x-1)e^{-x}\ dx$<br>**б)** $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$ | № 82 | **а)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\ dx$<br>**б)** $\int_0^{e-1} \ln(1+\sqrt{x})\, dx$ |
| № 83 | **а)** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\ dx}{\sin^2 x}$<br>**б)** $\int_0^4 e^{\sqrt{2x+1}}\ dx$ | № 84 | **а)** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\ dx}{\cos^2 x}$<br>**б)** $\int_1^2 \frac{(\sqrt{x-1}\ +3)\ dx}{x}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| № 85 | **а)** $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\ \text{sinx dx}}{\cos^3 x}$ <br> **б)** $\int_1^e \frac{\text{dx}}{x\ (\ln^2 \text{x}+1)}$ | № 86 | **а)** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\ \text{cosx dx}}{\sin^3 x}$ <br> **б)** $\int_3^8 \frac{\text{x dx}}{\sqrt{\text{x}+1}}$ |
| № 87 | **а)** $\int_0^{e-1} \ln(\text{x}+2)\ dx$ <br> **б)** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right) \text{dx}$ | № 88 | **а)** $\int_0^1 \text{x arctgx dx}$ <br> **б)** $\int_0^1 \frac{1+2\text{arctgx}}{1+\text{x}^2}\ \text{dx}$ |
| № 89 | **а)** $\int_0^1 (1-2x)\text{dx}$ <br> **б)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\text{sinx dx}}{\cos^4 x}$ | № 90 | **а)** $\int_1^e x\ \text{lnx dx}$ <br> **б)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{dx}}{1+\sin x}$ |

**Задачи № 91-100**.

| Задача | Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость | Задача | Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость |
|---|---|---|---|
| № 91 | $\int_1^{\infty} \frac{\text{dx}}{\left(\sqrt{x}\right)^3}$ | № 92 | $\int_2^{\infty} \frac{\text{lnx dx}}{x}$ |
| № 93 | $\int_0^{\infty} \frac{\text{x dx}}{\sqrt{1+\text{x}^2}}$ | № 94 | $\int_0^{\infty} \frac{\text{dx}}{x^2+4\text{x}+5}$ |
| № 95 | $\int_2^{\infty} \frac{\text{dx}}{x\ \ln x}$ | № 96 | $\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{\text{dx}}{x\ \sqrt{x^2-1}}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| № 97 | $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$ | № 98 | $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\left(\sqrt{x+3}\right)^5}$ |
| № 99 | $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\left(\sqrt{x+3}\right)^5}$ | № 100 | $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{(1+x)^2}$ |

**Задачи № 101-110**.

Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

| Задача | | Задача | |
|---|---|---|---|
| № 101 | $y'(x^2+1)-2x\sqrt{y^2-1}=0,$ $y(0)=1$ | № 106 | $2xyy'-y^2=1,$ $y(1)=0$ |
| № 102 | $y'(1+x^2)-(1+y^2)\,\mathrm{arctg}y=0,$ $y(0)=0$ | № 107 | $2xyy'-y^2=1,$ $y(1)=0$ |
| № 103 | $yy'\sqrt{x^2+9}-x\sqrt{y^2+4}=0,$ $y(0)=0$ | № 108 | $\frac{y'e^y}{2x}-\frac{e^{2y}+1}{x^2+1}=0,$ $y(0)=0$ |
| № 104 | $y'\frac{\ln x}{\ln y}-\frac{\ln y}{\ln x}=0,\quad y(1)=1$ | № 109 | $\frac{y'}{\sin x}+x\cos^2 y=0,$ $y(0)=0$ |
| № 105 | $y'\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}y=0,\quad y(\pi/2)=0$ | № 110 | $y'e^x+y'-y\ln y=0,$ $y(0)=e$ |

## Задачи по теории вероятностей № 111-120.

### Задача № 111.

1. В садке находится 15 лещей, из которых 7 мечено. Наугад отлавливают 3 леща. Определить вероятности следующих событий:

а) среди отловленных лещей будет 2 меченых;

б) среди отловленных лещей будет не менее двух меченых;

в) среди отловленных лещей будет хотя бы один меченый.

2. В некотором водоёме караси составляют 70 % от всего количества рыбы. Определить:

а) наивероятнейшее число k, карасей, в партии из 10 рыб, выловленных в водоёме;

б) модальную вероятность;

в) вероятность того, что выловлено не менее k карасей.

3. Стадо куринского лосося содержит 70 % самок.

Найти:

а) наивероятнейшее число к, самок, в партии из 120 рыб, посаженных в садки;

б) модальную вероятность;

в) вероятность того, что в выловленной партии ровно 100 самок;

г) не менее 100 самок.

4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| X | 0,1 | 0,8 | 1,5 | 2,2 |
| p | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,1 |

Найти:

а) функцию распределения F(x);

б) математическое ожидание M(x);

в) дисперсию D(x);

г) среднее квадратическое отклонение σ(x);

д) построить полигон распределения.

5. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2/4, & 0\le x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$$

Найти:

а) плотность вероятностей f(x);

б) математическое ожидание M(x);
в) дисперсию D(x);
г) среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$;
д) построить график функции распределения и график плотности вероятностей.

**Задача № 112.**

1. В бассейне находится 12 судаков: 7 балтийских и 5 черноморских. Наугад берутся 4 судака. Найти вероятности того, что среди взятых судаков будет:
а) 3 балтийских;
б) не менее 3 балтийских;
в) хотя бы один балтийский.
2. В некотором водоёме караси составляют 80 % от всего количества рыбы. Определить:
а) наивероятнейшее число k карасей, в партии из 8 рыб, выловленных в водоёме;
б) модальную вероятность;
в) вероятность того, что выловлено не менее k карасей.
3. Вероятность получения икры от самок осетров в искусственных условиях равна 0,75. Найти:
а) наивероятнейшее число самок, отдавших икру в партии из 150 рыб;
б) модальную вероятность;
в) вероятность того, что икру отдадут ровно 80 самок;
г) не более 80 самок.
4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| X | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 |
| p | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,3 |

Найти:
а) функцию распределения F(x);
б) математическое ожидание M(x);
в) дисперсию D(x);
г) среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$;
д) построить полигон распределения.

5. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \sin x & 0\le x\le \pi/2 \\ 1, & x>\pi/2 \end{cases}$$

Найти:

а) плотность вероятностей f(x);
б) математическое ожидание M(x);
в) дисперсию D(x);
г) среднее квадратическое отклонение $\sigma$ (x);
д) построить график функции распределения и график плотности вероятностей.

**Задача № 113.**

1. В садке находится 10 лососей, из лих 7 самок. Вероятность того, что самка отдаст икру в искусственных условиях равна 0,75. Для исследования отлавливается одна рыба. Какова вероятность того. что это будет самка, готовая отдать икру?
2. В некотором водоёме окуни составляют 70 % от всего количества рыбы. Определить:
а) наивероятнейшее число к, окуней, в партии из 11 рыб. выловленных в водоёме;
б) модальную вероятность;
в) вероятность того, что выловлено не менее к окуней.
3. В некотором улове трала вероятность содержания стандартной по размеру сельди равна 0.6. Найти:
а) наивероятнейшее число стандартных рыб в партии из 200 отобранных;
б) модальную вероятность;
в) вероятность того, что в отобранной партии будет ровно 130 стандартных рыб;
г) не менее 130, но и не более 160 стандартных рыб.
4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

| X | 1 | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| p | 0,1 | 0,3 | 0,5 | 0,1 |

Найти:
а) функцию распределения F(x);
б) математическое ожидание M(x);
в) дисперсию D(x);
г) среднее квадратическое отклонение $\sigma$(x);
д) построить полигон распределения.

5. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \leftarrow 2 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{2} & -2 \le x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Найти:

а) плотность вероятностей f(x);

б) математическое ожидание M(x);

в) дисперсию D(x);

г) среднее квадратическое отклонение σ(x);

д) построить график функции распределения и график плотности вероятностей.

**Задача № 114.**

1. В лабораторию доставлены 15 рыб, из которых 6 сеголетков. Наугад берутся 3 рыбы. Найти вероятности того, что среди отобранных рыб будет:

а) только одна из отобранных рыб будет сеголеток;

б) не менее двух отобранных рыб - сеголетки;

в) хотя бы одна - сеголеток.

2. В некотором водоёме окуни составляют 50 % от всего количества рыбы. Определить:

а) наивероятнейшее число к. окуней, в партии из 12 рыб, выловленных в водоёме;

б) модальную вероятность;

в) вероятность того, что выловлено не менее r окуней.

3. Вероятность выклева личинок лосося из икры в искусственных условиях равна 0.7. Найти:

а) наивероятнейшее число личинок в партии из 400 взятых на контроль икринок:

б) модальную вероятность;

в) вероятность выклева ровно 250 личинок;

г) не менее 240. но и не более 300 личинок.

4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| X | 1,1 | 1,9 | 2,7 | 3,5 |
| p | 0,1 | 0,3 | 0,4 | 0,2 |

Найти:

а) функцию распределения F(x);

б) математическое ожидание M(x);

в) дисперсию D(x);

г) среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$;
д) построить полигон распределения.
5. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2/4, & 0\le x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$$

Найти:
а) плотность вероятностей f(x);
б) математическое ожидание M(x);
в) дисперсию D(x);
г) среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$;
д) построить график функции распределения и график плотности вероятностей.

**Задача № 115.**

1. В улове, сдаваемом на базу, 74 % составляет ставрида, причём 85 % - первого сорта. Какова вероятность содержания ставриды первого сорта в данном улове?
2. В некотором водоёме караси составляют 75 % от всего количества рыбы. Определить:
а) наивероятнейшее число k карасей в партии из 12 рыб, выловленных в водоёме;
б) модальную вероятность;
в) вероятность того, что выловлено не менее k карасей.
3. В некотором водоёме стандартные по размерам судаки составляют 60 % от всего количества судаков, выращенных в водоёме.
Найти:
а) наивероятнейшее число стандартных по размеру судаков в партии из 300 рыб, сдаваемых в торговую сеть;
б) модальную вероятность;
в) вероятность того, что стандартных по размеру рыб будет ровно 200;
г) не менее 170, но и не более 220.
4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| X | 1,0 | 1,9 | 2,8 | 3,7 |
| p | 0,1 | 0,3 | 0,5 | 0,1 |

Найти:
а) функцию распределения F(x);

б) математическое ожидание M(x);
в) дисперсию D(x);
г) среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$;
д) построить полигон распределения.
5. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-\cos x & 0\le x<\pi/2 \\ 1, & x\ge\pi/2 \end{cases}$$

Найти:
а) плотность вероятностей f(x);
б) математическое ожидание M(x);
в) дисперсию D(x);
г) среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$;
д) построить график функции распределения и график плотности вероятностей.

**Задача № 116.**

1. В некотором улове пикша составляет 70 %, из которых 80 % будут – самки. Найти вероятность содержания самок пикши в данном улове.
2. В некотором водоёме караси составляют 80 % от всего количества рыбы. Определить:
а) наивероятнейшее число k, карасей, в партии из 10 рыб, выловленных в водоёме:
б) модальную вероятность;
в) вероятность того, что выловлено не менее k карасей.
3. В некотором водоёме рыбы порционного икрометания составляют 60 % от всего количества. Найти:
а) наивероятнейшее число рыб порционного икрометания в партии из 300 отловленных в водоёме экземпляров;
б) модальную вероятность;
в) вероятность того, что в отловленной партии будет ровно 200 рыб порционного икрометания;
г) не менее 150, но и не более 200 рыб порционного икрометания.
4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

| X | 3 | 6 | 9 | 12 |
|---|---|---|---|---|
| p | 0,2 | 0,4 | 0,3 | 0,1 |

Найти:

а) функцию распределения F(x);
б) математическое ожидание M(x);
в) дисперсию D(x);
г) среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$;
д) построить полигон распределения.
5. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \sin^2 x & 0\le x<\pi/2 \\ 1, & x\ge \pi/2 \end{cases}$$

Найти:
а) плотность вероятностей f(x);
б) математическое ожидание M(x);
в) дисперсию D(x);
г) среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$;
д) построить график функции распределения и график плотности вероятностей.

**Задача № 117.**

1. В инкубационный аппарат заложено 200 икринок лосося и 300 икринок форели. Вероятность выклева личинок из икры лосося равна 0,65. а из икры форели - 0.55. Какова вероятность получения личинок из икры, заложенной в инкубационный аппарат?

В некотором водоёме караси составляют 90 % от всего количества рыбы. Определить:
а) наивероятнейшее число k, карасей, в партии из 10 рыб, выловленных в водоёме;
б) модальную вероятность;
в) вероятность того, что выловлено не менее k карасей.
3. В некотором бассейне налимы в возрасте от 2 до 3 лет составляют 75 % от всего количества рыбы.
Найти:
а) наивероятнейшее число налимов указанного возраста в партии из 400 отловленных в водоёме;
б) модальную вероятность;
в) вероятность того, что в партии содержится ровно 320 налимов указанного возраста;

г) не менее 280. но и не более 320 налимов указанного возраста.
4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| X | 1,5 | 1,8 | 2,1 | 2,4 |
| p | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 |

Найти:
а) функцию распределения F(x);
б) математическое ожидание M(x);
в) дисперсию D(x);
г) среднее квадратическое отклонение σ(x);
д) построить полигон распределения.
5. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \sin 2x & 0\le x\le \pi/4 \\ 1, & x>\pi/4 \end{cases}$$

Найти:
а) плотность вероятностей f(x);
б) математическое ожидание M(x);
в) дисперсию D(x);
г) среднее квадратическое отклонение σ(x);
д) построить график функции распределения и график плотности вероятностей.

**Задача № 118.**

1. Во время траления в Норвежском море траулер засаливает 70 % от всего улова рыбы, причём 80 % – первым сортом. Какова вероятность содержания солёной рыбы первого сорта в рыбопродукции, сдаваемой на базу?
2. В некотором водоёме караси составляют 90 % от всего количества рыбы. Определить:
а) наивероятнейшее число k, карасей, d партии из 12 рыб. выловленных в водоёме;
6) модальную вероятность;
г) вероятность того, что выловлено не менее k карасей.
3. В прудах одного рыбного хозяйства карпы составляют 60 % от всего количества рыбы. Найти:
а) наивероятнейшее число карпов r партии из 250 отловленных рыб;
б) модальную вероятность;
в) вероятность того, что данная партия содержит 140 карпов;

г) не менее 120, но и не более160 карпов.

4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| X | 2 | 4 | 6 | 8 |
| p | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,1 |

Найти:

а) функцию распределения F(x);

б) математическое ожидание M(x);

в) дисперсию D(x);

г) среднее квадратическое отклонение σ(x);

д) построить полигон распределения.

5. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^3 & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

Найти:

а) плотность вероятностей f(x);

б) математическое ожидание M(x);

в) дисперсию D(x);

г) среднее квадратическое отклонение σ(x);

д) построить график функции распределения и график плотности вероятностей.

**Задача № 119.**

1. В лабораторию поступило 10 рыб: 3 карася и 7 окуней. Найти вероятность того, что среди взятых наугад двух рыб будут:

а) 1 карась и 1 окунь;

б) обе рыбы – караси;

в) хотя бы один – карась.

2. В некотором водоёме караси составляют 60 % от всего количества рыбы. Определить:

а) наивероятнейшее число k, карасей, в партии из 8 рыб, выловленных в водоёме;

б) модальную вероятность;

в) вероятность того, что выловлено не менее k карасей.

3. Вероятность того, что число тычинок на одной жаберной дуге у камских налимов находится в пределах нормы, равна 0,9. отловлено 250 рыб.

Определить:

а) наивероятнейшее число налимов с нормальным числом тычинок на одной жаберной дуге;
б) модальную вероятность;
в) вероятность того, что нормальное число тычинок имеют ровно 170 налимов;
г) не менее 170 налимов.
4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

| X | 12 | 14 | 16 | 18 |
|---|---|---|---|---|
| p | 0,1 | 0,3 | 0,4 | 0,2 |

Найти:
а) функцию распределения F(x);
б) математическое ожидание M(x);
в) дисперсию D(x);
г) среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$;
д) построить полигон распределения.
5. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ \ln x & 1\le x<e \\ 1, & x\ge e \end{cases}$$

Найти:
а) плотность вероятностей f(x);
б) математическое ожидание M(x);
в) дисперсию D(x);
г) среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$;
д) построить график функции распределения и график плотности вероятностей.

**Задача № 120.**

1. Партия из 20 выловленных в водоёме рыб подвергается контролю. Условием непригодности всего улова является наличие хотя бы одной нестандартной сельди среди 4-х проверяемых. Какова вероятность того, что весь улов будет непригоден, если он содержит 5 нестандартных рыб?
2. В некотором водоёме караси составляют 80 % от всего количества рыбы. Определить:
а) наивероятнейшее число k карасей, в партии из 9 рыб, выловленных в водоёме;
б) модальную вероятность;
в) вероятность того, что выловлено не менее k карасей.
3. Из нерестовиков в выростные водоёмы выпущены личинки сазана. Коэффициент выживаемости личинок сазана равен 0,7.

Найти:

а) наивероятнейшее число выживших личинок в партии из 200 взятых на контроль;

б) модальную вероятность;

в) вероятность того, что из этой партии выживет ровно 150 личинок;

г) не менее 150 личинок.

4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| X | 2,2 | 2,4 | 2,6 | 2,8 |
| p | 0,1 | 0,3 | 0,5 | 0,1 |

Найти:

а) функцию распределения F(x);

б) математическое ожидание M(x);

в) дисперсию D(x);

г) среднее квадратическое отклонение σ(x);

д) построить полигон распределения.

5. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{4}{\pi} arctg\, x & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

Найти:

а) плотность вероятностей f(x);

б) математическое ожидание M(x);

в) дисперсию D(x);

г) среднее квадратическое отклонение σ(x);

д) построить график функции распределения и график плотности вероятностей.

Локальный электронный методический материал

Надежда Петровна Зубарева

МАТЕМАТИКА

Редактор С. Кондрашова

Уч.-изд. л. 7,5.  Печ. л. 6,1.

Издательство федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Калининградский государственный технический университет»
236022, Калининград, Советский проспект, 1