ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.В. Вялова

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебно-методическое пособие
по дисциплине «Алгебра и аналитическая геометрия»
для студентов высших учебных заведений специальностей
180403.65 – Эксплуатация судовых энергетических установок,
180404.65 – Эксплуатация судового электрооборудования и средств автоматики

Калининград
Издательство ФГОУ ВПО «КГТУ»
2011

УДК 512. 624. 3 (075)

Утверждено
Ректором ФГОУ ВПО
«Калининградский государственный
технический университет»

Автор – **Вялова А.В.**, к.ф.-м.н., доцент, кафедра высшей математики ФГОУ ВПО «Калининградский государственный технический университет»

В учебно-методическом пособии подробно излагаются вопросы раздела «Векторная алгебра» курса «Алгебра и аналитическая геометрия», читаемого студентам инженерно-технических специальностей университета. Пособие содержит большое количество задач с разобранными решениями.

Предназначено для студентов первого курса специальностей «Эксплуатация судовых энергетических установок», «Эксплуатация судового электрооборудования и средств автоматики».

Рис. 23, список лит. – 11 наименований.

РЕЦЕНЗЕНТЫ – Белова О.О., к.ф.-м. н., доцент кафедры компьютерной безопасности и прикладной алгебры БФУ им. И. Канта

Антипов Ю.И., д.ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой высшей математики ФГОУ ВПО «КГТУ»

Учебно-методическое пособие одобрено и рекомендовано к изданию на заседании кафедры высшей математики ФГОУ ВПО «Калининградский государственный технический университет» 7 апреля 2011 г., протокол № 4.

Учебно-методическое пособие рекомендовано к изданию ученым советом факультета фундаментальной подготовки ФГОУ ВПО «Калининградский государственный технический университет» 19 апреля 2011 г., протокол № 6.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Вопросы векторной алгебры составляют обязательный раздел курса алгебры и аналитической геометрии, читаемого студентам технического университета. Важность этого раздела объясняется тем, что многие вопросы аналитической геометрии успешно описываются средствами векторной алгебры, а также и тем, что на базе векторной алгебры строится векторный анализ, широко применяемый в курсах общей и теоретической физики, теоретической механики.

Основоположниками векторного исчисления по праву считаются ирландский математик У.Р. Гамильтон (1805-1865), который в поисках объектов, обобщающих комплексные числа, открыл кватернионы и попутно ввел понятие «вектор», и немецкий математик Г. Грассман (1809-1877), который около 1844 г. ввел понятие внешнего, а затем и внутреннего произведения для мультивекторов. Американский математик и физик Дж. У. Гиббс (1839-1903) и английский физик О. Хевисайд (1850-1925) нашли применение аппарату векторной алгебры в физике и завершили построение векторного анализа.

Предлагаемое учебно-методическое пособие состоит из двух глав. В первой главе подробно излагается теоретический материал по теме векторная алгебра. Вторая глава содержит примеры задач с разобранными решениями. В конце второй главы приводится типовой вариант контрольной работы по данному разделу алгебры.

Настоящее пособие предназначено для студентов специальностей «Эксплуатация судовых энергетических установок» и «Эксплуатация судового электрооборудования и средств автоматики» и может быть полезным для всех студентов, изучающих высшую математику в объеме технического университета. Оно призвано облегчить студентам изучение курса алгебры и аналитической геометрии и направлено на развитие и активизацию самостоятельной работы студентов.

Глава 1
ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§1. Понятие вектора[*]

В физике, математике, технике и других областях науки встречаются величины двух видов: скалярные и векторные. Скалярные характеризуются числовым значением в заданной системе координат (площадь фигуры, масса и объем тела, время, работа и т. д.). Векторные величины характеризуются помимо числового значения еще и направлением (сила, скорость, ускорение, напряженность электрического или магнитного поля и т. д.) и изображаются векторами.

Прежде чем ввести понятие вектора, дадим определение направленного отрезка.

Определение 1.1. *Направленным отрезком* называется отрезок, у которого указано, какая его точка начальная, а какая конечная.

Определение 1.2. *Вектором* (геометрическим) будем называть направленный отрезок.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B будем обозначать $\overline{AB}$. Точку A вектора $\overline{AB}$ называют также *точкой приложения вектора*. На рисунке в конце вектора принято ставить стрелку, тем самым указывая его направление (рис. 1).

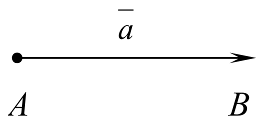


Рис. 1

Векторы также принято обозначать строчными буквами $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, … . Иногда в литературе черточки над векторами не ставят, а выделяют их жирным курсивом: ***a***, ***b***, ***c***, … .

Определение 1.3. Вектор $\overline{BA}$, т.е. вектор, начало которого совпадает с точкой B, а конец – с точкой A, называют *противоположным* вектору $\overline{AB}$. Если $\overline{AB} = \bar{a}$, то $\overline{BA}$ обозначают: $-\bar{a}$.

[*] Понятие «вектор» впервые ввел ирландский математик и физик Уильям Роуэн Гамильтон (1805–1865) в своей работе, посвященной кватернионам.

Замечание. Для вектора $\overline{BA}$ противоположным является вектор $\overline{AB}$, т.е. $-(-\overline{a})=\overline{a}$.

Определение 1.4. Вектор, начало и конец которого совпадают, называют *нулевым вектором* (*нуль-вектором*) и обозначают $\overline{0}$ или пишут просто **0**.

Нуль-вектор не зависит от точки приложения, поэтому ее никогда не указывают.

Направление нулевого вектора не определено (можно также считать, что нуль-вектор имеет любое направление).

Определение 1.5. *Длиной* (*модулем*, или *абсолютной величиной) вектора* $\overline{AB}$ называется число (неотрицательное), равное длине отрезка *AB*. Обозначается $\left|\overline{AB}\right|$.

Длина нуль-вектора равна нулю.

Определение 1.6. Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором* и обозначается $\overline{e}$.

Определение 1.7. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, называется *ортом* вектора и обозначается $\overline{a}_0$.

Определение 1.8. Два вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной или на параллельных прямых, т.е. существует прямая, которой они параллельны.

Коллинеарные векторы обозначаются $\overline{a}\ ||\ \overline{b}$.

Определение 1.9. Векторы называются *компланарными*, если они лежат в одной или параллельных плоскостях, т.е. существует плоскость, которой эти векторы параллельны.

Замечание. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору и компланарным любой паре векторов.

Определение 1.10. Два коллинеарных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются *одинаково направленными*, или *сонаправленными*, если их концы лежат по одну сторону от прямой, проведенной через их начала. Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ лежат на одной прямой, то они считаются сонаправленными в случае, если лучи, определяемые этими векторами, содержатся один в другом. Обозначаются $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$. Коллинеарные векторы, не являющиеся сонаправленными, называются *противоположно направленными* и обозначаются $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$.

Сонаправленные векторы ($\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$, $\bar{c} \uparrow\uparrow \bar{d}$)

Противоположно направленные векторы ($\bar{e} \uparrow\downarrow \bar{f}$, $\bar{l} \uparrow\downarrow \bar{m}$)

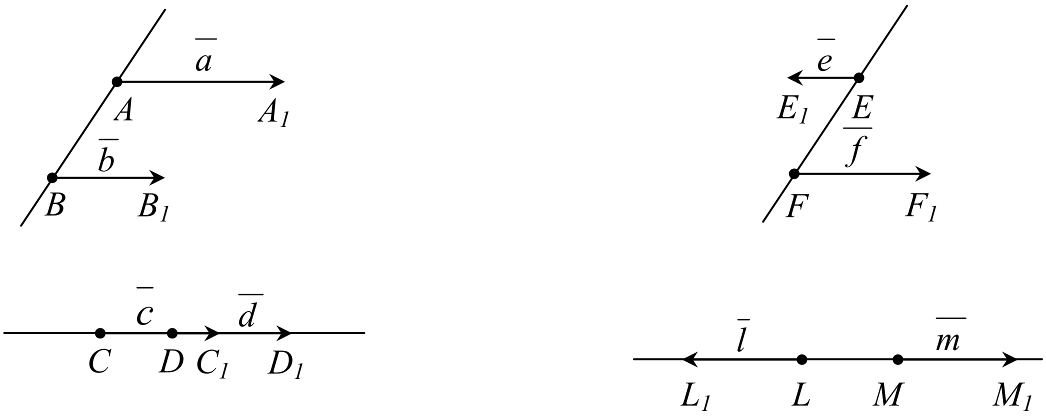


Рис. 2

Определение 1.11. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *равными*, если они сонаправленные и имеют одинаковую длину, т.е. выполнены следующие условия:

1. $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$;
2. $|\bar{a}| = |\bar{b}|$.

Из определения следует, что, выбрав любую точку A' и вектор $\bar{a} = \overline{AB}$, мы можем построить (и притом только один) вектор $\overline{A'B'}$, равный данному вектору $\bar{a}$. В этом случае говорят о параллельном переносе вектора $\bar{a}$ в точку A'. Таким образом, в пространстве имеется целое множество векторов, полученных друг из друга параллельным переносом, т.е. равных между собой. На основании вышесказанного можно дать еще одно определение вектора.

Определение 1.12. Пусть дан направленный отрезок (геометрический вектор). Множество всех направленных отрезков, равных данному, называется *свободным вектором*.

Замечание. Между геометрическими и свободными векторами можно установить следующее соответствие: каждому направленному отрезку (геометрическому вектору) соответствует единственный свободный вектор. Напротив, любому свободному вектору соответствует множество (класс) равных между собой геометрических векторов.

Пример. В физике встречаются величины, которые можно изображать только как геометрический вектор. Например, сила, действующая на упругое тело. Примером свободного вектора является угловая скорость тела.

Замечание. В механике и физике помимо свободных векторов иногда рассматривают также *скользящие* и *связанные* векторы. *Скользящими* называются такие векторы, которые считаются эквивалентными, если они не только равны, но и лежат на одной прямой. Примером скользящего вектора может служить сила, приложенная к абсолютно твердому телу. Понятие *связанного* вектора в физике совпадает с понятием геометрического вектора в аналитической геометрии.

§2. Линейные операции над векторами

Под линейными операциями над векторами понимают операции сложения векторов и умножения вектора на число. Введем эти операции.

Определение 2.1. Пусть даны два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Построим равные им векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$. Вектор $\overline{AC} = \overline{c}$ называется *суммой* двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и обозначается $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ (рис. 3).

Рис. 3

Другими словами, суммой двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор, идущий из начала вектора $\overline{a}$ в конец вектора $\overline{b}$ при условии, что вектор $\overline{b}$ приложен к концу вектора $\overline{a}$.

Таким образом, для любых точек A, B и C справедливо равенство

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}. \tag{2.1}$$

Указанное в определении правило сложения векторов называется *правилом треугольника** (см. рис. 3). Из него несложно получить еще одно правило сложения векторов, известное как *правило параллелограмма* (рис. 4). Оно состоит в следующем: если совместить начала неколлинеарных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, отложить их от произвольной точки A так, что $\bar{a} = \overline{AB},\ \bar{b} = \overline{AD}$, и взять в качестве сторон параллелограмма $ABCD$, то вектор $\bar{c} = \overline{AC}$, лежащий на диагонали этого параллелограмма, и есть сумма $\bar{a} + \bar{b}$. Таким образом,

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}.$$

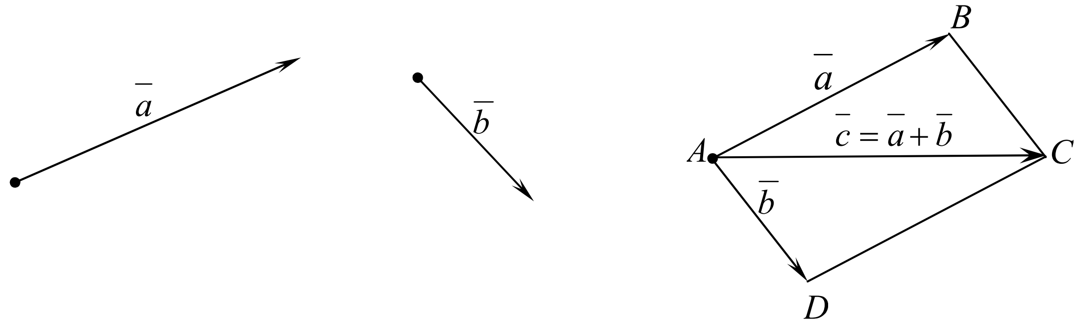


Рис. 4

Замечание. Правило сложения можно распространить на любое конечное число векторов. Для того чтобы найти сумму векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$, нужно последовательно откладывать данные векторы так, чтобы конец предыдущего вектора совпадал с началом последующего. В результате получится некоторая ломаная линия, звеньями которой будут являться данные векторы. Если эту ломаную замкнуть, т.е. соединить начало первого вектора с концом последнего, то получится вектор $\bar{s} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + ... + \bar{a}_n$. Сформулированное правило сложения n векторов называют *правилом замыкания ломаной для многоугольника*.

На рис. 5 показан результат сложения четырех векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и $\bar{d}$.

* Правило сложения векторов, известное, как правило треугольника, впервые сформулировал французский математик Мишель Шаль (1793–1880).

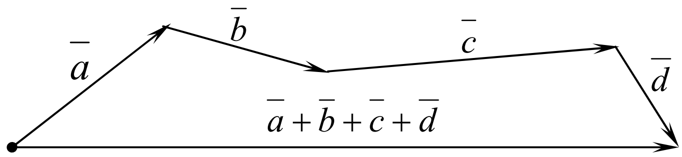


Рис. 5

Определение 2.2. *Произведением вектора* $\overline{a}$ *на число* α ($\alpha \in R$) называется вектор $\overline{b} = \alpha\overline{a}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\overline{b}| = |\alpha||\overline{a}|$, где $|\alpha|$ – модуль числа α.

2) $\overline{b} \uparrow\uparrow \overline{a}$, если $\alpha > 0$;

$\overline{b} \uparrow\downarrow \overline{a}$, если $\alpha < 0$.

Замечание. Если $\alpha = 0$ или $\overline{a} = \overline{0}$, то вектор $\overline{b} = \overline{0}$.

Замечание. При умножении вектора $\overline{a}$ на число $\alpha = -1$ получается вектор $-\overline{a}$, противоположный вектору $\overline{a}$.

Пример 2.1. По вектору $\overline{a}$, изображенному на рисунке 6, построены векторы $2\overline{a}$, $-\frac{1}{2}\overline{a}$.

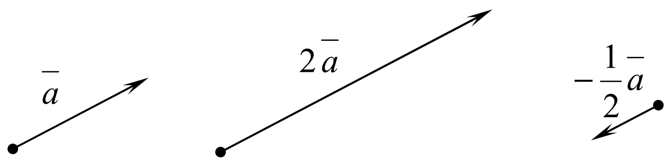


Рис. 6

Свойства операций сложения векторов и умножения вектора на число

Для любых векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ и любых чисел α, β выполняется:

1) переместительный (коммутативный) закон сложения векторов

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a};$$

2) сочетательный (ассоциативный) закон сложения векторов

$$(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c});$$

3) $\overline{0}+\overline{a}=\overline{a}$;

4) $\forall\ \overline{a}\ \ \exists\,(-\overline{a}):(-\overline{a})+\overline{a}=\overline{0}$;

5) сочетательный (ассоциативный) закон умножения на число

$$(\alpha\beta)\overline{a}=\alpha(\beta\overline{a});$$

6) распределительный (дистрибутивный) закон относительно сложения векторов

$$\alpha(\overline{a}+\overline{b})=\alpha\overline{a}+\alpha\overline{b};$$

7) распределительный (дистрибутивный) закон относительно сложения чисел

$$(\alpha+\beta)\overline{a}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{a};$$

8) $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$.

Следствие 2.1. *Разность* двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ определяется как сумма векторов $\overline{a}$ и $(-\overline{b})$:

$$\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+(-\overline{b}).$$

Пример 2.2. В параллелограмме ABCD, где $\overline{AB}=\overline{a}$, $\overline{AD}=\overline{b}$ диагональ $\overline{DB}$ является разностью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, т.е. $\overline{DB}=\overline{a}-\overline{b}$ (рис. 7).

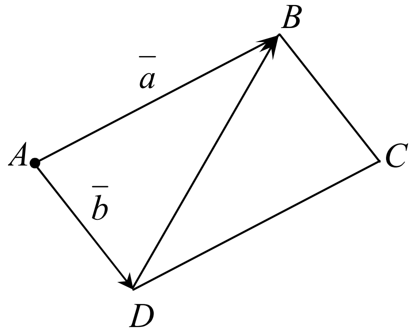


Рис. 7

Действительно, согласно следствию 2.1, определению противоположного вектора 1.3, правилу сложения векторов (2.1) и свойству коммутативности сложения векторов, имеем

$$\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+(-\overline{b})=\overline{AB}+(-\overline{AD})=\overline{DA}+\overline{AB}=\overline{DB}.$$

Замечание. Множество всех свободных векторов некоторого пространства с введенными на нем операциями сложения и умножения на число, обладающими свойствами 1–8, образует так называемое *векторное* (*линейное*) пространство. Однако линейные пространства могут образовывать и другие множества элементов. Подробнее об этом пойдет речь в следующем параграфе.

§3. Понятие линейного пространства

Определение 3.1. Множество L элементов a, b, c, … произвольной природы называется *линейным (векторным)* пространством, если на этом множестве заданы две операции:

1) операция сложения (внутренняя операция), состоящая в том, что каждой паре элементов $a, b \in L$ ставится в соответствие по некоторому правилу или закону элемент $c \in L$, называемый суммой элементов a и b и обозначаемый $c = a + b$;

2) операция умножения элемента на действительное число (внешняя операция), состоящая в том, что каждому элементу $a \in L$ и каждому числу $\alpha \in R$ ставится в соответствие по некоторому правилу или закону элемент $b \in L$, называемый произведением элемента a на число α и обозначаемый $b = \alpha \cdot a$,

причем эти операции удовлетворяют свойствам 1–8, приведенным в предыдущем параграфе для векторов.

Элементы произвольного линейного пространства принято также называть *векторами*.

Замечание. В определении 3.1 числа $\alpha, \beta, \gamma ...$ – действительные, поэтому линейное пространство называется *вещественным*, или *действительным линейным пространством*. Если же $\alpha, \beta, \gamma ...$ – комплексные числа, то линейное пространство будет называться *комплексным*.

Примеры линейных пространств

1. $L = \{0\}$. Такое линейное пространство называется *нулевым,* или *тривиальным*.

2. Множество свободных векторов, лежащих на одной прямой (плоскости или в обычном пространстве). Эти пространства мы будем обозначать L_1, L_2 и L_3 соответственно. Смысл нижних индексов выяснится позднее в §6.

3. Множество прямоугольных матриц одного и того же размера.

4. Множество решений однородной системы линейных алгебраических уравнений.

5. Множество, элементами которого являются упорядоченные наборы n действительных чисел: $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, если операции сложения элементов и умножение на действительное число $\alpha \in R$ определить следующим образом:

$$x + y = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n\}, \quad \alpha x = \{\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n\}.$$

6. Множество $C\,[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $f(t)$, если для этих функций естественным образом определены операции сложения и умножения на число.

7. Совокупность всех многочленов степени не выше n: $P(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n$, для которых обычным образом определены операции сложения и умножения на действительное число.

Определение 3.2. *Линейным подпространством* линейного пространства называется непустое подмножество L^* векторов из L, которые сами образуют линейное пространство относительно уже введенных в L операций сложения и умножения на число, т.е. такое подмножество L^*, для которого выполнены два условия:

$$1.\ \forall a, b \in L^* :\ a + b \in L^*;$$

$$2.\ \forall a \in L^*,\ \forall \alpha \in R : \alpha a \in L^*.$$

Тривиальными примерами линейных подпространств пространства L могут служить само пространство L, а также множество, состоящее из одного нулевого элемента (*нулевое* подпространство).

В пространстве L_3 совокупность векторов, лежащих в какой-нибудь плоскости или на какой-нибудь прямой, которые проходят через начало координат, будут образовывать линейные подпространства.

Множества диагональных и верхних треугольных (нижних треугольных) матриц являются подпространствами линейного пространства, образованного множеством квадратных матриц одного и того же порядка.

§4. Линейная зависимость и независимость системы n векторов

Пусть дана система n векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ и n действительных чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

Определение 4.1. *Линейной комбинацией векторов* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ будем называть вектор следующего вида

$$\overline{b} = \alpha_1 \overline{a}_1 + \alpha_2 \overline{a}_2 + ... + \alpha_n \overline{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{a}_i .$$

Если $\overline{b} = \overline{0}$, то получаем

$$\alpha_1 \overline{a}_1 + \alpha_2 \overline{a}_2 + ... + \alpha_n \overline{a}_n = \overline{0} . \tag{4.1}$$

Определение 4.2. Система из n векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ называется *линейно независимой*, если из равенства (4.1) следует, что все коэффициенты $\alpha_i\,(i = \overline{1,n})$ равны нулю, т. е.

$$\alpha_1 \overline{a}_1 + \alpha_2 \overline{a}_2 + ... + \alpha_n \overline{a}_n = \overline{0} \Rightarrow \alpha_i = 0, \forall i = \overline{1,n} .$$

Определение 4.3. Система из n векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ называется *линейно зависимой*, если из равенства (4.1) следует, что хотя бы один из коэффициентов $\alpha_i\,(i = \overline{1,n})$ отличен от нуля, т.е.

$$\alpha_1 \overline{a}_1 + \alpha_2 \overline{a}_2 + ... + \alpha_n \overline{a}_n = \overline{0} \Rightarrow \exists i :\ \alpha_i \neq 0 (i = \overline{1,n}) .$$

Отметим следующие три свойства линейно зависимых систем векторов.

Теорема 4.1. *Если среди векторов* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ *хотя бы один вектор является нулевым, то такая система векторов линейно зависима.*

Доказательство. Пусть, например, $\overline{a}_1 = \overline{0}$. Тогда можно составить линейную комбинацию векторов

$$\alpha_1 \cdot \overline{0} + 0 \cdot \overline{a}_2 + ... + 0 \cdot \overline{a}_n = \overline{0}, \quad \alpha_1 \neq 0.$$

А это и означает, что векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ линейно зависимы. ▲

Теорема 4.2. *Система n* ($n \geq 2$) *векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один вектор этой системы можно представить в виде линейной комбинации остальных.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ линейно зависима. Согласно определению 4.3, в равенстве (4.1) существует, по крайней мере, один коэффициент $\alpha_i \neq 0$ $(i = \overline{1,n})$. Для определенности будем считать, что $\alpha_1 \neq 0$. Тогда из (4.1) можно выразить вектор $\overline{a}_1$:

$$\overline{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\overline{a}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\overline{a}_3 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\overline{a}_n = \tilde{\alpha}_2\overline{a}_2 + \tilde{\alpha}_3\overline{a}_3 + ... + \tilde{\alpha}_n\overline{a}_n.$$

А это и означает, по определению 4.1, что вектор $\overline{a}_1$ является линейной комбинацией остальных векторов системы.

Достаточность. Пусть один из векторов системы, например вектор $\overline{a}_i$, можно представить в виде линейной комбинации остальных:

$$\overline{a}_i = \alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_{i-1}\overline{a}_{i-1} + \alpha_{i+1}\overline{a}_{i+1} + ... + \alpha_n\overline{a}_n.$$

Перенося все слагаемые в правую сторону, получим

$$\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_{i-1}\overline{a}_{i-1} - \overline{a}_i + \alpha_{i+1}\overline{a}_{i+1} + ... + \alpha_n\overline{a}_n = \overline{0}.$$

Так как в данной линейной комбинации коэффициент $\alpha_i = -1 \neq 0$, то по определению 4.3 мы имеем линейно зависимую систему векторов. ▲

Теорема 4.3. *Если среди векторов* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ *имеется хотя бы одна подсистема линейно зависимых векторов, то вся система линейно зависима.*

Доказательство. Пусть среди векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ имеется k ($k < n$) линейно зависимых. Можно считать, что первые k векторов линейно зависимы (если это не так, то векторы всегда можно перенумеровать), т. е.

$$\alpha_1 \overline{a}_1 + \alpha_2 \overline{a}_2 + ... + \alpha_k \overline{a}_k = \overline{0},$$

где, например, $\alpha_1 \neq 0$. Равенство не изменится, если мы добавим в его левую часть остальные *(n–k)* векторов с нулевыми коэффициентами:

$$\alpha_1 \overline{a}_1 + \alpha_2 \overline{a}_2 + ... + \alpha_k \overline{a}_k + 0 \cdot \overline{a}_{k+1} + ... + 0 \cdot \overline{a}_n = \overline{0}.$$

Мы имеем равную нулевому вектору линейную комбинацию n векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ и при этом $\alpha_1 \neq 0$. Следовательно, система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ линейно зависима. ▲

§5. Примеры линейно зависимых и линейно независимых систем векторов

В этом параграфе рассмотрим примеры линейно зависимых и линейно независимых векторов пространства L_3. Предварительно приведем следующие теоремы.

Теорема 5.1. *Если векторы* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ *коллинеарные, то существует единственное число* $\alpha \in R$ *такое, что* $\overline{a} = \alpha \overline{b}$.

Теорема 5.2. *Если векторы* $\overline{a}$, $\overline{b}$ *и* $\overline{c}$ *компланарные, то существуют единственные числа* α, $\beta \in R$ *такие, что* $\overline{c} = \alpha \overline{a} + \beta \overline{b}$.

Теоремы 4.1, 4.2, 5.1, 5.2 позволяют сформулировать следующие утверждения:

1. *Система, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда он нулевой.*

2. *Система, состоящая из двух векторов, линейно зависима тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны.*

3. *Система, состоящая из трех векторов, линейно зависима тогда и только тогда, когда данные три вектора компланарны.*

Теорема 5.3. *Пусть в пространстве* L_3 *даны три некомпланарных вектора* $\overline{p}$, $\overline{q}$ *и* $\overline{r}$*, тогда любой вектор* $\overline{a}$ *этого пространства можно разложить по данным векторам, причем единственным образом.*

Доказательство. I. Покажем существование чисел α, β, γ, таких, что

$$\overline{a} = \alpha\overline{p} + \beta\overline{q} + \gamma\overline{r}. \tag{5.1}$$

Рассмотрим следующие случаи:

1. Вектор $\overline{a}$ коллинеарен одному из трех векторов $\overline{p}$, $\overline{q}$ и $\overline{r}$, например, вектору $\overline{p}$. Тогда, согласно теореме 5.1, вектор $\overline{a}$ можно представить: $\overline{a} = \alpha\overline{p} + 0\cdot\overline{q} + 0\cdot\overline{r}$, где $\alpha \in R$.

2. Векторы $\overline{a}$, $\overline{p}$ и $\overline{q}$ – компланарные. Тогда, согласно теореме 5.2: $\overline{a} = \alpha\overline{p} + \beta\overline{q} + 0\cdot\overline{r}$, где $\alpha, \beta \in R$. Аналогично можно рассмотреть случаи, когда компланарными являются векторы $\overline{a}$, $\overline{p}$, $\overline{r}$ или $\overline{a}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$.

3. Вектор $\overline{a}$ произвольный. Отложим от некоторой точки *O* пространства векторы $\overline{OP} = \overline{p}$, $\overline{OQ} = \overline{q}$, $\overline{OR} = \overline{r}$ и $\overline{OA} = \overline{a}$ (рис. 8). Проведем прямую через точку *A* параллельно вектору $\overline{r}$. Прямая пересекает плоскость *QOP* в точке *K*. По правилу треугольника сложения векторов (2.1) имеем:

$$\overline{a} = \overline{OA} = \overline{OK} + \overline{KA}. \tag{5.2}$$

Так как векторы $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OK}$ принадлежат одной плоскости *QOP*, т.е. являются компланарными, то по теореме 5.2: $\overline{OK} = \alpha\overline{p} + \beta\overline{q}$, где $\alpha, \beta \in R$. По построению $\overline{KA} \| \overline{r}$, тогда согласно теореме 5.1: $\overline{KA} = \gamma\overline{r}$. Таким образом, подставляя найденные выражения векторов $\overline{OK}$ и $\overline{KA}$ в (5.2), найдем: $\overline{a} = \alpha\overline{p} + \beta\overline{q} + \gamma\overline{r}$.

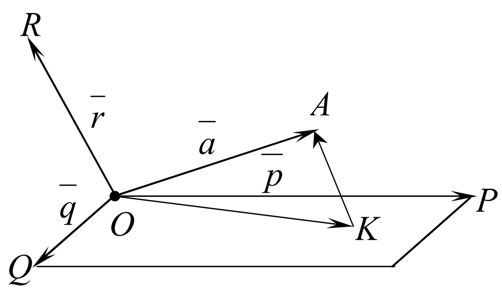


Рис. 8

II. Покажем единственность чисел α, β, γ в разложении (5.1). Для этого воспользуемся методом «от противного». Предположим, что существуют такие числа α_1, β_1 и γ_1, причем выполняется, по крайней мере, одно из неравенств $\alpha_1 \neq \alpha$, $\beta_1 \neq \beta$ и $\gamma_1 \neq \gamma$, и

$$\overline{a} = \alpha_1 \overline{p} + \beta_1 \overline{q} + \gamma_1 \overline{r}. \tag{5.3}$$

Вычитая из равенства (5.3) равенство (5.1), находим

$$(\alpha_1 - \alpha)\overline{p} + (\beta_1 - \beta)\overline{q} + (\gamma_1 - \gamma)\overline{r} = \overline{0}. \tag{5.4}$$

Согласно нашему предположению, хотя бы один из коэффициентов в (5.4) отличен от нуля, а это означает, что векторы $\overline{p}$, $\overline{q}$ и $\overline{r}$ линейно зависимы, а значит, компланарны. Мы получили противоречие с условием теоремы. Следовательно, наше предположение неверно. Таким образом, коэффициенты в разложении (5.1) единственные. ▲

Следствие 5.1. *Любые четыре (или более) вектора пространства L_3 линейно зависимы.*

§6. Базис. Координаты* вектора в базисе

Определение 6.1. *Базисом векторов на прямой* называется любой линейно независимый вектор, принадлежащий этой прямой. *Базисом векторов на плоскости* называется любая упорядоченная пара линейно независимых векторов, принадлежащих этой плоскости. *Базисом векторов в трехмерном пространстве* называется любая упорядоченная тройка линейно независимых векторов этого пространства.

Из определения базиса и утверждений 1–3 предыдущего параграфа следует, что: 1) *базисом векторов на прямой* является любой ненулевой вектор $\{\overline{e}\}$, лежащий на этой прямой; 2) *базисом векторов на плоскости* является любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$, принадлежащих этой плоскости; 3) *базисом векто-*

* Метод координат впервые ввел французский математик и философ Рене Декарт (1596-1650).

ров в трехмерном пространстве является любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ этого пространства. Такие базисы называют *аффинными базисами векторов прямой*, *плоскости* и *трехмерного пространства* соответственно.

Введем понятие координат вектора трехмерного пространства в данном базисе. Пусть $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ – аффинный базис векторов пространства, $\overline{a}$ – произвольный вектор пространства. Согласно теореме 5.3 и определению базиса векторов трехмерного пространства, вектор $\overline{a}$ можно разложить по базисным векторам, т.е. представить в виде

$$\overline{a} = a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2 + a_3\overline{e}_3, \tag{6.1}$$

причем каждому вектору $\overline{a}$ ставится в соответствие единственная тройка чисел a_1, a_2, a_3 и наоборот.

Определение 6.2. Коэффициенты a_1, a_2, a_3 в разложении (6.1) вектора по базису называются *координатами (аффинными координатами) вектора* $\overline{a}$ *в данном базисе (относительного данного базиса)*. Число a_1 называют *первой координатой*, a_2 – *второй координатой*, а a_3 – *третьей координатой* вектора $\overline{a}$.

Вектор можно задавать его координатами: $\overline{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$.

Замечание. Коэффициенты одного и того же вектора в разложениях по разным базисам различны.

Замечание. Координаты вектора $\overline{a}$ можно также записывать в виде строчной $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ или столбцевой $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ матриц. Поэтому очень часто под вектором понимают соответствующую строчную (столбцевую) матрицу и наоборот: при необходимости любую матрицу рассматривают как вектор с соответствующими координатами. Строчные (столбцевые) матрицы часто называют *вектор-строкой* (*вектор-столбцом*).

Замечание. Базисные векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ имеют координаты:

$$\overline{e}_1 = \{1, 0, 0\},\ \overline{e}_2 = \{0, 1, 0\},\ \overline{e}_3 = \{0, 0, 1\}.$$

Определение 6.3. Если базисные векторы $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ пространства являются единичными и взаимно перпендикулярными, то базис называется *прямоугольным декартовым*, или *ортонормированным*, а сами векторы – *ортами*.

Векторы ортонормированного базиса трехмерного пространства принято обозначать $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Вектор $\bar{a}$ относительно декартового базиса $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ задается в виде:

$$\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}\,. \tag{6.2}$$

Определение 6.4. Координаты вектора относительно ортонормированного базиса $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ будем называть *прямоугольными*.

Замечание. Аналогично определяются координаты вектора на плоскости или прямой. Вектор на плоскости относительно некоторого аффинного базиса $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ однозначно задается упорядоченной парой чисел $\bar{a} = \{a_1; a_2\}$, т. е. $\bar{a} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2$. Вектор, лежащий на прямой, относительно некоторого базиса $\{\bar{e}_1\}$ однозначно задается одним числом $\bar{a} = \{a_1\}$, т. е. $\bar{a} = a_1\bar{e}_1$.

Рассмотрим понятие базиса для произвольного линейного пространства L.

Определение 6.5. *Базисом* линейного пространства L называется любая упорядоченная система линейно независимых векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ этого пространства таких, что каждый вектор $\bar{a} \in L$ представим в виде линейной комбинации этих векторов, т.е.

$$\bar{a} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + ... + a_n\bar{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\bar{e}_i, \ a_i \in R\,. \tag{6.3}$$

Выражение (6.3) называется разложением вектора $\bar{a}$ по базису $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$, а числа $\{a_i\}(i = \overline{1,n})$ называются *координатами вектора* $\bar{a}$ *относительно данного базиса*.

В пространстве L существует много различных базисов, однако все они состоят из одного и того же числа векторов. Количество векторов в базисе называется *размерностью линейного пространства*. Размерность линейного пространства L будем обозначать *dim L* (от французского слова dimension – размерность). Пространство L размерности n будем называть *n-мерным* и писать L_n.

Замечание. Если пространство состоит из одного нулевого элемента, то его размерность будем считать равной нулю.

Замечание. Множество векторов прямой образует одномерное, плоскости – двумерное, обычного пространства – трехмерное векторные пространства. Выше мы обозначили их через L_1, L_2, L_3 соответственно. Здесь нижний индекс означает размерность пространства.

Пространства, в которых нельзя указать базис, состоящий из конечного числа векторов, называются *бесконечномерными*. Примером бесконечномерного пространства может служить множество $C\,[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $f(t)$, для которых операции сложения и умножения на число определены естественным образом.

Основное значение базиса состоит в том, что линейные операции над векторами при задании базиса можно свести к линейным операциям над числами — координатами этих векторов относительно данного базиса. Об этом и пойдет речь в следующем параграфе.

§7. Действия над векторами в координатах

В § 2 были введены линейные операции над векторами. В этом параграфе мы покажем, как выполняются соответствующие операции в координатной форме.

Рассмотрим трехмерное пространство.

Теорема 7.1. *Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны соответствующие координаты этих векторов.*

Это означает, что если относительно некоторого аффинного базиса $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ векторы заданы своими координатами: $\overline{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\overline{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, то

$$\overline{a} = \overline{b} \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3. \tag{7.1}$$

Теорема 7.2. *Какова линейная зависимость между векторами, такова и зависимость между их соответствующими координатами.*

Доказательство. Пусть в трехмерном пространстве даны векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ такие, что вектор $\overline{b}$ является линейной комбинацией этих векторов, т.е.

$$\bar{b}=\alpha_1\bar{a}_1+\alpha_2\bar{a}_2+...+\alpha_n\bar{a}_n. \tag{7.2}$$

И пусть известны координаты векторов $\bar{b}, \bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ относительно некоторого аффинного базиса $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ этого пространства: $\bar{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$, $\bar{a}_1=\{a_{11},a_{21},a_{31}\}$, $\bar{a}_2=\{a_{12},a_{22},a_{32}\}$, ..., $\bar{a}_n=\{a_{1n},a_{2n},a_{3n}\}$. Запишем равенство (7.2) в координатной форме:

$$b_1\bar{e}_1+b_2\bar{e}_2+b_3\bar{e}_3=\alpha_1(a_{11}\bar{e}_1+a_{21}\bar{e}_2+a_{31}\bar{e}_3)+\alpha_2(a_{12}\bar{e}_1+a_{22}\bar{e}_2+a_{32}\bar{e}_3)+...+\alpha_n(a_{1n}\bar{e}_1+a_{2n}\bar{e}_2+a_{3n}\bar{e}_3)=$$
$$=(\alpha_1a_{11}+\alpha_2a_{12}+...+\alpha_na_{1n})\bar{e}_1+(\alpha_1a_{21}+\alpha_2a_{22}+...+\alpha_na_{2n})\bar{e}_2+(\alpha_1a_{31}+\alpha_2a_{32}+...+\alpha_na_{3n})\bar{e}_3.$$

Учитывая (7.1), получим

$$\begin{cases} b_1=\alpha_1a_{11}+\alpha_2a_{12}+...+\alpha_na_{1n}, \\ b_2=\alpha_1a_{21}+\alpha_2a_{22}+...+\alpha_na_{2n}, \\ b_3=\alpha_1a_{31}+\alpha_2a_{32}+...+\alpha_na_{3n}. \end{cases} \tag{7.3}$$

Следствие 7.1. При сложении векторов их координаты складываются, при вычитании – вычитаются; при умножении вектора на число – каждая координата умножается на это число, т.е.

$$\bar{a}\pm\bar{b}=\{a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3\};\ \alpha\bar{a}=\{\alpha a_1,\alpha a_2,\alpha a_3\}.$$

Замечание. Правила выполнения линейных операций над векторами в координатной форме совпадают с правилами соответствующих операций над матрицами.

Следствие 7.2. Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов $\bar{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ и $\bar{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$ $(\bar{a}\neq 0, \bar{b}\neq 0)$ является пропорциональность их координат, т.е.

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}. \tag{7.4}$$

Следствие 7.3. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов $\bar{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$, $\bar{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$ и $\bar{c}=\{c_1,c_2,c_3\}$ является равенство

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

§8. Аффинная и прямоугольная декартова системы координат

Рассмотрим трехмерное пространство.

Определение 8.1. Под *аффинной системой координат* в трехмерном пространстве будем понимать геометрический образ, состоящий из фиксированной точки O и аффинного базиса $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

Аффинную систему координат будем обозначать $\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Точка O называется *началом координат*, а векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ – *координатными векторами*.

Аналогично под *прямоугольной декартовой системой координат* $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ будем понимать геометрический образ, состоящий из фиксированной точки O – начала координат и прямоугольного декартового базиса $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.

Направленные прямые, проходящие через начало координат и параллельные координатным векторам, называются *координатными осями*. Оси, параллельные векторам $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ (или векторам $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$), называются соответственно *осями абсцисс*, *ординат* и *аппликат* и обозначаются Ox, Oy, Oz. Плоскости, определяемые осями Ox и Oy, Ox и Oz, Oy и Oz, называются *координатными плоскостями* и обозначаются соответственно через Oxy, Oxz, Oyz. Систему кординат $\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ (или $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$) обозначают также $Oxyz$.

В дальнейшем все рассуждения будем вести в прямоугольной декартовой системе координат.

Пусть $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ – прямоугольная декартова система координат. Рассмотрим произвольную точку A трехмерного пространства.

Определение 8.2. Направленный отрезок $\overline{OA}$ называется *радиус-вектором* точки A.

Заметим, что между точками пространства и их радиус-векторами существует взаимно однозначное соответствие.

Определение 8.3. *Координатами (прямоугольными декартовыми координатами) точки A* трехмерного пространства называется тройка чисел (x, y, z), где x, y, z – координаты радиус-вектора $\overline{OA}$ в ортонормированном базисе $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, т.е.

$$\overline{OA} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \Leftrightarrow A(x, y, z). \qquad (8.1)$$

Аналогично названию координатных осей первую координату называют *абсциссой*, вторую – *ординатой* и третью – *аппликатой точки*.

Для построения точки A в прямоугольной декартовой системе координат воспользуемся формулой (8.1). Отложим от точки O векторы $\overline{OA_1} = x\bar{i}$, $\overline{OA_2} = y\bar{j}$, $\overline{OA_3} = z\bar{k}$. Построим прямоугольный параллелепипед так, что его три измерения равны $\overline{OA_1}$, $\overline{OA_2}$ и $\overline{OA_3}$, тогда вектор $\overline{OA} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \overline{OA_3}$ совпадает с диагональю параллелепипеда. В справедливости вышесказанного несложно убедиться, поочередно складывая векторы $\overline{OA_1}$ и $\overline{OA_2}$, а затем векторы $(\overline{OA_1} + \overline{OA_2})$ и $\overline{OA_3}$ по правилу параллелограмма. Конец вектора $\overline{OA}$ и есть искомая точка (рис. 9).

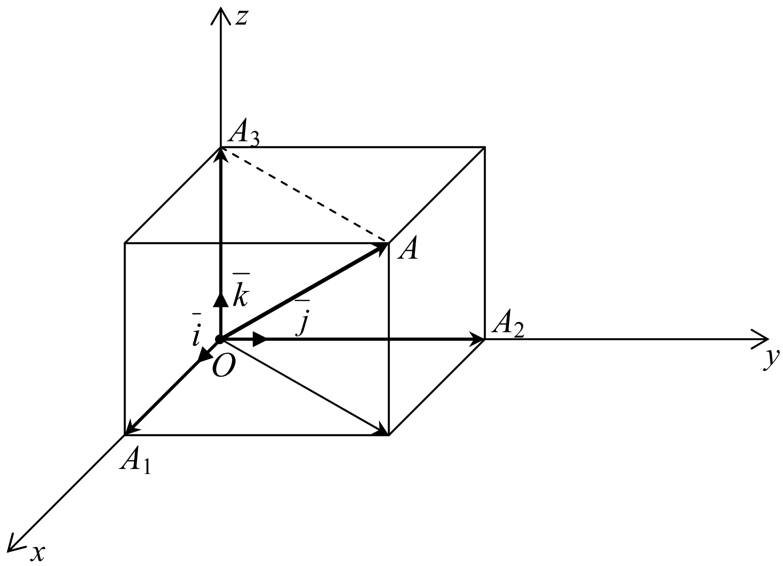


Рис. 9

Рассмотрим некоторые задачи, которые пригодятся нам в дальнейшем.

***Задача 1* (*о нахождении координат вектора по координатам его начала и конца*).**

Рассмотрим две точки A и B, причем $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Найдем координаты вектора $\overline{AB}$ (рис. 10).

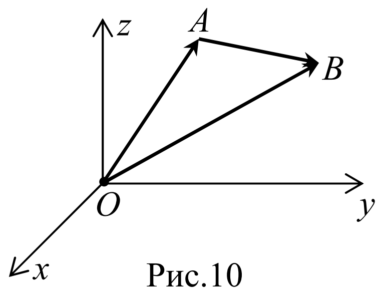


Рис.10

Решение. Из рис. 10 видно, что $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$. С учетом (8.1), имеем: $\overline{OA} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\overline{OB} = \{x_2, y_2, z_2\}$. Используя следствие 7.1, получим:

$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}. \tag{8.2}$$

Таким образом, *для того, чтобы найти координаты вектора с известными координатами его начала и конца, нужно от координат конца вычесть координаты начала*.

Задача 2 (о делении отрезка в данном соотношении). Рассмотрим отрезок M_1M_2, причем $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Пусть данный отрезок точкой M делится в соотношении $\dfrac{M_1M}{MM_2} = \lambda$. Найдем координаты точки M.

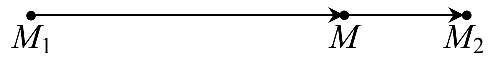


Рис. 11

Решение. Из рис. 11 видно, что справедливо векторное равенство

$$\overline{M_1M} = \lambda \overline{MM_2}.$$

Предположим, что точка M имеет координаты $M(x, y, z)$. Находя по формуле (8.2) координаты векторов $\overline{M_1M}$ и $\overline{MM_2}$ и учитывая теорему 7.1, получим равенства:

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y), \\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z). \end{cases}$$

Выражая из первого равенства x, из второго — y, а из третьего — z, находим координаты точки M:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \tag{8.3}$$

В случае, если $\lambda = 1$, т. е. $\overline{M_1M} = \overline{MM_2}$, получаем формулу координат середины отрезка

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (8.3')$$

Замечание. На плоскости (в двумерном пространстве) можно также задать прямоугольную систему координат Oxy. С помощью введенной системы координат любую точку или ее радиус-вектор можно представить парой чисел (x, y). Все соотношения, полученные нами ранее для координат векторов и точек трехмерного пространства, будут справедливы и на плоскости с той лишь разницей, что из них нужно всюду убрать третью координату z. Аналогичные рассуждения можно повторить и для произвольной прямой (одномерного пространства).

§9. Проекция вектора на ось

Определение 9.1. *Осью* называется прямая с лежащим на ней единичным вектором (ортом), задающим положительное направление на прямой.

На рисунке ось будем изображать в виде направленной прямой.

Пусть в пространстве задана ось l и точка A, не принадлежащая оси.

Определение 9.2. Основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую l, точка A' называется *проекцией (ортогональной проекцией) точки на ось.*

В случае, если точка A принадлежит оси l, то проекция точки на ось совпадает с самой точкой A.

Пусть задан некоторый вектор $\overline{a} = \overline{AB}$. Находя проекции начала и конца вектора $\overline{a}$ на ось l, получим вектор $\overline{a'} = \overline{A'B'}$, где A', B' — соответственно проекции точек A, B на ось l.

Определение 9.3. *Проекцией вектора $\overline{a}$ на ось l* будем называть положительное число, равное $|\overline{a'}|$, если вектор $\overline{a'}$ и ось l направлены одинаково (см. рис. 12) и отрицательное число $-|\overline{a'}|$, если вектор $\overline{a'}$ и ось l направлены противоположно (см. рис. 13).

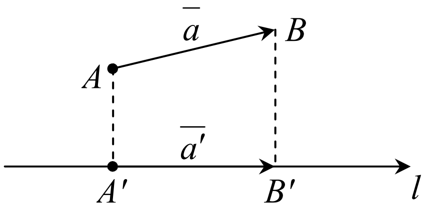


Рис. 12

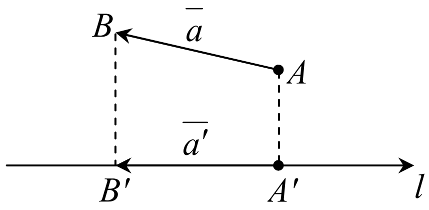


Рис. 13

Проекцию вектора $\overline{a}$ на ось l будем обозначать $пр_l\,\overline{a}$. Таким образом, согласно определению $пр_l\,\overline{a} = \left|\overline{a'}\right|$ или $пр_l\,\overline{a} = -\left|\overline{a'}\right|$.

Замечание. Если $\overline{a} = \overline{0}$ или $\overline{a} \perp l$, то $пр_l\,\overline{a} = 0$.

Теорема 9.1. *Проекция вектора $\overline{a}$ на ось l равна произведению длины вектора $\overline{a}$ на косинус угла φ между вектором $\overline{a}$ и осью l, где под углом φ понимается наименьший из двух углов, образуемых вектором и осью.*

Таким образом,

$$пр_l\overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cdot \cos\varphi \qquad (0 \le \varphi \le \pi). \tag{9.1}$$

Доказательство. В зависимости от величины угла φ возможны следующие случаи (рис. 14):

1. Если $\varphi < 90^0$, то $пр_l\overline{a} = +\left|\overline{a'}\right| = \left|\overline{a}\right| \cdot \cos\varphi$.

2. Если $90^0 < \varphi < 180^0$, то $пр_l\overline{a} = -\left|\overline{a'}\right| = -\left|\overline{a}\right| \cdot \cos(\pi - \varphi) = \left|\overline{a}\right| \cdot \cos\varphi$.

3. Если $\varphi = 90^0$, то $пр_l\overline{a} = 0 = \left|\overline{a}\right| \cdot \cos\varphi$. ▲

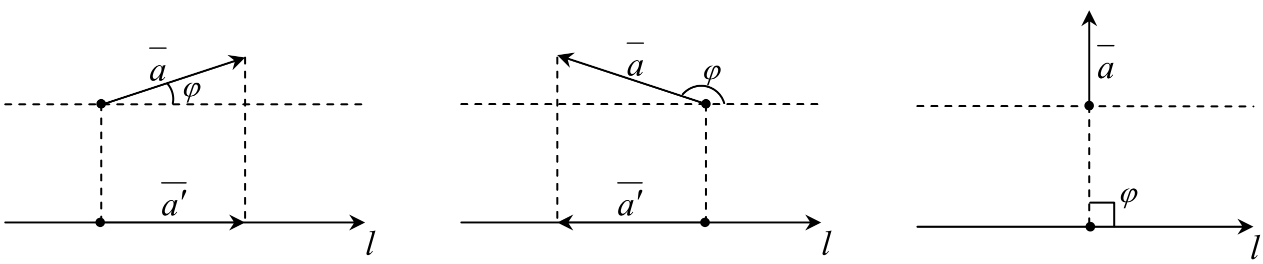


Рис. 14

Следствие 9.1. Проекция вектора на ось есть число положительное, если угол φ между вектором и осью острый, и отрицательное, если угол φ тупой. Если угол φ прямой, то проекция вектора на ось равна нулю.

Следствие 9.2. Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.

Свойства проекций векторов на ось

1) $np_l\overline{a} + np_l\overline{b} = np_l(\overline{a} + \overline{b})$.

2) $np_l(\alpha\overline{a}) = \alpha \cdot np_l\overline{a}, \quad \forall \alpha \in R.$

Доказательство:

1) обозначим $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$. Рассмотрим $np_l\overline{c} = \left|\overline{c'}\right| = \left|\overline{a'}\right| + \left|\overline{b'}\right| = np_l\overline{a} + np_l\overline{b}$ (рис.15); ▲

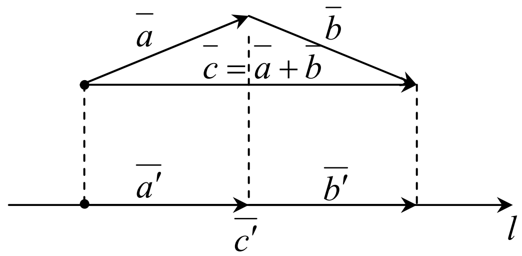


Рис. 15

2) в зависимости от знака α возможны следующие случаи:

a) $\alpha > 0$: $np_l(\alpha\overline{a}) \overset{\text{по теореме 9.1}}{=} \left|\alpha\overline{a}\right| \cdot \cos\varphi = \alpha \cdot \left|\overline{a}\right| \cdot \cos\varphi = \alpha \cdot np_l\overline{a}$.

b) $\alpha < 0$: $np_l(\alpha\overline{a}) \overset{\text{по теореме 9.1}}{=} \left|\alpha\overline{a}\right| \cdot \cos(\pi - \varphi) = -\alpha \cdot \left|\overline{a}\right| \cdot (-\cos\varphi) = \alpha \cdot np_l\overline{a}.$

c) $\alpha = 0$: $np_l(\alpha\overline{a}) = np_l(\overline{0}) \overset{\text{см. замечание к опр.9.3}}{=} 0 = \alpha \cdot np_l\overline{a}.$ ▲

Таким образом, линейные операции над векторами сводятся к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов.

Замечание. Все рассуждения, приведенные выше, будут также справедливы, если вместо оси *l* рассматривать произвольный ненулевой вектор. Проекцию (ортогональную проекцию) вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ (на направление вектора $\bar{b}$) будем обозначать $пр_{\bar{b}}\bar{a}$.

Теорема 9.2. *Декартовы прямоугольные координаты* a_1, a_2, a_3 *вектора* $\bar{a}$ *равны соответственно проекциям этого вектора на оси Ox, Oy и Oz*.

Можно дать еще одно определение координат вектора.

Определение 9.4. *Координатами вектора* $\bar{a}$ в прямоугольной декартовой системе координат *Oxyz* называются проекции этого вектора на соответствующие координатные оси.

Рассмотрим задачу о нахождении длины вектора по его координатам.

Задача. *Пусть дан вектор* $\bar{a}$*, который относительно прямоугольного декартового базиса* $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ *имеет координаты:* $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$. *Найдем длину вектора* $\bar{a}$.

Решение. Найдем проекции вектора $\bar{a} = \overline{OA}$ на координатные оси и обозначим их OA_1, OA_2 и OA_3. Согласно теореме 9.2, $OA_1 = a_1$, $OA_2 = a_2$, $OA_3 = a_3$. Построим прямоугольный параллелепипед так, что его три измерения равны OA_1, OA_2 и OA_3. Вектор $\bar{a}$ в построенном параллелепипеде совпадает с диагональю (см. рис. 9). Так как квадрат диагонали в прямоугольном параллелепипеде равен сумме квадратов его сторон, то

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \tag{9.2}$$

Таким образом, *длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов координат этого вектора*.

Замечание. Длина вектора $\overline{AB}$, где $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, согласно формулам (8.2), (9.2), находится по формуле

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{9.3}$$

§10. Направляющие косинусы вектора

Обозначим буквами α, β, γ — углы наклона вектора $\overline{a}$ к осям Ox, Oy и Oz соответственно (рис. 16).

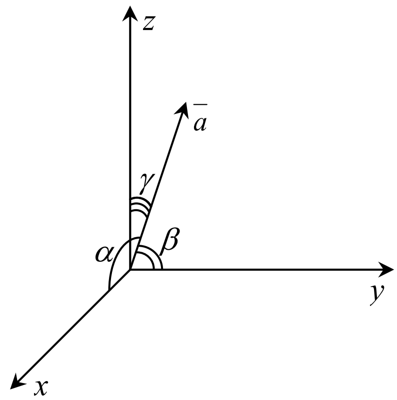


Рис. 16

Определение 10.1. Числа $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются *направляющими косинусами вектора* $\overline{a}$.

Пусть относительно прямоугольного декартова базиса вектор $\overline{a}$ имеет координаты $\overline{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$. По теореме 9.2 $np_{Ox}\overline{a} = a_1$, $np_{Oy}\overline{a} = a_2$, $np_{Oz}\overline{a} = a_3$. Учитывая формулы (9.1), получим

$$a_1 = |\overline{a}| \cdot \cos\alpha, \quad a_2 = |\overline{a}| \cdot \cos\beta, \quad a_3 = |\overline{a}| \cdot \cos\gamma. \tag{10.1}$$

Подставляя выражение длины вектора $\overline{a}$ из равенства (9.2), находим следующие выражения для направляющих косинусов вектора:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \qquad \cos\gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}. \tag{10.2}$$

Возводя в квадрат обе части каждого из равенств (10.2) и складывая полученные результаты, находим

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \tag{10.3}$$

т.е. *сумма квадратов направляющих косинусов любого вектора равна единице.*

Так как вектор однозначно определяется своими координатами, то из формулы (10.1) следует, что он также однозначно определяется своей длиной и направляющими косинусами.

Замечание. Из равенств (10.1) следует, что координаты единичного вектора совпадают с его направляющими косинусами, т.е. $\overline{e} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

§11. Скалярное произведение векторов

Определение 11.1. *Скалярным произведением* двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение обозначается $(\overline{a}, \overline{b})$, или $\overline{a} \cdot \overline{b}$, или пишут просто $\overline{a}\,\overline{b}$. Таким образом, по определению

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi . \tag{11.1}$$

Замечание. Под углом φ между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ понимается наименьший из двух углов, образуемых этими векторами при совмещении их начал, т.е. $0 \le \varphi \le \pi$.

Иногда для обозначения угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ пишут $(\overline{a} \,\hat{,}\, \overline{b})$.

Замечание. В случае если один из векторов-сомножителей равен нулю, то и скалярное произведение равно нулю.

Если в формулу скалярного произведения (11.1) подставить выражение проекции вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ из равенства (9.1), то можно получить еще одну формулу скалярного произведения

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot np_{\overline{a}}\, \overline{b} \tag{11.2}$$

или

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{b}| \cdot np_{\overline{b}}\, \overline{a} . \tag{11.2$'$}$$

Свойства скалярного произведения

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$ (коммутативность);

2) $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$ (дистрибутивность);

3) $(\alpha\bar{a})\cdot\bar{b}=\bar{a}\cdot(\alpha\bar{b})=\alpha(\bar{a}\cdot\bar{b}),\quad \forall\alpha\in R$;

4) скалярное произведение вектора на себя равно квадрату его длины: $\bar{a}\cdot\bar{a}=\left|\bar{a}\right|^2\geq 0$;

5) скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны, т.е. $\bar{a}\cdot\bar{b}=0,\ \bar{a}\neq 0$ и $\bar{b}\neq 0\ \Leftrightarrow\ \bar{a}\perp\bar{b}$.

Свойства 1, 3-5 непосредственно следуют из определения 11.1 и свойств косинуса.

Докажем свойство 2.

Учитывая формулу (11.2) и свойства проекций, получим

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=\left|\bar{a}\right|np_{\bar{a}}(\bar{b}+\bar{c})=\left|\bar{a}\right|(np_{\bar{a}}\bar{b}+np_{\bar{a}}\bar{c})=\left|\bar{a}\right|np_{\bar{a}}\bar{b}+\left|\bar{a}\right|np_{\bar{a}}\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}.$$

Замечание. По аналогии с операцией умножения на множестве чисел в случае скалярного умножения вектора на себя будем писать $\bar{a}^2$ вместо $\bar{a}\cdot\bar{a}$. На практике удобно использовать формулу для нахождения длины вектора, которая легко получается из свойства 4:

$$\left|\bar{a}\right|=\sqrt{\bar{a}^2}. \tag{11.3}$$

Определение 11.2. Два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

Теорема 11.1 (координатное представление скалярного произведения). *Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ относительно ортонормированного базиса $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ заданы своими координатами, т.е. $\bar{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$, $\bar{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$, то скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов, т.е.*

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3. \tag{11.4}$$

Доказательство. Запишем разложения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ по базису: $\bar{a}=a_1\bar{i}+a_2\bar{j}+a_3\bar{k}$, $\bar{b}=b_1\bar{i}+b_2\bar{j}+b_3\bar{k}$. Найдем скалярное произведение этих векторов

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=(a_1\bar{i}+a_2\bar{j}+a_3\bar{k})\cdot(b_1\bar{i}+b_2\bar{j}+b_3\bar{k})=a_1\cdot b_1(\bar{i}\cdot\bar{i})+a_1\cdot b_2(\bar{i}\cdot\bar{j})+a_1\cdot b_3(\bar{i}\cdot\bar{k})+$$

$$+a_2\cdot b_1(\bar{j}\cdot\bar{i})+a_2\cdot b_2(\bar{j}\cdot\bar{j})+a_2\cdot b_3(\bar{j}\cdot\bar{k})+a_3\cdot b_1(\bar{k}\cdot\bar{i})+a_3\cdot b_2(\bar{k}\cdot\bar{j})+a_3\cdot b_3(\bar{k}\cdot\bar{k}).$$

Так как $\bar{i} \perp \bar{j} \perp \bar{k}$ и $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$, то по определению скалярного произведения имеем: $\bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{j} = \bar{k} \cdot \bar{k} = 1$, $\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{i} \cdot \bar{k} = \bar{j} \cdot \bar{k} = 0$. Учитывая эти равенства и свойство коммутативности скалярного произведения, окончательно находим:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 . \blacktriangle$$

Следствие 11.1. Скалярные произведения вектора $\bar{a}$, заданного в ортонормированном базисе $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ координатами $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, на соответствующие базисные векторы равны координатам этого вектора, т.е.

$$\bar{a} \cdot \bar{i} = a_1, \quad \bar{a} \cdot \bar{j} = a_2, \quad \bar{a} \cdot \bar{k} = a_3.$$

Следствие 11.2. $\quad |\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Это непосредственно следует из формул (11.3) и (11.4).

Следствие 11.3. Косинус угла между ненулевыми векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, заданными в базисе $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ координатами $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\bar{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} . \qquad (11.5)$$

Что непосредственно следует из формул (11.1), (11.4) и следствия 11.2.

Замечание. Косинусы углов между вектором $\bar{a}$ и базисными векторами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ и есть направляющие косинусы вектора $\bar{a}$, о которых шла речь в определении 10.1. При подстановке координат векторов $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\bar{i} = \{1, 0, 0\}$, $\bar{j} = \{0, 1, 0\}$, $\bar{k} = \{0, 0, 1\}$ в формулу (11.5) получаются формулы для нахождения направляющих косинусов вектора $\bar{a}$, аналогичные равенствам (10.2).

Следствие 11.4. Проекция вектора $\bar{a}$ на направление, определяемое вектором $\bar{b}$, находится по формуле

$$np_{\bar{b}}\, \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} . \qquad (11.6)$$

В справедливости формулы легко убедиться, используя формулы (11.2), (11.4) и следствие 11.2.

Геометрический смысл скалярного произведения. *Угол между двумя ненулевыми векторами острый (тупой), если скалярное произведение этих векторов есть* *число положительное (отрицательное). Угол между двумя ненулевыми векторами прямой, если скалярное произведение этих векторов равно нулю.*

Это утверждение непосредственно следует из формулы (11.1) и свойств косинуса.

Физический смысл скалярного произведения. *Если вектор $\overline{F}$ изображает силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец некоторого вектора $\overline{s}$, то работа A этой силы определяется равенством*

$$A = \overline{F} \cdot \overline{s}\,. \tag{11.7}$$

Замечание. В этом параграфе мы определили скалярное произведение векторов трехмерного пространства при помощи длин векторов и угла между ними. Это не единственный способ задания скалярного произведения векторов. Например, в произвольном линейном пространстве, где нет понятия длины вектора или угла между векторами, понятие скалярного умножения можно вводить аксиоматически, т.е. при помощи некоторых свойств, которыми скалярное произведение, как мы видим на примере трехмерного пространства, обладает. В этом случае длина вектора и угол между векторами могут быть, в свою очередь, определены через скалярные произведения. Подробнее об этом пойдет речь в следующем параграфе.

§12. Евклидово пространство*: основные понятия

Рассмотрим действительное линейное пространство L.

Определение 12.1. Будем говорить, что в линейном пространстве L задано скалярное произведение, если каждой паре векторов $\overline{a}, \overline{b} \in L$ поставлено в соответствие действительное число $\overline{a} \cdot \overline{b}$ так, что выполняются следующие условия:

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$;

2) $\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$;

3) $(\alpha \overline{a}) \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot (\alpha \overline{b}) = \alpha (\overline{a} \cdot \overline{b}), \quad \forall \alpha \in R$;

4) $\overline{a} \cdot \overline{a} \geq 0$, причем равенство нулю имеет место лишь для нулевого вектора $\overline{a}$.

---

* Пространство, геометрию которого впервые описал древнегреческий математик Евклид в своей работе «Начала».

Определение 12 .2. Линейное пространство L, в котором определено скалярное произведение, будем называть *евклидовым пространством* и обозначать E.

Если n-мерное линейное пространство – евклидово, то будем называть его *евклидовым n-мерным пространством*, а базис линейного пространства – *базисом евклидова пространства*.

Дадим определения длины вектора и угла между векторами в евклидовом пространстве E.

Определение 12 .3. Длиной вектора $\overline{a} \in E$ называется величина

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{\overline{a} \cdot \overline{a}}\ .$$

Определение 12.4. Углом между векторами $\overline{a}, \overline{b} \in L$ называется угол $\varphi\ (0 \le \varphi \le \pi)$, косинус которого равен

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right|}.$$

Определение 12 .5. Два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ евклидова пространства E называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю, т.е.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 0\ .$$

Пусть в евклидовом пространстве E_n задан некоторый ортонормированный базис $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\}$, т.е. $\overline{e}_i \cdot \overline{e}_j = 0$ при $i \ne j$ и $\overline{e}_i \cdot \overline{e}_j = 1$ при $i = j$. Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ относительно данного базиса имеют разложения $\overline{a} = a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2 + ... + a_n\overline{e}_n$, $\overline{b} = b_1\overline{e}_1 + b_2\overline{e}_2 + ... + b_n\overline{e}_n$, то несложно показать, что скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b}$ будет определяться формулой

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + ... + a_n \cdot b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\ . \tag{12.1}$$

Замечание. Длину вектора $\overline{a} \in E_n$ и угол между векторами $\overline{a}, \overline{b} \in E_n$ с учетом (12.1) можно вычислять по формулам

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}, \tag{12.2}$$

$$\cos\varphi = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + ... + a_n \cdot b_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}}. \tag{12.3}$$

§13. Векторное произведение векторов

Определение 13.1. *Упорядоченная тройка некомпланарных векторов* называется *правой (левой)*, если после приведения их к общему началу из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму вектору осуществляется против (по) часовой стрелки (стрелке).

Замечание. Иногда о правой тройке векторов говорят, что они направлены по правилу «правой руки». Это означает, что если векторы тройки приведены к общему началу и указательный палец правой руки мы направляем по первому вектору, средний – по второму, то большой палец будет указывать направление третьего вектора данной тройки (рис. 17, а).

Аналогично для векторов левой тройки выполняется правило «левой руки» (рис. 17, б).

а) правая тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ б) левая тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$

Рис. 17

Замечание. Координатные векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ образуют правую тройку векторов.

Определение 13.2. *Векторным произведением* двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ $(0 \le \varphi \le \pi)$;

2) $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$;

3) векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют правую тройку векторов.

Векторное произведение обозначается $\bar{a} \times \bar{b}$ или $[\bar{a}, \bar{b}]$.

Свойства векторного произведения

1) $\bar{a}\times\bar{b} = -\bar{b}\times\bar{a}$ (антикоммутативность);

2) $\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}, \quad (\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c} = \bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}$ (дистрибутивность векторного умножения относительно сложения);

3) $(\alpha\bar{a})\times\bar{b} = \bar{a}\times(\alpha\bar{b}) = \alpha(\bar{a}\times\bar{b}), \ \forall\alpha\in R$;

4) $\bar{a}\times\bar{b} = \bar{0}, \quad \bar{a}\neq\bar{0}, \bar{b}\neq\bar{0} \quad\Leftrightarrow\quad \bar{a} \;||\; \bar{b}$.

Замечание. В частности, векторное произведение вектора на себя равно нуль-вектору, т.е. $\bar{a}\times\bar{a} = \bar{0}$.

В справедливости свойств 1, 3, 4 несложно убедиться, воспользовавшись определением векторного произведения 13.2 и свойствами функции синус. Доказательство свойства 2 приведем ниже, используя координатное представление векторного произведения.

Теорема 13.1 (координатное представление векторного произведения). *Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ относительно ортонормированного базиса $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ заданы своими координатами $\bar{a} = \{a_1,a_2,a_3\}$, $\bar{b} = \{b_1,b_2,b_3\}$, то векторное произведение имеет координаты*

$$\bar{a}\times\bar{b} = \{a_2b_3 - b_2a_3, -(a_1b_3 - b_1a_3), a_1b_2 - b_1a_2\} \tag{13.1}$$

или их можно записать в виде определителей 2-го порядка

$$\bar{a}\times\bar{b} = \left\{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right\}. \tag{13.1$'$}$$

Доказательство. Воспользуемся разложением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ по базису и найдем координаты векторного произведения этих векторов

$$\bar{a}\times\bar{b} = (a_1\bar{i}+a_2\bar{j}+a_3\bar{k})\times(b_1\bar{i}+b_2\bar{j}+b_3\bar{k}) = a_1\cdot b_1(\bar{i}\times\bar{i}) + a_1\cdot b_2(\bar{i}\times\bar{j}) + a_1\cdot b_3(\bar{i}\times\bar{k}) +$$

$$+ a_2\cdot b_1(\bar{j}\times\bar{i}) + a_2\cdot b_2(\bar{j}\times\bar{j}) + a_2\cdot b_3(\bar{j}\times\bar{k}) + a_3\cdot b_1(\bar{k}\times\bar{i}) + a_3\cdot b_2(\bar{k}\times\bar{j}) + a_3\cdot b_3(\bar{k}\times\bar{k}).$$

Согласно последнему замечанию, имеем: $\bar{i}\times\bar{i} = \bar{j}\times\bar{j} = \bar{k}\times\bar{k} = \bar{0}.$ Учитывая определение векторного произведения 13.2, его антикоммутативность и, принимая во внимание пример 13.1, находим: $\bar{i}\times\bar{j} = \bar{k}, \ \bar{j}\times\bar{k} = \bar{i}, \ \bar{k}\times\bar{i} = \bar{j}$. Окончательно, получим

$$\bar{a}\times\bar{b} = (a_2b_3 - b_2a_3)\bar{i} - (a_1b_3 - b_1a_3)\bar{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\bar{k}\ . \ \blacktriangle$$

Замечание. Координатное представление вектора $\overline{a}\times\overline{b}$ можно также получить, вычисляя определитель 3-го порядка

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}. \qquad (13.1'')$$

Данный определитель удобно вычислять, раскладывая его по первой строке.

Замечание. Из $(13.1'')$ видно, что свойства векторного произведения непосредственно следуют из соответствующих свойств определителей.

Докажем свойство 2 векторного произведения.

Рассмотрим векторы $\overline{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$, $\overline{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$ и $\overline{c}=\{c_1,c_2,c_3\}$. Найдем координаты вектора $\overline{b}+\overline{c}$, складывая соответствующие координаты векторов: $\overline{b}+\overline{c}=\{b_1+c_1,b_2+c_2,b_3+c_3\}$. Вычислим векторное произведение $\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c})$, составив определитель

$$\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c})=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=\overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}.$$

Здесь при вычислении определителя воспользовались правилом сложения определителей. ▲

Геометрический смысл векторного произведения. *Модуль векторного произведения неколлинеарных векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах, т.е.* $S_{\text{пар-мма}}=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$.

Это утверждение непосредственно следует из п. 1 определения 13.2 и формулы нахождения площади параллелограмма, известной из школьного курса геометрии.

Физический смысл векторного произведения. *Если вектор $\overline{F}$ изображает силу, приложенную к точке A, то момент $\overline{M}$ силы $\overline{F}$ относительно некоторой точки O представляет собой вектор* $\overline{M}=\overline{OA}\times\overline{F}$.

§14. Смешанное произведение векторов

Определение 14.1. *Смешанным произведением* трех *векторов* $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ называется число, равное скалярному произведению векторов $\overline{a} \times \overline{b}$ и $\overline{c}$. Обозначается $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ или $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$.

Таким образом,

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}. \qquad (14.1)$$

Замечание. Для векторов $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ имеет место следующее тождество:

$$(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}). \qquad (14.2)$$

По этой причине смешанное произведение векторов $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ определяют также и как скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b} \times \overline{c}$, а в обозначении опускают знаки векторного и скалярного умножений.

Замечание. Если хотя бы один из векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ нулевой или в тройке имеется пара коллинеарных векторов, то смешанное произведение таких векторов, согласно формулам (14.1), (14.2), равно нулю.

Свойства смешанного произведения

1. При перестановке любых двух сомножителей местами знак смешанного произведения изменяется на противоположный:

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = -(\overline{b}, \overline{a}, \overline{c}) = -(\overline{a}, \overline{c}, \overline{b}) = -(\overline{c}, \overline{b}, \overline{a}).$$

2. При циклической перестановке сомножителей знак смешанного произведения не изменяется:

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{c}, \overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{c}, \overline{a}).$$

3. $(\alpha\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a}, \alpha\overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a}, \overline{b}, \alpha\overline{c}) = \alpha(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}), \ \forall \alpha \in R.$

4. $(\overline{a}_1 + \overline{a}_2, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a}_1, \overline{b}, \overline{c}) + (\overline{a}_2, \overline{b}, \overline{c}).$

5. $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = 0 \Leftrightarrow \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – компланарные.

Теорема 14.1 (координатное представление смешанного произведения). *Если векторы $\overline{a},\overline{b}$ и $\overline{c}$ относительно ортонормированного базиса заданы своими координатами $\overline{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$, $\overline{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$, $\overline{c}=\{c_1,c_2,c_3\}$, то смешанное произведение равно величине определителя, составленного из координат этих векторов. При этом в первую строку (столбец) определителя записывают координаты первого вектор-сомножителя, во вторую строку (столбец) – координаты второго вектор-сомножителя, а в третью – третьего. Таким образом,*

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{14.3}$$

Доказательство. Вычислим $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$, воспользовавшись определением смешанного произведения. Для этого найдем сначала координаты векторного произведения векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ по формуле (14.1′)

$$\overline{a}\times\overline{b} \;=\; =\left\{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right\},$$

а затем полученный вектор скалярно умножим на вектор $\overline{c}$

$$(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=c_1\cdot\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}-c_2\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}+c_3\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Данное выражение и есть величина определителя (14.3), полученная разложением его по последней строке. ▲

Замечание. Если воспользоваться координатным представлением смешанного произведения (14.3), то свойства 1–5 непосредственно следуют из соответствующих свойств определителей 3-го порядка.

Докажем свойство 5 смешанного произведения.

Необходимость. Рассмотрим векторы $\overline{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$, $\overline{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$, $\overline{c}=\{c_1,c_2,c_3\}$ такие, что $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=0$. Согласно (14.3), это означает, что определитель 3-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

Отсюда следует, что одна из строк определителя есть линейная комбинация остальных двух. Например, $c_1 = \alpha a_1 + \beta b_1$, $c_2 = \alpha a_2 + \beta b_2$, $c_3 = \alpha a_3 + \beta b_3$. Таким образом, $\bar{c} = \alpha \bar{a} + \beta \bar{b}$, т.е. векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ согласно теореме 4.2 линейно зависимые, а значит, компланарные.

Достаточность. Пусть $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ — компланарные векторы. По теореме 5.2 существуют единственные числа $\alpha, \beta \in R$ такие, что $\bar{c} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$. Это означает, что координаты вектора $\bar{c}$ можно представить по теореме 7.2 в виде $\bar{c} = \{\alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2, \alpha a_3 + \beta b_3\}$. Найдем смешанное произведение векторов $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ по формуле (14.3), составив определитель

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \alpha a_1 + \beta b_1 & \alpha a_2 + \beta b_2 & \alpha a_3 + \beta b_3 \end{vmatrix}.$$

По свойствам определителей $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0$, так как его третья строка является линейной комбинацией остальных двух строк. ▲

Теорема 14.2 (геометрический смысл смешанного произведения). *Абсолютная величина смешанного произведения векторов $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ равна объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. Если тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ — правая, то $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) > 0$, если тройка — левая, то $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) < 0$.*

Доказательство.

Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не являются коллинеарными. Обозначим через S площадь параллелограмма, построенного на этих векторах, тогда $S_{\text{пар-мма}} = |\bar{a} \times \bar{b}|$. Пусть φ – острый угол между вектором $\bar{c}$ и перпендикуляром к плоскости векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (см. рис. 18). Расстояние H от конца вектора $\bar{c}$ до этой плоскости находится по формуле $H = |\bar{c}| \cdot \cos\varphi$. Тогда объем параллелепипеда, построенного на трех векторах, вычисляется следующим образом: $V = S \cdot H = |\bar{a} \times \bar{b}| \cdot |\bar{c}| \cdot \cos\varphi$. А это и означает, согласно определениям скалярного (11.1) и смешанного (14.1) произведений, что $V = \overline{abc}$. В случае, когда векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют правую тройку $\varphi = (\bar{a} \times \bar{b} \,\hat{,}\, \bar{c})$. Для левой тройки векторов $(\bar{a} \times \bar{b} \,\hat{,}\, \bar{c}) = \pi - \varphi$.

В этом случае $V = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right| \cdot \left|\bar{c}\right| \cdot \cos(\pi - \varphi) = \; = -\left|\bar{a} \times \bar{b}\right| \cdot \left|\bar{c}\right| \cdot \cos\varphi = -\overline{a}\overline{b}\overline{c}.$

Таким образом, $V = \left|(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})\right|$. ▲

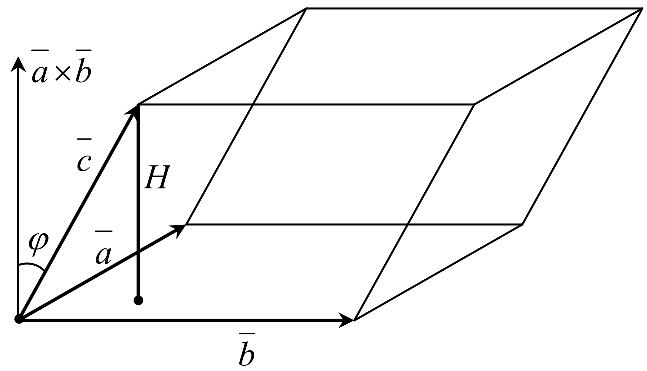


Рис. 18

Следствие 14.1. Объем тетраэдра, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$, равен шестой части объема параллелепипеда, построенного на этих же векторах, т.е.

$$V_{тетр.} = \frac{1}{6}\left|(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})\right|.$$

§15. Двойное векторное произведение

Определение 15.1. Векторное произведение вектора $\bar{a} \times \bar{b}$ на вектор $\bar{c}$ называется *двойным векторным произведением* и обозначается $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$ или $[[\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}]$.

Согласно определению векторного произведения 13.2 результатом двойного векторного произведения также является вектор.

Замечание. Умножая вектор $\bar{a}$ векторно на вектор $\bar{b} \times \bar{c}$, получим двойное векторное произведение $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$, которое, вообще говоря, отлично от двойного векторного произведения $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$, т.е.

$$(\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{c}\neq\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c}). \tag{15.1}$$

При вычислении двойного векторного произведения удобно пользоваться следующими формулами:

$$(\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{c}=\overline{b}(\overline{a}\cdot\overline{c})-\overline{a}(\overline{b}\cdot\overline{c}); \tag{15.2}$$

$$\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c})=\overline{b}(\overline{a}\cdot\overline{c})-\overline{c}(\overline{a}\cdot\overline{b}). \tag{15.3}$$

Доказательство. Покажем справедливость формулы (15.2).

Пусть относительно прямоугольного декартового базиса $\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$ векторы $\overline{a},\overline{b}$ и $\overline{c}$ имеют координаты: $\overline{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$, $\overline{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$, $\overline{c}=\{c_1,c_2,c_3\}$. Вычислим $(\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{c}$ и $\overline{b}\cdot(\overline{a},\overline{c})-\overline{a}\cdot(\overline{b},\overline{c})$, а затем сравним результаты:

1. Используя формулу (13.1), находим:

$$\overline{a}\times\overline{b}=\{a_2b_3-b_2a_3,\ b_1a_3-a_1b_3,\ a_1b_2-b_1a_2\},$$

$$(\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{c}=\{c_3(b_1a_3-a_1b_3)-c_2(a_1b_2-b_1a_2),\ c_1(a_1b_2-b_1a_2)-c_3(a_2b_3-b_2a_3),$$
$$c_2(a_2b_3-b_2a_3)-c_1(b_1a_3-a_1b_3)\}.$$

2. По формуле (11.4) вычислим скалярные произведения $\overline{a}\cdot\overline{c}$ и $\overline{b}\cdot\overline{c}$:

$$\overline{a}\cdot\overline{c}=a_1\cdot c_1+a_2\cdot c_2+a_3\cdot c_3,\quad \overline{b}\cdot\overline{c}=b_1\cdot c_1+b_2\cdot c_2+b_3\cdot c_3.$$

Согласно следствию 7.1, умножая вектор $\overline{b}$ на число, полученное в результате скалярного произведения векторов $\overline{a}$ и $\overline{c}$, получим вектор с координатами

$$\overline{b}(\overline{a}\cdot\overline{c})=\{b_1(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3),\ b_2(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3),\ b_3(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)\}.$$

Аналогично, умножая вектор $\overline{a}$ на результат скалярного произведения векторов $\overline{b}$ и $\overline{c}$, находим вектор с координатами

$$\overline{a}(\overline{b}\cdot\overline{c})=\{a_1(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3),\ a_2(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3),\ a_3(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)\}.$$

Вычитая получившиеся векторы, имеем:

$$\overline{b}(\overline{a}\cdot\overline{c})-\overline{a}(\overline{b}\cdot\overline{c})=\{c_3(b_1a_3-a_1b_3)-c_2(a_1b_2-b_1a_2),\ c_1(a_1b_2-b_1a_2)-c_3(a_2b_3-b_2a_3),$$
$$c_2(a_2b_3-b_2a_3)-c_1(b_1a_3-a_1b_3)\}.$$

Координаты векторов $(\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{c}$ и $\overline{b}(\overline{a}\cdot\overline{c})-\overline{a}(\overline{b}\cdot\overline{c})$ равны, следовательно, и сами векторы равны. ▲

ГЛАВА 2
РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ
ПО ТЕМЕ
«ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА»

1. Векторы: длина вектора, координаты вектора, направляющие косинусы вектора

Задача 1. *Найти координаты и модуль вектора* $\overline{AB}$*, если* $A(2, -1, 3)$*,* $B(-9, 3, 7)$.

Решение. Найдем координаты вектора $\overline{AB}$, вычитая из координат конца координаты начала, т.е. $\overline{AB} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\} = \{-11,\ 4,\ 4\}$. Затем воспользуемся формулой (9.2) для нахождения длины вектора:

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

и вычислим длину вектора $\overline{AB}$:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-11)^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{121 + 16 + 16} = \sqrt{153}\,.$$

Ответ: $|\overline{AB}| = \sqrt{153}$.

Задача 2. *Определить точку B, с которой совпадает конец вектора* $\overline{a} = \{5,\ -1,\ 8\}$*, если его начало совпадает с точкой* $A(-3, 2, 4)$.

Решение. По условию задачи $\overline{AB} = \overline{a}$. Записав данное векторное равенство в координатной форме, получим:

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = a_1, \\ y_2 - y_1 = a_2, \\ z_2 - z_1 = a_3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 + a_1, \\ y_2 = y_1 + a_2, \\ z_2 = z_1 + a_3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -3 + 5, \\ y_2 = 2 + (-1), \\ z_2 = 4 + 8; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 1, \\ z_2 = 12. \end{cases}$$

Ответ: $B(2, 1, 12)$.

Задача 3. *Дана длина вектора* $\bar{a}$ *:* $|\bar{a}| = 5$ *и углы, которые вектор образует с координатными осями:* $\alpha = 60^0$; $\beta = 90^0$; $\gamma = 150^0$. *Вычислить проекции вектора на координатные оси.*

Решение. Проекции вектора на координатные оси равны, согласно теореме 9.2, координатам данного вектора. По формулам (10.1) найдем

$$a_1 = |\bar{a}| \cdot \cos\alpha = 5 \cdot \cos 60^0 = \frac{5}{2},\ a_2 = |\bar{a}| \cdot \cos\beta = 5 \cdot \cos 90^0 = 0,\ a_3 = |\bar{a}| \cdot \cos\gamma = 5 \cdot \cos 150^0 = -\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\bar{a} = \{\frac{5}{2},\ 0, -\frac{5\sqrt{3}}{2}\}$.

Задача 4. *Вычислить направляющие косинусы вектора* $\bar{a} = \{12,\ -3,\ 4\}$.

Решение. Направляющие косинусы вектора можно рассчитать, воспользовавшись формулами (10.2)

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}; \quad \cos\beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Вычислим предварительно длину вектора $|\bar{a}| = \sqrt{12^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{169} = 13$. Окончательно получим

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\bar{a}|} = \frac{12}{13}; \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\bar{a}|} = \frac{-3}{13}; \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\bar{a}|} = \frac{4}{13}.$$

Ответ: $\cos\alpha = \frac{12}{13}$; $\cos\beta = \frac{-3}{13}$; $\cos\gamma = \frac{4}{13}$.

Задача 5. *Может ли вектор составлять с координатными осями следующие углы:* $\alpha = 90^0$, $\beta = 120^0$, $\gamma = 30^0$*?*

Решение. Если α, β и γ – углы, которые составляет вектор с координатными осями, то направляющие косинусы вектора должны удовлетворять условию:

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1.$$

Проверим выполнение этого условия для данных углов:

$$cos^2 90^0 + cos^2 120^0 + cos^2 30^0 = 0 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Так как равенство выполнилось, то вектор может составлять с координатными осями углы $\alpha = 90^0$, $\beta = 120^0$ и $\gamma = 30^0$.

Ответ: может.

Задача 6. *Вектор составляет с осями Oy и Oz углы* $\beta = 60^0$, $\gamma = 135^0$. *Какой угол он составляет с осью Ox?*

Решение. Подставим в равенство

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$$

данные из условия задачи. Получим:

$$cos^2\alpha + cos^2 60^0 + cos^2 135^0 = 1.$$

Заменяя косинусы углов β и γ на их табличные значения, выразим

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{2}.$$

Таким образом, $\alpha = ar\,cos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ или $\alpha = \pi - ar\,cos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Ответ: 60^0 или 120^0.

2. Линейные операции над векторами

Задача 1. *Даны векторы* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$, *причем* $|\overline{a}| = 13$, $|\overline{b}| = 19$ *и* $|\overline{a} - \overline{b}| = 24$. *Вычислить* $|\overline{a} + \overline{b}|$.

Решение. Выберем в пространстве точку *A* и отложим от нее векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ так, чтобы $\overline{a} = \overline{AB}$, а $\overline{b} = \overline{AD}$. Построим на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ параллелограмм *ABCD*, тогда одна направленная диагональ параллелограмма будет являться суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, а другая – разностью, т.е. $\overline{a} + \overline{b} = \overline{AC}$, а $\overline{a} - \overline{b} = \overline{DB}$ (см. рис.19).

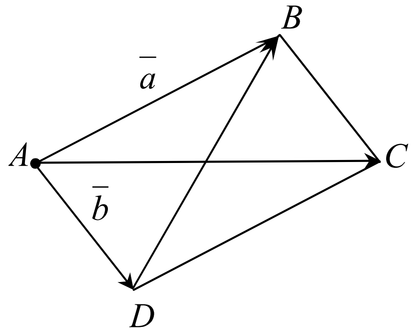


Рис. 19

Рассмотрим ΔABD, в котором AB=13, AD=19, а DB=24. Запишем для ΔABD теорему косинусов:

$$DB^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos \angle A.$$

Откуда имеем:

$$\cos \angle A = -\frac{DB^2 - AB^2 - AD^2}{2 \cdot AB \cdot AD} = -\frac{24^2 - 13^2 - 19^2}{2 \cdot 13 \cdot 19} = -\frac{46}{494} = -\frac{23}{247}.$$

Рассмотрим теперь ΔABC: AB=13, BC=AD=19 (по признаку параллелограмма). Запишем для ΔABC теорему косинусов:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle B.$$

Так как $\angle B + \angle A = 180^0$ (как односторонние углы в параллелограмме), то $\cos \angle B = \ = \cos(180^0 - \angle A) = -\cos \angle A$. Окончательно получим:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle A = 13^2 + 19^2 + 2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot (-\frac{23}{247}) = 484.$$

Следовательно, AC=22.

Ответ: $\left|\overline{a} + \overline{b}\right| = 22\,(ed.)$.

Задача 2. *По данным векторам* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ *(см. рис. 20) построить каждый из следующих векторов:* 1) $2\overline{a}$; 2) $-\frac{1}{2}\overline{b}$; 3) $-\overline{a} + 2\overline{b}$; 4) $\frac{1}{2}\overline{a} - \frac{3}{2}\overline{b}$.

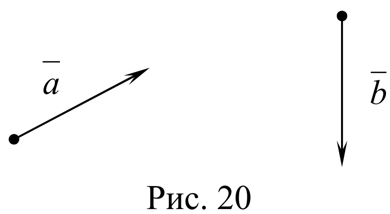


Рис. 20

Решение. Согласно определению (2.2) произведения вектора на число, для того, чтобы построить вектор $2\overline{a}$, нужно увеличить в 2 раза длину вектора $\overline{a}$ и построить вектор сонаправленный данному, т.е. $\overline{a} \uparrow\uparrow 2\overline{a}$ (см. рис. 21, 1). В пункте 2 длину вектора $\overline{b}$ нужно уменьшить в 2 раза, а знак минус указывает на то, что вектор $-\frac{1}{2}\overline{b}$ должен быть противоположно направленным по отношению к вектору $\overline{b}$, т.е. $\overline{b} \uparrow\downarrow -\frac{1}{2}\overline{b}$ (см. рис. 21, 2). В пункте 3 (рис. 21, 3) построим векторы $-\overline{a}$ и $2\overline{b}$, а затем, совмещая конец вектора $-\overline{a}$ с началом вектора $2\overline{b}$, по правилу треугольника сложения векторов найдем их сумму. Аналогично рассуждая, найдем сумму векторов $\frac{1}{2}\overline{a}$ и $-\frac{3}{2}\overline{b}$ в пункте 4 (рис. 21, 4).

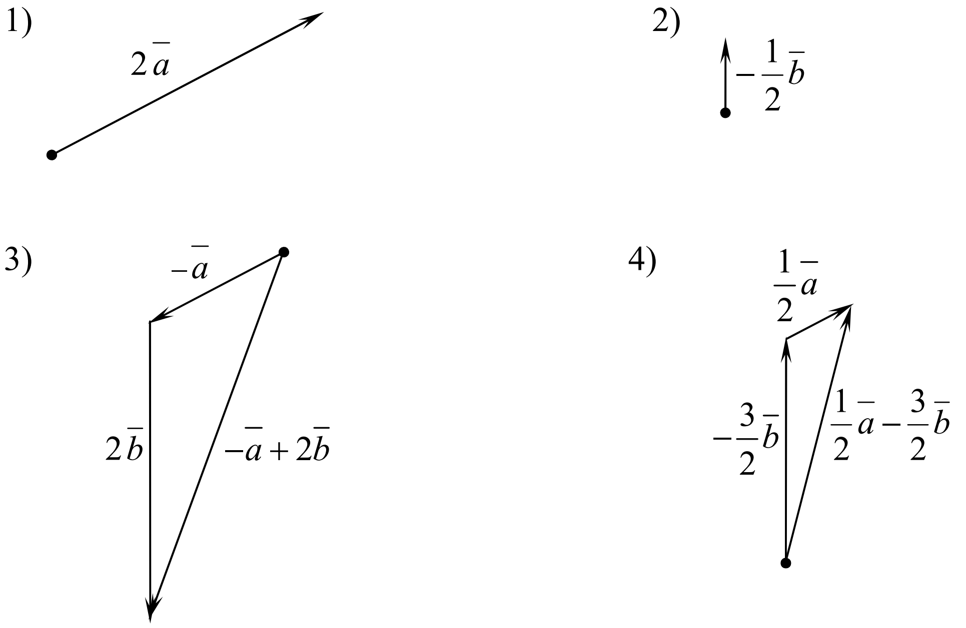


Рис. 21

Задача 3. *В параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ (см. рис. 22) заданы векторы, совпадающие с его ребрами: $\overline{AB}=\overline{m}$, $\overline{AD}=\overline{n}$, $\overline{AA'}=\overline{p}$. Построить каждый из следующих векторов:* 1) $\overline{m}+\overline{n}+\overline{p}$; 2) $\overline{m}-\overline{n}-\overline{p}$; 3) $-\frac{1}{2}\overline{m}-\frac{1}{2}\overline{n}+\overline{p}$; 4) $-\overline{m}+\frac{1}{2}\overline{n}+\frac{1}{2}\overline{p}$.

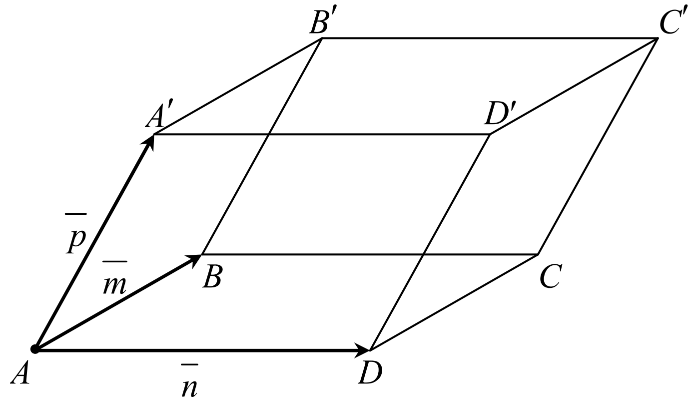


Рис. 22

Решение.

1) сумму векторов $\overline{m}+\overline{n}+\overline{p}$ будем находить, последовательно складывая векторы $\overline{m}+\overline{n}$ и $\overline{p}$. По правилу параллелограмма сложения векторов имеем: $\overline{m}+\overline{n}=\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AC}$. Затем сумму векторов $\overline{AC}$ и $\overline{AA'}$ найдем из параллелограмма $AA'C'C$: $\overline{AC}+\overline{AA'}=\overline{AC'}$ (см. рис. 23, 1). Таким образом, имеем: $\overline{m}+\overline{n}+\overline{p}=\overline{AC'}$.

2) вектор $\overline{m}-\overline{n}-\overline{p}$ будем также находить как сумму векторов $\overline{m}+(-\overline{n})$ и $-\overline{p}$. По правилу треугольника $\overline{m}+(-\overline{n})=\overline{AB}+(-\overline{AD})=\overline{DA}+\overline{AB}=\overline{DB}$. Так как противоположные грани в параллелепипеде равны, то $\overline{p}=\overline{AA'}=\overline{DD'}$. Таким образом, $\overline{m}-\overline{n}-\overline{p}=\overline{DB}-\overline{DD'}=\overline{D'D}+\overline{DB}=\overline{D'B}$ (см. рис. 23, 2).

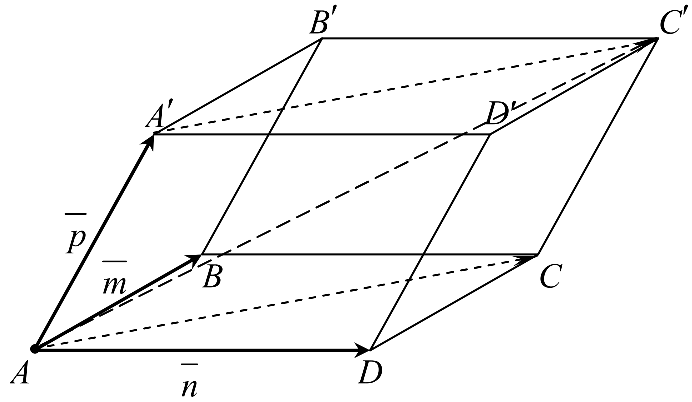
3) $-\frac{1}{2}\overline{m}-\frac{1}{2}\overline{n}+\overline{p}=-\frac{1}{2}(\overline{m}+\overline{n})+\overline{p}=-\frac{1}{2}\overline{AC}+\overline{AA'}=\frac{1}{2}\overline{CA}+\overline{AA'}=\overline{OA}+\overline{AA'}=\overline{OA'}$,

где O – точка пересечения диагоналей в параллелограмме $ABCD$ (см. рис. 23, 3).

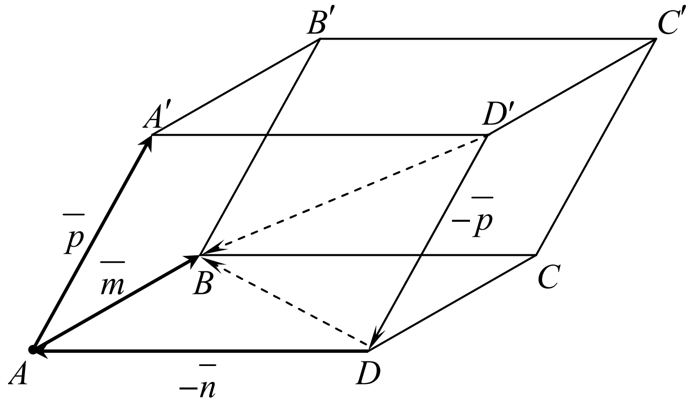
4) $-\overline{m}+\frac{1}{2}\overline{n}+\frac{1}{2}\overline{p}=-\overline{m}+\frac{1}{2}(\overline{n}+\overline{p})=\overline{BA}+\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{DD'})=\overline{BA}+\frac{1}{2}\overline{AD'}=\overline{BA}+\overline{AO'}=\overline{BO'}$,

где O' – точка пересечения диагоналей в параллелограмме $AA'D'D$ (см. рис. 23, 4).

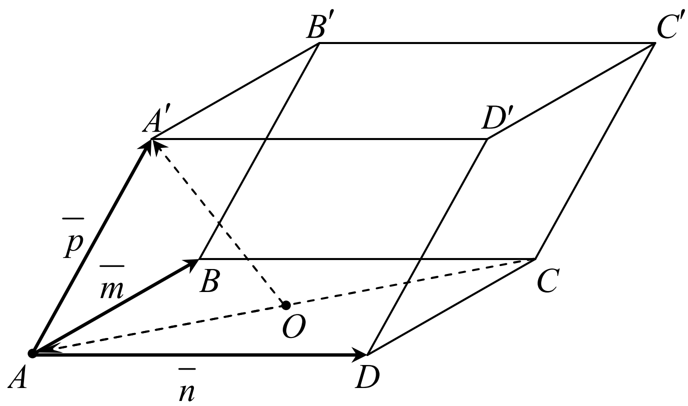
1)



2)



3)



4)

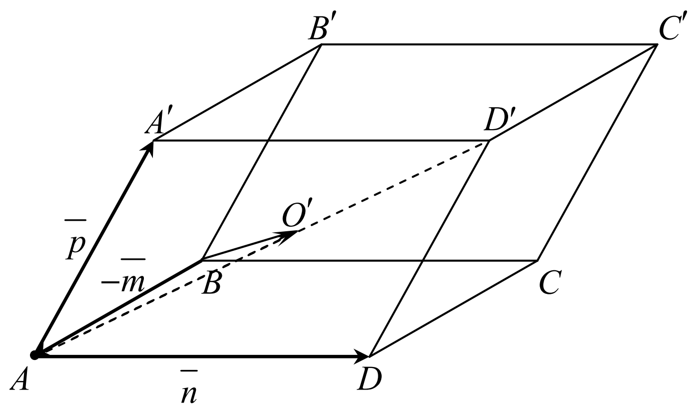


Рис. 23

Задача 4. *Даны векторы* $\bar{a} = \{-3, 8, 7\}$ *и* $\bar{b} = \{9, 7, -1\}$. *Определить проекции на координатные оси следующих векторов:* 1) $\bar{a} + \bar{b}$; 2) $-3\bar{a} + 2\bar{b}$.

Решение. Согласно теореме 7.2 действия над векторами приводят к соответствующим действиям над их координатами, поэтому:

1) $\bar{a} + \bar{b} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\} = \{-3 + 9,\ 8 + 7, 7 + (-1)\} = \{6,\ 15,\ 6\}$;

2)

$-3\bar{a} + 2\bar{b} = \{-3a_1 + 2b_1, -3a_2 + 2b_2, -3a_3 + 2b_3\} = \{-3 \cdot (-3) + 2 \cdot 9, -3 \cdot 8 + 2 \cdot 7,$

$-3 \cdot 7 + 2 \cdot (-1)\} = \{27, -10, -23\}$.

Ответ: $\bar{a} + \bar{b} = \{6,\ 15,\ 6\}$; $-3\bar{a} + 2\bar{b} = \{27, -10, -23\}$.

Задача 5. *При каком значении m и l векторы* $\bar{a} = m\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$ *и* $\bar{b} = -2\bar{i} + l\bar{j} + 8\bar{k}$ *коллинеарны.*

Решение. Для коллинеарных векторов справедливо следствие 7.2, в котором говорится, что коллинеарные векторы имеют пропорциональные координаты, т. е.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Подставляя в последние равенства координаты данных векторов, имеем:

$$\frac{m}{-2} = \frac{3}{l} = \frac{4}{8}.$$

Откуда найдем: $8m = -8 \Leftrightarrow m = -1$; $4l = 24 \Leftrightarrow l = 6$.

Ответ: при $m = -1$, $l = 6$ векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны.

Задача 6. *Даны точки* $A(1,\ 8,\ 5)$, $B(3,\ 5,\ 12)$, $C(8,\ 4,\ 0)$ *и* $D(14,\ -5,\ 21)$. *Проверить, что векторы* $\overline{AB}$ *и* $\overline{CD}$ *коллинеарны; установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены — в одну или в противоположные стороны.*

Решение. Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ по формуле (9.3):

$$\overline{AB} = \{3 - 1, 5 - 8, 12 - 5\} = \{2, -3, 7\}, \quad \overline{CD} = \{14 - 8, -5 - 4, 21 - 0\} = \{6, -9, 21\}.$$

Проверим, будут ли пропорциональны координаты рассматриваемых векторов, т.е. проверим выполнение равенств

$$\frac{2}{6}=\frac{-3}{-9}=\frac{7}{21}.$$

Мы видим, что координаты векторов пропорциональны и коэффициент пропорциональности $k=\frac{1}{3}$, т.е. $\overline{AB}=\frac{1}{3}\overline{CD}$. Это означает, что $\left|\overline{CD}\right|=3\cdot\left|\overline{AB}\right|$ и так как $k>0$, то $\overline{AB}\uparrow\uparrow\overline{CD}$.

Ответ: векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ коллинеарны, направлены в одну сторону и вектор $\overline{CD}$ в три раза длиннее вектора $\overline{AB}$.

Задача 7. *Дано разложение вектора $\overline{a}$ по базису $\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$: $\overline{a}=2\overline{i}-3\overline{j}+7\overline{k}$. Определить разложение по этому же базису вектора $\overline{b}$, параллельного вектору $\overline{a}$ и противоположного с ним направления, при условии, что длина вектора $\overline{b}$ равна* $12\sqrt{2}$.

Решение. Так как векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, то $\overline{b}=k\overline{a}$. Таким образом, координаты вектора $\overline{b}$ пропорциональны координатам вектора $\overline{a}$, т.е. $\overline{b}=\{2k,-3k,7k\}$. Зная координаты и длину вектора $\overline{b}$, составим и решим уравнение:

$$\sqrt{(2k)^2+(-3k)^2+(7k)^2}=12\sqrt{2},$$

$$\sqrt{4k^2+9k^2+49k^2}=12\sqrt{2},$$

$$\sqrt{62k^2}=12\sqrt{2},$$

$$6\sqrt{2}k=\pm 12\sqrt{2},$$

$$k=\pm 2.$$

По условию $\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b}$, следовательно $k<0$, а значит в нашем случае $k=-2$. Таким образом, $\overline{b}=\{-4,6,-14\}$.

Ответ: $\overline{b}=-4\overline{i}+6\overline{j}-14\overline{k}$.

Задача 8. *Найти орт вектора $\overline{a}=\{3,-6,10\}$.*

Решение. Координаты орта вектора $\overline{a}$ находятся по формуле:

$$\bar{a}_0 = \{\frac{a_1}{|\bar{a}|}, \frac{a_2}{|\bar{a}|}, \frac{a_3}{|\bar{a}|}\}.$$

Вычисляя длину вектора $|\bar{a}| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 10^2} = \sqrt{145}$, находим $\bar{a}_0 = \{\frac{3}{\sqrt{145}}, \frac{-6}{\sqrt{145}}, \frac{10}{\sqrt{145}}\}$.

Ответ: $\bar{a}_0 = \{\frac{3}{\sqrt{145}}, \frac{-6}{\sqrt{145}}, \frac{10}{\sqrt{145}}\}$.

Задача 9. *Даны векторы* $\bar{a} = \{2, -1, 3\}$, $\bar{b} = \{3, 5, -2\}$, $\bar{c} = \{-1, 2, 3\}$ *и* $\bar{d} = \{0, -5, 11\}$. *Показать, что векторы* $\bar{a}, \bar{b}$ *и* $\bar{c}$ *можно взять в качестве базиса. Найти координаты вектора* $\bar{d} = \{0, -5, 11\}$ *относительно выбранного базиса*.

Решение. Для того чтобы показать, что векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ трехмерного пространства образуют базис, достаточно убедиться, что они некомпланарны. Это означает, согласно следствию 7.3, что определитель 3-го порядка, составленный из координат этих векторов, должен быть отличен от нуля. Для нашего случая имеем:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 38 + 7 + 33 = 78 \neq 0.$$

Таким образом, векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ можно взять в качестве базиса трехмерного пространства, а вектор $\bar{d}$, согласно теореме 5.3, представить в виде:

$$\bar{d} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}.$$

Коэффициенты в разложении и есть координаты вектора $\bar{d}$ относительно данного базиса. Для того чтобы их найти, воспользуемся теоремой 7.2 и перепишем векторное равенство в координатной форме

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta - \gamma = 0, \\ -\alpha + 5\beta + 2\gamma = -5, \\ 3\alpha - 2\beta + 3\gamma = 11. \end{cases}$$

Получили систему трех уравнений с тремя неизвестными. Решая ее методом Гаусса, найдем

$$\overline{A}=\begin{array}{c}(3)(2)\end{array}\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & \vert & 0\\ -1 & 5 & 2 & \vert & -5\\ 3 & -2 & 3 & \vert & 11\end{pmatrix}\sim\begin{array}{c}(-1)\end{array}\begin{pmatrix}-1 & 5 & 2 & \vert & -5\\ 0 & 13 & 3 & \vert & -10\\ 0 & 13 & 9 & \vert & -4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & 5 & 2 & \vert & -5\\ 0 & 13 & 3 & \vert & -10\\ 0 & 0 & 6 & \vert & 6\end{pmatrix}.$$

$Rang\ A = rang\ \overline{A} = n$ (количество неизвестных) $\Rightarrow$ система совместна и имеет единственное решение, которое находится из системы

$$\begin{cases}6\gamma = 6,\\ 13\beta + 3\gamma = -10,\\ -\alpha + 5\beta + 2\gamma = -5;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma = 1,\\ 13\beta + 3 = -10,\\ -\alpha + 5\beta + 2 = -5;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma = 1,\\ \beta = -1\\ -\alpha - 5 + 2 = -5;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma = 1,\\ \beta = -1\\ \alpha = 2.\end{cases}$$

Ответ: $\overline{d} = 2\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$.

3. Скалярное произведение векторов

Задача 1. *Даны векторы* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$*, причем* $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5$ *и* $(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}) = \dfrac{\pi}{3}$. *Найти* 1) $\overline{a}\cdot\overline{b}$; 2) $(3\overline{a} - 2\overline{b})(\overline{a} + 4\overline{b})$.

Решение.

1) скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ находим по формуле (11.1):

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot cos(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}) = 3\cdot 5\cdot cos\frac{\pi}{3} = 15\cdot 0{,}5 = 7{,}5;$$

2) воспользовавшись свойствами 1–4 скалярного произведения векторов и результатами п.1, получим:

$$(3\overline{a} - 2\overline{b})(\overline{a} + 4\overline{b}) = 3\overline{a}^2 + 10\overline{a}\cdot\overline{b} - 8\overline{b}^2 = 3|\overline{a}|^2 + 10|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot cos\,(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}) - 8|\overline{b}|^2 = 3\cdot 9 + 10\cdot 7{,}5 - \\ - 8\cdot 25 = -98.$$

Ответ: 1) $\overline{a}\cdot\overline{b} = 7{,}5$; 2) $(3\overline{a} - 2\overline{b})(\overline{a} + 4\overline{b}) = -98$.

Задача 2. *Найти косинус угла между векторами* $(3\overline{a} - 2\overline{b})$ *и* $(\overline{a} + 4\overline{b})$, *если векторы* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ *удовлетворяют условию предыдущей задачи.*

Решение. Формулу (11.1) перепишем для векторов $(3\overline{a} - 2\overline{b})$ и $(\overline{a} + 4\overline{b})$, а затем выразим из нее косинус угла между этими векторами:

$$cos\,\alpha = \frac{(3\overline{a}-2\overline{b})\cdot(\overline{a}+4\overline{b})}{\left|3\overline{a}-2\overline{b}\right|\cdot\left|\overline{a}+4\overline{b}\right|}.$$

Так как векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ удовлетворяют условию задачи 1, то для скалярного произведения, стоящего в числителе, воспользуемся результатами п.2: $(3\overline{a}-2\overline{b})(\overline{a}+4\overline{b})=-98$. Для расчета длин векторов $(3\overline{a}-2\overline{b})$ и $(\overline{a}+4\overline{b})$ воспользуемся следствием 11.2, свойствами скалярного произведения 1–4 и результатами п.1 задачи 1:

$$\left|3\overline{a}-2\overline{b}\right| = \sqrt{(3\overline{a}-2\overline{b})^2} = \sqrt{9\overline{a}^2-12\overline{a}\cdot\overline{b}+4\overline{b}^2} = \sqrt{9\cdot 9-12\cdot 7{,}5+4\cdot 25} = \sqrt{91}.$$

$$\left|\overline{a}+4\overline{b}\right| = \sqrt{(\overline{a}+4\overline{b})^2} = \sqrt{\overline{a}^2+8\overline{a}\cdot\overline{b}+16\overline{b}^2} = \sqrt{9+8\cdot 7{,}5+16\cdot 25} = \sqrt{469}.$$

Окончательно, подставляя в выражение для косинуса угла между векторами $(3\overline{a}-2\overline{b})$ и $(\overline{a}+4\overline{b})$, находим

$$cos\,\alpha = \frac{(3\overline{a}-2\overline{b})\cdot(\overline{a}+4\overline{b})}{\left|3\overline{a}-2\overline{b}\right|\cdot\left|\overline{a}+4\overline{b}\right|} = \frac{-98}{\sqrt{91}\cdot\sqrt{469}} = -\frac{98}{\sqrt{42679}} = -\frac{98\sqrt{42679}}{42679}.$$

Ответ: $\cos\alpha = -\dfrac{98\sqrt{42679}}{42679}$.

Задача 3. *Даны векторы* $\overline{a}=\{5,-3,5\}$ *и* $\overline{b}=\{7,2,-1\}$. *Вычислить* 1) $\overline{a}\cdot\overline{b}$; 2) $(\overline{a}+\overline{b})^2$.

Решение.

1) согласно формуле (11.4)

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3$$

находим

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = 5\cdot 7+(-3)\cdot 2+5\cdot(-1) = 24;$$

2) вычисляем сумму векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$$\overline{a}+\overline{b} = \{5+7,\ -3+2,\ 5+(-1)\} = \{12,-1,4\},$$

а затем находим скалярный квадрат получившегося вектора:

$$(\overline{a}+\overline{b})^2 = 12^2+(-1)^2+4^2 = 144+1+16 = 161.$$

Ответ: 1) $\overline{a}\cdot\overline{b}=24$; 2) $(\overline{a}+\overline{b})^2=161$.

Задача 4. *Даны две силы* $\overline{F_1} = \{3,\ 5, -7\}$ *и* $\overline{F_2} = \{-1,\ 10,\ 2\}$, *приложенные к одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения* $M_1(2, 0, 7)$ *в положение* $M_2(-3, 9, -6)$.

Решение. Равнодействующая сил $\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_2} = \{3-1,\ 5+10, -7+2\} = \{2,\ 15,\ -5\}$. Находим координаты вектора $\overline{s}$, вдоль которого происходит перемещение: $\overline{s} = \overline{M_1M_2} = \{-5, 9, -13\}$. По формуле (11.7) находим работу, которую совершает равнодействующая сил $\overline{F}$, двигаясь прямолинейно вдоль вектора $\overline{s}$:

$$A = \overline{F} \cdot \overline{s} = 2 \cdot (-5) + 15 \cdot 9 + (-5) \cdot (-13) = 190\,.$$

Ответ: A=190 (ед.)

Задача 5. *Определить, при каком значении m векторы* $\overline{a} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + m\overline{k}$ *и* $\overline{b} = 4\overline{i} + 5\overline{j} + 7\overline{k}$ *взаимно перпендикулярны.*

Решение. По свойству 5 скалярного произведения векторы взаимно перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю. Вычисляя скалярное произведение векторов по формуле (11.4) и приравнивая его к нулю, получим следующее уравнение:

$$2 \cdot 4 + (-3) \cdot 5 + 7m = 0\,.$$

Откуда

$$7m = 7,$$

$$m = 1.$$

Ответ: при *m*=1 векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны.

Задача 6. *Определить, при каком значении* λ *векторы* $\overline{a} = \{1, 2, 2\}$ *и* $\overline{b} = \{1, \lambda, 1\}$ *образуют угол* 45^0.

Решение. Угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ находится по формуле (11.5):

$$\cos(\overline{a} \,\hat{,}\, \overline{b}) = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}\,.$$

Подставляя в нее данные из условия задачи, получим:

$$\cos 45^0 = \frac{1\cdot 1 + 2\cdot\lambda + 2\cdot 1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+\lambda^2+1^2}} = \frac{2\lambda+3}{3\cdot\sqrt{\lambda^2+2}},$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\lambda+3}{3\cdot\sqrt{\lambda^2+2}},$$

$$\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{\lambda^2+2} = 2\cdot(2\lambda+3).$$

Возводя обе части последнего равенства в квадрат, имеем

$$18(\lambda^2+2) = 4(2\lambda+3)^2,$$

$$2\lambda^2 - 48\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0,\ \ \lambda_2 = 24.$$

Ответ: при $\lambda = 0$ или $\lambda = 24$ векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол 45^0.

Задача 7. *Дан треугольник ABC:* $A(6, 3, -4)$, $B(8, 6, 2)$, $C(2, 9, 8)$. *Вычислите внутренний и внешний углы при вершине A.*

Решение. Угол *A* в треугольнике *ABC* можно рассматривать как угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Найдем координаты этих векторов: $\overline{AB} = \{2,3,6\}$, $\overline{AC} = \{-4,6,12\}$. Воспользуемся формулой (11.5), записанной для нашего случая:

$$cos\,A = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|} = \frac{2\cdot(-4)+3\cdot 6+6\cdot 12}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+6^2+12^2}} = \frac{82}{\sqrt{49}\cdot\sqrt{196}} = \frac{82}{7\cdot 14} = \frac{41}{49}.$$

Таким образом, $\angle A = arccos\dfrac{41}{49}$.

Внешний угол при вершине *A*, обозначим его за $\angle 1$, составляет с внутренним углом при той же вершине развернутый угол. Следовательно, $\angle 1 = \pi - \angle A = \pi - \arccos\dfrac{41}{49}$.

Ответ: $\angle A = arccos\dfrac{41}{49}$, а внешний угол при вершине *A* равен ($\pi - arccos\dfrac{41}{49}$).

Задача 8. *Найдите вектор* $\overline{x}$, *коллинеарный вектору* $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$ *и удовлетворяющий условию* $\overline{x}\cdot\overline{a} = 3$.

Решение. Так как по условию векторы $\overline{a}$ и $\overline{x}$ коллинеарные, то их координаты пропорциональны, т.е. $\overline{x} = k\cdot\overline{a} \Rightarrow \overline{x} = \{k,\ k, -2k\}$. Находим коэффициент *k* пропорциональности, используя условие $\overline{x}\cdot\overline{a}=3$. Вычисляя скалярное произведение векторов $\overline{x}$ и $\overline{a}$ в координатной форме по формуле (11.4), получим: $1\cdot k+1\cdot k+(-2)\cdot(-2k)=3$. Откуда $6k=3\Leftrightarrow k=\frac{1}{2}$. Таким образом, $\overline{x}=\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\}$.

Ответ: $\overline{x}=\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\}$.

Задача 9. *Найдите вектор* $\overline{x}$*, зная, что он перпендикулярен векторам* $\overline{a}=\{3,-1,4\}$, $\overline{b}=\{5,-2,1\}$ *и удовлетворяет условию:* $\overline{x}(2\overline{i}-\overline{j}+5\overline{k})=-8$.

Решение. Если $\overline{x}\perp\overline{a}$, $\overline{x}\perp\overline{b}$, то $\overline{a}\cdot\overline{x}=0$ и $\overline{b}\cdot\overline{x}=0$. Обозначим координаты вектора $\overline{x}$ через x_1,x_2,x_3 соответственно. Используя формулу (11.4) для вычисления скалярного произведения векторов в координатной форме, составляем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}3x_1-x_2+4x_3=0,\\ 5x_1-2x_2+x_3=0,\\ 2x_1-x_2+5x_3=-8.\end{cases}$$

Решая ее методом Гаусса, находим:

$$\overline{A}=\begin{array}{c}(-5)\\(3)\\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}3&-1&4&0\\5&-2&1&0\\2&-1&5&-8\end{array}\right)\begin{array}{c}(-2)\\ \\(3)\end{array}\sim\begin{array}{c} \\(-1)\\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}3&-1&4&0\\0&-1&-17&0\\0&-1&7&-24\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3&-1&4&0\\0&-1&-17&0\\0&0&24&-24\end{array}\right).$$

$Rang\,A=rang\,\overline{A}=n$ (количество неизвестных) $\Rightarrow$ система совместна и имеет единственное решение, которое находится из системы:

$$\begin{cases}24x_3=-24,\\ x_2+17x_3=0,\\ 3x_1-x_2+4x_3=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_3=-1,\\ x_2-17=0,\\ 3x_1-x_2-4=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_3=-1,\\ x_2=17,\\ 3x_1-21=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_3=-1,\\ x_2=17,\\ x_1=7.\end{cases}$$

Ответ: $\overline{x}=\{7,17,-1\}$.

Задача 10. *Даны три вектора* $\overline{a} = 7\overline{i} - 4\overline{j}$, $\overline{b} = -\overline{i} + 2\overline{j} + 6\overline{k}$ *и* $\overline{c} = -8\overline{j} + 3\overline{k}$. *Вычислить* $пр_{\overline{a}}(\overline{c} + 2\overline{b})$.

Решение. Введем обозначение $\overline{c} + 2\overline{b} = \overline{d}$ и вычислим координаты вектора $\overline{d}$:

$$\overline{d} = \{c_1 + 2 \cdot b_1,\ c_2 + 2 \cdot b_2,\ c_3 + 2 \cdot b_3\},$$

$$\overline{d} = \{0 + 2 \cdot (-1),\ -8 + 2 \cdot 2,\ 3 + 2 \cdot 6\} = \{-2,\ -4,\ 15\}.$$

Запишем формулу (11.6) для вычисления проекции вектора на вектор для нашего случая:

$$пр_{\overline{a}}\overline{d} = \frac{\overline{a} \cdot \overline{d}}{|\overline{a}|} = \frac{a_1 \cdot d_1 + a_2 \cdot d_2 + a_3 \cdot d_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

$$пр_{\overline{a}}\overline{d} = \frac{7 \cdot (-2) + (-4) \cdot (-4) + 0}{\sqrt{7^2 + (-4)^2}} = \frac{-30}{\sqrt{65}} = \frac{-6\sqrt{65}}{13}.$$

Ответ: $пр_{\overline{a}}\overline{d} = \dfrac{-6\sqrt{65}}{13}$.

4. Векторное произведение векторов

Задача 1. *Даны векторы* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$, *причем* $|\overline{a}| = 5$, $|\overline{b}| = 2$ *и* $(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}) = \dfrac{\pi}{6}$. *Найдите:*

1) $|\overline{a} \times \overline{b}|$; 2) $|(2\overline{a} - \overline{b}) \times (\overline{a} + 2\overline{b})|$.

Решение.

1) согласно п.1 определения 13.2 имеем:

$$|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin\alpha = 5 \cdot 2 \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot 0{,}5 = 5;$$

2) воспользовавшись свойствами 1–4 векторного произведения и результатами предыдущего пункта, находим:

$$|(2\overline{a} - \overline{b}) \times (\overline{a} + 2\overline{b})| = |2\overline{a} \times \overline{a} + 4\overline{a} \times \overline{b} - \overline{b} \times \overline{a} - 2\overline{b} \times \overline{b}| = |4\overline{a} \times \overline{b} + \overline{a} \times \overline{b}| = 5|\overline{a} \times \overline{b}| = 25.$$

Ответ: 1) $|\overline{a} \times \overline{b}| = 5$, 2) $|(2\overline{a} - \overline{b}) \times (\overline{a} + 2\overline{b})| = 25$.

Задача 2. *Найти* $\overline{a} \times \overline{b}$, *если* $\overline{a} = 7\overline{i} + 3\overline{j} + 5\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} - 4\overline{j} + 3\overline{k}$.

Решение. Координаты векторного произведения векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ находятся по формуле (13.1″):

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.$$

В нашем случае

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 7 & 3 & 5\\ 2 & -4 & 3\end{vmatrix}=\overline{i}\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}3 & 5\\ -4 & 3\end{vmatrix}+\overline{j}\cdot(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}7 & 5\\ 2 & 3\end{vmatrix}+\overline{k}\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}7 & 3\\ 2 & -4\end{vmatrix}=29\overline{i}-11\overline{j}-34\overline{k}.$$

Ответ: $\overline{a}\times\overline{b}=\{29,-11,-34\}$.

Задача 3. *Найти векторное произведение векторов* $(3\overline{a}+4\overline{b})\times(2\overline{a}+5\overline{b})$*, если* $\overline{a}=i+2j-10k,\ \overline{b}=5i+4j+7k$.

Решение.

1-й способ. Упрощаем выражение $(3\overline{a}+4\overline{b})\times(2\overline{a}+5\overline{b})$, воспользовавшись свойствами векторного произведения:

$$(3\overline{a}+4\overline{b})\times(2\overline{a}+5\overline{b})=6\overline{a}\times\overline{a}+15\overline{a}\times\overline{b}+8\overline{b}\times\overline{a}+20\overline{b}\times\overline{b}=15\overline{a}\times\overline{b}-8\overline{a}\times\overline{b}=7\overline{a}\times\overline{b}.$$

Находим координаты вектора $\overline{a}\times\overline{b}$. Для этого составляем и вычисляем определитель:

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & 2 & -10\\ 5 & 4 & 7\end{vmatrix}=\overline{i}\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}2 & -10\\ 4 & 7\end{vmatrix}+\overline{j}\cdot(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}1 & -10\\ 5 & 7\end{vmatrix}+\overline{k}\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=54\overline{i}-57\overline{j}-6\overline{k}.$$

Таким образом, $(3\overline{a}+4\overline{b})\times(2\overline{a}+5\overline{b})=7(54\overline{i}-57\overline{j}-6\overline{k})=378\overline{i}-399\overline{j}-42\overline{k}$.

2-й способ. Находим координаты векторов $(3\overline{a}+4\overline{b})$ и $(2\overline{a}+5\overline{b})$:

$$3\overline{a}+4\overline{b}=\{3\cdot1+4\cdot5,\ 3\cdot2+4\cdot4,\ 3\cdot(-10)+4\cdot7\}=\{23,\ 22,\ -2\},$$
$$2\overline{a}+5\overline{b}=\{2\cdot1+5\cdot5,\ 2\cdot2+5\cdot4,\ 2\cdot(-10)+5\cdot7\}=\{27,\ 24,\ 15\}.$$

Вычисляем $(3\overline{a}+4\overline{b})\times(2\overline{a}+5\overline{b})$, составив определитель:

$$(3\bar{a}+4\bar{b})\times(2\bar{a}+5\bar{b})=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 23 & 22 & -2\\ 27 & 24 & 15\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}22 & -2\\ 24 & 15\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}23 & -2\\ 27 & 15\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}23 & 22\\ 27 & 24\end{vmatrix}=$$

$=378\bar{i}-399\bar{j}-42\bar{k}$.

Ответ: $(3\bar{a}+4\bar{b})\times(2\bar{a}+5\bar{b})=\{378,\ -399,\ -42\}$.

Задача 4. *Вектор $\bar{x}$, перпендикулярный векторам $\bar{a}=\{2,3,1\}$ и $\bar{b}=\{5,9,5\}$, образует с осью Oz острый угол. Найти координаты вектора $\bar{x}$, зная, что* $|\bar{x}|=2\sqrt{70}$.

Решение. 1. Вектор, перпендикулярный векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, согласно п. 2 определения 13.2, коллинеарен их векторному произведению, т.е. $\bar{x}\ ||\ \bar{a}\times\bar{b}$. Следовательно, их координаты пропорциональны. Находим координаты $\bar{a}\times\bar{b}$:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 3 & 1\\ 5 & 9 & 5\end{vmatrix}=6\bar{i}-5\bar{j}+3\bar{k}.$$

Таким образом, координаты вектора $\bar{x}=\{6k,\ -5k,\ 3k\}$, $k\in R$.

2. Находим коэффициент пропорциональности k, учитывая, что $|\bar{x}|=2\sqrt{70}.$

Составляем и решаем уравнение

$$\sqrt{(6k)^2+(-5k)^2+(3k)^2}=2\sqrt{70},$$
$$\sqrt{36k^2+25k^2+9k^2}=2\sqrt{70},$$
$$\sqrt{70k^2}=2\sqrt{70},\qquad :\sqrt{70}$$
$$|k|=2\ \Leftrightarrow\ k=\pm 2.$$

Итак, мы получили два вектора $\bar{x}_1=\{12,-10,6\}$, $\bar{x}_2=\{-12,10,-6\}$, которые имеют заданную длину и перпендикулярны векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

3. Искомый вектор $\bar{x}$ должен образовывать с осью Oz острый угол. Возьмем любой вектор, лежащий на оси Oz и имеющий с ней одинаковое направление, например вектор $\bar{k}=\{0,0,1\}$, и воспользуемся геометрическим смыслом скалярного произведения:

$(\overline{k}\,\hat{}\,\overline{x}) < 90^0 \Leftrightarrow \quad \overline{k} \cdot \overline{x} > 0$. Легко видеть, что этому условию удовлетворяет вектор $\overline{x}_1 = \{12, -10, 6\}$.

Ответ: $\overline{x} = \{12, -10, 6\}$.

Задача 5. *Даны точки* $A(2,\ 1,\ 5)$*,* $B(-7,\ 4,\ 3)$*,* $C(0,\ 8,\ 9)$*. Найти площадь треугольника ABC и длину его высоты, опущенной из вершины A на сторону BC.*

Решение. 1. Площадь треугольника *ABC*, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, равна половине площади параллелограмма, построенного на тех же векторах. Воспользуемся геометрическим смыслом векторного произведения

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|.$$

Для того чтобы произвести вычисления по указанной формуле, находим координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AB} \times \overline{AC}$:

$$\overline{AB} = \{-9,\ 3, -2\},\ \ \overline{AC} = \{-2,\ 7,\ 4\},\ \ \ \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -9 & 3 & -2 \\ -2 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 26\bar{i} + 40\bar{j} - 57\bar{k}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{26^2 + 40^2 + (-57)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5525} = 2{,}5\sqrt{221}.$$

2. Для того чтобы найти высоту *AH*, опущенную из вершины *A* на сторону *BC*, воспользуемся известной из школьного курса геометрии формулой для вычисления площади треугольника:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC.$$

Откуда с учетом п.1 имеем

$$AH = \frac{2S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|}{\left|\overline{BC}\right|}.$$

Вычисляем длину вектора $\overline{BC} = \{7, 4, -12\}$:

$$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{7^2 + 4^2 + (-12)^2} = \sqrt{209}.$$

Окончательно получим

$$AH = \frac{5\sqrt{221}}{\sqrt{209}} = 5\sqrt{\frac{221}{209}} \approx 5{,}14.$$

Ответ: $S_{\Delta ABC} = 2{,}5\sqrt{221}$ (*ед.*^{2}), $AH \approx 5{,}14$ (*ед.*).

Задача 6. *Даны три силы* $\overline{F_1} = \{3, -2, 6\}$, $\overline{F_2} = \{5, 1, -3\}$, $\overline{F_3} = \{-4, 7, 0\}$, *приложенные к точке* $A(2, 2, 1)$. *Определить величину момента равнодействующей этих сил относительно точки* $O(-1, 9, 3)$.

Решение. Находим равнодействующую трех сил $\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3} = \{3+5-4, -2+1+7, 6-3\} = \{4, 6, 3\}$. Согласно физическому смыслу векторного произведения момент $\overline{M}$ силы $\overline{F}$, приложенной к точке A, относительно некоторой точки O представляет собой вектор $\overline{M} = \overline{OA} \times \overline{F}$.

Находим координаты вектора $\overline{OA} = \{3, -7, -2\}$. Вычисляем координаты вектора $\overline{OA} \times \overline{F}$, составив определитель

$$\overline{OA} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -7 & -2 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -9\bar{i} - 17\bar{j} + 46\bar{k}.$$

Величина момента силы $\overline{F}$ относительно точки O равна

$$\left|\overline{OA} \times \overline{F}\right| = \sqrt{(-9)^2 + (-17)^2 + 46^2} = \sqrt{2486}.$$

Ответ: $\left|\overline{OA} \times \overline{F}\right| = \sqrt{2486}$.

5. Смешанное произведение векторов

Задача 1. *Вычислить* $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$, *если известно, что* $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$, $|\bar{c}| = 7$; *вектор* $\bar{c}$ *перпендикулярен векторам* $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$, *а* $\left(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}\right) = 45^\circ$.

Решение. Формулу (14.1)

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$$

с учетом определения скалярного произведения (11.1) можно переписать в виде:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = |\bar{a} \times \bar{b}| \cdot |\bar{c}| \cdot \cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами ($\overline{a}\times\overline{b}$) и $\overline{c}$.

Находим $\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$:

$$\left|\overline{a}\times\overline{b}\right| = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\sin\left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right) = 2\cdot 3\cdot\sin 45^\circ = 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}\,.$$

Вектор ($\overline{a}\times\overline{b}$), как следует из определения векторного произведения 13.2, перпендикулярен векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, а значит, коллинеарен вектору $\overline{c}$. При этом векторы ($\overline{a}\times\overline{b}$) и $\overline{c}$ могут быть как сонаправленными (в этом случае $\varphi = 0$), так и противоположно направленными ($\varphi = 180^0$).

Таким образом, находим

$$(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c} = \left|\overline{a}\times\overline{b}\right|\cdot\left|\overline{c}\right|\cdot\cos\varphi = 3\sqrt{2}\cdot 7\cdot(\pm 1) = \pm 21\sqrt{2}\,.$$

Ответ: $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = \pm 21\sqrt{2}$ (смешанное произведение положительное, если $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ – правая тройка векторов, отрицательное – если $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют левую тройку векторов).

Задача 2. *Установить компланарные или нет следующие векторы:* $\overline{a} = \{-4,\ 0,\ 2\}$, $\overline{b} = \{-2,\ -5,\ 0\}$, $\overline{c} = \{2,\ 2,\ 3\}$. *Если векторы некомпланарные, то выяснить, какую тройку векторов они образуют.*

Решение. Согласно свойству 5 смешанного произведения, три вектора компланарные, если их смешанное произведение равно нулю. Вычислим смешанное произведение векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, воспользовавшись формулой (14.3):

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, составим и вычислим определитель

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}_{(2)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 0 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4+40) = 72 \neq 0.$$

Следовательно, векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ не являются компланарными. Так как $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) > 0$, то векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют правую тройку.

Ответ: векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ некомпланарные и образуют правую тройку.

Задача 3. *Доказать, что точки* $A(0, 0, 0)$*,* $B(6, 9, -6)$*,* $C(6, 3, 6)$ *и* $D(-4, -8, 8)$ *лежат в одной плоскости.*

Решение. Четыре точки лежат в одной плоскости, если векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$ компланарны. Находим координаты векторов $\overline{AB} = \{6, 9, -6\}$, $\overline{AC} = \{6, 3, 6\}$, $\overline{AD} = \{-4, -8, 8\}$ и вычисляем их смешанное произведение:

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 6 & 9 & -6 \\ 6 & 3 & 6 \\ -4 & -8 & 8 \end{vmatrix} = -36 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 36 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Мы показали, что векторы компланарны, а это значит, что точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

Замечание. В задаче 3 из четырех точек можно составить различные тройки векторов, но важно, чтобы векторы в этих тройках имели общее начало.

Задача 4. *Даны вершины тетраэдра:* $A(1,1,1)$*,* $B(1,4,4)$*,* $C(4,1,4)$*,* $D(4,4,1)$*. Найдите объем тетраэдра и длину его высоты, опущенной из вершины* D*.*

Решение. 1. Согласно следствию 14.1, объем тетраэдра, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, находится по формуле

$$V_{тетр.} = \frac{1}{6}\left|(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})\right|.$$

В качестве векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ можно взять любые три вектора, составленные из точек A, B, C и D с тем лишь условием, что эти три вектора должны иметь общее начало. Пусть $\bar{a} = \overline{AB}$, $\bar{b} = \overline{AC}$, $\bar{c} = \overline{AD}$. Находим координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ и вычисляем их смешанное произведение

$$\overline{AB} = \{0, 3, 3\}, \ \overline{AC} = \{3, 0, 3\}, \ \overline{AD} = \{3, 3, 0\};$$

$$(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD})=\begin{vmatrix}0&3&3\\3&0&3\\3&3&0\end{vmatrix}\overset{\text{по правилу "треугольника"}}{=}27+27=54\,.$$

Таким образом,

$$V_{тетр.}=\frac{1}{6}\left|(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD})\right|=\frac{1}{6}\cdot 54=9.$$

2. Из школьного курса геометрии известна формула для нахождения объема тетраэдра:

$$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot H\,,$$

где H – высота в тетраэдре, а $S_{осн}$ – площадь грани в пирамиде, к которой проведена высота. Выразим из нее высоту:

$$H=\frac{3V}{S_{осн}}.$$

В нашем случае высота в тетраэдре опущена из вершины D, а значит, $S_{осн}=S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$. Используя геометрический смысл смешанного произведения векторов (см. п.1), перепишем выражение для высоты в тетраэдре в виде:

$$H=\frac{3V}{S_{осн}}=\frac{\left|(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD})\right|}{\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|}.$$

Вычисляем векторное произведение векторов $\overline{AB}\times\overline{AC}$

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\0&3&3\\3&0&3\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}3&3\\0&3\end{vmatrix}+\bar{j}\cdot(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}0&3\\3&3\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}0&3\\3&0\end{vmatrix}=9\bar{i}+9\bar{j}-9\bar{k}.$$

Подставляя найденные значения произведений в формулу для расчета высоты, окончательно получаем:

$$H=\frac{\left|(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD})\right|}{\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|}=\frac{54}{\sqrt{9^2+9^2+(-9)^2}}=\frac{54}{9\sqrt{3}}=2\sqrt{3}.$$

Ответ: $H=2\sqrt{3}$ (*ед.*).

Задача 5. *Даны три вершины тетраэдра:* $A(1, 1, 5)$, $B(5, 1, 5)$, $C(2, 5, 5)$. *Найдите координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oz, а объем тетраэдра равен 8.*

Решение. Объем тетраэдра находится по формуле (см. п. 1 задачи 4):

$$V_{тетр.} = \frac{1}{6} \cdot \left|(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})\right|$$

Откуда

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \pm 6 \cdot V_{тетр.} = \pm 48.$$

Вычисляем координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$. Для этого обозначим через z аппликату точки D. Так как по условию задачи $D \in Oz$, то $D(0, 0, z)$. Таким образом,

$$\overline{AB} = \{4, 0, 0\},\ \overline{AC} = \{1, 4, 0\},\ \overline{AD} = \{-1, -1, z-5\}.$$

Вычисляя смешанное произведение векторов через определитель 3-го порядка, получаем уравнение, содержащее неизвестное z

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & z-5 \end{vmatrix} = \pm 48,$$

$$16(z-5) = \pm 48,$$

$$z - 5 = \pm 3,$$

$$z = 8 \text{ или } z = 2.$$

Таким образом, существует две точки $D_1(0, 0, 8)$ и $D_2(0, 0, 2)$, удовлетворяющие условию задачи.

Ответ: $D_1(0, 0, 8)$, $D_2(0, 0, 2)$.

ТИПОВОЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Задача 1. Заданы вершины треугольника $A(-1, 2)$, B(2, 0), C(3, –1). Точка M – середина стороны BC, точка N – середина медианы AM. Найдите разложение вектора $\overline{AB}$ по векторам $\overline{BM}$ и $\overline{CN}$.

Задача 2. Вычислите, какую работу производит сила $\overline{F} = \{-2, 4, 5\}$, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $A(0, 10, -5)$ в положение $B(-1, 12, -3)$.

Задача 3. Вектор $\overline{c}$ перпендикулярен векторам $\overline{a} = \{3, -1, 4\}$, $\overline{b} = \{5, -2, 1\}$ и образует с осью Ox острый угол. Найдите его координаты, зная, что $|\overline{c}| = \sqrt{339}$.

Задача 4. Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, если $\overline{u} = \{-4, 0, 2\}$, $\overline{v} = \{-2, -5, 0\}$, $\overline{w} = \{2, 2, 3\}$. Выяснить правую или левую тройку векторов образуют указанные векторы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Акивис М.А.* Тензорное исчисление / М.А. Акивис, В.В. Гольдберг. – М.: Наука. Главн. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1969. – 352 с.

2. *Александров П.С.* Элементы линейной алгебры / П.С. Александров. – М.: Наука. Главн. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1979. – 512 с.

3. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов. – 11-е изд., испр. / Д.В. Беклемишев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 312 с.

4. *Бугров Я.С.* Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука. Главн. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1980. – 176 с.

5. *Ефимов Н.В.* Краткий курс аналитической геометрии: учеб. пособие. – 13-е изд. / Н.В. Ефимов. – М.: Физматлит, 2005. – 240 с.

6. *Ильин В.А.* Аналитическая геометрия: учебник для вузов. – 5-е изд. / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк – М.: Наука. Физматлит, 1999. – 224 с.

7. *Ильин В.А.* Линейная алгебра: учебник для вузов. – 5-е изд. / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк – М.: Наука. Физматлит, 1999. – 296 с.

8. *Попов Ю.И.* Векторы в школьном курсе геометрии: метод. пособие / Ю.И. Попов. – Калининград: Янтарный сказ, 1998. – 64с.

9. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. Семестр 1. Аналитическая геометрия / М.М. Постников. – М.: Наука. Главн. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1979. – 336 с.

10. *Умнов А.Е.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра: учеб. пособие для вузов / А.Е. Умнов. – М.О.: Издание ЗАО “Оптимальные системы и технологии”, 2004. – 368 с.

11. *Чехлов В.И.* Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре: учеб. пособие / В.И. Чехлов. – М.: МФТИ, 2000. – 260 с.

Александра Вячеславна ВЯЛОВА

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебно-методическое пособие
по дисциплине «Алгебра и аналитическая геометрия»
для студентов высших учебных заведений специальностей
180403.65 – Эксплуатация судовых энергетических установок,
180404.65 – Эксплуатация судового электрооборудования и средств автоматики

Редактор Е. Билко
Формат 60x84 (1/16). Тираж 60 экз. Заказ № 70.
Объем 4,4 печ.л.; 3,2 уч.-изд.л.

Издательство ФГОУ ВПО «КГТУ». 236022, Калининград, Советский пр-кт, 1