ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.В. Вялова

МАТРИЦЫ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Утверждено Ученым советом университета
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений
технических специальностей

Калининград
Издательство ФГОУ ВПО «КГТУ»
2009

УДК 512. 624. 3 (075)

Вялова А.В. Матрицы и системы линейных уравнений. Учебное пособие.- Калининград: ФГОУ ВПО «КГТУ».- 2009.- 63 с.

В учебном пособии доступно излагаются основы теории матриц, определителей и систем линейных уравнений. Пособие содержит расчетные задания для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов первого курса инженерно-технических специальностей университета.

Список лит. – 8 наименований.

РЕЦЕНЗЕНТЫ – Белова О.О., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры компьютерной безопасности и прикладной алгебры Российского государственного университета имени И. Канта

Антипов Ю.Н., докт. физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики ФГОУ ВПО «Калининградский государственный технический университет»

Учебное пособие рекомендовано к изданию ученым советом факультета фундаментальной подготовки ФГОУ ВПО «Калининградский государственный технический университет» 2 марта 2009 г., протокол № 5

Александра Вячеславна Вялова
Матрицы и системы линейных уравнений

Редактор Г.Е. Смирнова
Подписано в печать 12.05. 2009 г. Формат 60x84(1/16). Тираж 50 экз. Заказ 169.
Объем 3,9 п.л.; 2,9 уч.-изд.л. Цена договорная

УОП ФГОУ ВПО «КГТУ». Советский проспект, 1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Алгебра и аналитическая геометрия – один из базовых курсов, лежащих в основе математического образования студентов технического университета. Данное пособие представляет собой учебно-методическую разработку по разделу «Матрицы и системы линейных уравнений» указанного курса.

Учебное пособие состоит из трех глав: «Матрицы и определители», «Системы линейных уравнений», «Практическая часть». Теоретический материал первых двух глав сопровождается примерами и типовыми задачами. Третья глава содержит задачи для самостоятельного решения с ответами. В конце третьей главы приводится типовой вариант контрольной работы по данному разделу линейной алгебры.

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для студентов 1-го курса технических специальностей университета. Оно призвано облегчить студентам изучение курса и помочь подготовиться к успешной сдаче экзамена. Также пособие может быть использовано преподавателями при подготовке к лекционным и практическим занятиям.

Глава 1
МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§1. Понятие матрицы. Виды матриц

Определение 1.1.1. *Матрицей размера $m\times n$ $(m,n\in N)$* называется совокупность mn чисел, заданных в виде прямоугольной таблицы, состоящей из m строк и n столбцов:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.1.1)$$

Если число строк в таблице не совпадает с числом столбцов, т.е. $m\neq n$, то матрица называется *прямоугольной*. Матрица, у которой число строк равно числу столбцов *(m=n),* называется *квадратной* порядка *n*.

Числа из таблицы (1.1.1) будем называть *элементами матрицы*. Элемент, стоящий на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца матрицы *A*, обозначается a_{ij}. Условимся, что все элементы рассматриваемых нами матриц – действительные числа; будем называть такие матрицы *действительными*.

Матрицы обозначаются прописными латинскими буквами, а их элементы – соответствующими строчными. Для обозначения матрицы (1.1.1) употребляется также запись: $A=(a_{ij})$, где $i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}$, или $A_{m\times n}$, когда хотят указать размер матрицы. Для квадратных матриц *n*-го порядка вместо $A_{n\times n}$ будем писать A_n.

Пример 1.1.1. Рассмотрим матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Матрица *A* – прямоугольная матрица размера 3×2 с элементами: $a_{11}=1,\ a_{12}=2,\ a_{21}=3,$ $a_{22}=4,\ a_{31}=5,\ a_{32}=6$. Матрица *B* – квадратная 2-го порядка, ее элементы: $b_{11}=-3,\ b_{12}=0,\ b_{21}=8,\ b_{22}=9$.

Простейшим соотношением между матрицами является их равенство.

Определение 1.1.2. Две матрицы $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ называются *равными,* если они одинаковых размеров и их соответствующие элементы равны, т.е. $a_{ij}=b_{ij}$ $\forall\ i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$.

Определение 1.1.3. Диагональ квадратной матрицы, идущая от левого верхнего к правому нижнему углу (составленная из элементов $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$), называется *главной*, а диагональ, идущая от верхнего правого к нижнему левому углу ($a_{1n}, a_{2,\,n-1}, ..., a_{n1}$) – *побочной.*

Определение 1.1.4. Квадратную матрицу $A=(a_{ij})$; $i,j=\overline{1,n}$, у которой все элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю, т. е. $a_{ij}=0$, $i\neq j$, будем называть *диагональной.* Она имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1.1.2)$$

В частности, если в матрице (1.1.2) все диагональные элементы равны единице, то такую матрицу называют *единичной* и обозначают *E*.

Определение 1.1.5. Матрица *O* произвольных размеров, у которой все элементы равны нулю, называется *нулевой*.

Определение 1.1.6. Квадратная матрица $A=(a_{ij})$; $i,j=\overline{1,n}$ называется *треугольной*, если все элементы матрицы, расположенные под главной диагональю (над главной диагональю), равны нулю, т. е. $a_{ij}=0$ при $i>j$ ($a_{ij}=0$ при $i<j$),

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1.1.3)$$

Первую из этих матриц называют *верхней треугольной*, а вторую – *нижней треугольной.*

Замечание 1.1.1. Диагональные матрицы являются частным случаем как верхней треугольной, так и нижней треугольной матриц.

Определение 1.1.7. Матрица произвольного размера

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix} \tag{1.1.4}$$

называется *трапециевидной.*

Определение 1.1.8. Прямоугольные матрицы размера $m\times 1$ ($1\times n$) называются *столбцевыми (строчными)* матрицами.

Часто удобно рассматривать матрицу как совокупность строк или столбцов. Например, матрицу (1.1.1) можно представить как строчную матрицу $A=\left(a_1 \;\; a_2 \;\; \dots \;\; a_n\right)$ размера $1\times n$, где каждый элемент a_j $(j=\overline{1,n})$ – столбец высоты m:

$$a_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \qquad a_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \qquad \dots \qquad a_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.1.5}$$

или в виде столбцевой матрицы $A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$ размера $m\times 1$, где каждый элемент a_i $(i=\overline{1,m})$ – строка длиной n:

$$a_1=(a_{11} \;\; a_{12} \;\; \dots \;\; a_{1n}), \;\; a_2=(a_{21} \;\; a_{22} \;\; \dots \;\; a_{2n}), \;\; \dots, \;\; a_m=(a_{m1} \;\; a_{m2} \;\; \dots \;\; a_{mn}). \tag{1.1.6}$$

§2. Операции над матрицами и их свойства

I. Сложение матриц

Определение 1.2.1. *Суммой* двух матриц $A_{m\times n}=(a_{ij})$ и $B_{m\times n}=(b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n}=(c_{ij})$ такая, что

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \;\; (i=\overline{1,m};\;\; j=\overline{1,n}), \tag{1.2.1}$$

т.е. каждый элемент матрицы C равен сумме соответствующих элементов матриц A и B.

Сумма матриц A и B обозначается $A+B$.

Пример 1.2.1.

Дано

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 5\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}7 & -2 & 6\\ 9 & -2 & 8\end{pmatrix}.$$

Найти $A+B$.

Решение.

$$A+B=\begin{pmatrix}-1+7 & 4+(-2) & 5+6\\ 2+9 & -3+(-2) & 0+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 2 & 11\\ 11 & -5 & 8\end{pmatrix}.$$

II. Умножение матрицы на число

Определение 1.2.2. *Произведением матрицы* $A_{m\times n}=(a_{ij})$ *на число* α $(\alpha\in R)$ называется матрица $C_{m\times n}=(c_{ij})$ такая, что

$$c_{ij}=\alpha a_{ij} \quad (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}), \tag{1.2.2}$$

т.е. каждый элемент матрицы C равен произведению соответствующего элемента матрицы A на число α.

Для произведения матрицы на число используют обозначение αA.

Пример 1.2.2.

Дано

$$A=\begin{pmatrix}3\\ -5\\ 9\end{pmatrix}, \qquad \alpha=2.$$

Найти αA.

Решение.

$$\alpha A=2\begin{pmatrix}3\\ -5\\ 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 3\\ 2\cdot(-5)\\ 2\cdot 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ -10\\ 18\end{pmatrix}.$$

Определение 1.2.3. Матрицу *–A=(–1)A* будем называть *противоположной* по отношению к матрице *A*.

Следствие 1.2.1. Разность матриц *A* и *B* определяется как сумма матриц *A* и (*–B*):

$$A-B=A+(-B).$$

Пример 1.2.3. Найти разность *A–B* для матриц из примера 1.2.1.

Решение.

$$A-B=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 5\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7 & -2 & 6\\ 9 & -2 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-7 & 4-(-2) & 5-6\\ 2-9 & -3-(-2) & 0-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 6 & -1\\ -7 & -1 & -8\end{pmatrix}.$$

Свойства операций сложения и умножения на число:

1. $A+B=B+A$ (коммутативность сложения).
2. $(A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C$ (ассоциативность сложения).
3. $A+O=O+A=A$.
4. $\forall A \quad \exists(-A):\ A+(-A)=O$.
5. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$, $\quad (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A \quad \forall\alpha,\beta\in R$.
6. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A) \quad \forall\alpha,\beta\in R$.
7. $1\cdot A=A$.

Данные свойства представляются очевидными, так как сложение матриц и умножение их на число сводится к сложению и, соответственно, умножению чисел, а для чисел свойства 1–7 справедливы.

III. Произведение матриц

Операция умножения вводится только для тех пар матриц, у которых число столбцов первой матрицы совпадает с количеством строк второй.

Определение 1.2.4. *Произведением* матриц $A_{m\times p}=(a_{ik})$ и $B_{p\times n}=(b_{kj})$ называется матрица $C_{m\times n}=(c_{ij})$ такая, что

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ip}\,b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj} \quad (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}), \tag{1.2.3}$$

т.е. каждый элемент c_{ij} матрицы *C*, расположенный в *i*-й строке и *j*-м столбце, равен сумме произведений элементов *i*-й строки матрицы *A* на соответствующие элементы *j*-го столбца матрицы *B*.

Произведение матриц *A* и *B* обозначается *A·B*.

Замечание 1.2.1. Матрица-произведение состоит из стольких строк, сколько их в первом сомножителе, и из стольких столбцов, сколько их во втором.

Пример 1.2.4.

Дано

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}.$$

Найти $A \cdot B$.

Решение.

Для пары матриц A, B операция умножения определена, так как число столбцов матрицы A совпадает с количеством строк матрицы B, причем $A_{2\times2} \cdot B_{2\times3} = C_{2\times3}$. Используя формулу (1.2.3), найдем:

$$A \cdot B = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix},$$

где

$$c_{11} = a_{11}\, b_{11} + a_{12}b_{21}; \quad c_{12} = a_{11}\, b_{12} + a_{12}b_{22}; \quad c_{13} = a_{11}\, b_{13} + a_{12}b_{23};$$
$$c_{21} = a_{21}\, b_{11} + a_{22}b_{21}; \quad c_{22} = a_{21}\, b_{12} + a_{22}b_{22}; \quad c_{23} = a_{21}\, b_{13} + a_{22}b_{23}.$$

Пример 1.2.5.

Дано

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти $A \cdot B$ и $B \cdot A$.

Решение.

Матрицы A и B – квадратные 2-го порядка, следовательно, произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ определены и будут являться также квадратными матрицами 2-го порядка:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot 3 + 6\cdot 5 & -1\cdot(-2) + 6\cdot 1 \\ 0\cdot 3 + 2\cdot 5 & 0\cdot(-2) + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 8 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot(-1) + (-2)\cdot 0 & 3\cdot 6 + (-2)\cdot 2 \\ 5\cdot(-1) + 1\cdot 0 & 5\cdot 6 + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 14 \\ -5 & 32 \end{pmatrix}.$$

Замечание 1.2.2. Произведение матриц $B \cdot A$ из примера 1.2.4 не определено, так как количество столбцов матрицы B не равно количеству строк матрицы A.

Определение 1.2.5. Целой положительной степенью A^k $(k \geq 2)$ квадратной матрицы A называется произведение k-матриц, каждая из которых равна A.

Очевидно, что порядок матриц A^k и A одинаковый.

Пример 1.2.6.

Дано

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 5 & 4 & -2\\ 7 & 1 & 5\end{pmatrix}.$$

Найти A^2.

Решение.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 5 & 4 & -2\\ 7 & 1 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 5 & 4 & -2\\ 7 & 1 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2\cdot(-2)+1\cdot 5+3\cdot 7 & -2\cdot 1+1\cdot 4+3\cdot 1 & -2\cdot 3+1\cdot(-2)+3\cdot 5\\ 5\cdot(-2)+4\cdot 5+(-2)\cdot 7 & 5\cdot 1+4\cdot 4+(-2)\cdot 1 & 5\cdot 3+4\cdot(-2)+(-2)\cdot 5\\ 7\cdot(-2)+1\cdot 5+5\cdot 7 & 7\cdot 1+1\cdot 4+5\cdot 1 & 7\cdot 3+1\cdot(-2)+5\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30 & 5 & 7\\ -4 & 19 & -3\\ 26 & 16 & 44\end{pmatrix}.$$

Свойства операции умножения матриц:

1. $A\cdot B\neq B\cdot A$ (некоммутативность умножения).
2. $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)=ABC$ (ассоциативность умножения).
3. $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$ (левосторонняя дистрибутивность умножения относительно сложения).
4. $(B+C)\cdot A=B\cdot A+C\cdot A$ (правосторонняя дистрибутивность умножения относительно сложения).

Свойства 1–4 выполняются для произвольных матриц A, B и C, однако, предполагается, что матрицы имеют размеры, обеспечивающие возможность их перемножения и сложения.

Замечание 1.2.3. В ряде случаев может выполняться $A\cdot B=B\cdot A$, тогда матрицы A и B называются *перестановочными* или *коммутирующими.*

Замечание 1.2.4. Единичная матрица является перестановочной с любой квадратной матрицей того же порядка, т. е.

$$A\cdot E=E\cdot A=A. \tag{1.2.4}$$

Некоммутативность произведения непосредственно следует из формулы (1.2.3), примеров 1.2.4, 1.2.5 и замечания 1.2.2.

Докажем свойство 2.

Дано

$A_{m\times n} = (a_{ik}),\quad B_{n\times p} = (b_{kl}),\quad C_{p\times s} = (c_{lj}).$

Доказать $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$.

Доказательство.

Введем обозначения:

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p} = D_{m\times p} = (d_{il}),\quad (A\cdot B)\cdot C = D_{m\times p}\cdot C_{p\times s} = F_{m\times s} = (f_{ij}),$$

$$B_{n\times p}\cdot C_{p\times s} = G_{n\times s} = (g_{kj}),\quad A\cdot(B\cdot C) = A_{m\times n}\cdot G_{n\times s} = H_{m\times s} = (h_{ij}).$$

Как мы видим, соответствующие произведения матриц слева и справа определены и результат произведений – матрицы F и H имеют одинаковый размер. Покажем, что соответствующие элементы этих матриц равны.

Используя формулу (1.2.3), получим:

$$d_{il} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl}\ ,\quad f_{ij} = \sum_{l=1}^{p} d_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^{p} (\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl}) c_{lj};$$

$$g_{kj} = \sum_{l=1}^{p} b_{kl} c_{lj},\quad h_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} g_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (\sum_{l=1}^{p} b_{kl} c_{lj})\ .$$

Элементы f_{ij} и h_{ij} отличаются лишь порядком суммирования. Однако, так как суммирования по индексам k и l происходят независимо друг от друга, то порядок их выполнения безразличен. Таким образом, из определения 1.1.2 следует, что $F=H$.

Свойства 3 и 4 доказываются аналогично свойству 2.

IV. Транспонирование матриц

Пусть дана матрица $A = (a_{ij})\ (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$.

Определение 1.2.6. Матрица A^T, полученная из матрицы A заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется *транспонированной по отношению к* A. Таким образом, если

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad \text{то}\quad A^T_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (1.2.5)$$

т.е. $A^T = (a_{ji})\ (j = \overline{1,n};\ i = \overline{1,m})$.

Переход от матрицы A к A^T называется *транспонированием*.

Пример 1.2.7.
Дано

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти A^T.

Решение.

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Свойства операции транспонирования:

1. $(A^T)^T = A$.
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$.
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T \quad \forall \alpha \in R.$
4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Замечание 1.2.5. Свойства линейности 2 и 3 можно заменить более общим:

$$(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T \quad \forall \alpha, \beta \in R.$$

Определение 1.2.7. Квадратная матрица A называется *симметричной*, если $A^T = A$, и *кососимметричной,* если $A^T = -A$.

§3. Понятие определителя. Разложение определителя по элементам строки (столбца)

Каждой квадратной матрице ставится в соответствие некоторое число, называемое *определителем (детерминантом)* матрицы. Для определителя матрицы *A* используют следующие обозначения: $\det A$, или Δ, или употребляют следующий символ: выписывают матрицу *A*, но вместо круглых скобок элементы матрицы заключают в прямые черточки.

Элементы, строки, столбцы, диагонали матрицы называют соответственно *элементами, строками, столбцами и диагоналями определителя* этой матрицы.

Для матрицы 1-го порядка $A = (a_{11})$ определителем является значение единственного ее элемента, т. е. $\det A = a_{11}$.

Рассмотрим понятие определителя для квадратных матриц 2-го и 3-го порядков.

Определение 1.3.1. *Определителем 2-го порядка* матрицы A_2 называется число, равное разности произведений элементов главной и побочной диагоналей, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1.3.1)$$

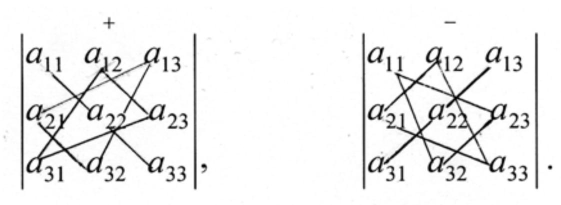
Определение 1.3.2. *Определителем 3-го порядка* матрицы A_3 называется число, вычисляемое по правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad (1.3.2)$$

Существует ряд приёмов, облегчающих составление выражения, стоящего в правой части формулы (1.3.2). Рассмотрим некоторые из них:

1) правило треугольника.

Слагаемые в формуле (1.3.2) берутся со знаком “+”, если сомножители в соответствующих произведениях являются элементами главной диагонали определителя или вершинами треугольника, меньшая сторона которого параллельна главной диагонали; со знаком “–”, если сомножители являются элементами побочной диагонали определителя или вершинами треугольника, меньшая из сторон которого параллельна побочной диагонали. Для наглядности используется схема:



2) правило Саррюса[*].

В следующей схеме используется матрица, полученная из матрицы A_3 приписыванием снизу первых двух ее строк. Произведения элементов, стоящих на главной диагонали или на прямых, параллельных главной диагонали, берутся со знаком “+”; а

[*] Пьер Ф. Саррюс (1798–1858) – французский математик. В 1833 году сформулировал правило для вычисления определителя 3-го порядка, основанное на приписывании к матрице определителя строк или столбцов.

произведения элементов, стоящих на побочной диагонали или на прямых, параллельных ей, берутся со знаком “–”:

$$\begin{array}{c} + \\ + \\ + \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}\right)\begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ \\ \\ \end{array}.$$

Замечание 1.3.1. Иногда для вычисления определителя 3-го порядка по правилу Саррюса используют матрицу, полученную из A_3 приписыванием справа первых двух столбцов.

Пример 1.3.1. Вычислить определители

a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 4 \cdot (-3) = 26,$

b) $\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array} \end{array} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot 6 - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot 8 \cdot 6 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 0.$

Приведенные выше схемы справедливы только для определителей 3-го порядка. Для вычисления определителей произвольного порядка будем использовать теорему, позволяющую свести вычисление определителя n-го $(n \geq 2)$ порядка к вычислению определителей *(n–1)*-го порядка. С этой целью введем следующие понятия.

Определение 1.3.3. *Минором* M_{ij} *элемента* a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель *(n–1)*-го порядка, полученный из данного вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых находится этот элемент.

Определение 1.3.4. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} *элемента* a_{ij} называется его минор, взятый со знаком “+” или “–” в зависимости от четности или нечетности суммы (i+j), т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Пример 1.3.2. Минором элемента $a_{12} = -3$ определителя 2-го порядка из примера 1.3.1.a является определитель 1-го порядка, полученный из данного вычеркиванием 1-й строки и 2-го столбца, т.е. $M_{12} = 4$; алгебраическим дополнением элемента a_{12} будет $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -4$.

Минором элемента $a_{22} = 5$ определителя 3-го порядка из примера 1.3.1.b является определитель 2-го порядка, полученный из данного вычеркиванием 2-й строки и 2-го столбца: $M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12$; алгебраическим дополнение элемента a_{22} будет $A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = -12$.

Замечание 1.3.2. Если элемент определителя стоит на “четном месте”, т. е. сумма номеров его строки и столбца – четная, то минор этого элемента совпадает с алгебраическим дополнением. В противном случае, минор и алгебраическое дополнение данного элемента отличаются знаком.

Теорема 1.3.1. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на свои алгебраические дополнения равна величине определителя:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad \forall i = \overline{1,n}, \tag{1.3.3}$$

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad \forall j = \overline{1,n}. \tag{1.3.3$'$}$$

Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой его строки (столбца) равна нулю, т.е.

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0 \ \ (i \neq j), \tag{1.3.4}$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \ldots + a_{ni}A_{nj} = 0 \ (i \neq j). \tag{1.3.4$'$}$$

Формулы (1.3.3), (1.3.4) записаны для i-й строки, а формулы $(1.3.3')$, $(1.3.4')$ – для j-го столбца определителя.

Равенства (1.3.3), $(1.3.3')$ дают нам правило вычисления определителей n-го порядка и называются *разложением определителя по i-й строке*, *j-му столбцу* соответственно.

Пример 1.3.3. Определитель из примера 1.3.1.b можно вычислить разложением по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = (45-48) - 2(36-42) + 3(32-35) = 0.$$

Пример 1.3.4. Вычислить определитель верхней треугольной матрицы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

Раскладывая каждый раз данный определитель по элементам 1-го столбца, получаем, что он равен произведению своих диагональных элементов.

Используя разложение определителя по первой строке, можно получить такой же результат для нижней треугольной матрицы ($1.1.3_2$).

Замечание 1.3.3. При разложении определителя удобнее выбирать те строки (столбцы), которые содержат наибольшее число нулей.

§4. Свойства определителей

1. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется, т. е.

$$\det A = \det A^T.$$

Покажем это на примере определителя 2-го порядка:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \det A^T.$$

Следствие 1.4.1. Столбцы и строки в определителе равноправны, а именно: всякое утверждение для строк определителя будет верным и для столбцов.

2. Если в определителе поменять две строки (два столбца) местами, то определитель изменит свой знак на противоположный.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

3. Если определитель содержит нулевую строку (столбец), то он равен нулю.

Это непосредственно следует из теоремы 1.3.1, если разложить определитель по нулевой строке.

4. Определитель, содержащий две одинаковых строки (столбца), равен нулю.

Доказательство.

Действительно, пусть $\det A$ имеет две одинаковые строки, т. е. соответствующие элементы i-й и k-й строк $(i \neq k)$ равны. Если эти строки поменять местами, то по свойству 2 определитель изменит свой знак на противоположный. На самом же деле, так как переставляются одинаковые строки, определитель не поменяется, т. е. $\det A = -\det A$. Это равенство возможно только в том случае, если $\det A = 0$.

5. Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя имеют общий множитель, то его можно выносить за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix} = \alpha a_{11}a_{22} - \alpha a_{21}a_{12} = \alpha(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Следствие 1.4.2. Если все элементы одной из строк (одного из столбцов) определителя увеличить в α ($\alpha \neq 0$) раз, то и сам определитель увеличится в α раз.

6. Определитель, содержащий две пропорциональные строки (столбца), равен нулю.

Доказательство.

Пусть, например, элементы *i*-й строки определителя отличаются от соответствующих элементов *k*-й $(i \neq k)$ одним и тем же множителем α. Вынося общий множитель α из *i*-й строки за знак определителя, мы получаем две одинаковых строки. По свойству 4 такой определитель равен нулю.

7. Если все элементы i-й строки (j-го столбца) определителя n-го порядка представлены в виде суммы двух слагаемых: $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$ $(j = \overline{1,n})$, *то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки, кроме i-й (все столбцы, кроме j-го), – такие же, как и в данном определителе, а i-я строка (j-й столбец) в первом состоит из элементов* b_{ij}, *а во втором – из элементов* c_{ij}, *т.е.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \dots & b_{in}+c_{in} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{in} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Это свойство называют *правилом сложения определителей*.

Определение 1.4.1. Говорят, что строка определителя является *линейной комбинацией* других его строк, если каждый элемент этой строки равен сумме соответствующих элементов других строк, умноженных на некоторые числа.

Аналогичное определение можно сформулировать и для столбцов определителя.

8. Если одна из строк (столбцов) определителя есть линейная комбинация других его строк (столбцов), то определитель равен нулю.

Доказательство.

Пусть, например, i-я строка определителя представляет собой линейную комбинацию k-й и l-й строк, т. е. $a_{ij} = \alpha a_{kj} + \beta a_{lj}$; $j = \overline{1,n}$; $\alpha, \beta \neq 0$. На основании свойства 7 такой определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки, кроме i-й, такие же, как и в исходном, а i-я строка в первом из них будет состоять из элементов вида αa_{kj}, а во втором – из элементов βa_{lj}. В получившихся определителях содержатся пропорциональные строки, следовательно, по свойству 6, они равны нулю. Таким образом, мы доказали равенство нулю исходного определителя.

9. Величина определителя не изменится, если к какой-либо строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на произвольное число.

Доказательство.

Предположим, что к i-й строке прибавили k-ю, умноженную на некоторое число α. Тогда элементы i-й строки нового определителя имеют вид: $a_{ij} + \alpha a_{kj}$ $(j = \overline{1,n})$. На основании свойства 7 этот определитель равен сумме двух определителей: первый совпадает с исходным, а второй равен нулю, так как содержит две пропорциональные строки.

Замечание 1.4.1. На практике для вычисления определителей удобно применять их свойства. Особенно полезным оказывается использование свойства 9 вместе с теоремой 1.3.1 о разложении определителя по элементам строки (столбца). А именно: свойство 9 позволяет преобразовать определитель так, чтобы в любой строке или любом столбце все элементы, кроме одного, заменились нулями. Затем, раскладывая определитель по этой строке (столбцу), мы сводим вычисление определителя n-го порядка к вычислению определителя $(n\!-\!1)$-го порядка.

Пример 1.4.1. Вычислить определитель:

$$\begin{array}{r} \\ \\ {\scriptstyle (-5)(-2)} \end{array}\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 14 & 32 \\ 0 & 7 & 16 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 14 & 32 \\ 7 & 16 \end{vmatrix} = 14 \cdot 16 - 7 \cdot 32 = 224 - 224 = 0.$$

§5. Базисный минор и ранг матрицы. Теорема о базисном миноре

Определение 1.5.1. *Минором* M_r *порядка* r *матрицы* $A_{m\times n}$ ($r \le \min\{m,n\}$) называется определитель порядка r, все элементы которого расположены на пересечении любых r строк и r столбцов этой матрицы.

Лемма 1.5.1. Если в матрице все миноры порядка r равны нулю, то равны нулю и все миноры более высоких порядков.

Доказательство.

Запишем определитель порядка $r+1$ и разложим его по элементам строки. После разложения, согласно теореме 1.3.1, определитель будет представлять собой сумму произведений элементов этой строки на их алгебраические дополнения, т. е. миноры порядка r с соответствующими знаками. По условию леммы такой определитель равен нулю.

Определение 1.5.2. В матрице A минор порядка r называется *базисным*, если он отличен от нуля, а все миноры порядка $r+1$, полученные присоединением к исходному одной строки и одного столбца, равны нулю или не существуют.

Миноры $r+1$ порядка из определения называются *окаймляющими* по отношению к исходному и содержат его целиком внутри себя. Столбцы и строки, на пересечении которых расположен базисный минор, будем называть *базисными столбцами* и *строками.*

Замечание 1.5.1. Базисный минор определяется неоднозначно, однако, все базисные миноры имеют одинаковый порядок.

Определение 1.5.3. *Рангом* матрицы называется порядок ее базисного минора. Обозначается: *rang A*.

Замечание 1.5.2. Из определения ранга матрицы следует

a) для произвольной матрицы $A_{m\times n}$ выполняется: $0 \le rangA \le \min\{m,n\}$;

b) $rangA = 0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю, т.е. матрица A – нулевая;

c) для квадратной матрицы A n-го порядка $rangA = n$ тогда и только тогда, когда $\det A \ne 0$.

В общем случае для вычисления ранга матрицы будем использовать следующее правило: *при вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков. Если уже найден минор r-*го *порядка* M_r, *отличный от нуля, то требуется вычислить все миноры r+1 порядка, окаймляющие минор* M_r. *Если они все равны нулю или не существуют, то ранг матрицы равен r. Если хотя бы один из* $M_{r+1} \neq 0$, *то с ним следует поступить так же, как с минором* M_r.

Пример 1.5.1. Вычислить ранги следующих матриц:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}; \qquad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 17 \end{pmatrix}.$$

Решение:

a) $M_1 = 1 \neq 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$

$$M_3^1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} = 0, \; M_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \end{vmatrix} = 0, \; M_3^3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 13 & 14 & 15 \end{vmatrix} = 0, \; M_3^4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 13 & 14 & 16 \end{vmatrix} = 0.$$

Базисным минором является минор M_2, и тогда, согласно определению 1.5.3, *rangA*=2.

b) $M_1 = 1 \neq 0, \; M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -4 \neq 0, \; M_3^1 = M_3^2 = M_3^3 = 0, \quad M_3^4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 13 & 14 & 17 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$

$$M_4 = \begin{array}{c} (-9)(-5) \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 17 \end{vmatrix} \begin{array}{c} (-13) \\ \\ \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & -35 \end{vmatrix} \overset{см.св-во\ 6}{=} 0.$$

Базисным минором матрицы *B* является минор $M_3^4 \neq 0$. Следовательно, *rang B* =3.

Как мы видим из примеров, поиск ранга матрицы приводит к вычислению некоторого, быть может, очень большого, числа миноров этой матрицы. Существует еще один способ нахождения ранга матрицы, не связанный с вычислениями миноров. Этот метод основан на предварительном упрощении матрицы при помощи элементарных преобразований.

Определение 1.5.4. *Элементарными преобразованиями* над матрицей называются следующие преобразования строк (столбцов) матрицы: 1) перестановка двух строк (столбцов) местами; 2) умножение строки (столбца) на любое отличное от нуля число; 3) прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на произвольное число; 4) вычеркивание нулевой строки (столбца).

Определение 1.5.5. Матрицы A и B называются *эквивалентными*, если B можно получить из A с помощью конечного числа элементарных преобразований.
Эквивалентные матрицы будем обозначать следующим символом: A~B.

Теорема 1.5.1. Элементарные преобразования не изменяют ранга матрицы.

Действительно, если к матрице применить элементарные преобразования 1–3, то эти же преобразования или часть из них будут совершены и над ее базисным минором. Из свойств определителя 2, 9 и следствия к свойству 5 следует, что базисный минор, хотя численно и может поменяться, но в нуль в результате данных преобразований не обратится, т.е. ранг матрицы не изменится. Вычеркивание нулевой строки (столбца) также не может изменить порядка базисного минора, т.е. ранг матрицы остается прежним.

Определение 1.5.6. Говорят, что прямоугольная матрица порядка $m \times n$ имеет *диагональную форму*, если элементы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{rr} = 1$ $(r \le \min\{m,n\})$, а все остальные элементы матрицы равны нулю.

Метод нахождения ранга матрицы при помощи элементарных преобразований состоит в следующем: для нахождения ранга матрицы нужно элементарными преобразованиями привести эту матрицу к диагональной форме и сосчитать количество единиц, стоящих в ней на главной диагонали.

Замечание 1.5.3. На практике для вычисления ранга матрицы удобно сочетать оба метода. А именно, приводя прямоугольную матрицу порядка $m \times n$ к трапециевидной форме, вычислять миноры, используя пример 1.3.4.

Пример 1.5.2. Вычислить ранги матриц

$$\text{a)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 13 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \qquad \text{b)}\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$\text{a)}\ A=\begin{array}{c}(-9)(-5)\\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&2&3\\5&6&7\\9&10&13\\-1&2&5\end{pmatrix}\begin{array}{c}(1)\\ \\ \\ \\ \end{array}\sim\begin{array}{c} \\ (1)(-2)\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-4&-8\\0&-8&-14\\0&4&8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-4&-8\\0&0&2\\\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-4&-8\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

В результате элементарных преобразований над матрицей A получили эквивалентную ей верхнюю треугольную матрицу. Легко видеть, что

$$M_3=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-4&-8\\0&0&2\end{vmatrix}=1\cdot(-4)\cdot 2=-8\neq 0\,.$$

Следовательно, *rang A =3*.

$$\text{b)}\ B=\begin{array}{c}(-9)(-5)\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix}\sim\begin{array}{c} \\ (-2)\\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-4&-8&-12\\0&-8&-16&-24\end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ (-\frac{1}{4})\\ \\ \end{array}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\end{pmatrix}.$$

В матрице B минор $M_2=\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$, а миноров M_3 нет. Следовательно, *rangB=2.*

Пример 1.5.3. Найти ранг матрицы в зависимости от действительных значений параметра *a*:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&a\end{pmatrix}.$$

Решение.

Элементарными преобразованиями приведем матрицу к трапециевидной (или, если получится, к треугольной) форме:

$$\begin{array}{c}(-13)(-9)(-5)\\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&a\end{pmatrix}\sim\begin{array}{c} \\ (-3)(-2)\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-4&-8&-12\\0&-8&-16&-24\\0&-12&-24&a-52\end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ (-\frac{1}{4})\\ \\ \\ \end{array}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\\0&0&0&a-16\end{pmatrix}.$$

После вычеркивания нулевой строки получается прямоугольная матрица размера 3×4, эквивалентная данной.

Если $a=16$, то имеем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен двум, так как она содержит, например, минор $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Если $a \neq 16$, то имеем матрицу, ранг которой равен трем, так как она содержит минор $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-16 \end{vmatrix} = a - 16 \neq 0$.

Таким образом, $rangA = 2$, если $a = 16$, и $rangA = 3$, если $a \neq 16$.

Замечание 1.5.4. Матрица в примере 1.5.3 элементарными преобразованиями приведена к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a-16 \end{pmatrix}.$$

Ранг в этом случае можно также считать по количеству ненулевых строк. То есть, если $a = 16$, то имеем две ненулевых строки и $rangA = 2$; если $a \neq 16$, то имеем три ненулевых строки и $rangA = 3$.

Теорема 1.5.2 (о базисном миноре). Всякая строка (столбец) матрицы A есть линейная комбинация базисных строк (столбцов) этой матрицы.

Доказательство.

Пусть ранг матрицы A равен r. Можно считать, что базисный минор M_r расположен в левом верхнем углу матрицы. Если это не так, то заменой строк (столбцов) можно поместить этот минор в левый верхний угол. Окаймим матрицу базисного минора фрагментами i-й строки и j-го столбца матрицы A, где $i = \overline{r+1, m}$; $j = \overline{r+1, n}$. Рассмотрим определитель построенной матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2j} \\ . & . & . & . & . \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix}.$$

Определитель $\Delta = 0$ как минор *r+1* порядка в матрице с базисным минором порядка *r*. С другой стороны, раскладывая определитель по последнему столбцу (см. (1.3.3′)), получим:

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{rj}A_{rj} + a_{ij}(-1)^{i+j}M_r. \qquad (1.5.1)$$

Здесь элемент a_{ij} стоит в *(r+1)*-й строке и *(r+1)*-м столбце определителя Δ, поэтому $(-1)^{i+j} = (-1)^{r+1+r+1} = ((-1)^{r+1})^2 = 1$. Так как $M_r \neq 0$, то, разделив обе части равенства (1.5.1) на M_r, получим: $a_{ij} = k_1 a_{1j} + k_2 a_{2j} + \ldots + k_r a_{rj}$, где $k_s = -\dfrac{A_{sj}}{M_r}$; $s = \overline{1,r}$. А это и означает, что *i*-я строка является линейной комбинацией первых *r* базисных строк.

§6. Обратная матрица и ее вычисление. Матричные уравнения

Определение 1.6.1. Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля. В противном случае она называется *вырожденной.*

Теорема 1.6.1. Определитель произведения матриц равен произведению определителей. Для двух матриц: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Следствие 1.6.1. Произведение любых невырожденных матриц само будет невырожденной матрицей.

Определение 1.6.2. *Обратной* к квадратной матрице A называется матрица A^{-1}, которая удовлетворяет условию:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E. \qquad (1.6.1)$$

Теорема 1.6.2. Матрица *A* тогда и только тогда имеет обратную матрицу, когда она невырожденная.

Доказательство.

Необходимость. Пусть матрица *A* имеет обратную матрицу A^{-1}, тогда $A \cdot A^{-1} = E$ и $\det(A \cdot A^{-1}) = \det E$. По теореме 1.6.1 $\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det(A^{-1})$. Так как $\det E = 1$, имеем $\det A \cdot \det(A^{-1}) = 1$. Значит, $\det A \neq 0$ и $\det(A^{-1}) \neq 0$, т. е. матрицы A и A^{-1} невырожденные, а $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

Достаточность. Для матрицы $A=(a_{ij});\ i,j=\overline{1,n}$; $\det A\neq 0$, составим матрицу из алгебраических дополнений и затем транспонируем ее. Получившуюся в результате матрицу обозначим A^* и назовем *присоединенной (или союзной) к А*. Иными словами,

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ . & . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Вычисляя произведения $A\cdot A^*$ и $A^*\cdot A$ матриц, с учетом теоремы 1.3.1 получим

$$A\cdot A^*=A^*\cdot A=\det A\cdot E.$$

Разделив последнее соотношение на величину $\det A$, имеем:

$$\frac{1}{\det A}A\cdot A^*=E, \qquad \Big|\cdot A^{-1}\ ,$$

откуда с учетом равенств (1.6.1), (1.2.4) найдем: $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}A^*$. Мы получили формулу нахождения обратной матрицы и, следовательно, доказали ее существование.

Таким образом, формула для вычисления обратной матрицы имеет вид:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ . & . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.6.2}$$

Замечание 1.6.1. Для каждой невырожденной матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1}.

Пример 1.6.1.

Дано

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{-1}.

Решение.

$$\det A = {}^{(-7)(-4)}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -11 \end{vmatrix} \overset{см.св-во 5}{=} \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} = 33 - 36 = -3 \neq 0.$$

Следовательно, матрица A невырожденная и A^{-1} существует.

Найдем алгебраические дополнения A_{ij} элементов данной матрицы:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = 2; \qquad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = 4; \qquad A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 2; \qquad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = -11; \qquad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3; \qquad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6; \qquad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

Подставляя полученное в формулу (1.6.2), находим

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Замечание 1.6.2. Существует еще один способ нахождения обратной матрицы при помощи элементарных преобразований. Этот способ состоит в следующем: составляется матрица размера $n \times 2n$ при помощи приписывания к матрице A справа единичной матрицы. Элементарными преобразованиями строк преобразуют полученную матрицу так, чтобы обратить ее левую половину в единичную матрицу. Тогда справа получится матрица A^{-1}.

Пример 1.6.2. Для матрицы из примера 1.6.1 найти обратную матрицу при помощи элементарных преобразований.

Решение.

$$(A|E)=\begin{array}{c}(-7)(-4)\\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\4&5&6&0&1&0\\7&8&10&0&0&1\end{array}\right)\sim\begin{array}{c} \\ (-2)\\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-6&-4&1&0\\0&-6&-11&-7&0&1\end{array}\right)\sim\begin{array}{c} \\ \\ (6)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-6&-4&1&0\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\begin{array}{c} \\ (-\frac{1}{3})\\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-3&0&2&-11&6\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right)\sim\begin{array}{c} \\ \\ (-3)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&0&-2/3&11/3&-2\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right)\begin{array}{c} \\ (-2)\\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2/3&-4/3&1\\0&1&0&-2/3&11/3&-2\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right)=$$

$$=(E|A^{-1}).$$

Свойства обратных матриц:

1. $(A^{-1})^{-1}=A$.

Непосредственно следует из равенства 1.6.1.

2. $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.

Доказательство.

$(A\cdot B)\cdot(B^{-1}\cdot A^{-1})=A\cdot(B\cdot B^{-1})\cdot A^{-1}=A\cdot A^{-1}=E$. Следовательно, матрицы $A\cdot B$ и $B^{-1}\cdot A^{-1}$ обратные по отношению друг к другу, т. е. $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.

3. $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

Доказательство.

Из соотношения 1.6.1: $A\cdot A^{-1}=E$. По свойству 4 операции транспонирования (см. §2) $(A\cdot A^{-1})^T=(A^{-1})^T\cdot A^T=E$. Следовательно, матрицы A^T и $(A^{-1})^T$ взаимообратные, т. е. $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

Определение 1.6.3. *Простейшими матричными уравнениями* будем называть уравнения следующих трех типов:

$$A\cdot X=C,\ X\cdot A=C,\ A\cdot X\cdot B=C, \qquad (1.6.3)$$

где A, B, C – некоторые числовые матрицы, а X – неизвестная матрица, которую нужно найти.

Под *решением матричного уравнения* будем понимать матрицу X, которая обращает матричное уравнение в тождество.

Искать решение матричных уравнений будем с помощью обратных матриц в зависимости от типа уравнения следующими тремя способами:

1) Если $\det A \neq 0$, то, домножая обе части уравнения $(1.6.3_1)$ на A^{-1} слева, получим $X = A^{-1} \cdot C$.

2) Если $\det A \neq 0$, то, домножая обе части уравнения $(1.6.3_2)$ на A^{-1} справа, получим $X = C \cdot A^{-1}$.

3) Если $\det A \neq 0$ и $\det B \neq 0$, то, домножая уравнение $(1.6.3_3)$ на A^{-1} слева и на B^{-1} справа, получим

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}.$$

Пример 1.6.3. Решить матричные уравнения:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение:

a) Матричное уравнение можно переписать в виде: $A \cdot X = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получили уравнение вида $(1.6.3_1)$, решение которого – матрица $X = A^{-1} \cdot C$.

Найдем матрицу A^{-1}:

$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ существует;

$A_{11} = (-1)^2 \cdot 1 = 1; \quad A_{12} = (-1)^3 \cdot 3 = -3; \quad A_{21} = (-1)^3 \cdot 2 = -2; \quad A_{22} = (-1)^4 \cdot 4 = 4.$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 \\ 1{,}5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$X = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 \\ 1{,}5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 2{,}5 \\ 1{,}5 & -6{,}5 \end{pmatrix}.$$

b) Матричное уравнение можно переписать в виде: $X \cdot A = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Получили уравнение вида ($1.6.3_2$), решение которого ищется в виде: $X = C \cdot A^{-1}$. Найдем матрицу A^{-1}:

$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ существует;

$A_{11} = (-1)^2 \cdot 1 = 1;\quad A_{12} = (-1)^3 \cdot 2 = -2;\quad A_{21} = (-1)^3 \cdot 1 = -1;\quad A_{22} = (-1)^4 \cdot 3 = 3.$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$X = C \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

c) Матричное уравнение можно переписать в виде ($1.6.3_3$): $A \cdot X \cdot B = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение данного уравнения ищется в виде: $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$. Найдем матрицы A^{-1} и B^{-1}:

$det\, A = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ *существует;*

$A_{11} = (-1)^2 \cdot 0 = 0;\quad A_{12} = (-1)^3 \cdot 3 = -3;\quad A_{21} = (-1)^3 \cdot (-1) = 1;\quad A_{22} = (-1)^4 \cdot 5 = 5.$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$\det B = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 22 \neq 0 \Rightarrow B^{-1}$ существует;

$A_{11} = (-1)^2 \cdot 7 = 7;\quad A_{12} = (-1)^3 \cdot (-1) = 1;\quad A_{21} = (-1)^3 \cdot 1 = -1;\quad A_{22} = (-1)^4 \cdot 3 = 3.$

$$B^{-1} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Окончательно, находим

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{22} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{66}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 12 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{66} & -\frac{1}{22} \\ \frac{87}{66} & -\frac{1}{22} \end{pmatrix}.$$

Замечание 1.6.3. В случае, когда $\det A = 0$ и $\det B = 0$, приведенные способы решений применять нельзя. В этом случае неизвестную матрицу X находят, сводя матричное уравнение к системе линейных уравнений.

Пример 1.6.4. Решить матричное уравнение:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -9 & -18 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Так как $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$, то решать матричное уравнение с помощью обратной матрицы нельзя. Пусть матрица X состоит из элементов $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, тогда по правилу умножения матриц (1.2.3) имеем:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b & 2a + 4b \\ c + 2d & 2c + 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -9 & -18 \end{pmatrix}.$$

Используя определение 1.1.2 равенства матриц, составим систему:

$$\begin{cases} a + 2b = 3, \\ 2a + 4b = 6, \\ c + 2d = -9, \\ 2c + 4d = -18; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 3, \\ c + 2d = -9; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 - 2b, \\ c = -9 - 2d. \end{cases}$$

Таким образом, матрица X имеет вид: $X = \begin{pmatrix} 3 - 2b & b \\ -9 - 2d & d \end{pmatrix}$ $\forall\ b, d \in R$.

Замечание 1.6.4. Более подробно решение систем линейных уравнений мы будем рассматривать в следующей главе.

Глава 2
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§1. Понятие системы линейных уравнений (СЛУ). Матричная форма записи СЛУ

Определение 2.1.1. *Системой* m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ будем называть систему вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3, \\ \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

или в сокращенной записи:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ (i = \overline{1,m}), \tag{2.1.1$'$}$$

где $a_{ij}, b_i \in R$.

Коэффициенты при неизвестных составляют прямоугольную матрицу $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$, которую будем называть *матрицей (основной матрицей) системы.* Числа, стоящие в правых частях уравнений системы (2.1.1), образуют столбцевую матрицу $B = (b_i)$ размера $m \times 1$, называемую *столбцом свободных членов.*

Определение 2.1.2. Матрица системы, дополненная справа столбцом свободных членов, называется *расширенной матрицей* системы и обозначается $\overline{A}$.

Таким образом, следующие матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} & b_3 \\ . & . & . & . & . & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{2.1.2}$$

являются: основной, столбцом свободных членов и расширенной матрицами системы (2.1.1) соответственно.

Определение 2.1.3. Система, у которой все свободные члены равны нулю, т. е. $b_i = 0 \ \forall i = \overline{1,m}$, называется *однородной*. Если хотя бы один из свободных членов отличен от нуля, т.е. $\exists i : b_i \neq 0$, то система называется *неоднородной.*

Определение 2.1.4. Упорядоченный набор чисел $(c_1, c_2, ..., c_n)$ называется *решением системы* (2.1.1), если при подстановке этих чисел в систему вместо соответствующих неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$ каждое уравнение системы обращается в тождество.

Решение системы можно записывать также в виде столбцевой матрицы

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}, \qquad (2.1.3)$$

которую будем называть вектор-решением данной системы.

Определение 2.1.5. Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется *совместной*, в противном случае – *несовместной.*

Определение 2.1.6. Совместная система называется *определенной,* если она имеет единственное решение. Совместная система, имеющая более одного решения, называется *неопределенной*.

Определение 2.1.7. Решить систему означает: 1) выяснить, является ли система совместной; 2) если система совместна, то определить количество решений, т.е. установить, является система определенной или нет, и найти все ее решения.

Пример 2.1.1.

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 - x_2 = 9; \end{cases} \qquad \text{b) } \{x_1 + x_2 = 5; \qquad \text{c) } \begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Решая систему a) методом сложения, получим, что она имеет единственное решение (7;–2) и, следовательно, является определенной. Система b), состоящая из одного уравнения с двумя неизвестными, имеет бесконечно много решений $(\alpha; 5 - \alpha)$, где $\alpha \in R$, т. е. является неопределенной. Система c) не имеет ни одного решения, так как левые части уравнений совпадают, а правые различны, и поэтому никакой набор чисел не может одновременно удовлетворять обоим уравнениям; т. е. система несовместна.

Определение 2.1.8. Две системы называются *эквивалентными*, если они имеют одни и те же решения или обе несовместные.

Систему линейных уравнений (2.1.1) можно записать в *матричной форме:*

$$A \cdot X = B, \tag{2.1.4}$$

где A и B матрицы $(2.1.2_{1,2})$, а X – столбцевая матрица высоты n, составленная из неизвестных.

Действительно, произведение матрицы $A_{m\times n}$ на матрицу $X_{n\times 1}$ определено, и согласно правилу умножения матриц (1.2.4) имеем:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Элементами полученной столбцевой $(m\times 1)$-матрицы $A\cdot X$ являются левые части уравнений системы (2.1.1). Воспользовавшись определением 1.1.2 о равенстве двух матриц, из (2.1.3) получаем в точности систему (2.1.1).

Существует еще одна матричная форма записи системы (2.1.1):

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = B, \tag{2.1.4$'$}$$

где под $a_1, a_2, \dots, a_n$ подразумеваются столбцевые матрицы (1.1.4), являющиеся столбцами матрицы A системы.

Каждой системе (2.1.1) соответствует единственная пара матриц A, B и наоборот.

§2. Условия совместности систем линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли*

Решая вопрос о совместности системы (2.1.1), рассмотрим матрицы A и $\overline{A}$ из (2.1.2). Их ранги либо совпадают, либо отличаются на единицу. В самом деле, так как

* Леопольд Кронекер (1823–1891) – немецкий математик, Альфредо Капелли (1855–1891) – итальянский математик. Независимо друг от друга установили критерий совместности произвольной системы линейных уравнений.

матрицы A и $\overline{A}$ отличаются друг от друга лишь входящим в $\overline{A}$ столбцом свободных членов, то либо базисный минор матрицы A будет являться базисным и для матрицы $\overline{A}$, либо порядок базисного минора матрицы $\overline{A}$ увеличится на единицу.

Ответ на вопрос о совместности системы линейных уравнений (2.1.1) дает теорема, которая называется теоремой *Кронекера-Капелли*.

Теорема 2.2.1 (Кронекера-Капелли, критерий совместности системы линейных уравнений). Система неоднородных линейных уравнений (2.1.1) тогда и только тогда совместна, когда ранги ее основной и расширенной матриц совпадают.

Доказательство.

Необходимость. Пусть система (2.1.1) совместна, т. е. имеет хотя бы одно решение $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Тогда этот набор должен удовлетворять каждому уравнению системы. Подставляя его в $(2.1.4')$, имеем:

$$a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n = B. \tag{2.2.1}$$

Таким образом, столбец свободных членов B представляет собой линейную комбинацию столбцов матрицы A, и, следовательно, по теореме о базисном миноре (1.5.2), он не является базисным. Это означает, что $rangA = rang\overline{A}$.

Достаточность. Пусть $rangA = rang\overline{A} = r$. Докажем, что система совместна. Так как $rangA = rang\overline{A}$, то существует минор M_r, являющийся базисным минором как матрицы A, так и матрицы $\overline{A}$. На основании теоремы 1.5.2 о базисном миноре последний столбец матрицы $\overline{A}$ является линейной комбинацией r базисных столбцов. К этому равенству можно прибавить остальные *(n–r)* столбцов матрицы A, умноженные на нуль, т. е. получим равенство вида (2.2.1). А это и означает, что числовые коэффициенты из разложения (2.2.1) составляют решение системы (2.1.1) и, следовательно, система совместна.

Теорема 2.2.2. Совместная система линейных уравнений (2.1.1) тогда и только тогда имеет единственное решение, когда $rangA = n$, где n – количество неизвестных.

Замечание 2.2.1. Если в системе (2.1.1) количество уравнений совпадает с количеством неизвестных (m=n), то согласно замечанию 1.5.2.с, для того чтобы система имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы $\det A \neq 0$.

Теорема 2.2.3. Совместная система линейных уравнений (2.1.1) тогда и только тогда имеет бесконечное множество решений, когда ранг матрицы системы меньше числа неизвестных, т.е. $rangA < n$.

Пример 2.2.1. Исследовать системы на совместность

a) $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 9, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 9x_4 = -1, \\ x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 7; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 9x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 1; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$

Решение:

a)

$$\overline{A} = \begin{array}{c} \\ (-3) \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 0 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -3 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ (-9)(-5) \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 9 & -1 \\ 0 & 9 & 9 & -30 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 8 \\ 0 & 5 & 10 & -25 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & -9 & 15 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -30 \end{array}\right).$$

Имеем $rangA = 3$, так как

$$M_1 = 1 \neq 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = -9 \neq 0,$$

а окаймляющий минор четвертого порядка $M_4 \overset{\text{см.св-во 3}}{=} 0$. Так как существует минор

$$M_4^{'} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -9 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{vmatrix} = 270 \neq 0,$$

то $rang\overline{A} = 4$. Таким образом, $rangA \neq rang\overline{A}$. Следовательно, по теореме 2.2.1 система несовместна.

b) $$\overline{A} = \begin{array}{c} (-1)(-3) \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 9 & -6 & 9 & 7 & 5 \\ 3 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ (-1) \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \end{array}\right).$$

Здесь $rangA = 2$, так как среди ее миноров 2-го порядка есть отличные от нуля, например, $M_2 = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 12$, а миноров 3-го порядка – нет. Аналогично, $rang\overline{A} = 2.$

Итак, $rangA = rang\overline{A}$. Следовательно, система совместна. Так как количество неизвестных в системе меньше ранга матрицы, т.е. $n = 4 < 2$, то система имеет бесконечное множество решений.

c) $$\overline{A} = \begin{array}{c} (-2)(-1) \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 5 & 6 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ (-2) \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right).$$

Имеем $rangA = rang\overline{A} = 3$. Следовательно, система совместна. Так как количество неизвестных равно рангу матрицы системы, т.е. $r = n$, то по теореме 2.2.2 система имеет единственное решение.

Замечание 2.2.2. Рассмотренные в этом параграфе теоремы позволяют исследовать систему на совместность, а в случае совместной системы – установить, является она определенной или неопределенной. Однако данные теоремы не дают практического способа отыскания всех решений системы. Этот вопрос будет изучен нами в дальнейшем.

§3. Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы и по формулам Крамера*

Рассмотрим систему *n* линейных уравнений с *n* неизвестными:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ \ (i = \overline{1,n}). \qquad (2.3.1)$$

Запишем эту систему в матричном виде:

$$A \cdot X = B, \qquad (2.3.2)$$

где $A = (a_{ij});\ i, j = \overline{1,n}$ – квадратная матрица порядка *n*, $B = (b_i)$ – столбец свободных членов высоты *n*, а X – неизвестная матрица.

Данное матричное уравнение относится к первому типу матричных уравнений $(1.6.3_1)$ и его решение при условии, что $\det A \neq 0$, находится по формуле:

$$X = A^{-1} \cdot B. \qquad (2.3.3)$$

Этот способ решения системы (2.3.1) называется методом обратной матрицы.

* Габриель Крамер (1704–1752) – швейцарский математик. Открыл и опубликовал в 1750 году правило решения систем *n* линейных уравнений с *n* неизвестными.

Пример 2.3.1. Решить систему методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 16, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15. \end{cases}$$

Решение.

Составим матрицы A, X и B для данной системы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Найдем определитель матрицы A:

$$\det A = {\scriptstyle (-2)(-3)}\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -14 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -5 & -14 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = -(30+14) = -44 \neq 0.$$

Следовательно, согласно замечанию 2.2.1, система определенная; ее можно решать методом обратной матрицы. Найдем матрицу A^{-1} по формуле (1.6.2). Для этого вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -11; \quad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 11; \quad A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -11;$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10; \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -14;$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -13; \quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = -\frac{1}{44} \begin{pmatrix} -11 & 11 & -11 \\ 6 & 10 & -14 \\ 1 & -13 & 5 \end{pmatrix}.$$

Подставляя A^{-1} и B в (2.3.3), находим:

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{44} \begin{pmatrix} -11 & 11 & -11 \\ 6 & 10 & -14 \\ 1 & -13 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 15 \end{pmatrix} = -\frac{1}{44} \begin{pmatrix} -11 + 11 \cdot 16 - 11 \cdot 15 \\ 6 + 10 \cdot 16 - 14 \cdot 15 \\ 1 - 13 \cdot 16 + 5 \cdot 15 \end{pmatrix} = -\frac{1}{44} \begin{pmatrix} 0 \\ -44 \\ -132 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $(0,1,3)$.

Формулу (2.3.3), учитывая (1.6.2), можно переписать в виде: $X = \frac{1}{\det A} A^* \cdot B$.

Умножая матрицы, находящиеся в правой части, по правилу (1.2.3) и используя определение равенства матриц (1.1.2), получим

$$x_i = \frac{A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + ... + A_{ni}b_n}{\det A} \quad (i = \overline{1,n}), \tag{2.3.4}$$

или в окончательной форме имеем:

$$x_i = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \tag{2.3.5}$$

где Δ – определитель матрицы A, а Δ_i ($i = \overline{1,n}$) – определитель матрицы, полученной из A заменой ее i-го столбца столбцом свободных членов $B = (b_i)$. Для проверки, если разложить определитель Δ_i по i-му столбцу (см. теорему 1.3.1), то получится выражение, стоящее в числителе (2.3.4). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3.1 (Правило Крамера). Если определитель матрицы системы $\Delta \neq 0$, то существует единственное решение системы линейных уравнений (2.3.1), определяемое формулами (2.3.5).

Замечание 2.3.1. В частности, если система линейных уравнений (2.3.1) однородная и имеет $\Delta \neq 0$, то она обладает единственным нулевым решением.

Замечание 2.3.2. Если определитель системы $\Delta = 0$ и при этом a) хотя бы один из $\Delta_i \neq 0;\ i = \overline{1,n}$, то система несовместная; b) все $\Delta_i = 0;\ i = \overline{1,n}$, то имеет место неопределенность, т.е. система либо несовместная, либо имеет бесконечное множество решений.

Пример 2.3.2. Приведем пример систем, у которых определитель системы $\Delta = 0$ и при этом все $\Delta_i = 0$ $(i = \overline{1,n})$

$$\text{a)} \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2; \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} 0x_1 = 0, \\ 0x_2 = 0, \\ 0x_3 = 0. \end{cases}$$

Несложно убедиться, что в первой системе

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ -2 & 2 & -4\\ 2 & -2 & 4\end{vmatrix}\overset{см.св-во\,6}{=}0,\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -4\\ 2 & -2 & 4\end{vmatrix}\overset{см.св-во\,6}{=}0,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 2 & -4\\ 2 & 2 & 4\end{vmatrix}\overset{см.св-во\,6}{=}0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 2 & -2\\ 2 & -2 & 2\end{vmatrix}\overset{см.св-во\,6}{=}0.$$

Система а) не имеет решения, так как первое и второе уравнения системы противоречивы.

Система b), у которой также все определители равны нулю, напротив, имеет бесконечное множество решений (α,β,γ), где $\alpha,\beta,\gamma\in R$.

Пример 2.3.3. Систему из примера 2.3.1 решить методом Крамера.

Определитель Δ системы уже найден, осталось вычислить определители Δ_i при $i=\overline{1,3}$.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 16 & 1 & 5\\ 15 & 3 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 11 & 11 & 5\\ 11 & 11 & 4\end{vmatrix}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}11 & 11\\ 11 & 11\end{vmatrix}\overset{см.св-во\,4}{=}0;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 16 & 5\\ 2 & 15 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ -14 & 11 & 5\\ -10 & 11 & 4\end{vmatrix}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}-14 & 11\\ -10 & 11\end{vmatrix}=11\cdot(-14+10)=-44;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 16\\ 2 & 3 & 15\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ -47 & 33 & 16\\ -43 & 33 & 15\end{vmatrix}=(-1)^4\cdot 33\cdot\begin{vmatrix}-47 & 1\\ -43 & 1\end{vmatrix}=33\cdot(-47+43)=-132.$$

Подставляя значения определителей в формулы (2.3.5), найдем решение системы:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{0}{-44}=0;\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-44}{-44}=1;\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-132}{-44}=3.$$

Ответ: $(0,1,3)$.

Замечание 2.3.3. Решение системы (2.3.1) не зависит от выбранного способа.

В общем случае метод Крамера используется для систем, у которых количество уравнений совпадает с количеством неизвестных. Однако используя несложный «приём», метод Крамера можно распространить и на произвольные системы.

Пример 2.3.4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Найдем ранги матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Здесь $rangA = rang\overline{A} = 2$, так как среди миноров 2-го порядка этих матриц есть отличные от нуля, например $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, а миноров 3-го порядка нет. По теореме 2.2.1 система совместна. Оставляя переменные x_1, x_2 слева, перенесем переменные x_3 вправо. Формально, получим систему, у которой количество уравнений совпадает с количеством неизвестных, т.е.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 + 3x_3, \\ 3x_1 + 4x_2 = -x_3. \end{cases}$$

Решая систему методом Крамера, найдем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5 \neq 0; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 + 3x_3 & 1 \\ -x_3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 13x_3; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 + 3x_3 \\ 3 & -x_3 \end{vmatrix} = -6 - 11x_3,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{8 + 13x_3}{5} = 1{,}6 + 2{,}6x_3, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6 - 11x_3}{5} = -1{,}2 - 2{,}2x_3.$$

Полагая $x_3 = \alpha$, где $\alpha \in R$, получаем решения системы: $(1{,}6 + 2{,}6\alpha; -1{,}2 - 2{,}2\alpha; \alpha)$.

Ответ: $(1{,}6 + 2{,}6\alpha; -1{,}2 - 2{,}2\alpha; \alpha)$, $\alpha \in R$.

§4. Метод Гаусса* решения систем линейных уравнений

Для практического решения систем с большим числом уравнений и неизвестных описанные выше методы обратной матрицы и Крамера неудобны. В случае же когда число уравнений в системе не совпадает с количеством неизвестных, матричный метод вообще применять нельзя. Универсальным способом решения систем ли-

* Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) – немецкий математик. В 1849 году в своей работе описал метод последовательного исключения неизвестных для нахождения решений систем линейных уравнений.

нейных уравнений является метод Гаусса, в основе которого лежит принцип последовательного исключения неизвестных.

Рассмотрим систему (2.1.1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Определение 2.4.1. *Элементарными преобразованиями системы* называются следующие преобразования: 1) перестановка уравнений системы местами; 2) умножение некоторого уравнения системы на отличное от нуля число; 3) прибавление к одному уравнению другого, умноженного на любое число; 4) вычеркивание нулевой строки (исключение уравнений, тождественно удовлетворяющихся любыми значениями неизвестных).

Несложно убедиться, что при использовании элементарных преобразований от системы переходят к системе, эквивалентной данной.

Элементарные преобразования системы удобно производить над строками ее расширенной матрицы.

Опишем стандартный способ построения и записи эквивалентных систем. Предположим, что первым в системе (2.1.1) стоит уравнение, в котором коэффициент $a_{11} \neq 0$. Если это не так, то этого всегда можно добиться перестановкой уравнений или неизвестных. К каждой строке матрицы $\overline{A}$, начиная со второй, прибавим почленно первую строку, умноженную на $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$, $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$, ..., $-\dfrac{a_{m1}}{a_{11}}$, соответственно. Тогда в первом столбце все элементы, за исключением a_{11}, будут равны нулю. То есть, исключив первое неизвестное из всех уравнений, начиная со второго, мы получаем эквивалентную систему с расширенной матрицей вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & \big| & b_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \big| & \tilde{b}_2 \\ 0 & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \dots & \tilde{a}_{3n} & \big| & \tilde{b}_3 \\ . & . & . & . & . & \big| & \dots \\ 0 & \tilde{a}_{m2} & \tilde{a}_{m3} & \dots & \tilde{a}_{mn} & \big| & \tilde{b}_m \end{pmatrix}.$$

Если в получившейся системе вторая переменная присутствует, начиная со второй строки, хотя бы в одном уравнении, то мы можем применить прежний приём и исключить вторую переменную из всех уравнений, кроме первых двух.

Повторяя описанную процедуру необходимое число раз, приводим расширенную матрицу системы к следующему виду:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & \big| & b_1 \\ 0 & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} & \dots & \bar{a}_{2n} & \big| & \bar{b}_2 \\ 0 & 0 & \bar{a}_{33} & \dots & \bar{a}_{3n} & \big| & \bar{b}_3 \\ . & . & . & . & . & \big| & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{a}_{rn} & \big| & \bar{b}_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \big| & \bar{b}_{r+1} \\ . & . & . & . & . & \big| & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \big| & \bar{b}_m \end{pmatrix}, \qquad (2.4.1)$$

где $a_{ii} \neq 0$ $(i = \overline{1,r})$.

Если в (2.4.1) среди свободных членов $\bar{b}_{r+1}, \bar{b}_{r+2}, \dots, \bar{b}_m$ есть отличные от нуля, то система не имеет решения. Действительно, в этом случае $rangA \neq rang\bar{A}$, а согласно теореме 2.2.1 это и означает, что система несовместна. Если все $\bar{b}_{r+1} = 0, \bar{b}_{r+2} = 0, \dots, \bar{b}_m = 0$, то последние *(m–r)* уравнений системы обращаются в тождества 0=0 и могут быть отброшены. В зависимости от вида матрицы (2.4.1) возможны два случая:

а) матрица (2.4.1) приведена к треугольной форме (*r*=*n*). В этом случае система, согласно теореме 2.2.2, имеет единственное решение. Для того чтобы его найти, нужно от матрицы перейти к системе, при этом удобно последнюю строку расширенной матрицы записывать в первую строку системы, т.е.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & \big| & b_1 \\ 0 & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} & \dots & \bar{a}_{2n} & \big| & \bar{b}_2 \\ 0 & 0 & \bar{a}_{33} & \dots & \bar{a}_{3n} & \big| & \bar{b}_3 \\ . & . & . & . & . & \big| & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{a}_{nn} & \big| & \bar{b}_n \end{pmatrix}_{(a_{ii} \neq 0;\ i=\overline{1,n})} \rightarrow \begin{cases} \bar{a}_{nn}x_n = \bar{b}_n, \\ \bar{a}_{n-1,n-1}x_{n-1} + \bar{a}_{n-1,n}x_n = \bar{b}_{n-1}, \\ \quad . \quad . \quad . \\ \bar{a}_{22}x_2 + \bar{a}_{23}x_3 + \dots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1. \end{cases} \qquad (2.4.1')$$

Решая систему (2.4.1') последовательно сверху вниз, находим весь набор $(x_1, x_2, ..., x_n)$, составляющий решение.

b) матрица (2.4.1) приведена к трапециевидной форме ($r<n$). В этом случае система, согласно теореме 2.2.3, имеет бесконечное множество решений. Запишем систему, соответствующую полученной матрице:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \overline{a}_{22} & \ldots & \overline{a}_{2r} & \ldots & \overline{a}_{2n} & \overline{b}_2 \\ . & . & . & . & . & . & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \overline{a}_{rr} & \ldots & \overline{a}_{rn} & \overline{b}_r \end{array}\right)_{(a_{ii} \neq 0; i=\overline{1,r})} \rightarrow \begin{cases} \overline{a}_{rr} x_r + \ldots + \overline{a}_{rn} x_n = \overline{b}_r, \\ \quad . \quad . \quad . \\ \overline{a}_{22} x_2 + \ldots + \overline{a}_{2r} x_r + \ldots + \overline{a}_{2n} x_n = \overline{b}_2, \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1r} x_r + \ldots + a_{1n} x_n = b_1. \end{cases} \qquad (2.4.1'')$$

Все переменные делим на две части: *основные (базисные) и свободные (небазисные).* Основные выбираются так, чтобы их было столько же, сколько уравнений, и чтобы коэффициенты при них образовывали отличный от нуля определитель, т.е. базисный минор. Их выбор неоднозначен, однако, по-возможности, в качестве основных берут первые r переменных. Все остальные переменные (их количество $n–r$) объявляются свободными и переносятся к свободным членам вправо. Относительно основных переменных система будет иметь треугольный вид. Последовательно решая уравнения системы, мы получим, что все основные переменные будут выражаться через свободные. Такое решение называется *общим*. Если придавать свободным переменным различные числовые значения, то будем получать различные частные решения.

Замечание 2.4.1. Описанная выше схема исключения неизвестных для нахождения решений систем линейных уравнений есть суть метода Гаусса. При решении системы по методу Гаусса нет необходимости заранее знать, совместна она или нет. Это определяется в процессе работы.

Пример 2.4.1. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{a)} \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 11; \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Решение:

a)

$$\overline{A} = \begin{array}{c} \\ \\ (3)(2) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 11 \\ 2 & -1 & -3 & -9 \\ -1 & 3 & 2 & 11 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ (-7) \\ (5) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 5 & 1 & 13 \\ 0 & 7 & 10 & 44 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 5 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 43 & 129 \end{array}\right).$$

Матрица $\overline{A}$ приведена к треугольной форме ($r=n=3$). Следовательно, система имеет единственное решение, которое находим из системы:

$$\begin{cases} 43x_3 = 129, \\ 5x_2 + x_3 = 13, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 11; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 3, \\ x_2 = 2, \\ x_1 = 1. \end{cases}$$

Ответ: (1, 2, 3).

b)

$$\overline{A} = \begin{array}{c} \\ \\ (-2)(-3) \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ (-1) \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & -4 & -10 \\ 0 & -5 & 3 & -1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right).$$

Имеем $rangA = rang\overline{A} = 3$. Следовательно, система совместна. Число неизвестных в системе $n=4$, $r<n$, т.е. система приведена к трапециевидной форме. Таким образом, она имеет бесконечное множество решений. Для того чтобы их найти, определимся, какие переменные мы будем считать основными, а какие свободными. Для этого найдем один из базисных миноров матрицы системы, например, минор $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$.

Переменные x_1, x_2, x_3, коэффициенты при которых составляют M_3, будем считать основными (базисными), а остальные – свободными (небазисными). Далее записываем систему, соответствующую последней матрице. Последовательно выражая базисные переменные через небазисные, находим общее решение системы:

$$\begin{cases} x_3 + 3x_4 = 5, \\ -5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -10, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 5 - 3x_4, \\ x_2 = 2 - 0{,}8x_4 + 0{,}4(5 - 3x_4), \\ x_1 = 4 - x_4 + x_3 - 3x_2; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = 5 - 3x_4, \\ x_2 = 4 - 2x_4, \\ x_1 = 4 - x_4 + 5 - 3x_4 - 3(4 - 2x_4); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 5 - 3x_4, \\ x_2 = 4 - 2x_4, \\ x_1 = 2x_4 - 3. \end{cases}$$

Пусть $x_4 = \alpha;\ \alpha \in R$, тогда множество наборов вида $(2\alpha - 3, 4 - 2\alpha, 5 - 3\alpha, \alpha)$ является решением системы.

Ответ: $(2\alpha - 3, 4 - 2\alpha, 5 - 3\alpha, \alpha)$, $\alpha \in R$.

§5. Однородные системы линейных уравнений

Рассмотрим систему линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = 0, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (2.5.1)$$

Система (2.5.1) является частным случаем системы (2.1.1). Она всегда совместна. С одной стороны, это вытекает из теоремы Кронекера–Капелли, так как матрица $\overline{A}$ получена из A добавлением нулевого столбца и, следовательно, ранги этих матриц равны. С другой стороны, это видно и непосредственно, так как ей всегда удовлетворяет решение $(0, 0, \ldots, 0)$, которое будем называть *нулевым*, или *тривиальным.* Иногда система (2.5.1), кроме тривиального, может иметь и другие решения (*нетривиальные*). Рассмотрим условия существования нетривиальных решений для данной однородной системы.

Используя теоремы 2.2.2, 2.2.3 и замечание 2.2.1, получим следующие результаты.

Пусть матрица A системы (2.5.1) имеет ранг r $(r \le \min\{m, n\})$.

Система линейных однородных уравнений (2.5.1) тогда и только тогда имеет единственное нулевое решение, когда ранг ее матрицы равен количеству неизвестных, т. е. r=n.

В частности, если количество уравнений в системе совпадает с числом неизвестных (m=n), то система (2.5.1) имеет единственное нулевое решение тогда и только тогда, когда матрица A невырожденная, т.е. $\det A \ne 0$.

Для того чтобы система (2.5.1) имела нетривиальные решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был меньше числа неизвестных, т. е. r<n.

Если в однородной системе (2.5.1) число уравнений меньше числа неизвестных (m<n), то она имеет бесконечно много решений.

Все нетривиальные решения системы можно найти, решая систему методом Гаусса, который подробно описан в предыдущем параграфе.

Замечание 2.5.1. В матрице $\overline{A}$ однородной системы (2.5.1) нулевой столбец свободных членов писать не будем. Поэтому вместо матрицы $\overline{A}$ будем писать матрицу A.

Пример 2.5.1. Решить однородные системы уравнений

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 20x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

Решение:

а) Система состоит из 3-х уравнений, содержащих 5 неизвестных. Данная система является неопределенной, как любая однородная система, в которой число уравнений меньше числа неизвестных. Составим матрицу системы и с помощью элементарных преобразований над строками приведем ее к трапециевидной форме:

$$A = \begin{array}{c} (-1) \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ (2) \\ (3) \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найдем один из базисных миноров этой матрицы.

$$M_1 = 1 \neq 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Так как M_4 не существует, то минор M_3 является базисным. Переменные x_1, x_2, x_4, коэффициенты при которых составляют базисный минор, будем считать базисными, а остальные переменные x_3, x_5 – небазисными, или свободными. Последней матрице соответствует система:

$$\begin{cases} -7x_3 - x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = -7x_3 - 3x_5, \\ 3x_2 = 5x_3 - x_4, \\ x_1 = x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = -7x_3 - 3x_5, \\ x_2 = 4x_3 + x_5, \\ x_1 = -13x_3 - 6x_5. \end{cases}$$

Пусть $x_3 = \alpha,\ x_5 = \beta$, где $\alpha, \beta \in R$, тогда $(-13\alpha - 6\beta,\ 4\alpha + \beta,\ \alpha,\ -7\alpha - 3\beta,\ \beta)$ является общим решением системы.

Ответ: $(-13\alpha - 6\beta,\ 4\alpha + \beta,\ \alpha,\ -7\alpha - 3\beta,\ \beta)$; $\alpha, \beta \in R$.

Замечание 2.5.2. Здесь в качестве базисных переменных можно было бы взять переменные x_1, x_2, x_3. Однако вычисления в этом случае будут более громоздкими.

b)

$$A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3 & 4\\ 5 & 7 & -3 & 2\\ 2 & -20 & 5 & 8\\ 3 & 5 & 1 & -2\end{pmatrix}_{(4)(1)(2)}\sim\begin{array}{c}\\ (\tfrac{1}{2})\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}8 & 6 & 5 & 0\\ 8 & 12 & -2 & 0\\ 14 & 0 & 9 & 0\\ 3 & 5 & 1 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{array}{c}\\ (5)(9)\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}8 & 6 & 5 & 0\\ 4 & 6 & -1 & 0\\ 14 & 0 & 9 & 0\\ 3 & 5 & 1 & -2\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{array}{c}(\tfrac{1}{4})\\ \\ (\tfrac{1}{2})\\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}28 & 36 & 0 & 0\\ 4 & 6 & -1 & 0\\ 50 & 54 & 0 & 0\\ 3 & 5 & 1 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{array}{c}(-3)\\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}7 & 9 & 0 & 0\\ 25 & 27 & 0 & 0\\ 4 & 6 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 1 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4 & 0 & 0 & 0\\ 7 & 9 & 0 & 0\\ 4 & 6 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Матрица системы приведена к треугольной форме, следовательно, система имеет единственное тривиальное решение.

Ответ: $(0,0,0,0)$.

Пусть $C_1,\ C_2,\ ...,\ C_p$ – вектор-решения системы (2.5.1), а $k_1, k_2,\ ...,\ k_p$ – некоторые числа. Тогда выражение вида $k_1C_1 + k_2C_2 + \ ... + k_pC_p = \sum_{i=1}^{p} k_iC_i$, согласно определению 1.4.1, является *линейной комбинацией вектор-решений системы*.

Определение 2.5.1. Вектор-решения $C_1,\ C_2,\ ...,\ C_p$ называются *линейно зависимыми,* если хотя бы одно из них является линейной комбинацией остальных. В противном случае вектор-решения называются *линейно независимыми.*

Вектор-решения системы линейных однородных уравнений обладают следующими свойствами.

Лемма 2.5.1. Любая линейная комбинация конечного числа вектор-решений системы однородных линейных уравнений (2.5.1) также является вектор-решением данной системы.

В этом несложно убедиться непосредственной подстановкой линейной комбинации вектор-решений в систему.

Лемма 2.5.2. Пусть для системы линейных однородных уравнений (2.5.1) $r < n$, где r – ранг матрицы системы, а n – число неизвестных. Тогда эта система имеет *(n–r)* линейно независимых вектор-решений таких, что любое другое решение этой системы является их линейной комбинацией.

Доказательство.

Так как в системе (2.5.1) $r < n$, то данная система имеет *n–r* свободных неизвестных. Не нарушая общности, можно считать неизвестные $x_1, x_2, ..., x_r$ базисными. Решая систему методом Гаусса, выразим базисные переменные через небазисные

$$\begin{cases} x_1 = d_{11}x_{r+1} + d_{12}x_{r+2} + ... + d_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = d_{21}x_{r+1} + d_{22}x_{r+2} + ... + d_{2,n-r}x_n, \\ \quad . \; . \; . \\ x_r = d_{r1}x_{r+1} + d_{r2}x_{r+2} ... + d_{r,\,n-r}x_n. \end{cases} \tag{2.5.2}$$

Тогда любое вектор-решение этой системы можно записать в виде

$$C = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_r \\ c_{r+1} \\ c_{r+2} \\ ... \\ c_n \end{pmatrix}, \tag{2.5.3}$$

где $c_{r+1}, c_{r+2}, ..., c_n$ – произвольные числа; $x_1, x_2, ..., x_r$ определяются равенствами (2.5.2) при условии, что $x_{r+1} = c_{r+1}, x_{r+2} = c_{r+2}, ..., x_n = c_n$.

Рассмотрим вектор-решения системы (2.5.1)

$$C_1 = \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ ... \\ d_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ ... \\ d_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad ... \qquad C_{n-r} = \begin{pmatrix} d_{1,n-r} \\ d_{2,n-r} \\ ... \\ d_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.5.4}$$

Очевидно, что эти вектор-решения линейно независимые. Для любого вектор-решения *C* системы (2.5.1) имеем $C = c_{r+1}C_1 + c_{r+2}C_2 + ... + c_nC_{n-r}$. То есть вектор-решение (2.5.3) является линейной комбинацией линейно независимых вектор-решений $C_1, C_2, ..., C_{n-r}$.

Замечание 2.5.3. Можно показать, что *(n–r)* – максимальное число линейно независимых вектор-решений системы.

Определение 2.5.2. Максимальный набор линейно независимых решений однородной системы называется *фундаментальной системой решений.*

Совокупность решений (2.5.4) является фундаментальной. Эта совокупность называется нормированной фундаментальной системой решений.

Замечание 2.5.4. Для нахождения нормированной фундаментальной системы решений однородной системы с *n* неизвестными ранга *r (r<n)* нужно в общее решение системы в качестве значений свободных переменных подставить строки (столбцы) единичной матрицы E_{n-r}.

Пример 2.5.2. Найти фундаментальную систему решений для системы из примера 2.5.1а.

Решение.

В примере 2.5.1 уже найдено общее решение системы $(-13\alpha-6\beta,\ 4\alpha+\beta,\ \alpha,\ -7\alpha-3\beta,\ \beta)$; $\alpha,\beta\in R$. Фундаментальная система решений состоит из *5–3=2* решений. Беря в качестве свободных переменных строки (столбцы) единичной матрицы $E_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, т.е. $\alpha=1, \beta=0;\ \alpha=0, \beta=1$, получаем вектор-решения

$$C_1=\begin{pmatrix}-13\\4\\1\\-7\\0\end{pmatrix},\qquad C_2=\begin{pmatrix}-6\\1\\0\\-3\\1\end{pmatrix},$$

образующие нормированную фундаментальную систему решений.

Ответ: $(-13,\ 4, 1,\ -7,\ 0),\ \ (-6, 1, 0, -3, 1)$.

Пример 2.5.3. Найти фундаментальную систему решений системы

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3-4x_4+x_5=0,\\2x_1-4x_2-x_3+x_4-4x_5=0.\end{cases}$$

Решение.

В данной системе число уравнений меньше числа неизвестных. Следовательно, система имеет нетривиальные решения. Таким образом, существует фундаментальная система решений указанной системы. Найдем общее решение системы методом Гаусса:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim_{(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

В качестве базисных можно взять переменные x_1, x_3, так как коэффициенты при этих неизвестных образуют ненулевой определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Остальные переменные: x_2, x_4, x_5 – будем считать свободными. Выражая базисные переменные через небазисные, получим

$$\begin{cases} x_3 = 3x_4 - 2x_5, \\ x_1 = 2x_2 + x_4 + x_5. \end{cases}$$

Общее решение системы имеет вид: $(2\alpha + \beta + \gamma, \alpha, 3\beta - 2\gamma, \beta, \gamma)$, где $\alpha, \beta, \gamma \in R$. Фундаментальная система решений системы состоит из *5–2=3* вектор-решений. Найдем их, беря в качестве свободных переменных элементы строк (столбцов) матрицы E_3. Вектор-решения

$$C_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

образуют нормированную фундаментальную систему решений данной системы.

Ответ: $(2, 1, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 3, 1, 0)$, $(1, 0, -2, 0, 1)$.

Глава 3
ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

§1. Матрицы и действия над ними

Задание 3.1.1. Найти сумму матриц *A+B,* разность матриц *A–B* и произведения матриц *AB* и *BA*, если они существуют:

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3\\ 7\end{pmatrix}$;
2) $A=\begin{pmatrix}-2\\ 5\\ -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 3 & -1\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 7 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 6 & 9\end{pmatrix}$;
4) $A=\begin{pmatrix}6 & -1 & -4\\ 2 & 0 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 5 & 9 & 2\\ 4 & 5 & 10\end{pmatrix}$;

5) $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 5\\ 7 & 8 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & -3 & 15\\ 2 & -1 & 13\end{pmatrix}$;
6) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 6 & -4 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & 0\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$;

7) $A=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 3\\ 1 & -5 & 2\\ 0 & 7 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -2 & 6\\ 4 & -1 & 2\\ 5 & 3 & 8\end{pmatrix}$;
8) $A=\begin{pmatrix}9 & -2 & 7 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -4 & 3\\ 1 & 5\\ -3 & 10\end{pmatrix}$.

Задание 3.1.2. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ найти $5A+A^T$, A^3.

Задание 3.1.3. Найти матрицы A^2, A^T-2A, если

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Задание 3.1.4. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}5 & -6\\ -3 & 11\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -9 & 5\end{pmatrix}.$$

Найти матрицу *X*, удовлетворяющую условию: 1) $A-2X=3B$; 2) $3A+X=E+B^2$.

Задание 3.1.5. Найти *f(A)*, если:

1) $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $f(x)=x^2+3x-4$;
2) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $f(x)=x^3+x^2+2x+1$.

§2. Определители: свойства и вычисление

Задание 3.2.1. Вычислите определители:

1) $\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 7 & -10 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 0{,}5 & -5 \\ 2 & 18 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; 7) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Задание 3.2.2. При каких значениях a определители равны нулю:

1) $\begin{vmatrix} a & a \\ 1 & a \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} a & 5 & -4 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & a & 1 \\ 0 & -6 & 5 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$.

Задание 3.2.3. Найти $\det(A\cdot B)$ и $\det(B^T\cdot A)$, если

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задание 3.2.4. Не вычисляя, найти величину определителя:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & a & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \\ 12 & 5 & -8 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} a & b & a+b+c \\ u & v & u+v+w \\ x & y & x+y+z \end{vmatrix}$.

Задание 3.2.5. Дана матрица

$$A=\begin{pmatrix} -7 & 11 & 9 \\ 2 & -8 & 5 \\ -4 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти: 1) миноры элементов третьей строки; 2) алгебраические дополнения элементов второго столбца.

Задание 3.2.6. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \\ -6 & 3 & -4 \end{vmatrix},$$

разложив его по элементам 1) первой строки; 2) второго столбца.

Задание 3.2.7. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix},$$

разложив его по элементам 1) первого столбца; 2) третьей строки.

Задание 3.2.8. Вычислите определители, используя их свойства и теорему о разложении определителя по элементам строки (столбца):

1) $\begin{vmatrix} -7 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & -3 \\ 9 & -3 & 11 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 9 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 12 \\ 6 & -3 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 4 & -8 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

§3. Обратная матрица, матричные уравнения. Ранг матрицы

Задание 3.3.1. Найти матрицы, обратные данным (если они существуют), и сделать проверку:

1) $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -4 & -6 & 8 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Задание 3.3.2. Решить матричные уравнения $A \cdot X = B$ и $Y \cdot A = B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 3.3.3. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задание 3.3.4. Решить матричное уравнение $AX + 2B = E$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задание 3.3.5. Решить матричные уравнения $A \cdot X = B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 20 & 28 \end{pmatrix}.$$

Задание 3.3.6. Найти, используя определение, ранги следующих матриц:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} -7 & -6 & -12 \\ 5 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix} -4 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Задание 3.3.7. Найти ранги матриц, используя элементарные преобразования:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 13 & 5 \\ -2 & -26 & -10 \\ 3 & 39 & 15 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 6 & 1 & -8 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & -7 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & 4 & 6 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 9 & 1 & 4 \\ -5 & 12 & 18 & 2 & 8 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 10 \\ 1 & -3 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 6 & 12 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -4 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Задание 3.3.8. Найти ранг матрицы в зависимости от действительных значений параметра *a:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 6 & a & -1 \end{pmatrix}.$$

Задание 3.3.9. При каких значениях x ранг данной матрицы равен 3:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 & 9 \\ 5 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}.$$

§4. Критерий совместности систем линейных уравнений. Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы и по формулам Крамера

Задание 3.4.1. Исследуйте на совместность следующие системы:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = -3, \\ 7x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 8x_4 = 22, \\ -2x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 11x_4 = -3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 8x_3 + 15x_4 = 19, \\ -3x_1 - 5x_2 - 6x_3 + x_4 = -7, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 10; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -29, \\ 2x_1 - 3x_3 + 6x_2 - 7x_4 = 11, \\ -7x_1 + 2x_2 + 9x_3 - x_4 = 12, \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 13; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 7; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 - 3x_6 = -1. \end{cases}$

Задание 3.4.2. Решить системы (если это возможно) методом Крамера и методом обратной матрицы:

1) $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 = -13, \\ 2x_1 + 4x_2 = -5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 3, \\ x_1 - 2x_2 = 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 = 13, \\ 2x_1 + 3x_2 = -1. \end{cases}$

Задание 3.4.3. Решить системы (если это возможно) методом Крамера и методом обратной матрицы:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_3 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -7x_1 - 6x_2 - 12x_3 = -33, \\ 5x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 24, \\ x_1 + 4x_3 = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 22, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 30, \\ 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 43; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 7; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 6; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 = 5; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 10x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3, \\ -19x_1 - x_2 - 3x_3 = 2, \\ 7x_1 + 4x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$

10) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - 8x_2 - 5x_3 = 5; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 = 7; \end{cases}$

13) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 = 16; \end{cases}$ 14) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1; \end{cases}$ 15) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1; \end{cases}$

16) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1; \end{cases}$ 17) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 43x_3 = -12, \\ 3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 11, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 29; \end{cases}$ 18) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 \qquad = -2, \\ 4x_1 + \qquad x_3 = 0; \end{cases}$

19) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2; \end{cases}$ 20) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 = 1; \end{cases}$ 21) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -14, \\ x_1 - 5x_2 - 8x_3 = -28, \\ 7x_1 - x_2 - 4x_3 = -2; \end{cases}$

22) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -26, \\ 3x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 56, \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 = 34; \end{cases}$ 23) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 8x_3 = -1; \end{cases}$ 24) $\begin{cases} x_1 + 10x_2 + 9x_3 = 37, \\ 11x_1 + 19x_2 + 8x_3 = 43, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 25. \end{cases}$

§ 5. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Однородные системы линейных уравнений

Задание 3.5.1. Решить систему методом Гаусса:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 12x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 = 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10, \\ 6x_1 - 12x_2 + 15x_3 = 30; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 6, \\ 9x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 4; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_2 + 5x_3 = 2, \\ 6x_1 + 5x_2 - 13x_3 = 10; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 6x_1 + 18x_2 - 6x_3 = -12, \\ -9x_1 - 27x_2 + 9x_3 = 18, \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -4; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = -3; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 1; \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 8, \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 = -12, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 4; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ 10x_2 - 10x_3 - x_4 = 1; \end{cases}$

13) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = -26, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -4, \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 + 11x_4 = -10; \end{cases}$ 14) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 2, \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 2; \end{cases}$ 15) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_3 = -1; \end{cases}$

16) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 7x_4 = 27, \\ 2x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 26, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -2, \\ -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 24; \end{cases}$ 17) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 15, \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 = -5; \end{cases}$ 18) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_2 + 5x_3 + 11x_4 = -11, \\ x_2 - 3x_3 = 11; \end{cases}$

19) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + x_6 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 + x_6 = 5, \\ 5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 11x_4 + 16x_5 + 3x_6 = 12; \end{cases}$ 20) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 15, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 35, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 3. \end{cases}$

Задание 3.5.2. Решить однородную систему линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0, \\ -4x_2 + 13x_3 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 6x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 8x_4 = 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} -11x_1 + 2x_2 - 14x_3 = 0, \\ 23x_1 - 6x_2 + 33x_3 = 0, \\ 14x_1 - 2x_2 + 17x_3 = 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 15x_3 = 0, \\ 3x_1 - 11x + 30x_3 = 0; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

Задание 3.5.3. Найти фундаментальную систему решений следующих систем:

1) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -9x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} -\frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 12x_4 = 0, \\ \frac{2}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{8}{3}x_4 = 0; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 3x_6 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 16x_4 + 10x_5 + 10x_6 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 8x_5 + 4x_6 = 0. \end{cases}$

Типовой вариант контрольной работы:

Задание 1. Найти $3A-2B$ и $A^T \cdot B$, если

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 3. Решить систему (если это возможно) методом Крамера и методом обратной матрицы

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 18, \\ -6x_1 + 15x_2 - 4x_3 = -39, \\ 4x_1 - 10x_2 + 6x_3 = 36. \end{cases}$$

Задание 4. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 3, \\ x_2 - 4x_3 + x_4 = 1, \\ x_4 - 3x_5 = 2. \end{cases}$$

Задание 5. Найти фундаментальную систему решений системы уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Ответы к расчётным заданиям

§1. 3.1.1. 1) $A+B,\ A-B$ не существуют, $AB=(11)$, $BA=\begin{pmatrix}-3 & -6\\ 7 & 14\end{pmatrix}$; 2) $A+B$, $A-B$ не существуют, $AB=\begin{pmatrix}-8 & -6 & 2\\ 20 & 15 & -5\\ -4 & -3 & 1\end{pmatrix}$, $BA=(8)$; 3) $A+B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 13 & 12\end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix}6 & -6\\ 1 & -6\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}-17 & 2\\ 11 & 55\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}23 & 14\\ 93 & 15\end{pmatrix}$; 4) $A+B,\ A-B$ и BA не существуют, $AB=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ 34 & 45 & 84\end{pmatrix}$; 5) $A+B=\begin{pmatrix}-6 & -3 & 20\\ 9 & 7 & 14\end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix}2 & 3 & -10\\ 5 & 9 & -12\end{pmatrix}$, AB и BA не существуют; 6) $A+B=$ $=\begin{pmatrix}4 & 4 & 0\\ 8 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 4 & -8 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}7 & 15 & -6\\ -2 & -4 & -6\\ 2 & 5 & -3\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}15 & -7 & 0\\ 30 & -12 & 2\\ 6 & -7 & -3\end{pmatrix}$; 7) $A+B=$ $=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 9\\ 5 & -6 & 4\\ 5 & 10 & 6\end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix}-7 & 4 & -3\\ -3 & -4 & 0\\ -5 & 4 & -10\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}11 & 15 & 4\\ -7 & 9 & 12\\ 18 & -13 & -2\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}-14 & 58 & -7\\ -17 & 27 & 6\\ -17 & 51 & 5\end{pmatrix}$; 8) $A+B, A-B$ и BA не существуют, $AB=(30\ \ 39)$. **3.1.2.** $5A+A^T=\begin{pmatrix}-6 & 13\\ 17 & -24\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}-37 & 54\\ 81 & -118\end{pmatrix}$.

3.1.3. $A^2=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$, $A^T-2A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$. **3.1.4.** 1) $X=\begin{pmatrix}1 & -9\\ 12 & -2\end{pmatrix}$, 2) $X=\begin{pmatrix}-49 & 42\\ -45 & -43\end{pmatrix}$.

3.1.5. 1) $f(A)=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 4 & 0\end{pmatrix}$, 2) $f(A)=\begin{pmatrix}29 & 26\\ 39 & 29\end{pmatrix}$.

§2. 3.2.1. 1) –19; 2) 1; 3) 19; 4) $4ab$; 5) –5; 6) 0; 7) –1; 8) –18. **3.2.2.** 1) $a=0$ или $a=1$; 2) $a=-3$; 3) $a=-4$; 4) $a=0$ или $a=-3$. **3.2.3.** $\det(AB)=\det(B^TA)=969$.

3.2.4. 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) $\begin{vmatrix}a & b & c\\ u & v & w\\ x & y & z\end{vmatrix}$. **3.2.5.** 1) $M_{31}=127$, $M_{32}=-53$, $M_{33}=34$; 2) $A_{12}=-30$, $A_{22}=1$, $A_{23}=53$. **3.2.6.** 40. **3.2.7.** 24. **3.2.8.** 1) –670; 2) 0; 3) -219; 4) 0.

§3. 3.3.1. 1) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 9/4 & 7/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$; 2) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/11 & 2/11 \\ -5/22 & 1/22 \end{pmatrix}$; 3) $A^{-1}=\begin{pmatrix} -4 & 9 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$; 4) не существует; 5) $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1/36 & -1/6 & 11/36 \\ -1/36 & 1/3 & -7/36 \\ 2/9 & -1/6 & 1/18 \end{pmatrix}$; 6) не существует; 7) $A^{-1}=\begin{pmatrix} -3/4 & 1/4 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1 \\ 3/4 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$;

8) $A^{-1}=\begin{pmatrix} -9/34 & 5/17 & -7/34 \\ 7/34 & -2/17 & 13/34 \\ 19/34 & -3/17 & 11/34 \end{pmatrix}$. **3.3.2.** $X=\begin{pmatrix} -3 & -5 & -5 \\ 5 & 8 & 9 \\ -7 & -10 & -11 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 7 & -11 & 3 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$.

3.3.3. $X=\begin{pmatrix} -60/17 & -47/17 \\ 19/17 & 18/17 \end{pmatrix}$. **3.3.4.** $X=\begin{pmatrix} 4 & -6 & -15 \\ -16/7 & 25/7 & 72/7 \\ -43/7 & 9/7 & 22/7 \end{pmatrix}$. **3.3.5.** $X=\begin{pmatrix} a & b \\ 5-3a & 7-3b \end{pmatrix}\ \forall a,$

$b\in R$. **3.3.6.** 1) 1; 2) 2; 3) 1; 4) 3; 5) 3; 6) 2; 7) 3; 8) 3; 9) 4; 10) 3. **3.3.7.** 1) 1; 2) 2; 3) 2; 4) 3; 5) 2; 6) 4; 7) 4. **3.3.8.** Если $a=7$, то $rangA=2$; если $a\neq 7$, то $rangA=3$. **3.3.9.** $x=3$.

§4. 3.4.1. 1) не совместна; 2) совместна; 3) не совместна; 4) совместна; 5), 6) не совместна. **3.4.2.** 1) $\left(\frac{27}{22}, -\frac{41}{22}\right)$; 2) $(3;\ -0{,}5)$; 3) $(4, -3)$. **3.4.3.** 1) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right)$; 2) $(-3, 5, 2)$;

3) $(5, 3, 0)$; 4) $(1, 0, 2)$; 5) $(2, -3, 4)$; 6) решений нет; 7) $(1, 2, -2)$; 8) $(1, -2, 3)$; 9) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$;

10), 11) решений нет; 12) $\left(2, \frac{1}{3}, 2\frac{1}{3}\right)$; 13) $(1, -3, -2)$; 14) $(-9, 4, 3)$; 15) $(-5, 20, -28)$;

16) $(3,\ -1,\ 2)$; 17) $(-2,\ 4,\ 5)$; 18) $(5,\ 7,\ -20)$; 19) $(3,\ 2,\ -1)$; 20) решений нет;

21) $(3,\ -5,\ 7)$; 22) $(2,\ -4,\ 5)$; 23) $\left(-\frac{49}{406}, \frac{17}{406}, \frac{43}{406}\right)$; 24) $(2,\ -1,\ 5)$.

§5. 3.5.1. 1) система несовместна; 2) $(1-2\alpha, -5\alpha, \alpha)\forall\alpha\in R$; 3) $(5+2\alpha-2{,}5\beta;\ \alpha;\ \beta)$ $\forall\alpha, \beta\in R$; 4) $(1-\alpha, \alpha, -1)\ \forall\alpha\in R$; 5) $(0;\ 1-1{,}5\alpha;\ \alpha)\forall\alpha\in R$; 6) $(-11, 18-\alpha, \alpha)\ \forall\alpha\in R$;
7) система несовместна; 8) $(-2-3\alpha+\beta, \alpha, \beta)\ \forall\alpha,\beta\in R$; 9) $(5+\alpha-3\beta, \alpha, 4-2\beta, \beta)\ \forall\alpha,\ \beta\in R$;
10) $(7-2\alpha-\beta, \alpha, -4+\alpha+2\beta, \beta)\ \forall\alpha,\beta\in R$; 11) $(4-3\alpha+2\beta, -\alpha+3\beta, \alpha, \beta)\forall\alpha,\beta\in R$;

12) система несовместна; 13) $\left(2-2\alpha+4\beta,\quad \alpha,\quad -6-3\beta,\quad \beta\right)\forall\alpha,\beta\in R$; 14) система несовместна; 15) $\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},0\right)$; 16) $(1,\ 2,\ 3,\ 4)$; 17) $(3,\ 4,\ -2)$; 18) $(3\alpha+28,11+3\alpha,\alpha,-3-\alpha)$ $\forall\alpha\in R$;

19) $(4-2\alpha+\beta+\delta,\quad \alpha,\quad 1+2\beta+2\gamma+\delta,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \delta)\quad \forall\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$;

20) $\left(\frac{2}{7}(8+5\alpha),\frac{4}{7}(11+6\alpha),\frac{1}{7}(39-15\alpha),\frac{6}{7}(1-2\alpha),\alpha\right)\forall\alpha\in R$. **3.5.2.** 1) $(0,\ 0,\ 0)$; 2) $(0,\ 0,\ 0)$;

3) $\left(\frac{11}{5}\alpha,-\frac{7}{5}\alpha,\alpha\right)\forall\alpha\in R$; 4) $(-2\alpha,-3\alpha,\alpha,\alpha)\ \forall\alpha\in R$; 5) $(0,\ 0,\ 0)$; 6) $(-\alpha,\alpha,\alpha)\ \forall\alpha\in R$;

7) $(-3\alpha+2\beta,-\alpha+3\beta,\alpha,\beta)\ \forall\alpha,\beta\in R$; 8) $(\alpha,3\alpha,\alpha)\ \forall\alpha\in R$; 9). $\left(-\frac{7}{6}\alpha,\frac{5}{6}\alpha,\alpha\right)\forall\alpha\in R$.

3.5.3. 1) $(1,\ 2)$; 2) $(-8,\ 5,\ 7)$; 3) $(-1,1,0),(-1,0,1)$; 4) $(1,\ 0,\ 3),\ (0,\ 1,\ 3)$; 5) фундаментальной системы нет; 6) $(1,\ 1,\ 0),\ (2,\ 0,\ 1)$;
7) $(2,\ 1,\ 0,\ 0),(1,\ 0,\ 1,\ 0),\ (4,\ 0,\ 0,\ 1)$;
8) $(3,10,\ -7,\ 1,\ 0,\ 0)$; $(0,\ 1,\ -2,\ 0,\ 1,\ 0)$; $(2,\ 5,\ -4,\ 0,0,\ 1)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Апатенок Р.Ф. Элементы линейной алгебры / Р.Ф. Апатенок, А.М. Маркин, Н.В. Попова. – Мн.: Вышейш. школа, 1977. – 256 с.

2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов. – 11-е изд., испр. / Д.В. Беклемишев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 312 с.

3. Бугров Я.С. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука. Главн. ред. физ.-мат. лит-ры, 1980. – 176 с.

4. Ильин В.А. Линейная алгебра: учебник для вузов – 4-е изд. / В.А. Ильин, Э.П. Позняк. – М.: Наука. Физматлит, 1999. – 296 с.

5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Наука. Главн. ред. физ.-мат. лит-ры, 1968. – 432 с.

6. Малаховский В.С. Избранные главы истории математики: учебн. издание. / В.С. Малаховский. – Калининград: ФГУИПП ”Янтарный сказ”, 2002. – 304 с.

7. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры / А.И. Мальцев. – М.: Наука, 1970. – 402 с.

8. Чехлов В.И. Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре: учеб. пособие. / В.И. Чехлов. – М.: МФТИ, 2000. – 260 с.