Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

О. М. Топоркова

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие по практическим занятиям
для студентов направления подготовки 09.03.03 Прикладная информатика

Калининград
Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ»
2022

УДК 004.9(075)

Рецензент
кандидат педагогических наук,
доцент кафедры прикладной информатики ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет»
Е.Ю. Заболотнова

Топоркова, О. М.

Дискретная математика: учебно-методическое пособие по практическим занятиям для студентов направления подготовки 09.03.03 Прикладная информатика, профиль «Прикладная информатика в экономике» / О. М. Топоркова. – Калининград: Изд-во ФГБОУ ВО «КГТУ», 2022. – 62 с.

В учебно-методическом пособии приведены теоретические сведения и задания по практическим занятиям по дисциплины «Дискретная математика».

Пособие подготовлено в соответствии с требованиями утвержденной рабочей программы Физико-математического модуля направления подготовки 09.03.03 Прикладная информатика.

Список лит. – 17 наименований

Учебно-методическое пособие рассмотрено и одобрено в качестве локального электронного методического материала кафедрой прикладной информатики института цифровых технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» 19 сентября 2022 г., протокол № 3

Учебно-методическое пособие рекомендовано к использованию в качестве локального электронного методического материала в учебном процессе методической комиссией ИЦТ 20 сентября 2022 г., протокол № 6

УДК 004.9(075)

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов направления 09.03.03 Прикладная информатика, изучающих дисциплину «Дискретная математика».

Цель практических занятий по дисциплине: формирование навыков использования инструментария дискретной математики при решении практических задач.

Практические занятия включают 10 тем.

Практические занятия проводятся в медиаклассах ГУК – ауд. 143, 256, 353, 303Г, 311Г.

В результате выполнения практических заданий ожидается, что студенты закрепят теоретические знания, полученные на лекционных занятиях, при решении практических задач таких разделов дискретной математики, как теория множеств и теория графов.

2. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1. ОПИСАНИЕ МНОЖЕСТВ, ИХ РАВЕНСТВО И ВКЛЮЧЕНИЕ

Общие сведения

Цель: получение практических навыков прочтения теоретико-множественных нотаций.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: используется инструментарий медиаклассов.

Условия допуска к выполнению: к практическому занятию допускаются все пришедшие на него.

Критерии положительной оценки: участие в решении задач преподавателем у доски отмечается в учетной карточке.

Планируемое время выполнения:

Аудиторное время выполнения (под руководством преподавателя): 3 акад. ч.

Время самостоятельной подготовки: 0,5 акад. ч.

Теоретическое введение

Понятие «*множество*» принадлежит к числу основных математических понятий, но не имеет строгого математического определения. Определим множество как набор идентифицируемых объектов (говорят – *элементов*), материальных и не материальных, имеющих некое общее свойство.

Таким образом, множество может быть объяснено только на примерах: можно говорить о множестве цифр или букв, чисел или слов, блоков блок-схемы алгоритма, студентов учебной группы или учебного потока и т. п.

В качестве имени множества используют прописные буквы латинского алфавита A, B, C,..., X, Y, Z.

Принадлежность элемента множеству обозначают символом принадлежности $\in$. Например, $x \in X$, т.е. элемент x принадлежит множеству X. Если элемент не принадлежит множеству, то используют символ непринадлежности – $\notin$. Например, $x \notin X$, т.е. элемент x не принадлежит множеству X.

Описание (задание) множеств может быть выполнено тремя способами:

1) перечислением элементов множества между фигурными скобками, например, множество десятичных цифр $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Порядок перечисления элементов между фигурными скобками произвольный, т.е. записи $\{a, b, c, d\}$ и $\{b, c, d, a\}$ обозначают одно и то же множество, но многократная запись одного и того же элемента не используется;
2) указанием характеристических свойств элементов множества, например, множество десятичных цифр $X = \{x \mid x$ – десятичная цифра$\}$. Здесь и далее символ | читается как «при условии»;
3) заданием порождающей процедуры, например, множество четных чисел A можно задать порождающей процедурой: $A = \{x \mid x = 2n$, где $n = 1, 2, 3, ...\}$.

Множество, каждому элементу которого можно сопоставить натуральное число 1, 2,..., n, называют *счетным.* Если n конечно, то множество называют *конечным*. Например, множество десятичных цифр счётно и конечно, а множество целых чисел – счётно, но не конечно.

Мощность конечного счётного множества X есть число его элементов, которое обозначают так: $|X| = n$, например, мощность множества десятичных цифр равна 10, а мощность множества строчных букв латинского алфавита – 26.

Пустое множество есть множество, не содержащее ни одного элемента, его обозначают символом «$\varnothing$».

Универсальное множество (или *универсум*) есть множество, содержащее все элементы, принимающие участие в решении определенного класса задач; его обозначают символом U. Например, если в решении задач принимают участие два множества $A = \{a, b\}$ и $B = \{b, c, d\}$, то универсальное множество будет $U = \{a, b, c, d\}$.

Множества можно сравнивать между собой двумя способами – устанавливать либо их равенство, либо включение одного множества в другое.

Если все элементы множества A являются также элементами множества B, но не все элементы множества B являются элементами множества A, то множество *A строго включено* в множество B: $A \subset B$ (иногда слово «строго» опускают). Множество A называют *собственным подмножеством* множества B.

Если все элементы множества A являются также элементами множества B и, наоборот, все элементы множества B являются также элементами множества A, то множество A и множество B равны: $A = B$. Поскольку равенство двух множеств подтверждает, что одно множество также и включается в другое, то в этом случае говорят, что имеет место *нестрогое включение* одного множества в другое. Тогда иначе равенство множеств можно записать как $A \subseteq B$ или $B \subseteq A$. В случае $A \subseteq B$ множество A называют *несобственным подмножеством* множества B.

Если хотя бы один элемент множества A не принадлежит множеству B, то множество A не включено в множество B. Для этого в тексте используют символ невключения – $\not\subset$: $A \not\subset B$. Например, если $A = \{1, 2, 3, 6\}$ и $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, то $A \not\subset B$.

Литература: [1], с. 6–11.

Контрольные вопросы для самопроверки:

1. Заданы множества: $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2\}$, $Z = \{1, 2, 3, \{1, 2\}\}$. Определить, какие из приведенных ниже утверждений справедливы, а какие – нет:
   a) $1 \in X$;
   b) $1 \subset X$;
   c) $Y \in X$;
   d) $Y \subset X$;
   e) $Y \in Z$;
   f) $Y \subset Z$.
2. Определить, какие из приведенных утверждений справедливы:
   a) $\varnothing \in \varnothing$;
   b) $\varnothing \subset \varnothing$;
   c) $\varnothing \in \{\varnothing\}$;
   d) $\varnothing \subset \{\varnothing\}$.

Задание к практической работе

1. Даны множества. Определить правильность теоретико-множественных нотаций.
2. Даны множества. Определить, включено ли одно множество в другое.
3. Даны множества. Определить, равны ли они.

Методические указания и порядок выполнения работы

Порядок выполнения практической работы следующий:

1) ознакомиться с заданием к практической работе (п. 2.3);
2) прочитать соответствующий теоретический материал из литературного источника [1], с. 6–11;
3) изучить типовые примеры решения требуемых задач:

1. Верны ли выражения:
   а) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$.

Решение: данное выражение могло бы быть верным в том случае, если бы нотация $\{1, 2\}$ являлась элементом множества справа от знака принадлежности $\in$. Однако этого нет, поэтому данное выражение неверно;

b) $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} = \{1, 2, 3\}$.

Решение: мощности множеств различаются – левое множество имеет в составе два элемента, а правое – три. Мощности не равны, поэтому данное выражение неверно;

c) $\{1, 2\} \subseteq \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$.

Решение: данное выражение неверно, так как оно означает нестрогое включение множества $\{1, 2\}$ во второе множество. На самом деле, имеет место строгое включение $\subset$ множества $\{1, 2\}$ в множество $\{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$.

d) если $A \subseteq B$ и $B \in C$, то $A \in C$.

Решение: пусть, например, $A = \{1, 2\}$. Тогда в силу условия $A \subseteq B$ имеем $B = \{1, 2\}$. Поскольку $B \in C$, пусть, например, $C = \{\{1, 2\}, 3, 4\}$. Тогда $A \in C$. Значит, выражение верно.

e) если $A \subseteq \varnothing$, то $A = \varnothing$.

Решение: по определению пустое множество не содержит ни одного элемента. Значит, A – также пустое множество. Значит, выражение верно.

f) $\varnothing = \{\varnothing\}$.

Решение: по определению пустое множество не содержит ни одного элемента, т. е. $|\varnothing| = 0$. Но запись $\{\varnothing\}$ означает одноэлементное множество, содержащее символ $\varnothing$, т. е. $|\{\varnothing\}| = 1$. Поскольку мощности множеств различаются, выражение неверно.

Требования к отчету и защите

Формирование отчета и защита работы не требуется.

3. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2. ОПЕРАЦИИ НА МНОЖЕСТВАХ

Общие сведения

Цель: получение практических навыков выполнения алгебраических операций над множествами, а также эквивалентных преобразований теоретико-множественных формул.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: используется инструментарий медиаклассов.

Условия допуска к выполнению: к практическому занятию допускаются все пришедшие на него.

Критерии положительной оценки: участие в решении задач преподавателем у доски отмечается в учетной карточке.

Планируемое время выполнения:

Аудиторное время выполнения (под руководством преподавателя): 3 акад. ч.

Время самостоятельной подготовки: 0,5 акад. ч.

Теоретическое введение

Алгебра множеств включает одну унарную операцию над множеством – его дополнение и несколько бинарных: объединение, пересечение, разность, симметрическую разность.

Дополнение $\overline{}$ множества A есть множество, состоящее из элементов, принадлежащих универсальному множеству U и не принадлежащих множеству A: $\bar{A} = \{x | x \in U$ и $x \notin$

$A\}$. Например, универсальное множество $U = \{a, b, c, d, e, f\}$ и дано множество $A = \{a, b, c\}$, то дополнение множества A - $\bar{A}$ включает элементы: $\bar{A} = \{d, e, f\}$.

Объединение множеств A и B есть множество, состоящее из элементов, которые принадлежат хотя бы одному множеству A или B: $C = A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$. Операцию объединения можно распространить на произвольное число подмножеств универсального множества. Например, если даны множества $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{b, c, d, e\}$, то их объединение множество $C = A \cup B$ имеет следующий состав элементов: $C = \{a, b, c, d, e\}$.

Пересечение множеств A и B есть множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат множеству A и множеству B: $C = A \cap B = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$. Операцию пересечения можно распространить на произвольное число подмножеств универсального множества U. Например, если даны множества $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{b, c, d, e\}$, то их пересечение множество $C = A \cap B$ имеет следующий состав элементов: $C = \{b, c\}$.

Разность множеств A и B есть множество, состоящее из тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B: $C = A \setminus B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}$. Например, если даны множества $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{c, d, e\}$, то разность $A \setminus B$ есть множество $C = A \setminus B$, включающее элементы $C = \{a, b\}$.

Симметрическая разность множеств A и B есть множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат разности $A \setminus B$ или $B \setminus A$: $C = A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Например, если даны множества $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{b, c, d, e\}$, то их симметрическая разность множество $C = A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{a\} \cup \{d, e\} = \{a, d, e\}$.

При выполнении вычислений важно учитывать приоритет операций алгебры множеств (он задан в порядке убывания): дополнение, пересечение, объединение, разность, симметрическая разность.

Законы эквивалентных преобразований сложных теоретико-множественных формул (свойства операций над множествами)

С помощью рассмотренных операторов над множествами можно формировать сложные теоретико-множественные формулы. Для их упрощения используются законы эквивалентных преобразований, позволяющие изменять синтаксис формул, не меняя их семантики. Такие преобразования называются **эквивалентными**.

Так, для любых множеств A, B, C выполняются следующие законы эквивалентных преобразований:

1. Коммутативность (для объединения и пересечения):
$$A \cup B = B \cup A,$$
$$A \cap B = B \cap A;$$
2. Ассоциативность (для объединения и пересечения):
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$
3. Дистрибутивность (для объединения и пересечения):
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$
4. Идемпотентность (для объединения и пересечения):
$$A \cup A = A,$$
$$A \cap A = A;$$
5. Законы универсального множества:
$$A \cup U = U,$$
$$A \cap U = A,$$
$$A \cup \bar{A} = U,$$
6. Законы пустого множества:
$$A \cup \varnothing = A,$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing,$$

$$A \cap \bar{A} = \varnothing;$$

7. Закон двойного дополнения:

$$\bar{\bar{A}} = A$$

8. Законы де Моргана:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B},$$
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

При выполнении эквивалентных преобразований теоретико-множественных формул следует стремиться свести все операции к трем: дополнения, объединения и пересечения. Для этого рекомендуется использовать приведенные выше законы и следующее правило: $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

Литература: [1], с. 46–52.

Контрольные вопросы для самопроверки:

1. Дано: $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $A = \{c, d, e\}$, $B = \{a, c, e, f, h\}$. Найти: $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $A \Delta B$; $\bar{A}$.
2. Упростить формулу:

$(A \cap B \cap C \cap \bar{D}) \cup (\bar{A} \cap C) \cup (\bar{B} \cap C) \cup (C \cap D)$.

Задание к практической работе

1. Даны множества и универсум. Выполнить операции объединения, пересечения, разности, симметрической разности, дополнения.
2. Дана теоретико-множественная формула. Упростить ее.
3. Дано тождество двух теоретико-множественных формул. Доказать его.

Методические указания и порядок выполнения работы

Порядок выполнения практической работы следующий:

1) ознакомиться с заданием к практической работе (п. 3.3);
2) прочитать соответствующий теоретический материал из литературного источника [1], с. 46–52;
3) изучить типовые примеры решения требуемых задач:

1. Универсальное множество состоит из 26 строчных букв латиницы. Заданы множества: $A = \{a, e, f, j, k\}$, $B = \{f, i, j, l, y\}$, $C = \{j, k, l, y\}$, $D = \{i, j, s, t, u, y, z\}$. Вычислить мощность множеств X и Y:

$$X = (A \cap C) \cup (B \cap C) \text{ и } Y = (A \cap \bar{B}) \cup (D \setminus C).$$

Решение:

Для вычисления мощностей множеств X и Y сформируем эти множества на основании заданных теоретико-множественных формул:

- с целью формирования множества X выполним следующие действия:
  a) $A \cap C = \{a, e, f, j, k\} \cap \{j, k, l, y\} = \{j, k\}$;
  b) $B \cap C = \{f, i, j, l, y\} \cap \{j, k, l, y\} = \{j, l, y\}$;
  c) $X = \{j, k\} \cup \{j, l, y\} = \{j, k, l, y\}$.

  Очевидно, $|X| = |\{j, k, l, y\}| = 4$.

  Решение данной задачи можно упростить, выполнив эквивалентные преобразования формулы, по которой формируется множество X, с помощью закона дистрибутивности: $X = (A \cap C) \cup (B \cap C) = C \cap (A \cup B)$. Тогда поиск множества X реализуется за два действия вместо трех:
  a) $A \cup B = \{a, e, f, j, k\} \cup \{f, i, j, l, y\} = \{a, e, f, j, k, i, l, y\}$;
  b) $C \cap \{a, e, f, j, k, i, l, y\} = \{j, k, l, y\} \cap \{a, e, f, j, k, i, l, y\} = \{j, k, l, y\}$;
- для получения множества Y выполним действия:
  a) $A \cap \bar{B} = A \setminus B = \{a, e, f, j, k\} \setminus \{f, i, j, l, y\} = \{a, e, k\}$. Здесь с помощью эквивалентного преобразования выполнен возврат к операции разности, что

позволило не использовать громоздкую латиницу для поиска дополнения множества B;

b) $D \setminus C = \{i, j, s, t, u, y, z\} \setminus \{j, k, l, y\} = \{i, s, t, u, z\}$;

c) $Y = \{a, e, k\} \cup \{i, s, t, u, z\} = \{a, e, k, i, s, t, u, z\}$.

Очевидно, $|Y| = |\{a, e, k, i, s, t, u, z\}| = 8$.

2. Упростить формулу: $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Решение:

a) устраним символы \:

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C});$$

b) по закону дистрибутивности:

$$(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C}) = A \cap (\bar{B} \cup \bar{C});$$

c) по закону де Моргана:

$$A \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) = A \cap \overline{(B \cap C)};$$

d) внесем символ \:

$$A \cap \overline{(B \cap C)} = A \setminus (B \cap C).$$

Полученная формула содержит меньше операций, чем исходная, т. е. она более простая, в чем и заключается ее упрощение.

3. Доказать тождество: $A \setminus (A \setminus B) \equiv A \cap B$.

Решение:

a) устраним символы \ в левой части тождества:

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap (\overline{A \cap \bar{B}});$$

b) применим закон де Моргана:

$$A \cap (\overline{A \cap \bar{B}}) = A \cap (\bar{A} \cup B);$$

c) применим закон дистрибутивности:

$$A \cap (\bar{A} \cup B) = (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B);$$

d) применим один из законов пустого множества:

$$(A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B);$$

e) еще раз применим один из законов пустого множества:

$$\emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B.$$

Таким образом, преобразование левой части тождества дало его правую часть, т. е. тождество доказано.

Требования к отчету и защите

Формирование отчета и защита работы не требуется.

4. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3. СООТВЕТСТВИЯ И ОТНОШЕНИЯ

Общие сведения

Цель: получить практические навыки в описании и исследовании соответствий и отношений.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: используется инструментарий медиаклассов.

Условия допуска к выполнению: к практическому занятию допускаются все пришедшие на него.

Критерии положительной оценки: участие в решении задач преподавателем у доски отмечается в учетной карточке.

Планируемое время выполнения:

Аудиторное время выполнения (под руководством преподавателя): 3 акад. ч.

Время самостоятельной подготовки: 0,5 акад. ч.

Теоретическое введение

Помимо рассмотренных ранее алгебраических операций на множествах есть еще одна бинарная операция, которая стоит особняком, так как в результате ее выполнения формируется не совсем обычное множество, – это операция прямого произведения $\otimes$ множеств: если даны два множества X и Y, то множество *упорядоченных* пар (x, y), где $x \in X$ и $y \in Y$, называют *прямым произведением* множеств X и Y: $X \otimes Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$. Упорядоченная пара (x, y) есть *кортеж*; в нем элемент x является *прообразом* элемента y, а элемент y – *образом* элемента x.

Прагматика операции прямого произведения множеств состоит в том, что она позволяет формировать на множествах дискретные структуры – соответствия, отображения и отношения, которые и являются основным объектом исследования дискретной математики:

1. Соответствием H между множествами X и Y называют любое собственное подмножество их прямого произведения: $H = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\} \subset X \otimes Y$.

Область определения соответствия - это проекция соответствия H на первую компоненту кортежа (x, y): $\text{пр}_1 H = \{x \mid (x, y) \in H\}$.

Область значений соответствия – это проекция соответствия H на вторую компоненту кортежа (x, y): $\text{пр}_2 H = \{y \mid (x, y) \in H\}$.

2. Соответствие $H \subset X \otimes Y$ называется отображением, если область определения соответствия совпадает с множеством X. Для обозначения отображения используют запись: $h := X \to Y$. Различают виды отображений:

- функциональное (однозначное или функция), если каждый элемент области определения соответствия имеет только один образ;
- сюръективное (сюръекция или отображение на множество Y), если каждый элемент области значений соответствия имеет хотя бы один прообраз;
- инъективное (инъекция или отображением в множество Y), если оно функционально и различные прообразы имеют различные образы;
- биективное (биекция или взаимно-однозначное), если оно одновременно сюръективно и инъективно.

3. Упорядоченные кортежи, сформированные на элементах одного множества, называют отношением r: $r = \{(x_i, x_j) \mid x_i, x_j \in X\} \subseteq X \otimes X$.

Существуют три способа задания (или описания) рассмотренных структур:

1) списки $\{(x, y)\}$ или $\{(x_i, x_j)\}$;

2) ориентированные графы с множеством вершин $X \cup Y$ или X (для отношений) и множеством дуг $\{(x, y)\}$ или $\{(x_i, x_j)\}$;

3) матрицы смежности: строки матрицы представляют элементы-прообразы кортежа, а столбцы – элементы-образы кортежа. При этом элемент матрицы равен 1, если соответствующий кортеж существует, и равен 0 в противоположном случае (такие матрицы называют булевыми).

Поскольку отношения – это своеобразные множества, их по аналогии с последними также можно сравнивать – устанавливать равенство или вхождение одного в другое:

1) если все кортежи $(x_i, x_j) \in r_1$ присутствуют в отношении r_2 , но существуют кортежи $(x_t, x_s) \in r_2$, отсутствующие в отношении r_1, то отношение r_1 включено в отношение r_2, т. е. $r_1 \subset r_2$;
2) если все кортежи $(x_i, x_j) \in r_1$ присутствуют в отношении r_2 и все кортежи отношения r_2 присутствуют в отношении r_1, то отношения r_1 и r_2 равны, т. е. $r_1 = r_2$.

Отношения характеризуются рядом свойств, наличие которых позволяет формировать классы отношений:

1) отношение рефлексивно, если для каждого $x_i \in X$ $r(x_i, x_i) = 1$; при матричном задании такого отношения на главной диагонали должны быть только 1;

2) отношение антирефлексивно, если для каждого $x_i \in X$ $r(x_i, x_i) = 0$; при матричном задании такого отношения на главной диагонали должны быть только 0;
3) отношение симметрично, если для любого кортежа $(x_i, x_j) \in r$ при $i \neq j$ $r(x_i, x_j) = r(x_j, x_i)$; при матричном задании такого отношения симметрично относительно главной диагонали расположены 1 и 0;
4) отношение антисимметрично, если для любого кортежа $(x_i, x_j) \in r$ при $i \neq j$ $r(x_i, x_j) \neq r(x_j, x_i)$, а при $i = j$ $r(x_i, x_i) = 1$; при матричном задании такого отношения несимметрично относительно главной диагонали расположены 1 и 0, а на главной диагонали – 1;
5) отношение асимметрично, если для любого кортежа $(x_i, x_j) \in r$ при $i \neq j$ $r(x_i, x_j) \neq r(x_j, x_i)$, а при $i = j$ $r(x_i, x_i) = 0$; при матричном задании такого отношения несимметрично относительно главной диагонали должны быть 1 и 0, а на главной диагонали – 0;
6) отношение транзитивно, если для любых $x_i, x_j, x_k \in X$ выполняется условие: если $r(x_i, x_j) = 1$, $r(x_j, x_k) = 1$, то $r(x_i, x_k) = 1$.

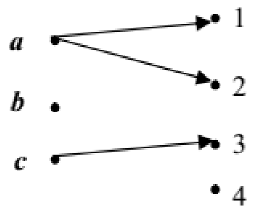
Наличие различных сочетаний свойств позволяют группировать отношения в классы. Наиболее изученными являются классы отношений эквивалентности, частичного и строгого порядка:

1) класс эквивалентности формируют отношения, удовлетворяющие условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности;
2) класс отношений частичного порядка формируют отношения, удовлетворяющие условиям рефлексивности, антисимметричности и транзитивности;
3) класс отношений строго порядка формируют отношения, удовлетворяющее условиям антирефлексивности, асимметричности и транзитивности.

Литература: [1], с. 14–17, 19–22, 53–54.

Контрольные вопросы для самопроверки:

1. Дано $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y = \{2, 4, 6\}$ и множество элементов прямого произведения $\{(1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (5, 2)\} \subset X \otimes Y$. Что это: соответствие или отображение?
2. Пусть $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$. Соответствие задано графом:



Является ли это соответствие отображением?

3. Какими свойствами обладает отношение:

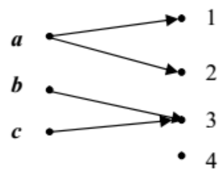
r_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	1	0
x_2	0	1	1	1
x_3	1	1	1	0
x_4	0	1	0	1

Задание к практической работе

1. По множеству элементов прямого произведения определить, является ли это множество соответствием либо отображением.
2. Дано отображение. Определить его вид.
3. Дано отношение. Определить его свойства.

Методические указания и порядок выполнения работы

1) ознакомиться с заданием к практической работе (п. 4.3);
2) прочитать соответствующий теоретический материал по литературному источнику [1], с. 14–17, 19–22, 53–54.
3) изучить типовые примеры решения требуемых задач:
1. Пусть $X = \{a, b, c\}$, $\underline{Y} = \{1, 2, 3, 4\}$. Дано соответствие:



Является ли это соответствие отображением? Если да, то какого вида?
Решение:

a) данное соответствие является отображением, поскольку область его определения совпадает с множеством X;
b) отображение не функциональное, поскольку есть элемент в области определения, который имеет больше одного образа, – это элемент *a;*
c) отображение не сюръективное, так как в области значений есть элемент, имеющий больше одного прообраза, – это элемент 3;
d) отображение не инъективное, поскольку оно не функционально и, кроме того, разные элементы области определения – b и c – имеют один образ – элемент 3;
e) отображение не биективное, так как оно не сюръективное и не инъективное.

3. Какими свойствами обладает отношение:

r_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	0	1
x_2	1	0	1	0
x_3	0	1	0	1
x_4	1	0	1	0

Решение:

a) для определения рефлексивности и антирефлексивности отношения анализируется его главная диагональ: поскольку она заполнена нулями, т. е. $r_2(x_1, x_1) = r_2(x_2, x_2) = r_2(x_3, x_3) = r_2(x_4, x_4) = 0$, отношение является антирефлексивным;
b) свойства, связанные с симметричностью, выявляются путем исследования пар элементов, расположенных симметрично выше и ниже главной диагонали: поскольку $r_2(x_1, x_2) = r_2(x_2, x_1)$, $r_2(x_1, x_3) = r_2(x_3, x_1)$, $r_2(x_1, x_4) = r_2(x_4, x_2)$, $r_2(x_2, x_3) = r_2(x_3, x_2)$, $r_2(x_2, x_4) = r_2(x_4, x_2)$, $r_2(x_3, x_4) = r_2(x_4, x_3)$, отношение симметрично;
c) исследование на транзитивность самое сложное, поскольку в нем участвуют тройки элементов из множества X. Для решения задачи построим дополнительную таблицу, в которую выпишем все пары элементов (x_i, x_j), соответствующих $r(x_i, x_j) = 1$:

x_i	x_j
x_1	x_2
x_1	x_4
x_2	x_1
x_2	x_3
x_3	x_2
x_3	x_4
x_4	x_1
x_4	x_3

Будем последовательно выбирать из полученного списка пару за парой и выполнять анализ в соответствии с условием транзитивности: при $r(x_i, x_j) = r(x_j, x_k) = 1$

должно выполняться $r(x_i, x_k) = 1$ (в приведенной формуле следует обратить внимание на значения индексов у переменных x). Как только для любой тройки элементов это сложное условие не будет выполняться, можно делать вывод об отсутствии транзитивности исходного отношения:

1) берем первую пару (x_1, x_2), где $i = 1$, $j = 2$. Ищем далее по списку пару элементов вида (x_2, x_k). Таких пар две – (x_2, x_1) и (x_2, x_3). Первая пара не подходит, поскольку в ней $k = i$, остается для исследования вторая пара. Таким образом, мы сформировали две пары (x_1, x_2) и (x_2, x_3), которые используют три элемента множества $X – x_1, x_2, x_3$. Чтобы на этих трех элементах выполнялось свойство транзитивности, в нашем списке должна присутствовать пара (x_1, x_3). Однако анализ показывает, что такой пары нет;
2) поскольку работа уже с первой парой элементов показала невыполнение условия транзитивности, дальнейшие исследования не нужны, а заданное отношение не является транзитивным.

Требования к отчету и защите

Формирование отчета и защита работы не требуется.

5. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4. ТАБЛИЦЫ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Общие сведения

Цель: получение навыков формирования таблиц булевых формул.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: используется инструментарий медиаклассов.

Условия допуска к выполнению: к практическому занятию допускаются все пришедшие на него.

Критерии положительной оценки: участие в решении задач преподавателем у доски отмечается в учетной карточке.

Планируемое время выполнения:

Аудиторное время выполнения (под руководством преподавателя): 3 акад. ч.

Время самостоятельной подготовки: 0,5 акад. ч.

Теоретическое введение

Среди функциональных отображений выделяются *булевы функции*: их значения принадлежат множеству $\{0, 1\}$. Аргумент таких функций называют *булевым вектором*, а его компоненты – *булевыми переменными*. Значения булевых переменных также принадлежат множеству $\{0, 1\}$.

Аналитическое выражение булевой функции включает булевы переменные и операторы булевой алгебры, обозначающие булевы операции. Суть булевых операций показывается таблицами булевых функций:

- отрицание – $\overline{}$ есть унарная операция, значение которой противоположно значению аргумента:

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

- дизъюнкция $\vee$ есть бинарная операция, значение которой равно 0 в том и только в том случае, когда оба операнда равны 0. При других значениях операндов она равна 1:

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- конъюнкция – есть бинарная операция, значение которой равно 1 в том и только в том случае, когда оба операнда равны 1. При значении равном 0 хотя бы одного операнда значение функции равно 0:

x_1	x_2	$x_1 \cdot x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Рассмотренные операции являются базовыми, с их помощью можно записать любую сложную булеву формулу. Однако к рассмотренным операциям были добавлены дополнительные операции:

1) *импликация* $\rightarrow$:

x_1	x_2	$x_1 \rightarrow x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

2) *эквивалентность* $\leftrightarrow$:

x_1	x_2	$x_1 \leftrightarrow x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3) *сложение по модулю 2* $\oplus$ (еще одно обозначение – XOR, т. е. исключающее ИЛИ):

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

4) *стрелка Пирса* $\downarrow$ (еще одно обозначение – NOR, т. е. отрицание дизъюнкции):

x_1	x_2	$x_1 \downarrow x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

5) *штрих Шеффера* $\mid$ (может обозначаться как NAND, т.е. отрицание конъюнкции):

x_1	x_2	$x_1 \mid x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

На введенных логических операциях задан приоритет их исполнения в формуле (указан в порядке убывания): $\neg, \cdot, \vee, \oplus, |, \downarrow, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Существует связь между некоторыми булевыми операциями (здесь и далее f_i – любая булева формула):

- $f_1 \leftrightarrow f_2 = (f_1 \rightarrow f_2) \cdot (f_2 \rightarrow f_1)$;
- $f_1 \rightarrow f_2 = \overline{f_1} \vee f_2$;
- $f_1 \oplus f_2 = \overline{f_1 \leftrightarrow f_2}$;
- $f_1 \downarrow f_2 = \overline{f_1 \vee f_2}$;
- $f_1 \mid f_2 = \overline{f_1 \cdot f_2}$.

Литература: [1], с. 24–29.

Контрольные вопросы для самопроверки:

1. Какие булевы операции являются базовыми?
2. Сколько унарных операций в булевой алгебре?
3. Назовите приоритет выполнения булевых операций.

Задание к практической работе

Даны булевы формулы. Верны ли их записи?

Методические указания и порядок выполнения работы

1) ознакомиться с заданием к практической работе (п. 5.3);
2) прочитать соответствующий теоретический материал из литературной ссылки [1], с. 24–29;
3) изучить пример решения одной из задач:

Дана булева формула: $x_1 \oplus x_2\,(x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow) \vee x_1)$. Верна ли ее запись?

Решение:

- отсутствует обозначение операции в подформуле $x_2($;
- отсутствует второй аргумент у операции импликации в подформуле $x_4\rightarrow)$;
- скобки в формуле не парны.

Таким образом, заданная формула неверна.

Требования к отчету и защите

Формирование отчета и защита работы не требуется.

6. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 5. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БУЛЕВЫХ ФОРМУЛ. МИНИМИЗАЦИЯ СДНФ И СКНФ

Общие сведения

Цель: получение навыков выполнения эквивалентных преобразований булевых формул.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: используется инструментарий медиаклассов.

Условия допуска к выполнению: к практическому занятию допускаются все пришедшие на него.

Критерии положительной оценки: участие в решении задач преподавателем у доски отмечается в учетной карточке.

Планируемое время выполнения:

Аудиторное время выполнения (под руководством преподавателя): 3 акад. ч.

Время самостоятельной подготовки: 0,5 акад. ч.

Теоретическое введение

Сложные по записи булевы формулы можно упростить за счет эквивалентных преобразований с помощью законов булевой алгебры:

Название закона	Эквивалентные формулы
Коммутативность	$f_1 \vee f_2 \equiv f_2 \vee f_1$ $f_1 \cdot f_2 \equiv f_2 \cdot f_1$
Ассоциативность	$f_1 \vee (f_2 \vee f_3) \equiv (f_1 \vee f_2) \vee f_3$ $f_1 \cdot (f_2 \cdot f_3) \equiv (f_1 \cdot f_2) \cdot f_3$
Дистрибутивность	$f_1 \vee (f_2 \cdot f_3) \equiv (f_1 \vee f_2) \cdot (f_1 \vee f_3)$ $f_1 \cdot (f_2 \vee f_3) \equiv (f_1 \cdot f_2) \vee (f_1 \cdot f_3)$
Идемпотентность	$f \vee f \equiv f$ $f \cdot f \equiv f$
Поглощение	$f_1 \vee (f_1 \cdot f_2) \equiv f_1$ $f_1 \cdot (f_1 \vee f_2) \equiv f_1$
Исключение третьего	$f \vee \bar{f} \equiv 1$
Противоречие	$f \cdot \bar{f} \equiv 0$
Двойное отрицание	$\bar{\bar{f}} \equiv f$
Обобщенное склеивание	$x \cdot f \vee \bar{x} \cdot f \equiv f$ $(x \vee f) \cdot (\bar{x} \vee f) \equiv f$
Де Моргана	$\overline{(f_1 \vee f_2)} \equiv \bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2$ $\overline{(f_1 \cdot f_2)} \equiv \bar{f}_1 \vee \bar{f}_2$
Порецкого	$f_1 \cdot (\bar{f}_1 \vee f_2) \equiv f_1 \cdot f_2$ $f_1 \vee (\bar{f}_1 \cdot f_2) \equiv f_1 \vee f_2$
Констант	$f \cdot 0 \equiv 0$ $\quad f \cdot 1 \equiv f$ $f \vee 0 \equiv f$ $\quad f \vee 1 \equiv 1$

Кроме этих законов для эквивалентных преобразований булевых формул можно применять рассмотренные ранее соотношения:

- $f_1 \leftrightarrow f_2 = (f_1 \rightarrow f_2) \cdot (f_2 \rightarrow f_1)$;
- $f_1 \rightarrow f_2 = \bar{f}_1 \vee f_2$;
- $f_1 \oplus f_2 = \overline{f_1 \leftrightarrow f_2}$;
- $f_1 \downarrow f_2 = \overline{f_1 \vee f_2}$;
- $f_1 \mid f_2 = \overline{f_1 \cdot f_2}$.

В булевой алгебре существуют особые виды формул – дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы, а также их совершенные виды:

1) *дизъюнктивная нормальная форма* (ДНФ) – это дизъюнкция конъюнктов (конъюнкт, или элементарная конъюнкция, – это конъюнкция атомарных булевых формул, которыми являются отдельные булевы переменные или их отрицания). Если конъюнкты имеют одинаковое число и одинаковые имена булевых переменных, то такая форма есть *совершенная дизъюнктивная нормальная форма формулы* булевой функции (СДНФ);

2) *конъюнктивная нормальная форма* (КНФ) – это конъюнкция дизъюнктов (дизъюнкт, или элементарная дизъюнкция, – это дизъюнкция атомарных булевых формул). Если дизъюнкты имеют одинаковое число и одинаковые имена булевых переменных, то такая формула представлена в *совершенной конъюнктивной нормальной форме* – СКНФ.

Получить СДНФ и СКНФ можно по таблице булевой функции:

1) формулу СДНФ можно записать по значениям булевых переменных для булевой функции, имеющей значение 1, при этом нулевые значения компонентов аргумента записать с инверсией, а единичные значения – без инверсии;
2) формулу СКНФ можно записать по значениям булевых переменных для булевой функции, имеющей значение 0, при этом единичные значения компонентов аргумента запишем с инверсией, а нулевые – без инверсии.

Литература: [1], с. 24–27, 37–46.

Контрольные вопросы для самопроверки:

- Построить таблицу булевой функции, заданной формулой:
$$f = (x_1 \to x_2) \oplus (x_2 \to x_3) \oplus (x_3 \to x_1).$$
- Выполнить эквивалентные преобразования формулы:
$$(x_1 \to x_2) \leftrightarrow (x_1 \to x_3).$$
- Дана таблица булевой функции с аргументами. Сформировать СКНФ и СДНФ:

Аргументы				Булева функция
x_1	x_2	x_3	x_4	
0	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
0	1	1	0	0

Задание к практической работе

1. Построить таблицу булевой функции, заданной формулой.
2. Выполнить эквивалентные преобразования формулы.
3. Дана таблица булевой функции с аргументами. Сформировать СКНФ и СДНФ.

Методические указания и порядок выполнения работы

1) ознакомиться с заданием к практической работе (п. 6.3);
2) прочитать соответствующий теоретический материал из литературного источника [1], с. 24–27, 37–46;
3) изучить типовой пример решения каждой задачи:

1. Дана булева формула: $(x_1 \oplus x_2) \to (x_1 \oplus x_3)$. Построить таблицу соответствующей булевой функции.

Решение:

В структуре таблицы выделим столбцы, в которых разместим значения переменных, а другие столбцы будут соответствовать последовательному выполнению булевых операций:

x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \oplus x_3$	$(x_1 \oplus x_2) \to (x_1 \oplus x_3)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1

2. Дана булева формула: $(x_1 \oplus x_2) \to (x_1 \oplus x_3)$. Выполнить ее эквивалентные преобразования.

Решение:

При выполнении эквивалентных преобразований, как правило, стараются свести формулу к базовых булевым операциям отрицания, дизъюнкции и конъюнкции с помощью законов эквивалентных преобразований и дополнительных соотношений между булевыми операциями:

- удалим в формуле операторы сложения по модулю два:
$$(\overline{x_1 \leftrightarrow x_2}) \to (\overline{x_1 \leftrightarrow x_3});$$
- удалим оператор импликации:
$$(x_1 \leftrightarrow x_2) \lor (\overline{x_1 \leftrightarrow x_3});$$
- удалим операторы эквивалентности:
$$(x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \to x_1) \lor \overline{(x_1 \to x_3) \cdot (x_3 \to x_1)};$$
- преобразуем формулу по закону де Моргана:
$$(x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \to x_1) \lor (\overline{x_1 \to x_3}) \lor (\overline{x_3 \to x_1});$$
- удалим операторы импликации:
$$(\overline{x_1} \lor x_2) \cdot (\overline{x_2} \lor x_1) \lor (\overline{\overline{x_1} \lor x_3}) \lor (\overline{\overline{x_3} \lor x_1});$$
- преобразуем формулу по закону де Моргана:
$$(\overline{x_1} \lor x_2) \cdot (\overline{x_2} \lor x_1) \lor (x_1 \cdot \overline{x_3}) \lor (x_3 \cdot \overline{x_1});$$
- применим закон дистрибутивности:
$$(\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \lor \overline{x_1} \cdot x_1 \lor x_2 \cdot \overline{x_2} \lor x_2 \cdot x_1) \lor (x_1 \lor x_3) \cdot (x_1 \lor \overline{x_1}) \cdot (\overline{x_3} \lor x_3) \cdot (\overline{x_3} \lor \overline{x_1});$$
- применим законы противоречия и исключения третьего:
$$(\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \lor 0 \lor 0 \lor x_2 \cdot x_1) \lor (x_1 \lor x_3) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (\overline{x_3} \lor \overline{x_1});$$
- применим законы констант:
$$(\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \lor x_2 \cdot x_1) \lor (x_1 \lor x_3) \cdot (\overline{x_3} \lor \overline{x_1}).$$

3. По таблице булевой функции сформировать СДНФ и СКНФ:

Аргумент				Булева функция
x_1	x_2	x_3	x_4	
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
0	1	1	0	0

Решение:

a) для формирования СДНФ выберем строки, в которых булева функция равна 1, построим конъюнкты, описывающие сочетания булевых переменных, после чего соединим их оператором дизъюнкции: $(\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4) \lor (x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4})$;

b) для формирования СКНФ выберем строки, в которых булева функция равна 0, построим дизъюнкты, описывающие сочетания булевых переменных, после чего соединим их оператором конъюнкции: $(\overline{x_1} \lor \overline{x_2} \lor x_3 \lor x_4) \cdot (x_1 \lor \overline{x_2} \lor \overline{x_3} \lor x_4)$.

Требования к отчету и защите

Формирование отчета и защита работы не требуется

7. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 6. АЛГЕБРА ОТНОШЕНИЙ

Общие сведения

Цель: получение практических навыков выполнения алгебраических операций над отношениями.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: используется инструментарий медиаклассов.

Условия допуска к выполнению: к практическому занятию допускаются все пришедшие на него.

Критерии положительной оценки: участие в решении задач преподавателем у доски отмечается в учетной карточке.

Планируемое время выполнения:

Аудиторное время выполнения (под руководством преподавателя): 3 акад. ч.

Время самостоятельной подготовки: 0,5 акад. ч.

Теоретическое введение

Ранее отмечалось, что отношения – это своеобразные множества. К ним применимы как аналогичные алгебраические операции, так и специфические операции для отношений.

Дополнение $\overline{}$ отношения r есть новое отношение r', для которого $r'(x_i, x_j) = \bar{r}(x_i, x_j)$. Например, если дано отношение $r = \{(x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_2, x_4), (x_3, x_1), (x_3, x_3), (x_4, x_2), (x_4, x_3), (x_4, x_4)\}$, то его дополнение $r' = \bar{r}$, представленное в виде матрицы смежности, выглядит следующим образом:

$\bar{r}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	1	1
x_2	1	0	1	0
x_3	0	1	0	1
x_4	1	0	0	0

Объединение $\cup$ отношений r_1 и r_2 есть новое отношение r, для которого $r(x_i, x_j) = r_1(x_i, x_j) \vee r_2(x_i, x_j)$. Например, если даны отношения r_1 и r_2, то их объединение $r = r_1 \cup r_2$ имеет вид:

r_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0	0
x_2	0	1	0	1
x_3	1	0	1	0
x_4	0	1	1	1

$\cup$

r_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	1	1
x_2	1	1	0	0
x_3	0	1	1	0
x_4	0	0	0	0

=

r	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	1	1
x_2	1	1	0	1
x_3	1	1	1	0
x_4	0	1	1	1

Пересечение $\cap$ отношений r_1 и r_2 есть новое отношение r, для которого $r(x_i, x_j) = r_1(x_i, x_j) \cdot r_2(x_i, x_j)$. Например, если даны отношения r_1 и r_2, то их пересечение $r = r_1 \cap r_2$ выглядит следующим образом:

r_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0	0
x_2	0	1	0	1
x_3	1	0	1	0
x_4	0	1	1	1

$\cap$

r_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	1	1
x_2	1	1	0	0
x_3	0	1	1	0
x_4	0	0	0	0

=

r	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0	0	0
x_2	0	1	0	0
x_3	0	0	1	0
x_4	0	0	0	0

Разность \ отношений r_1 и r_2 есть новое отношение r, для которого $r(x_i, x_j) = r_1(x_i, x_j) \cdot \bar{r}_2(x_i, x_j)$. Например, если даны отношения r_1 и r_2, то их разность $r = r_1 \setminus r_2$ имеет вид:

r_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0	0
x_2	0	1	0	1
x_3	1	0	1	0
x_4	0	1	1	1

\

r_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	1	1
x_2	1	1	0	0
x_3	0	1	1	0
x_4	0	0	0	0

=

r	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0	0
x_2	0	0	0	1
x_3	1	0	0	0
x_4	0	1	1	1

Симметрическая разность Δ отношений r_1 и r_2 есть новое отношение r, для которого $r(x_i, x_j) = r_1(x_i, x_j) \cdot \bar{r}_2(x_i, x_j) \cup r_2(x_i, x_j) \cdot \bar{r}_1(x_i, x_j)$. Например, если даны отношения r_1 и r_2, то их симметрическая разность $r = r_1 \Delta r_2$ имеет вид:

r_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0	0
x_2	0	1	0	1
x_3	1	0	1	0
x_4	0	1	1	1

Δ

r_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	1	1
x_2	1	1	0	0
x_3	0	1	1	0
x_4	0	0	0	0

=

r	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	1	1
x_2	1	0	0	1
x_3	1	1	0	0
x_4	0	1	1	1

Композиция ∘ отношений r_1 и r_2 есть новое отношение r, для которого $r(x_i, x_j) = r_1(x_i, x_1) \cdot r_2(x_1, x_j) \vee r_1(x_i, x_2) \cdot r_2(x_2, x_j) \vee ... \vee r_1(x_i, x_n) \cdot r_2(x_n, x_j)$. Например, если даны отношения r_1 и r_2, то их композиция $r = r_1 \circ r_2$ выглядит следующим образом:

r_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0	1
x_2	0	0	1	0
x_3	0	1	0	0
x_4	1	0	0	1

∘

r_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	0	1
x_2	1	0	0	0
x_3	0	0	0	1
x_4	1	0	1	0

=

r	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	1	1
x_2	0	0	0	0
x_3	0	0	0	0
x_4	1	1	1	1

Для получения результатов композиции выполнены следующие расчеты:

$r(x_1, x_1) = r_1(x_1, x_1) \cdot r_2(x_1, x_1) \vee r_1(x_1, x_2) \cdot r_2(x_2, x_1) \vee r_1(x_1, x_3) \cdot r_2(x_3, x_1) \vee r_1(x_1, x_4) \cdot r_2(x_4, x_1) = 1 \cdot 0 \vee 0 \cdot 1 \vee 0 \cdot 0 \vee 1 \cdot 1 = 1$;

$r(x_1, x_2) = r_1(x_1, x_1) \cdot r_2(x_1, x_2) \vee r_1(x_1, x_2) \cdot r_2(x_2, x_2) \vee r_1(x_1, x_3) \cdot r_2(x_3, x_2) \vee r_1(x_1, x_4) \cdot r_2(x_4, x_2) = 1 \cdot 1 \vee 0 \cdot 0 \vee 0 \cdot 0 \vee 1 \cdot 0 = 1$;

$r(x_1, x_3) = r_1(x_1, x_1) \cdot r_2(x_1, x_3) \vee r_1(x_1, x_2) \cdot r_2(x_2, x_3) \vee r_1(x_1, x_3) \cdot r_2(x_3, x_3) \vee r_1(x_1, x_4) \cdot r_2(x_4, x_3) = 1 \cdot 1 \vee 0 \cdot 0 \vee 0 \cdot 0 \vee 1 \cdot 1 = 1$;

$r(x_1, x_4) = r_1(x_1, x_1) \cdot r_2(x_1, x_4) \vee r_1(x_1, x_2) \cdot r_2(x_2, x_4) \vee r_1(x_1, x_3) \cdot r_2(x_3, x_4) \vee r_1(x_1, x_4) \cdot r_2(x_4, x_4) = 1 \cdot 1 \vee 0 \cdot 0 \vee 0 \cdot 1 \vee 1 \cdot 0 = 1$;

$r(x_2, x_1) = r_1(x_2, x_1) \cdot r_2(x_1, x_1) \vee r_1(x_2, x_2) \cdot r_2(x_2, x_1) \vee r_1(x_2, x_3) \cdot r_2(x_3, x_1) \vee r_1(x_2, x_4) \cdot r_2(x_4, x_1) = 0 \cdot 0 \vee 0 \cdot 1 \vee 1 \cdot 0 \vee 0 \cdot 1 = 0$;

$r(x_2, x_2) = r_1(x_2, x_1) \cdot r_2(x_1, x_2) \vee r_1(x_2, x_2) \cdot r_2(x_2, x_2) \vee r_1(x_2, x_3) \cdot r_2(x_3, x_2) \vee r_1(x_2, x_4) \cdot r_2(x_4, x_2) = 0 \cdot 1 \vee 0 \cdot 0 \vee 1 \cdot 0 \vee 0 \cdot 0 = 0$;

$r(x_2, x_3) = r_1(x_2, x_1) \cdot r_2(x_1, x_3) \vee r_1(x_2, x_2) \cdot r_2(x_2, x_3) \vee r_1(x_2, x_3) \cdot r_2(x_3, x_3) \vee r_1(x_2, x_4) \cdot r_2(x_4, x_3) = 0 \cdot 0 \vee 0 \cdot 0 \vee 1 \cdot 0 \vee 0 \cdot 1 = 0$;

$r(x_2, x_4) = r_1(x_2, x_1) \cdot r_2(x_1, x_4) \vee r_1(x_2, x_2) \cdot r_2(x_2, x_4) \vee r_1(x_2, x_3) \cdot r_2(x_3, x_4) \vee r_1(x_2, x_4) \cdot r_2(x_4, x_4) = 0 \cdot 1 \vee 0 \cdot 0 \vee 1 \cdot 1 \vee 0 \cdot 0 = 1$;

$r(x_3, x_1) = r_1(x_3, x_1) \cdot r_2(x_1, x_1) \vee r_1(x_3, x_2) \cdot r_2(x_2, x_1) \vee r_1(x_3, x_3) \cdot r_2(x_3, x_1) \vee r_1(x_3, x_4) \cdot r_2(x_4, x_1) = 0 \cdot 0 \vee 1 \cdot 1 \vee 0 \cdot 0 \vee 0 \cdot 1 = 1$;

$r(x_3, x_2) = r_1(x_3, x_1) \cdot r_2(x_1, x_2) \vee r_1(x_3, x_2) \cdot r_2(x_2, x_2) \vee r_1(x_3, x_3) \cdot r_2(x_3, x_2) \vee r_1(x_3, x_4) \cdot r_2(x_4, x_2) = 0 \cdot 1 \vee 1 \cdot 0 \vee 0 \cdot 0 \vee 0 \cdot 0 = 0$;

$r(x_3, x_3) = r_1(x_3, x_1) \cdot r_2(x_1, x_3) \vee r_1(x_3, x_2) \cdot r_2(x_2, x_3) \vee r_1(x_3, x_3) \cdot r_2(x_3, x_3) \vee r_1(x_3, x_4) \cdot r_2(x_4, x_3) = 0 \cdot 0 \vee 1 \cdot 0 \vee 0 \cdot 0 \vee 0 \cdot 1 = 0$;

$r(x_3, x_4) = r_1(x_3, x_1) \cdot r_2(x_1, x_4) \vee r_1(x_3, x_2) \cdot r_2(x_2, x_4) \vee r_1(x_3, x_3) \cdot r_2(x_3, x_4) \vee r_1(x_3, x_4) \cdot r_2(x_4, x_4) = 0 \cdot 1 \vee 1 \cdot 0 \vee 0 \cdot 1 \vee 0 \cdot 0 = 0$;
$r(x_4, x_1) = r_1(x_4, x_1) \cdot r_2(x_1, x_1) \vee r_1(x_4, x_2) \cdot r_2(x_2, x_1) \vee r_1(x_4, x_3) \cdot r_2(x_3, x_1) \vee r_1(x_4, x_4) \cdot r_2(x_4, x_1) = 1 \cdot 0 \vee 0 \cdot 1 \vee 1 \cdot 0 \vee 1 \cdot 1 = 0$;
$r(x_4, x_2) = r_1(x_4, x_1) \cdot r_2(x_1, x_2) \vee r_1(x_4, x_2) \cdot r_2(x_2, x_2) \vee r_1(x_4, x_3) \cdot r_2(x_3, x_2) \vee r_1(x_4, x_4) \cdot r_2(x_4, x_2) = 1 \cdot 1 \vee 0 \cdot 0 \vee 1 \cdot 0 \vee 1 \cdot 0 = 1$;
$r(x_4, x_3) = r_1(x_4, x_1) \cdot r_2(x_1, x_3) \vee r_1(x_4, x_2) \cdot r_2(x_2, x_3) \vee r_1(x_4, x_3) \cdot r_2(x_3, x_3) \vee r_1(x_4, x_4) \cdot r_2(x_4, x_3) = 1 \cdot 0 \vee 0 \cdot 0 \vee 1 \cdot 0 \vee 1 \cdot 1 = 1$;
$r(x_4, x_4) = r_1(x_4, x_1) \cdot r_2(x_1, x_4) \vee r_1(x_4, x_2) \cdot r_2(x_2, x_4) \vee r_1(x_4, x_3) \cdot r_2(x_3, x_4) \vee r_1(x_4, x_4) \cdot r_2(x_4, x_4) = 1 \cdot 1 \vee 0 \cdot 0 \vee 1 \cdot 1 \vee 0 \cdot 0 = 1$.

Литература: [1], с. 46–51, 53–54.
Контрольные вопросы для самопроверки:
1. Представить в виде матрицы смежности исходное отношение в примере для операции дополнения, заданное как список кортежей.
2. Выполнить все рассмотренные бинарные алгебраические операции над отношениями r_1 и r_2, заданными матрицами смежности:

r_1	x_1	x_2	x_3
x_1	0	1	1
x_2	0	1	0
x_3	1	0	1

r_2	x_1	x_2	x_3
x_1	1	0	1
x_2	0	1	1
x_3	1	0	1

Задание к практической работе

Даны два отношения. Выполнить операции: дополнения (для одного из отношений), объединения, пересечения, дополнения, разности, симметрической разности, композиции.

Методические указания и порядок выполнения работы

1) ознакомиться с заданием к практической работе (п. 7.3);
2) прочитать соответствующий теоретический материал по литературному источнику [1], с. 46–51, 53–54;
3) изучить типовой пример решения одной из задач:

Пусть отношения имеют вид:

r_1	x_1	x_2	x_3
x_1	0	0	0
x_2	0	0	1
x_3	0	1	0

r_2	x_1	x_2	x_3
x_1	0	1	1
x_2	1	0	0
x_3	1	0	1

Выполнить объединение отношений.
Решение:
Для расчета значений матрицы смежности результирующего отношения используем логическую булеву формулу $r(x_i, x_j) = r_1(x_i, x_j) \vee r_2(x_i, x_j)$.
Представим результат в виде таблицы:

r	x_1	x_2	x_3
x_1	0	1	1
x_2	1	0	1
x_3	1	1	1

Требования к отчету и защите

Формирование отчета и защита работы не требуется.

8. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 7. РАСЧЕТ ПРОСТЕЙШИХ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ГРАФА

Общие сведения

Цель: получение практических навыков расчета простейших числовых характеристик графа.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: используется инструментарий медиаклассов.

Условия допуска к выполнению: к практическому занятию допускаются все пришедшие на него.

Критерии положительной оценки: участие в решении задач преподавателем у доски отмечается в учетной карточке.

Планируемое время выполнения:

Аудиторное время выполнения (под руководством преподавателя): 3 акад. ч.

Время самостоятельной подготовки: 0,5 акад. ч.

8.2. Теоретическое введение

Любая дискретная структура как совокупность объектов произвольной природы и отношений между ними может быть изображена на плоскости в виде точек, являющихся образом *множества*, и линий, соединяющих пары точек, что является образом *отношений*. Такое представление принято называть *графом* G.

Используются разные способы обозначения графа, например:

1) $G = \langle X; R \rangle$,

где $X = \{x_i\}$ – множество точек, элементы которого называют *вершинами* графа (носитель графа);

$R = \{r_j = (x_i, x_k) \mid x_i, x_k \in X\}$ – множество линий, соединяющих точки (сигнатура графа): линии представляют неупорядоченную или упорядоченную пару элементов множества X: в первом случае линия называется *ребром* графа, во втором – *дугой*;

2) $G = \langle X; H \rangle$,

где $X = \{x_i\}$ – вершины графа,

$H = \{h(x_i) = \{x_j\} \mid x_i, x_j \in X\}$ – отображение вершин графа как множество образов (окружение) вершины-прообраза x_i.

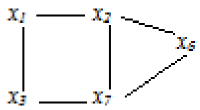
Простейшими числами графа, связанными с его описанием, являются:

1) *порядок* графа n – число вершин;
2) *размер* графа m – число линий;
3) *степень* (*валентность*) вершины δ – число линий, инцидентных вершине;
4) если линия является дугой $r_j = (x_i, x_k)$, то число дуг, исходящих из вершины x_i, называют *полустепенью* вершины с положительной инцидентностью – δ^+, а число дуг, заходящих в вершину x_k, называют *полустепенью* вершины с отрицательной инцидентностью и обозначают δ^-;
5) количество смежных линий, соединяющих вершины x_i и x_j маршрута $\mu(x_i, x_j)$ – *длина маршрута* l; длина минимального маршрута – *расстояние*.

Граф может быть задан различными способами:

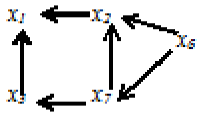
1) списками отношений или отображений:

   а) для неориентированного графа G_1 вида



список отношений R имеет вид: $R = \{r_1(x_1, x_2), r_2(x_1, x_3), r_3(x_2, x_6), r_4(x_2, x_7), r_5(x_6, x_7), r_6(x_7, x_3)\}$ (поскольку граф неориентированный, порядок элементов в паре (x_i, x_j) не имеет значения); список отображений H выглядит следующим образом: $H = \{x_1(x_2, x_3), x_2(x_1, x_7, x_6), x_3(x_1, x_7), x_6(x_2, x_7), x_7(x_2, x_3, x_6)\}$. Из примера видно, что $|R| = m$, $|H| = n$. Список отображений, кроме того, позволяет рассчитать валентности вершин графа: $\delta_{x1} = 2$, $\delta_{x2} = 3$, $\delta_{x3} = 2$, $\delta_{x6} = 2$, $\delta_{x7} = 3$;

b) для ориентированного графа G_2 вида



список отношений R имеет вид: $R = \{r_1(x_2, x_1), r_2(x_6, x_2), r_3(x_6, x_7), r_4(x_7, x_2), r_5(x_7, x_3), r_6(x_3, x_1)\}$ (для ориентированного графа порядок элементов в кортеже важен); список отображений H выглядит следующим образом: $H = \{x_2(x_1), x_3(x_1), x_6(x_2, x_7), x_7(x_2, x_3)\}$. Из примера видно, что $|R| = m$, но $|H| \neq n$. Тем не менее, список отображений позволяет рассчитать полустепени вершин с положительной инцидентностью: $\delta^+_{x2} = 1$, $\delta^+_{x3} = 1$, $\delta^+_{x6} = 2$, $\delta^+_{x7} = 2$;

2) матрицей смежности R, число строк и столбцов которой равно $|X| = n$:

a) для неориентированного графа элементы матрицы смежности определяют следующим образом: $r(x_i, x_j) = 1$, если вершина x_i смежна вершине x_j, в противном случае $r(x_i, x_j) = 0$. Так, для графа G_1 матрица смежности имеет вид:

R	x_1	x_2	x_3	x_6	x_7
x_1	0	1	1	0	0
x_2	1	0	0	1	1
x_3	1	0	0	0	1
x_6	0	1	0	0	1
x_7	0	1	1	1	0

Очевидно, в этом случае матрица смежности симметрична относительно главной диагонали, а сумма единиц по столбцу (или строке) показывает валентность соответствующей вершины. Число единиц выше (или ниже) главной диагонали соответствует размеру графа m;

b) для ориентированного графа строками в матрице смежности заданы *вершины-истоки*, а столбцами – *вершины-стоки*. Так, для графа G_2 матрица смежности имеет вид:

R	x_1	x_2	x_3	x_6	x_7
x_1	0	0	0	0	0
x_2	1	0	0	0	0
x_3	1	0	0	0	0
x_6	0	1	0	0	1
x_7	0	1	1	0	0

Если в эту матрицу смежности внести дополнительный столбец и строку и рассчитать число единиц в строках и столбцах соответственно, получатся две характеристики исходного графа – полустепени вершин с положительной и отрицательной инцидентностью:

R	x_1	x_2	x_3	x_6	x_7	δ^+
x_1	0	0	0	0	0	0
x_2	1	0	0	0	0	1
x_3	1	0	0	0	0	1
x_6	0	1	0	0	1	2
x_7	0	1	1	0	0	2
δ^-	2	2	1	0	1	

Поэтому столбец ориентированного графа, все элементы которого имеют значение 0, определяет общую вершину-исток связного графа; строка ориентированного графа, все элементы которой имеют значение 0, определяет общую вершину-сток связного графа. Ориентированный граф с подобными характеристиками называется *сетью*;

3) матрицей инцидентности I, которая описывает связь линий графа (строки матрицы) и его вершин (столбцы матрицы):

a) для неориентированного графа отношение принадлежности вершины графа его ребру определяют следующим образом: $i(x_k, x_j) = 1$, если ребро $r(x_k, x_j)$ инцидентно вершине x_k; $i(x_k, x_j) = 0$, если ребро $r(x_k, x_j)$ не инцидентно вершине x_k. В каждой строке матрицы количество единиц равно двум, так как это есть концевые вершины ребра, а в каждом столбце – степени вершины – δ. Если граф содержит петлю относительно вершины x_k, то в строке соответствующего отношения будет 1 только для вершины x_k. В таблице приведена матрица инцидентности для графа G_1:

I	x_1	x_2	x_3	x_6	x_7
r_1	1	1	0	0	0
r_2	1	0	1	0	0
r_3	0	1	0	1	0
r_4	0	1	0	0	1
r_5	0	0	0	1	1
r_6	0	0	1	0	1

b) для ориентированного графа отношение инцидентности определяют следующим образом: $i(x_k, x_j) = +1$, если ребро $r(x_k, x_j)$ инцидентно вершине-истоку x_k, $i(x_k, x_j) = 0$, если ребро $r(x_k, x_j)$ не инцидентно вершине x_k, $i(x_k, x_j) = -1$, если ребро $r(x_k, x_j)$ инцидентно вершине-стоку x_j. В каждой строке должны быть один символ +1 и один –1, а в каждом столбце сумма +1 равна *полустепени исхода* вершины x_i, а сумма –1 – *полустепени захода* вершины x_k. Матрица инцидентности графа G_2 выглядит следующим образом (нижние две строки показывают полустепени соответствующих вершин):

I	x_1	x_2	x_3	x_6	x_7
r_1	-1	+1	0	0	0
r_2	0	-1	0	+1	0
r_3	0	0	0	+1	-1
r_4	0	-1	0	0	+1
r_5	0	0	-1	0	+1
r_6	-1	0	+1	0	0
δ^+	0	+1	+1	+2	+2
δ^-	-2	-2	-1	0	-1

4) матрицей достижимости Q. В отличие от предшествующих описаний данная матрица содержит производную информацию, которая позволяет определить длины

маршрутов между разными вершинами графа: полагается, что за $p \le n$ шагов некой итерационной процедуры (она описана далее) может быть достижима любая вершина связного графа. В основе построения матрицы достижимости лежит матрица смежности R исходного графа, которая в контексте данной задачи представляет маршруты длиной $l = 1$. Сама итерационная процедура включает шаги:

a) первоначально ($p = 1$) $Q = 1 \cup R$, где 1 – единичная матрица, в которой элементы главной диагонали равны 1, а вне ее – 0, т. е. $q(x_i, x_j) = 1$ при $i = j$ и $q(x_i, x_j) = r(x_i, x_j)$ при $i \ne j$;

b) на каждом следующем шаге итерации p матрица достижимости Q^p вычисляется по формуле: $Q^p = Q^{p-1} \cup R^p$, где R^p – матрица смежности в степени p, Q^{p-1} – матрица достижимости, полученная на предыдущем шаге. При выполнении расчетов следует иметь в виду:

- при возведении в степень матрицы смежности используют правило умножения булевых матриц (ранее рассматривали как композицию двух отношений):

$$r^2(x_i, x_j) = r(x_i, x_1) \cdot r(x_1, x_j) \vee r(x_i, x_2) \cdot r(x_2, x_j) \vee \ldots \vee r(x_i, x_n) \cdot r(x_n, x_j);$$

$$r^3(x_i, x_j) = r(x_i, x_1) \cdot r^2(x_1, x_j) \vee r(x_i, x_2) \cdot r^2(x_2, x_j) \vee \ldots \vee r(x_i, x_n) \cdot r^2(x_n, x_j);$$

$$\ldots$$

$$r^p(x_i, x_j) =$$
$$r(x_i, x_1) \cdot r^{p-1}(x_1, x_j) \vee r(x_i, x_2) \cdot r^{p-1}(x_2, x_j) \vee \ldots \vee r(x_i, x_n) \cdot r^{p-1}(x_n, x_j);$$

- элементы матрицы достижимости в степени p - Q^p - вычисляются по правилам булевой алгебры: $q(x_i, x_j)^p = q(x_i, x_j)^{p-1} \vee r(x_i, x_j)^p$. При этом единичное значение элементов матрицы достижимости в степени p свидетельствуют о достижимости из вершины x_i вершины x_j на любом шаге до p–го включительно.

В силу громоздкости данной задачи решим ее для неориентированного графа G_1 (для ориентированного графа она решается аналогично). Матрица достижимости Q для матрицы смежности R графа G_1 имеет вид (она отличается от исходной матрицы смежности только наличием 1 на главной диагонали):

Q	x_1	x_2	x_3	x_6	x_7
x_1	1	1	1	0	0
x_2	1	1	0	1	1
x_3	1	0	1	0	1
x_6	0	1	0	1	1
x_7	0	1	1	1	1

Рассчитаем последующие степени матрицы смежности по приведенным правилам булевой алгебры:

$r^2(x_1,x_1) = r(x_1,x_1).r(x_1,x_1) \vee r(x_1,x_2).r(x_2,x_1) \vee r(x_1,x_3).r(x_3,x_1) \vee r(x_1,x_6).r(x_6,x_1) \vee r(x_1,x_7).r(x_7,x_1) = 0 \vee 1 \vee 1 \vee 0 \vee 0 = 1$;

$r^2(x_1,x_2) = r(x_1,x_1).r(x_1,x_2) \vee r(x_1,x_2).r(x_2,x_2) \vee r(x_1,x_3).r(x_3,x_2) \vee r(x_1,x_6).r(x_6,x_2) \vee r(x_1,x_7).r(x_7,x_2) = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0$;

$r^2(x_1,x_3) = r(x_1,x_1).r(x_1,x_3) \vee r(x_1,x_2).r(x_2,x_3) \vee r(x_1,x_3).r(x_3,x_3) \vee r(x_1,x_6).r(x_6,x_3) \vee r(x_1,x_7).r(x_7,x_3) = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0$;

$r^2(x_1,x_6) = r(x_1,x_1).r(x_1,x_6) \vee r(x_1,x_2).r(x_2,x_6) \vee r(x_1,x_3).r(x_3,x_6) \vee r(x_1,x_6).r(x_6,x_6) \vee r(x_1,x_7).r(x_7,x_6) = 0 \vee 1 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 1$;

$r^2(x_1,x_7) = r(x_1,x_1).r(x_1,x_7) \vee r(x_1,x_2).r(x_2,x_7) \vee r(x_1,x_3).r(x_3,x_7) \vee r(x_1,x_6).r(x_6,x_7) \vee r(x_1,x_7).r(x_7,x_7) = 0 \vee 1 \vee 1 \vee 0 \vee 0 = 1$;

$r^2(x_2,x_1) = r(x_2,x_1).r(x_1,x_1) \vee r(x_2,x_2).r(x_2,x_1) \vee r(x_2,x_3).r(x_3,x_1) \vee r(x_2,x_6).r(x_6,x_1) \vee r(x_2,x_7).r(x_7,x_1) = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0$;

$r^2(x_2,x_2) = r(x_2,x_1).r(x_1,x_2) \vee r(x_2,x_2).r(x_2,x_2) \vee r(x_2,x_3).r(x_3,x_2) \vee r(x_2,x_6).r(x_6,x_2) \vee r(x_2,x_7).r(x_7,x_2) = 1 \vee 0 \vee 0 \vee 1 \vee 1 = 1;$
$r^2(x_2,x_3) = r(x_2,x_1).r(x_1,x_3) \vee r(x_2,x_2).r(x_2,x_3) \vee r(x_2,x_3).r(x_3,x_3) \vee r(x_2,x_6).r(x_6,x_3) \vee r(x_2,x_7).r(x_7,x_3) = 1 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 1 = 1;$
$r^2(x_2,x_6) = r(x_2,x_1).r(x_1,x_6) \vee r(x_2,x_2).r(x_2,x_6) \vee r(x_2,x_3).r(x_3,x_6) \vee r(x_2,x_6).r(x_6,x_6) \vee r(x_2,x_7).r(x_7,x_6) = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 1 = 1;$
$r^2(x_2,x_7) = r(x_2,x_1).r(x_1,x_7) \vee r(x_2,x_2).r(x_2,x_7) \vee r(x_2,x_3).r(x_3,x_7) \vee r(x_2,x_6).r(x_6,x_7) \vee r(x_2,x_7).r(x_7,x_7) = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 1 \vee 1 = 1;$
$r^2(x_3,x_1) = r(x_3,x_1).r(x_1,x_1) \vee r(x_3,x_2).r(x_2,x_1) \vee r(x_3,x_3).r(x_3,x_1) \vee r(x_3,x_6).r(x_6,x_1) \vee r(x_3,x_7).r(x_7,x_1) = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0;$
$r^2(x_3,x_2) = r(x_3,x_1).r(x_1,x_2) \vee r(x_3,x_2).r(x_2,x_2) \vee r(x_3,x_3).r(x_3,x_2) \vee r(x_3,x_6).r(x_6,x_2) \vee r(x_3,x_7).r(x_7,x_2) = 1 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 1 = 1;$
$r^2(x_3,x_3) = r(x_3,x_1).r(x_1,x_3) \vee r(x_3,x_2).r(x_2,x_3) \vee r(x_3,x_3).r(x_3,x_3) \vee r(x_3,x_6).r(x_6,x_3) \vee r(x_3,x_7).r(x_7,x_3) = 1 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 1 = 1;$
$r^2(x_3,x_6) = r(x_3,x_1).r(x_1,x_6) \vee r(x_3,x_2).r(x_2,x_6) \vee r(x_3,x_3).r(x_3,x_6) \vee r(x_3,x_6).r(x_6,x_6) \vee r(x_3,x_7).r(x_7,x_6) = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 1 = 1;$
$r^2(x_3,x_7) = r(x_3,x_1).r(x_1,x_7) \vee r(x_3,x_2).r(x_2,x_7) \vee r(x_3,x_3).r(x_3,x_7) \vee r(x_3,x_6).r(x_6,x_7) \vee r(x_3,x_7).r(x_7,x_7) = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 1 = 1;$
$r^2(x_6,x_1) = r(x_6,x_1).r(x_1,x_1) \vee r(x_6,x_2).r(x_2,x_1) \vee r(x_6,x_3).r(x_3,x_1) \vee r(x_6,x_6).r(x_6,x_1) \vee r(x_6,x_7).r(x_7,x_1) = 0 \vee 1 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 1;$
$r^2(x_6,x_2) = r(x_6,x_1).r(x_1,x_2) \vee r(x_6,x_2).r(x_2,x_2) \vee r(x_6,x_3).r(x_3,x_2) \vee r(x_6,x_6).r(x_6,x_2) \vee r(x_6,x_7).r(x_7,x_2) = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 1 = 1;$
$r^2(x_6,x_3) = r(x_6,x_1).r(x_1,x_3) \vee r(x_6,x_2).r(x_2,x_3) \vee r(x_6,x_3).r(x_3,x_3) \vee r(x_6,x_6).r(x_6,x_3) \vee r(x_6,x_7).r(x_7,x_3) = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 1 = 1;$
$r^2(x_6,x_6) = r(x_6,x_1).r(x_1,x_6) \vee r(x_6,x_2).r(x_2,x_6) \vee r(x_6,x_3).r(x_3,x_6) \vee r(x_6,x_6).r(x_6,x_6) \vee r(x_6,x_7).r(x_7,x_6) = 0 \vee 1 \vee 0 \vee 0 \vee 1 = 1;$
$r^2(x_6,x_7) = r(x_6,x_1).r(x_1,x_7) \vee r(x_6,x_2).r(x_2,x_7) \vee r(x_6,x_3).r(x_3,x_7) \vee r(x_6,x_6).r(x_6,x_7) \vee r(x_6,x_7).r(x_7,x_7) = 0 \vee 1 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 1;$
$r^2(x_7,x_1) = r(x_7,x_1).r(x_1,x_1) \vee r(x_7,x_2).r(x_2,x_1) \vee r(x_7,x_3).r(x_3,x_1) \vee r(x_7,x_6).r(x_6,x_1) \vee r(x_7,x_7).r(x_7,x_1) = 0 \vee 1 \vee 1 \vee 0 \vee 0 = 1;$
$r^2(x_7,x_2) = r(x_7,x_1).r(x_1,x_2) \vee r(x_7,x_2).r(x_2,x_2) \vee r(x_7,x_3).r(x_3,x_2) \vee r(x_7,x_6).r(x_6,x_2) \vee r(x_7,x_7).r(x_7,x_2) = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 1 \vee 0 = 1;$
$r^2(x_7,x_3) = r(x_7,x_1).r(x_1,x_3) \vee r(x_7,x_2).r(x_2,x_3) \vee r(x_7,x_3).r(x_3,x_3) \vee r(x_7,x_6).r(x_6,x_3) \vee r(x_7,x_7).r(x_7,x_3) = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0;$
$r^2(x_7,x_6) = r(x_7,x_1).r(x_1,x_6) \vee r(x_7,x_2).r(x_2,x_6) \vee r(x_7,x_3).r(x_3,x_6) \vee r(x_7,x_6).r(x_6,x_6) \vee r(x_7,x_7).r(x_7,x_6) = 0 \vee 1 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 1;$
$r^2(x_7,x_7) = r(x_7,x_1).r(x_1,x_7) \vee r(x_7,x_2).r(x_2,x_7) \vee r(x_7,x_3).r(x_3,x_7) \vee r(x_7,x_6).r(x_6,x_7) \vee r(x_7,x_7).r(x_7,x_7) = 0 \vee 1 \vee 1 \vee 1 \vee 0 = 1.$

Таким образом, квадрат матрицы смежности R^2 имеет вид:

R^2	x_1	x_2	x_3	x_6	x_7
x_1	1	0	0	1	1
x_2	0	1	1	1	1
x_3	0	1	1	1	1
x_6	1	1	1	1	1
x_7	1	1	0	1	1

Выполним объединение полученного квадрата матрицы смежности с матрицей достижимости предыдущего шага – получим матрицу достижимости Q^2:

Q	x_1	x_2	x_3	x_6	x_7
x_1	1	1	1	0	0
x_2	1	1	0	1	1
x_3	1	0	1	0	1
x_6	0	1	0	1	1
x_7	0	1	1	1	1

$\cup$

R^2	x_1	x_2	x_3	x_6	x_7
x_1	1	0	0	1	1
x_2	0	1	1	1	1
x_3	0	1	1	1	1
x_6	1	1	1	1	1
x_7	1	1	0	1	1

=

Q^2	x_1	x_2	x_3	x_6	x_7
x_1	1	1	1	1	1
x_2	1	1	1	1	1
x_3	1	1	1	1	1
x_6	1	1	1	1	1
x_7	1	1	1	1	1

Поскольку в матрице достижимости Q^2 ($p = 2$) все ячейки заполнены 1, уже на втором шаге стали достижимыми все вершины исходного графа, т.е. маршруты в графе G_1 имеют максимальную длину l, равную двум.

Литература: [1], с. 80–92.

Контрольные вопросы для самопроверки:

1. Назовите простейшие числа графа, которые определены в данной работе.
2. Какими способами, рассмотренными в работе, описываются графы?
3. Чем различаются матрицы описания графов?

8.3. Задание к практической работе

1. Задан ориентированный граф. Описать его различными способами.
2. Задан неориентированный граф. Описать его различными способами.

8.4. Методические указания и порядок выполнения работы

1) ознакомиться с заданием к практической работе (п. 8.3);
2) прочитать соответствующий теоретический материал из литературного источника [1], с. 80–92;
3) изучить типовые примеры решения задач, рассмотренные в разделе 8.2.

8.5. Требования к отчету и защите

Формирование отчета и защита работы не требуется.

9. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 8. ЧИСЛА ГРАФА

9.1. Общие сведения

Цель: получение практических навыков расчета чисел графа.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: используется инструментарий медиаклассов.

Условия допуска к выполнению: к практическому занятию допускаются все пришедшие на него.

Критерии положительной оценки: участие в решении задач преподавателем у доски отмечается в учетной карточке.

Планируемое время выполнения:

Аудиторное время выполнения (под руководством преподавателя): 3 акад. ч.

Время самостоятельной подготовки: 0,5 акад. ч.

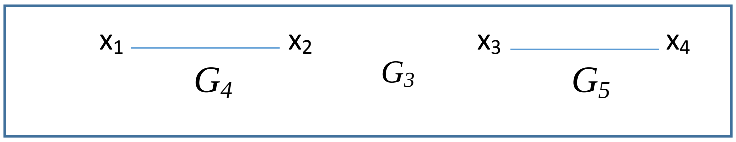
9.2. Теоретическое введение

Помимо простых числовых характеристик, рассмотренных в предыдущей работе, граф имеет и дополнительные, которые требуют поиска и вычисления их значений: число компонент связности, цикломатическое число, плотность, хроматическое число.

Число компонент связности графа

Если множество вершин графа можно разбить на попарно непересекающиеся непустые подмножества, то выделяются связные подграфы[1], для которых подмножества ребер инцидентны элементам только одного подмножества вершин. Связные подграфы называют *компонентами связности*, а их количество – *числом компонент связности графа* G – $k(G)$.

На рисунке изображен граф G_3, который содержит два не связанных между собой подграфа – G_4 и G_5, т.е. число компонент связности графа G - $k(G) = 2$:



Для поиска числа компонент связности k используют матрицы смежности R и матрицы достижимости Q^p: если на некотором шаге матрица достижимости сохраняет свою форму, сформированную на предыдущем шаге, то она считается построенной; тогда следует найти на главной диагонали блоки, не содержащие 0; если это не удается, необходимо выполнить операцию одновременной перестановки одноименных строк и столбцов не более n! раз.

Например, требуется найти число компонент связности приведенного выше графа G_3 - $k(G_3)$. Решение задачи:

1) опишем заданный граф матрицей смежности R:

R	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	0	0
x_2	1	0	0	0
x_3	0	0	0	1
x_4	0	0	1	0

2) найдем матрицу достижимости Q для исходной матрицы смежности, заменив у нее все элементы на главной диагонали на 1:

Q	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	0	0
x_2	1	1	0	0
x_3	0	0	1	1
x_4	0	0	1	1

3) теперь последовательно станем возводить матрицу смежности в степени, начиная со второй, и находить соответствующие матрицы достижимости:

R^2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0	0
x_2	0	1	0	0
x_3	0	0	1	0
x_4	0	0	0	1

$\cup$

Q	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	0	0
x_2	1	1	0	0
x_3	0	0	1	1
x_4	0	0	1	1

$=$

Q^2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	0	0
x_2	1	1	0	0
x_3	0	0	1	1
x_4	0	0	1	1

$r^2(x_1,x_1)=r(x_1,x_1)*r(x_1,x_1)\vee r(x_1,x_2)*r(x_2,x_1)\vee r(x_1,x_3)*r(x_3,x_1)\vee r(x_1,x_4)*r(x_4,x_1)=0\vee 1\vee 0\vee 0=1$

$r^2(x_1,x_2)=r(x_1,x_1)*r(x_1,x_2)\vee r(x_1,x_2)*r(x_2,x_2)\vee r(x_1,x_3)*r(x_3,x_2)\vee r(x_1,x_4)*r(x_4,x_2)=0\vee 0\vee 0\vee 0=0$

[1] Граф называют **связным**, если *любые* две его вершины можно соединить маршрутом, т.е. каждая вершина графа достижима

$r^2(x_1,x_3)=r(x_1,x_1)*r(x_1,x_3)\vee r(x_1,x_2)*r(x_2,x_3)\vee r(x_1,x_3)*r(x_3,x_3)\vee r(x_1,x_4)*r(x_4,x_3)=0\vee 0\vee 0\vee 0=0$
$r^2(x_1,x_4)=r(x_1,x_1)*r(x_1,x_4)\vee r(x_1,x_2)*r(x_2,x_4)\vee r(x_1,x_3)*r(x_3,x_4)\vee r(x_1,x_4)*r(x_4,x_4)=0\vee 0\vee 0\vee 0=0$
$r^2(x_2,x_1)=r(x_2,x_1)*r(x_1,x_1)\vee r(x_2,x_2)*r(x_2,x_1)\vee r(x_2,x_3)*r(x_3,x_1)\vee r(x_2,x_4)*r(x_4,x_1)=0\vee 0\vee 0\vee 0=0$
$r^2(x_2,x_2)=r(x_2,x_1)*r(x_1,x_2)\vee r(x_2,x_2)*r(x_2,x_2)\vee r(x_2,x_3)*r(x_3,x_2)\vee r(x_2,x_4)*r(x_4,x_2)=1\vee 0\vee 0\vee 0=1$
$r^2(x_2,x_3)=r(x_2,x_1)*r(x_1,x_3)\vee r(x_2,x_2)*r(x_2,x_3)\vee r(x_2,x_3)*r(x_3,x_3)\vee r(x_2,x_4)*r(x_4,x_3)=0\vee 0\vee 0\vee 0=0$
$r^2(x_2,x_4)=r(x_2,x_1)*r(x_1,x_4)\vee r(x_2,x_2)*r(x_2,x_4)\vee r(x_2,x_3)*r(x_3,x_4)\vee r(x_2,x_4)*r(x_4,x_4)=0\vee 0\vee 0\vee 0=0$
$r^2(x_3,x_1)=r(x_3,x_1)*r(x_1,x_1)\vee r(x_3,x_2)*r(x_2,x_1)\vee r(x_3,x_3)*r(x_3,x_1)\vee r(x_3,x_4)*r(x_4,x_1)=0\vee 0\vee 0\vee 0=0$
$r^2(x_3,x_2)=r(x_3,x_1)*r(x_1,x_2)\vee r(x_3,x_2)*r(x_2,x_2)\vee r(x_3,x_3)*r(x_3,x_2)\vee r(x_3,x_4)*r(x_4,x_2)=0\vee 0\vee 0\vee 0=0$
$r^2(x_3,x_3)=r(x_3,x_1)*r(x_1,x_3)\vee r(x_3,x_2)*r(x_2,x_3)\vee r(x_3,x_3)*r(x_3,x_3)\vee r(x_3,x_4)*r(x_4,x_3)=0\vee 0\vee 0\vee 1=1$
$r^2(x_3,x_4)=r(x_3,x_1)*r(x_1,x_4)\vee r(x_3,x_2)*r(x_2,x_4)\vee r(x_3,x_3)*r(x_3,x_4)\vee r(x_3,x_4)*r(x_4,x_4)=0\vee 0\vee 0\vee 0=0$
$r^2(x_4,x_1)=r(x_4,x_1)*r(x_1,x_1)\vee r(x_4,x_2)*r(x_2,x_1)\vee r(x_4,x_3)*r(x_3,x_1)\vee r(x_4,x_4)*r(x_4,x_1)=0\vee 0\vee 0\vee 0=0$
$r^2(x_4,x_2)=r(x_4,x_1)*r(x_1,x_2)\vee r(x_4,x_2)*r(x_2,x_2)\vee r(x_4,x_3)*r(x_3,x_2)\vee r(x_4,x_4)*r(x_4,x_2)=0\vee 0\vee 0\vee 0=0$
$r^2(x_4,x_3)=r(x_4,x_1)*r(x_1,x_3)\vee r(x_4,x_2)*r(x_2,x_3)\vee r(x_4,x_3)*r(x_3,x_3)\vee r(x_4,x_4)*r(x_4,x_3)=0\vee 0\vee 0\vee 0=0$
$r^2(x_4,x_4)=r(x_4,x_1)*r(x_1,x_4)\vee r(x_4,x_2)*r(x_2,x_4)\vee r(x_4,x_3)*r(x_3,x_4)\vee r(x_4,x_4)*r(x_4,x_4)=0\vee 0\vee 1\vee 0=1$

4) анализ матриц достижимости Q и Q^2 показывает их полную идентичность. Это означает, что построение матриц достижимости следует закончить;
5) из визуального анализа матрицы достижимости Q^2 видно, что сформированы два блока, заполненные 1 (выделены заливкой):

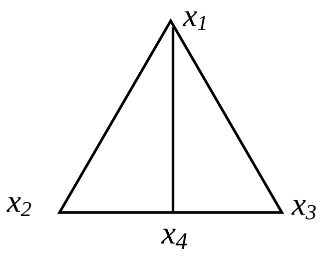
Q^2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	0	0
x_2	1	1	0	0
x_3	0	0	1	1
x_4	0	0	1	1

Эти блоки - макеты двух подграфов - компонентов связности. Значит, (G_3) = 2.

Цикломатическое число графа

Наименьшее число рёбер графа G, удаление которых приводит к графу без циклов и петель, называют **цикломатическим числом** и обозначают $\lambda(G)$. Цикломатическое число можно определить по формуле: $\lambda(G) = m - n + k(G)$, где m – число рёбер графа G, n – число вершин графа G, $k(G)$ – число компонент связности графа G.

Например, для графа G_6 изображенного на рисунке ниже, $n = 4$, $m = 5$, $k(G_6) = 1$:



Следовательно, $\lambda(G_6) = 5 - 4 + 1 = 2$. Удалив два ребра, полностью устраняют циклы на графе.

Очевидно, для любого связного графа цикломатическое число равно $\lambda(G) = m - n + 1$, так как число компонент связности у такого графа равно 1.

Видно, что нахождение цикломатического числа – задача несложная, особенно, если известно число компонент связности графа. Особая проблема – определение удаляемых ребер, чтобы освободить граф от циклов. Для ее решения используется алгоритм поиска *остова* графа[2], который для произвольного графа $G = \langle X; R\rangle$ включает следующие шаги:

[2] Остов (или дерево) – это граф без циклов и петель, покрывающий все вершины исходного графа

1) выбрать ребро *r* из множества *R*, не являющееся петлей, его концевые вершины включить в множество *X*' и сформировать фрагмент остова *G*' = <*X*'; *r*>;
2) выбрать ребро, не принадлежащее фрагменту и не являющееся петлей:
   - если фрагменту принадлежит одна концевая вершина ребра, то вторую вершину включить в множество *X*', а ребро – во фрагмент остова *G*';
   - если фрагменту не принадлежит ни одна из концевых вершин ребра, то создать еще один фрагмент остова;
   - если концевые вершины ребра принадлежат различным фрагментам остова, то фрагменты объединить;
   - если обе концевые вершины ребра принадлежат одному фрагменту, то исключить ребро из анализа;
3) если все вершины графа вошли во фрагмент остова, то конец алгоритма, иначе перейти к шагу 2.

Например, требуется определить удаляемые ребра для устранения циклов для графа G_6. Для решения задачи удобно представить исходный граф в виде списка отношений $R = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_4), (x_4, x_3)\}$:

1) пусть первое выбранное ребро будет (x_1, x_2). Тогда получим фрагмент остова вида:

   x_1 ———— x_2

2) выберем любое другое из оставшихся ребер, например, ребро (x_2, x_4). Поскольку одна из его вершин принадлежит созданному остову, включим его во фрагмент остова:

   x_1 ———— x_2 ———— x_4

3) выберем еще одно ребро, например, (x_1, x_4). Поскольку обе его концевые вершины уже входят в остов, исключаем его из анализа;
4) выберем ребро (x_4, x_3). Включаем его во фрагмент:

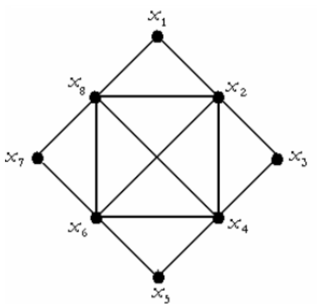
   x_1 ———— x_2 ———— x_4 ———— x_3

5) выберем последнее ребро (x_1, x_3). Поскольку обе его концевые вершины уже есть в остове, исключаем его из анализа.

Таким образом, исключив ребра (x_1, x_4) и (x_1, x_3), мы избавили граф от циклов.

Плотность графа

Плотность графа G - $\rho(G)$ – это максимальная мощность носителя полного подграфа графа G. Например, для графа G_7 на рисунке ниже полные подграфы представлены множествами вершин: $X_1 = \{x_2, x_3, x_4\}$, $X_2 = \{x_4, x_5, x_6\}$, $X_3 = \{x_6, x_7, x_8\}$, $X_4 = \{x_1, x_2, x_8\}$, $X_5 = \{x_2, x_4, x_6, x_8\}$:



Следовательно, $\rho(G_7) = \max\{|X_1|, |X_2|, |X_3|, |X_4|, |X_5|\} = 4$.

Для поиска плотности графа необходимо вычислить матрицу достижимости Q и выполнить неоднократно перестановку строк и столбцов (не более $n!$ раз) так, чтобы найти блоки главной диагонали, содержащие наибольшее число единиц. Такой блок есть образ полного подграфа, а 1 в строке или столбце блока указывает на имя вершины полного подграфа.

Например, требуется определить плотность графа G_7.

Решение задачи:

- составим для заданного графа матрицу смежности R и матрицу достижимости Q:

R	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	1	0	0	0	0	0	1
x_2	1	0	1	1	0	1	0	1
x_3	0	1	0	1	0	0	0	0
x_4	0	1	1	0	1	1	0	1
x_5	0	0	0	1	0	1	0	0
x_6	0	1	0	1	1	0	1	1
x_7	0	0	0	0	0	1	0	1
x_8	1	1	0	1	0	1	1	0

Q	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	1	1	0	0	0	0	0	1
x_2	1	1	1	1	0	1	0	1
x_3	0	1	1	1	0	0	0	0
x_4	0	1	1	1	1	1	0	1
x_5	0	0	0	1	1	1	0	0
x_6	0	1	0	1	1	1	1	1
x_7	0	0	0	0	0	1	1	1
x_8	1	1	0	1	0	1	1	1

- проанализируем матрицу достижимости Q – она содержит три пересекающиеся блока, заполненных единицами (выделены ниже в таблице):

Q	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	1	1	0	0	0	0	0	1
x_2	1	1	1	1	0	1	0	1
x_3	0	1	1	1	0	0	0	0
x_4	0	1	1	1	1	1	0	1
x_5	0	0	0	1	1	1	0	0
x_6	0	1	0	1	1	1	1	1
x_7	0	0	0	0	0	1	1	1
x_8	1	1	0	1	0	1	1	1

Видно, что эти блоки «опираются» на множества вершин $X_1 = \{x_2, x_3, x_4\}$, $X_2 = \{x_4, x_5, x_6\}$ и $X_3 = \{x_6, x_7, x_8\}$, которые упоминались ранее. Отсутствие блока, соответствующего множеству вершин $X_4 = \{x_1, x_2, x_8\}$, восполнимо: для этого надо сделать перестановки нужных одноименных столбцов и строк матрицы достижимости:

Q	x_1	x_2	x_8	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	1	1	1	0	0	0	0	0
x_2	1	1	1	1	1	0	1	0
x_8	1	1	1	0	1	0	1	1
x_3	0	1	0	1	1	0	0	0
x_4	0	1	1	1	1	1	1	0
x_5	0	0	0	0	1	1	1	0
x_6	0	1	1	0	1	1	1	1
x_7	0	0	1	0	0	0	1	1

- попытаемся найти блоки с бо́льшим числом вершин. Для этого выполним одновременные перестановки одноименных столбцов и строк, причем число таких перестановок не более (8!). На определенном этапе получаем на главной диагонали блок, содержащий четыре вершины $\{x_2, x_4, x_6, x_8\}$:

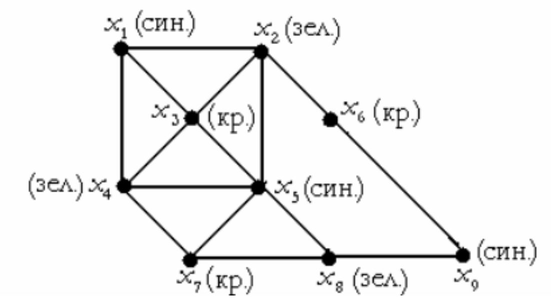
Q	x_3	x_2	x_4	x_6	x_8	x_7	x_1	x_5
x_3	1	1	1	0	0	0	0	0
x_2	1	1	1	1	1	0	1	0
x_4	1	1	1	1	1	0	0	1
x_6	0	1	1	1	1	1	0	1
x_8	0	1	1	1	1	1	1	0
x_7	0	0	0	1	1	1	0	0
x_1	0	1	0	0	1	0	1	0
x_5	0	0	1	1	0	0	0	1

Попытки с помощью дополнительных перестановок получить аналогичный блок с бóльшим числом вершин неуспешны. Следовательно, $\rho(G_7) = 4$.

Хроматическое число графа

Если удается множество вершин связного графа $G = <X, R>$ разбить на подмножества X_i попарно несмежных вершин, то каждому подмножеству X_i можно выделить один цвет. Наименьшее число таких подмножеств (или цветов), при котором никакие две смежные вершины не окрашены в один цвет, называют *хроматическим числом* графа G и обозначают $\gamma(G)$.

На рисунке дан пример раскрашенного графа G_8 (видно, что его хроматическое число равно 3):



Есть некоторые оценки хроматического числа, которые можно принять без дополнительной обработки. Так, хроматическое число равно:

1) для полного n–вершинного графа – n;
2) для пустого графа – 1;
3) для графа типа дерево – 2.

Существует алгоритм поиска хроматического числа графа, использующий степени вершин:

1) вычислить степени вершин. Принять $k = 1$;
2) просмотреть вершины в порядке убывания степеней и окрасить первую неокрашенную вершину в цвет № k;
3) просмотреть вершины в порядке убывания степеней и окрасить в цвет № k все вершины, которые несмежны вершинам, уже окрашенным в цвет № k;
4) если все вершины окрашены, то k – искомое хроматическое число, иначе $k = k + 1$, перейти к п. 2.

Например, требуется для графа G_8 рассчитать хроматическое число:

Решение:

1) рассчитаем степени вершин:

Вершина	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
Степень δ	3	4	4	3	5	2	3	3	2

2) упорядочим вершины по невозрастанию их степеней:

Вершина	x_5	x_2	x_3	x_1	x_4	x_7	x_8	x_6	x_9
Степень δ	5	4	4	3	3	3	3	2	2

3) $k = 1$:

Вершина	x_5	x_2	x_3	x_1	x_4	x_7	x_8	x_6	x_9
Степень δ	5	4	4	3	3	3	3	2	2
Окраска k	1			1				1	1

4) $k = 2$:

Вершина	x_5	x_2	x_3	x_1	x_4	x_7	x_8	x_6	x_9
Степень δ	5	4	4	3	3	3	3	2	2
Окраска k	1	2		1	2		2	1	1

5) k = 3:

Вершина	x_5	x_2	x_3	x_1	x_4	x_7	x_8	x_6	x_9
Степень δ	5	4	4	3	3	3	3	2	2
Окраска k	1	2	3	1	2	3	2	1	1

Таким образом, $\gamma(G_8) = k = 3$. Если принять, что $k = 1$ соответствует красному цвету, $k = 2$ – зеленому, а $k = 3$ – синему, мы получим ту раскраску, которая указана в примере.

Литература: [1], с. 92–96.
Контрольные вопросы для самопроверки:
1. Какие числа графа рассмотрены в работе?
2. Для заданного графа рассчитать все числовые характеристики, рассмотренные в работе.

9.3. Задание к практической работе

Задан граф. Рассчитать для него число компонент связности, цикломатическое и хроматическое числа, плотность.

9.4. Методические указания и порядок выполнения работы

1) ознакомиться с заданием к практической работе (п. 9.3);
2) прочитать соответствующий теоретический материал из теоретического источника [1], с. 92–96;
3) изучить типовые примеры решения требуемых задач, рассмотренные в разделе 9.2.

9.5. Требования к отчету и защите

Формирование отчета и защита работы не требуется.

10. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 9. ОСНОВНЫЕ АЛГОРИТМЫ НА ГРАФАХ

10.1. Общие сведения

Цель: получение практических навыков реализации основных прикладных алгоритмов на графах.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: используется инструментарий медиаклассов.

Условия допуска к выполнению: к практическому занятию допускаются все пришедшие на него.

Критерии положительной оценки: участие в решении задач преподавателем у доски отмечается в учетной карточке.

Планируемое время выполнения:
Аудиторное время выполнения (под руководством преподавателя): 3 акад. ч.
Время самостоятельной подготовки: 0,5 акад. ч.

10.2. Теоретическое введение

На графах можно решать задачи, имеющие прикладное значение, в частности, в логистике различных предметных областей. Алгоритмы таких задач рассмотрены в данной работе: поиск остова графа минимального веса, поиск кратчайших путей, поиск критического пути, поиск максимального потока.

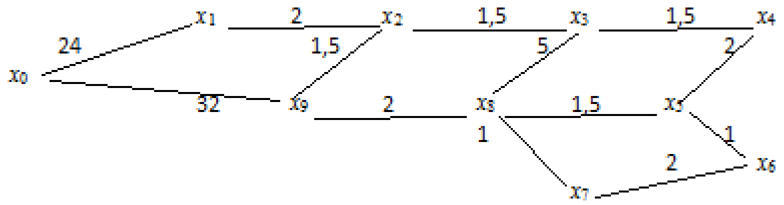
Поиск остова графа минимального веса

Задача поиска остова взвешенного графа имеет свое развитие, когда искомый остов имеет минимальный вес. Для этого используются алгоритмы Дейкстры и Краскала.

В алгоритме Дейкстры последовательность шагов следующая:

1) выбрать начальную вершину среди вершин заданного графа;
2) выбрать ребро наименьшего веса, инцидентное начальной вершине, и сформировать фрагмент, включив в него вторую концевую вершину ребра;
3) выбрать ребро наименьшего веса, инцидентное вершинам фрагмента и не являющееся петлей:
   - если вторая концевая вершина не принадлежит фрагменту, то включить ее и ребро во фрагмент остова;
   - если вторая концевая вершина принадлежит фрагменту, то исключить ребро из анализа (это ребро формирует цикл на графе);
4) если все вершины графа вошли во фрагмент остова, то конец, иначе перейти к шагу 3.

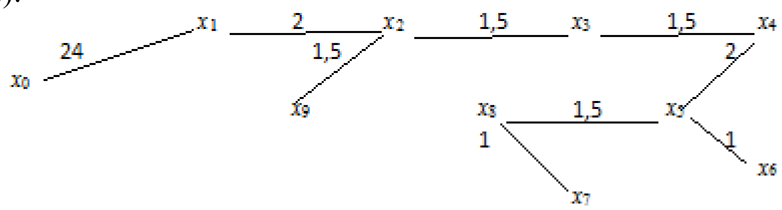
Например, требуется найти минимальные по протяженности маршруты вывоза контейнеров бытового мусора (x_i) района на полигон (x_0). На схеме (граф G_9) контейнеры располагаются в узлах уличной сети x_i (на ребрах указана протяженность участков уличной сети в условных единицах):



В таблице приведены результаты поиска остова минимального веса по шагам итерации:

Вершины графа	X	Шаг итерации								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
	x_0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	x_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	x_2		1	1	1	1	1	1	1	1
	x_3			1	1	1	1	1	1	1
	x_4				1	1	1	1	1	1
	x_5						1	1	1	1
	x_6							1	1	1
	x_7									1
	x_8								1	1
	x_9					1	1	1	1	1

На рисунке по результатам поиска показан остов графа G_9 минимального веса (его протяженность 36 у.е.):



Суммарная протяженность $L_{общ.}$ переброски содержимого всех n контейнеров *одной* автомашиной на полигон и возвращение освобожденных контейнеров обратно равна:

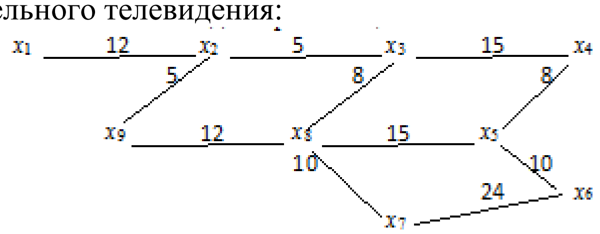
$L_{общ.}$ = 2*(9*24 + 8*2 + 1,5 + 6*1,5 + 5*1,5 + 4*2 + 1+ 2*1,5 + 1) = 528 у.е.

В алгоритме Краскала выполняются следующие шаги:

1) установить частичный порядок по весу ребер графа;

2) выбрать ребро минимального веса, не являющееся петлей, сформировать фрагмент остова;
3) выбрать ребро минимального веса, не являющееся петлей и не принадлежащее фрагменту остова:
   - если фрагменту остова принадлежит одна вершина ребра, то вторую концевую вершину и ребро включить во фрагмент остова;
   - если ни одна концевая вершина ребра не принадлежит фрагменту остова, то сформировать фрагмент другого остова;
   - если концевые вершины принадлежат различным остовам, то соединить фрагменты остовов;
   - если ребро формирует цикл, не включать его во фрагмент остова;
4) если все вершины графа вошли во фрагмент остова, то конец, иначе перейти к шагу 3.

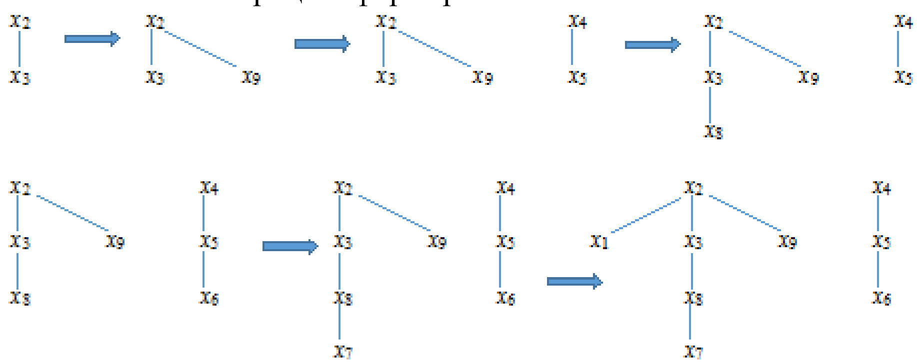
Например, для района города (граф G_{10}) проложить минимальный по протяженности кабель для организации кабельного телевидения:



Частичный порядок ребер исходного графа указан в таблице:

Вершины	x_2,x_3	x_2,x_9	x_4,x_5	x_3,x_8	x_5,x_6	x_7,x_8	x_1,x_2	x_8,x_9	x_3,x_4	x_5,x_8	x_6,x_7
Длина	5	5	8	8	10	10	12	12	15	15	24

Далее показан пошаговый процесс формирования остова минимального веса:



На следующем шаге итерации должно быть выбрано ребро, которое соединяет вершины x_8 и x_9, однако в этом случае появился бы цикл в графе, поэтому данное ребро отбрасывается.

Следующее присоединения ребра дает остов:

Ребра с остальными ребрами также игнорируются по причине образования ими циклов в графе.

Поскольку все вершины исходного графа выбраны, формирование остова минимального веса завершено.

Поиск кратчайших путей в графе

Рассмотрим алгоритм Флойда для поиска кратчайших путей между любой парой вершин графа, который использует сравнение двух простых маршрутов[3]. При решении задачи используются две матрицы:

1) матрица *кратчайших путей* L^p: ее структура аналогична матрице смежности, но вместо 1 и 0 задаются длины ребер, если вершины смежны, или ставится символ ∞ в противном случае. При p = 0 матрица кратчайших путей есть матрица весов графа;
2) матрица *кратчайших переходов* ν^p, структура которой аналогична матрице смежности, но столбцы вначале заполняются своими названиями. При p = 0 матрица кратчайших переходов есть матрица переходов графа, она показывает концевые вершины перехода из x_i в x_j, а на p-м шаге итерации в ней происходит замена вершины-стока вершиной кратчайшего перехода.

Вершины графа исследуются последовательно, и каждая из них на определенном шаге принимается за *базовую*, при этом строку и столбец матрицы весов для базовой вершины также называют *базовыми*. Если в качестве базовой использовать последовательно все вершины графа, начиная с x_0 до x_n, то за $p = n–1$ шагов можно найти кратчайшие пути между любой парой вершин.

Алгоритм Флойда включает следующие шаги:

1) составить матрицу весов и матрицу переходов, принять $p = 0$;

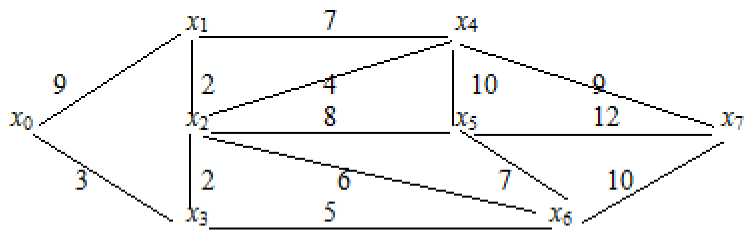
2) определить вершину p базовой и выделить в матрице весов базовые строку и столбец;

3) выделить также строки и столбцы матрицы весов, элементы которых в базовых строке и столбце имеют значение ∞;

4) сравнить каждый не выделенный элемент l_{ij} матрицы весов с суммой $S = l_{ip} + l_{pj}$: если $S < l_{ij}$, то $l_{ij} = S$, $\nu_{ij} = x_p$;

5) если $p < n$, то принять $p = p + 1$ и вернуться к шагу 2, иначе конец.

Например, требуется найти кратчайшие маршруты между всеми вершинами графа G_{11}:



Для начала составим матрицы весов L и переходов ν :

L	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	0	9	∞	3	∞	∞	∞	∞
x_1	9	0	2	∞	7	∞	∞	∞
x_2	∞	2	0	2	4	8	6	∞
x_3	3	∞	2	0	∞	∞	5	∞
x_4	∞	7	4	∞	0	10	∞	9
x_5	∞	∞	8	∞	10	0	7	12
x_6	∞	∞	6	5	∞	7	0	10
x_7	∞	∞	∞	∞	9	12	10	0

ν	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_2	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_6	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_7	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7

Примем p = 0 и выделим заливкой в матрице весов базовые столбец и строку:

L^0	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	0	9	∞	3	∞	∞	∞	∞

[3] Простой маршрут каждую вершину использует только один раз

x_1	9	0	2	∞	7	∞	∞	∞
x_2	∞	2	0	2	4	8	6	∞
x_3	3	∞	2	0	∞	∞	5	∞
x_4	∞	7	4	∞	0	10	∞	9
x_5	∞	∞	8	∞	10	0	7	12
x_6	∞	∞	6	5	∞	7	0	10
x_7	∞	∞	∞	∞	9	12	10	0

В базовых столбце и строке найдем элементы со знаком ∞ и выделим более плотной заливкой соответствующие строки и столбцы:

L^0	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	0	9	∞	3	∞	∞	∞	∞
x_1	9	0	2	∞	7	∞	∞	∞
x_2	∞	2	0	2	4	8	6	∞
x_3	3	∞	2	0	∞	∞	5	∞
x_4	∞	7	4	∞	0	10	∞	9
x_5	∞	∞	8	∞	10	0	7	12
x_6	∞	∞	6	5	∞	7	0	10
x_7	∞	∞	∞	∞	9	12	10	0

Остались не выделенными элементы l_{13}=∞ и l_{31}=∞. Поскольку матрица симметрична относительно главной диагонали, можно работать только с одним из элементов, например, с l_{13}: $l_{10}+l_{03}$=9+3=12. Так как 12<∞, согласно алгоритму выполняем действия: l_{13}=12 и $\nu_{13} = x_0$ (измененные элементы здесь и далее выделены полужирным курсивом):

L^1	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	0	9	∞	3	∞	∞	∞	∞
x_1	9	0	2	***12***	7	∞	∞	∞
x_2	∞	2	0	2	4	8	6	∞
x_3	3	***12***	2	0	∞	∞	5	∞
x_4	∞	7	4	∞	0	10	∞	9
x_5	∞	∞	8	∞	10	0	7	12
x_6	∞	∞	6	5	∞	7	0	10
x_7	∞	∞	∞	∞	9	12	10	0

ν^1	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	x_0	x_1	x_2	$\boldsymbol{x_0}$	x_4	x_5	x_6	x_7
x_2	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	x_0	$\boldsymbol{x_0}$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_6	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_7	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7

При p=1 меняем базовый элемент и выполняем аналогичные исследования:

L^1	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	0	9	∞	3	∞	∞	∞	∞
x_1	9	0	2	12	7	∞	∞	∞
x_2	∞	2	0	2	4	8	6	∞
x_3	3	12	2	0	∞	∞	5	∞
x_4	∞	7	4	∞	0	10	∞	9
x_5	∞	∞	8	∞	10	0	7	12
x_6	∞	∞	6	5	∞	7	0	10
x_7	∞	∞	∞	∞	9	12	10	0

Выделим более плотной заливкой строки и столбцы, для которых базовые элементы имеют значение ∞:

L^1	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	0	9	∞	3	∞	∞	∞	∞
x_1	9	0	2	12	7	∞	∞	∞
x_2	∞	2	0	2	4	8	6	∞
x_3	3	12	2	0	∞	∞	5	∞
x_4	∞	7	4	∞	0	10	∞	9
x_5	∞	∞	8	∞	10	0	7	12
x_6	∞	∞	6	5	∞	7	0	10
x_7	∞	∞	∞	∞	9	12	10	0

Остались не выделенными элементы (ограничимся областью выше главной диагонали) $l_{02}=\infty$, $l_{03}=3$, $l_{04}=\infty$, $l_{23}=2$, $l_{24}=4$, $l_{34}=\infty$:

l_{02}: $l_{01}+l_{12}=9+2=11$. Так как $11<\infty$, согласно алгоритму выполняем действия: $l_{02}=11$ и $\nu_{02}=x_1$,

l_{03}: $l_{01}+l_{13}=9+12=21$. Так как $21>3$, согласно алгоритму, ничего в обеих матрицах не меняется,

l_{04}: $l_{01}+l_{14}=9+7=16$. Так как $16<\infty$, согласно алгоритму выполняем действия: $l_{04}=16$ и $\nu_{04}=x_1$,

l_{23}: $l_{21}+l_{13}=2+12=14$. Так как $14>2$, согласно алгоритму, ничего в обеих матрицах не меняется,

l_{24}: $l_{21}+l_{14}=2+7=9$. Так как $9>4$, согласно алгоритму, ничего в обеих матрицах не меняется,

l_{34}: $l_{31}+l_{14}=3+7=10$. Так как $10<\infty$, согласно алгоритму выполняем действия: $l_{34}=10$ и $\nu_{34}=x_1$.

Результаты исследований представлены в матрицах:

L^2	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	0	9	***11***	3	***16***	∞	∞	∞
x_1	9	0	2	12	7	∞	∞	∞
x_2	***11***	2	0	2	4	8	6	∞
x_3	3	12	2	0	***10***	∞	5	∞
x_4	***16***	7	4	***10***	0	10	∞	9
x_5	∞	∞	8	∞	10	0	7	12
x_6	∞	∞	6	5	∞	7	0	10
x_7	∞	∞	∞	∞	9	12	10	0

ν^2	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	x_0	x_1	$\boldsymbol{x_1}$	x_3	$\boldsymbol{x_1}$	x_5	x_6	x_7
x_1	x_0	x_1	x_2	x_0	x_4	x_5	x_6	x_7
x_2	$\boldsymbol{x_1}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	x_0	x_0	x_2	x_3	$\boldsymbol{x_1}$	x_5	x_6	x_7
x_4	$\boldsymbol{x_1}$	x_1	x_2	$\boldsymbol{x_1}$	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_6	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_7	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7

Дальнейшие расчеты выполним без дополнительных комментариев в соответствии с изложенной схемой.

$p=2$

L^2	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	0	9	11	3	16	∞	∞	∞
x_1	9	0	2	12	7	∞	∞	∞
x_2	11	2	0	2	4	8	6	∞
x_3	3	12	2	0	10	∞	5	∞
x_4	16	7	4	10	0	10	∞	9
x_5	∞	∞	8	∞	10	0	7	12
x_6	∞	∞	6	5	∞	7	0	10
x_7	∞	∞	∞	∞	9	12	10	0

Остались не выделенными элементы:
l_{01}=9: $l_{02}+l_{21}$=11+2=13>9;
l_{03}=3: $l_{02}+l_{23}$=11+2=13>9;
l_{04}=16: $l_{02}+l_{24}$=11+4=15<16, следовательно, l_{04}=15, $\nu_{05}=x_2$;
$l_{05}=\infty$: $l_{02}+l_{25}$=11+8=19<∞, следовательно, l_{05}=19, $\nu_{05}=x_2$;
$l_{06}=\infty$: $l_{02}+l_{26}$=11+6=17<∞, следовательно, l_{06}=17, $\nu_{06}=x_2$;
l_{13}=12: $l_{12}+l_{23}$=2+2=4<12, следовательно, l_{13}=4, $\nu_{13}=x_2$;
l_{14}=7: $l_{12}+l_{24}$=2+4=6<7, следовательно, l_{14}=6, $\nu_{14}=x_2$;
$l_{15}=\infty$: $l_{12}+l_{25}$=2+8=10<∞, следовательно, l_{15}=10, $\nu_{15}=x_2$;
$l_{16}=\infty$: $l_{12}+l_{26}$ =2+6=8<∞, следовательно, l_{16}=8, $\nu_{16}=x_2$;
l_{34}=10: $l_{32}+l_{24}$=2+4=6<10, следовательно, l_{34}=6, $\nu_{34}=x_2$;
$l_{35}=\infty$: $l_{32}+l_{25}$=2+8=10<∞, следовательно, l_{35}=10, $\nu_{35}=x_2$;
l_{36}=5: $l_{32}+l_{26}$=2+6=8>5;
l_{45}=10: $l_{42}+l_{25}$=4+8=12>10;
$l_{46}=\infty$: $l_{42}+l_{26}$=4+6=10<∞, следовательно, l_{46}=10, $\nu_{46}=x_2$;
l_{56}=7: $l_{52}+l_{26}$=8+6=14>7.
Результаты исследований:

L^3	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	0	9	11	3	***15***	***19***	***17***	∞
x_1	9	0	2	***4***	***6***	***10***	***8***	∞
x_2	11	2	0	2	4	8	6	∞
x_3	3	***4***	2	0	***6***	***10***	5	∞
x_4	***15***	***6***	4	***6***	0	10	***10***	9
x_5	***19***	***10***	8	***10***	10	0	7	12
x_6	***17***	***8***	6	5	***10***	7	0	10
x_7	∞	∞	∞	∞	9	12	10	0

ν^3	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	x_0	x_1	x_1	x_3	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_2}$	x_7
x_1	x_0	x_1	x_2	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_2}$	x_7
x_2	x_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	x_0	$\boldsymbol{x_2}$	x_2	x_3	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_2}$	x_6	x_7
x_4	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_2}$	x_2	$\boldsymbol{x_2}$	x_4	x_5	$\boldsymbol{x_2}$	x_7
x_5	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_2}$	x_2	$\boldsymbol{x_2}$	x_4	x_5	x_6	x_7
x_6	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_2}$	x_2	x_3	x_2	x_5	x_6	x_7
x_7	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7

p=3

L^3	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	0	9	11	3	15	19	17	∞
x_1	9	0	2	4	6	10	8	∞
x_2	11	2	0	2	4	8	6	∞
x_3	3	4	2	0	6	10	5	∞
x_4	15	6	4	6	0	10	10	9
x_5	19	10	8	10	10	0	7	12
x_6	17	8	6	5	10	7	0	10
x_7	∞	∞	∞	∞	9	12	10	0

Остались не выделенными элементы:
l_{01}=9: $l_{03}+l_{31}$=3+4=7<9, следовательно, l_{01}=7, $\nu_{01}=x_3$;
l_{02}=11: $l_{03}+l_{32}$=3+2=5<11, следовательно, l_{02}=5, $\nu_{02}=x_3$;
l_{04}=15: $l_{03}+l_{34}$=3+6=9<15, следовательно, l_{04}=9, $\nu_{04}=x_3$;
l_{05}=19: $l_{03}+l_{35}$=3+10=13<19, следовательно, l_{05}=13, $\nu_{05}=x_3$;
l_{06}=17: $l_{03}+l_{36}$=3+5=8<17, следовательно, l_{06}=8, $\nu_{06}=x_3$;
l_{12}=2: $l_{13}+l_{32}$=4+2=6>2;
l_{14}=6: $l_{13}+l_{34}$=4+6=10>6;
l_{15}=10: $l_{13}+l_{35}$=4+10=14>10;
l_{16}=8: $l_{13}+l_{36}$=4+5=9>8;
l_{24}=4: $l_{23}+l_{34}$=2+6=8>4;
l_{25}=8: $l_{23}+l_{35}$=2+10=12>8;

l_{26}=6: $l_{23}+l_{36}$=2+5=7>6;
l_{45}=10: $l_{43}+l_{35}$=6+10=16>10;
l_{46}=10: $l_{43}+l_{36}$=6+5=11>10;
l_{56}=7: $l_{53}+l_{36}$=10+5=15>7.

Результаты исследований:

L^4	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	0	***7***	***5***	3	***9***	***13***	***8***	∞
x_1	***7***	0	2	4	6	10	8	∞
x_2	***5***	2	0	2	4	8	6	∞
x_3	3	4	2	0	6	10	5	∞
x_4	***9***	6	4	6	0	10	10	9
x_5	***13***	10	8	10	10	0	7	12
x_6	***8***	8	6	5	10	7	0	10
x_7	∞	∞	∞	∞	9	12	10	0

ν^4	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	x_0	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_3}$	x_3	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_3}$	x_7
x_1	$\boldsymbol{x_3}$	x_1	x_2	x_2	x_2	x_2	x_2	x_7
x_2	$\boldsymbol{x_3}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	x_0	x_2	x_2	x_3	x_2	x_2	x_6	x_7
x_4	$\boldsymbol{x_3}$	x_2	x_2	x_2	x_4	x_5	x_2	x_7
x_5	$\boldsymbol{x_3}$	x_2	x_2	x_2	x_4	x_5	x_6	x_7
x_6	$\boldsymbol{x_3}$	x_2	x_2	x_3	x_2	x_5	x_6	x_7
x_7	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7

p=4

L^4	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	0	7	5	3	9	13	8	∞
x_1	7	0	2	4	6	10	8	∞
x_2	5	2	0	2	4	8	6	∞
x_3	3	4	2	0	6	10	5	∞
x_4	9	6	4	6	0	10	10	9
x_5	13	10	8	10	10	0	7	12
x_6	8	8	6	5	10	7	0	10
x_7	∞	∞	∞	∞	9	12	10	0

Остались не выделенными элементы:
l_{01}=7: $l_{04}+l_{41}$=9+6=15>7;
l_{02}=5: $l_{04}+l_{42}$=9+4=13>5;
l_{03}=3: $l_{04}+l_{43}$=9+6=15>3;
l_{05}=13: $l_{04}+l_{45}$=9+10=19>13;
l_{06}=8: $l_{04}+l_{46}$=9+10=19>8;
l_{07}=∞: $l_{04}+l_{47}$=9+9=18<∞, следовательно, l_{07}=18, $\nu_{07}=x_4$;
l_{12}=2: $l_{14}+l_{42}$=6+4=10>2;
l_{13}=4: $l_{14}+l_{43}$=6+6=12>4;
l_{15}=10: $l_{14}+l_{45}$=6+10=16>10;
l_{16}=8: $l_{14}+l_{46}$=6+10=16>8;
l_{17}=∞: $l_{14}+l_{47}$=6+9=15<∞, следовательно, l_{17}=15, $\nu_{17}=x_4$;
l_{23}=2: $l_{24}+l_{43}$=4+6=10>2;
l_{25}=8: $l_{24}+l_{45}$=4+10=14>8;
l_{26}=6: $l_{24}+l_{46}$=4+10=14>6;
l_{27}=∞: $l_{24}+l_{47}$=4+9=13<∞, следовательно, l_{27}=13, $\nu_{27}=x_4$;
l_{35}=10: $l_{34}+l_{45}$=6+10=16>10;
l_{36}=5: $l_{34}+l_{46}$=6+10=16>5;
l_{37}=∞: $l_{34}+l_{47}$=6+9=15<∞, следовательно, l_{37}=15, $\nu_{37}=x_4$;
l_{56}=7: $l_{54}+l_{46}$=10+10=20>7;
l_{57}=12: $l_{54}+l_{47}$=10+9=19>12;
l_{67}=10: $l_{64}+l_{47}$ =10+9=19>10.
Результаты исследований:

L^5	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	0	7	5	3	9	13	8	***18***
x_1	7	0	2	4	6	10	8	***15***
x_2	5	2	0	2	4	8	6	***13***
x_3	3	4	2	0	6	10	5	***15***
x_4	9	6	4	6	0	10	10	9
x_5	13	10	8	10	10	0	7	12
x_6	8	8	6	5	10	7	0	10
x_7	***18***	***15***	***13***	***15***	9	12	10	0

v^5	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	x_0	x_3	x_3	x_3	x_3	x_3	x_3	$\mathbf{x_4}$
x_1	x_3	x_1	x_2	x_2	x_2	x_2	x_2	$\mathbf{x_4}$
x_2	x_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\mathbf{x_4}$
x_3	x_0	x_2	x_2	x_3	x_2	x_2	x_6	$\mathbf{x_4}$
x_4	x_3	x_2	x_2	x_2	x_4	x_5	x_2	x_7
x_5	x_3	x_2	x_2	x_2	x_4	x_5	x_6	x_7
x_6	x_3	x_2	x_2	x_3	x_2	x_5	x_6	x_7
x_7	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_4}$	x_4	x_5	x_6	x_7

p=5

L^5	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	0	7	5	3	9	13	8	18
x_1	7	0	2	4	6	10	8	15
x_2	5	2	0	2	4	8	6	13
x_3	3	4	2	0	6	10	5	15
x_4	9	6	4	6	0	10	10	9
x_5	13	10	8	10	10	0	7	12
x_6	8	8	6	5	10	7	0	10
x_7	18	15	13	15	9	12	10	0

Остались не выделенными элементы:
l_{01}=7: $l_{05}+l_{51}$=13+10=23>7;
l_{02}=5: $l_{05}+l_{52}$=13+8=21>5;
l_{03}=3: $l_{05}+l_{53}$=13+2=15>3;
l_{04}=9: $l_{05}+l_{54}$=13+10=23>9;
l_{06}=8: $l_{05}+l_{56}$=13+7=20>8;
l_{07}=18: $l_{05}+l_{57}$=13+12=25>18;
l_{12}=2: $l_{15}+l_{52}$=10+8=18>2;
l_{13}=4: $l_{15}+l_{53}$=10+10=20>4;
l_{14}=6: $l_{15}+l_{54}$=10+10=20>6;
l_{16}=8: $l_{15}+l_{56}$=10+7=17>8;
l_{17}=15: $l_{15}+l_{57}$=10+12=27>15;
l_{23}=2: $l_{25}+l_{53}$=8+10=18>2;
l_{24}=4: $l_{25}+l_{54}$=8+10=18>4;
l_{26}=6: $l_{25}+l_{56}$=8+7=15>6;
l_{27}=13: $l_{25}+l_{57}$=8+12=20>13;
l_{34}=6: $l_{35}+l_{54}$=10+10=20>10;
l_{36}=5: $l_{35}+l_{56}$=10+7=17>5;
l_{37}=15: $l_{35}+l_{57}$=10+12=22>15;
l_{46}=10: $l_{45}+l_{56}$=10+7=17>10;
l_{47}=9: $l_{45}+l_{57}$=10+12=22>9;
l_{67}=10: $l_{65}+l_{57}$=7+12=19>10.
Очевидно, никаких изменений в обеих матрицах не следует.

p=6

L^6	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	0	7	5	3	9	13	8	18
x_1	7	0	2	4	6	10	8	15
x_2	5	2	0	2	4	8	6	13
x_3	3	4	2	0	6	10	5	15
x_4	9	6	4	6	0	10	10	9
x_5	13	10	8	10	10	0	7	12

x_6	8	8	6	5	10	7	0	10
x_7	18	15	13	15	9	12	10	0

Остались не выделенными элементы:
l_{01}=7: l_{06}+l_{61}=8+8=16>7;
l_{02}=5: l_{06}+l_{62}=8+6=14>5;
l_{03}=3: l_{06}+l_{63}=8+5=13>3;
l_{04}=9: l_{06}+l_{64}=8+10=18>9;
l_{05}=13: l_{06}+l_{65}=8+7=15>13;
l_{07}=18: l_{06}+l_{67}=8+10=18=18;
l_{12}=2: l_{16}+l_{62}=8+6=14>2;
l_{13}=4: l_{16}+l_{63}=8+5=13>4;
l_{14}=6: l_{16}+l_{64}=8+10=18>6;
l_{15}=10: l_{16}+l_{65}=8+7=15>10;
l_{17}=15: l_{16}+l_{67}=8+10=18>15;
l_{23}=2: l_{26}+l_{63}=6+5=11>2;
l_{24}=4: l_{26}+l_{64}=6+10=16>4;
l_{25}=6: l_{26}+l_{65}=6+7=13>6;
l_{27}=13: l_{26}+l_{67}=6+10=16>13;
l_{34}=6: l_{36}+l_{64}=5+10=15>6;
l_{35}=10: l_{36}+l_{65}=5+7=12>10;
l_{37}=15: l_{36}+l_{67}=5+10=15=15;
l_{45}=10: l_{46}+l_{65}=10+7=17>10;
l_{47}=9: l_{46}+l_{67}=10+10=20>9;
l_{57}=12: l_{56}+l_{67}=7+10=17>12.
Очевидно, никаких изменений в обеих матрицах не следует.

p=7

L^7	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	0	7	5	3	9	13	8	18
x_1	7	0	2	4	6	10	8	15
x_2	5	2	0	2	4	8	6	13
x_3	3	4	2	0	6	10	5	15
x_4	9	6	4	6	0	10	10	9
x_5	13	10	8	10	10	0	7	12
x_6	8	8	6	5	10	7	0	10
x_7	18	15	13	15	9	12	10	0

Остались не выделенными элементы:
l_{01}=7: l_{07}+l_{71}=18+15=33>7;
l_{02}=5: l_{07}+l_{72}=18+13=31>5;
l_{03}=3: l_{07}+l_{73}=18+15=33>3;
l_{04}=9: l_{07}+l_{74}=18+9=27>9;
l_{05}=13: l_{07}+l_{75}=18+12=30>13;
l_{06}=8: l_{07}+l_{76}=18+10=28>18;
l_{12}=2: l_{17}+l_{72}=15+13=28>2;
l_{13}=4: l_{17}+l_{73}=15+15=30>4;
l_{14}=6: l_{17}+l_{74}=15+9=24>6;
l_{15}=10: l_{17}+l_{75}=15+12=27>10;
l_{16}=8: l_{17}+l_{76}=15+10=25>15;
l_{23}=2: l_{27}+l_{73}=13+15=28>2;
l_{24}=4: l_{27}+l_{74}=13+9=22>4;

l_{25}=8: l_{27}+l_{75}=13+12=25>8;
l_{26}=6: l_{27}+l_{76}=13+10=23>6;
l_{34}=6: l_{37}+l_{74}=15+9=24>6;
l_{35}=10: l_{37}+l_{75}=15+12=27>10;
l_{36}=5: l_{37}+l_{76}=15+10=25>5;
l_{45}=10: l_{47}+l_{75}=9+12=21>10;
l_{46}=10: l_{47}+l_{76}=9+10=19>10;
l_{56}=7: l_{57}+l_{76}=7+10=17>12.

Очевидно, никаких изменений в обеих матрицах не следует.

Таким образом, результат решения задачи совпадает с результатом при p = 4, поскольку последние изменения в прокладке кратчайших маршрутов для данного графа завершились после исследования x_4 в качестве базовой вершины:

L^7	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	0	7	5	3	9	13	8	18
x_1	7	0	2	4	6	10	8	15
x_2	5	2	0	2	4	8	6	13
x_3	3	4	2	0	6	10	5	15
x_4	9	6	4	6	0	10	10	9
x_5	13	10	8	10	10	0	7	12
x_6	8	8	6	5	10	7	0	10
x_7	18	15	13	15	9	12	10	0

ν^7	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	x_0	x_3	x_3	x_3	$^{2}\boldsymbol{x_3}$	x_3	x_3	$^{1}\boldsymbol{x_4}$
x_1	x_3	x_1	x_2	x_2	x_2	x_2	x_2	x_4
x_2	x_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_4
x_3	x_0	x_2	x_2	x_3	$^{3}\boldsymbol{x_2}$	x_2	x_6	x_4
x_4	x_3	x_2	x_2	x_2	x_4	x_5	x_2	x_7
x_5	x_3	x_2	x_2	x_2	x_4	x_5	x_6	x_7
x_6	x_3	x_2	x_2	x_3	x_2	x_5	x_6	x_7
x_7	x_4	x_4	x_4	x_4	x_4	x_5	x_6	x_7

По матрице L^7 можно найти длину кратчайшего перехода между любой парой вершин исходного графа. Например, между вершинами x_0 и x_7 длина кратчайшего перехода l_{07} = 18, между вершинами x_1 и x_6 длина кратчайшего перехода l_{16} = 8.

По матрице ν^7 можно сформировать переход, соответствующий кратчайшему маршруту. Рассмотрим эту задачу на примере вершин x_0 и x_7 (вершины перехода выделены в результирующей матрице переходов зеленым цветом):

- переход x_0 - x_7 выполняется через вершину x_4, смежную с вершиной x_7, – получаем фрагмент перехода (x_4, x_7) длиной 9;
- переход x_0 – x_4 выполняется через вершину x_3, смежную с вершиной x_0, – получаем фрагмент перехода (x_0, x_3) длиной 3;
- переход x_3 – x_4 выполняется через вершину x_2, смежную с обеими вершинами, – получаем фрагмент перехода (x_3, x_2, x_4) длиной 2 + 4 = 6.

В результате «соединения» фрагментов переходов получается переход ν_{07} = (x_0, x_3, x_2, x_4, x_7).

Для вершин x_1 и x_6 переход x_1 - x_6 выполняется через вершину x_2, смежную обеим вершинам, – сразу получаем результат – переход ν_{16} = (x_1, x_2, x_6).

Поиск максимального потока в графе

Объем информации, энергии или вещества, передаваемый в сети от узла x_i к узлу x_j, называется *потоком* и обозначается φ_{ij}.

Наибольший поток, который может пропустить дуга (x_i, x_j), называют *пропускной способностью* дуги и обозначают c_{ij}. Очевидно, что 0 <= φ_{ij} <= c_{ij}. При φ_{ij} < c_{ij} дуга (x_i, x_j) называется *ненасыщенной*, при φ_{ij} = c_{ij} дуга (x_i, x_j) называется *насыщенной*.

В сети выполняются следующие условия:

1) в вершине-истоке сети x_0 величина потока есть сумма потоков по всем дугам, исходящим из вершины x_0;
2) в вершине-стоке сети x_k величина потока есть сумма потоков по всем дугам, заходящим в вершину x_k;

3) для любой промежуточной вершины x_s сумма исходящих потоков равна сумме заходящих потоков.

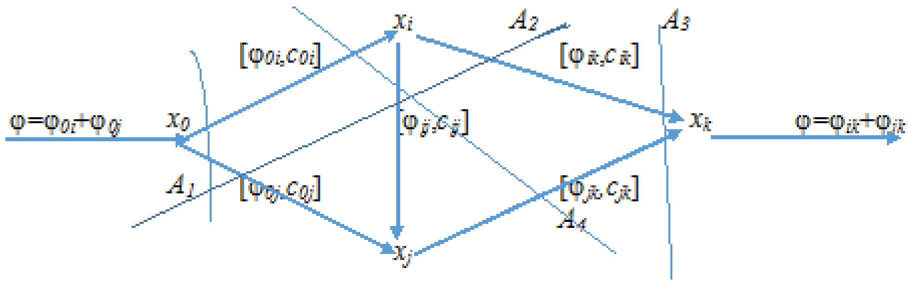
Задача поиска максимального потока в сети включает две подзадачи: расчет максимального потока и распределение его по дугам сети.

Расчет максимального потока

Решение этой задачи осуществляется с использованием понятия разреза графа.

Если множество вершин графа X разбить на два непересекающихся подмножества, то множество линий, для которых одни концевые вершины принадлежат одному подмножеству, а другие – другому, называется *разрезом* A.

На рисунке показана сеть с четырьмя разрезами A_i, содержащая вершину-исток x_0, вершину-сток x_k и две промежуточные вершины x_i и x_j. На каждой дуге в квадратных скобках приведены обозначения величины потока и пропускной способности соответствующей дуги:



Пропускная способность каждого разреза $c(A_i)$ равна сумме пропускных способностей дуг:

Разрез	Сформированные подмножества	Пропускная способность разреза $c(A_i)$
A_1	$\{x_0\}, \{x_i, x_j, x_k\}$	$c_{0i} + c_{0j}$
A_2	$\{x_0, x_i\}, \{x_j, x_k\}$	$c_{0j} + c_{ij} + c_{ki}$
A_3	$\{x_k\}, \{x_0, x_i, x_j\}$	$c_{ik} + c_{jk}$
A_4	$\{x_o, x_i\}, \{x_j, x_k\}$	$c_{0i} + c_{ij} + c_{jk}$

Максимальный поток φ_{max} в сети с заданными пропускными способностями дуг можно находить, вычисляя пропускные способности разрезов и выбирая среди них минимальное значение.

Распределение потока по дугам сети

Для решения этой задачи разработано несколько алгоритмов. Особое место среди них занимает алгоритм Форда-Фалкерсона, суть которого состоит в разметке вершин графа: метка у вершины графа указывает на возможность изменения потока через данную вершину (с помощью знаков +, если поток увеличивается, или -, если поток уменьшается), а также обозначает вершину-источник этого изменения.

Алгоритм Форда-Фалкерсона включает следующие шаги **(**всем вершинам графа присвоены индексы 0, 2, …, k, где 0 – индекс вершины истока сети, k – индекс вершины-стока):

1) присвоить начальной вершине метку 0;

2) все непомеченные вершины x_i, в которые идут ненасыщенные дуги из помеченной вершины x_s, пометить индексом +s, что свидетельствует о возможности увеличения потока из вершины x_s по дуге (x_s, x_i);

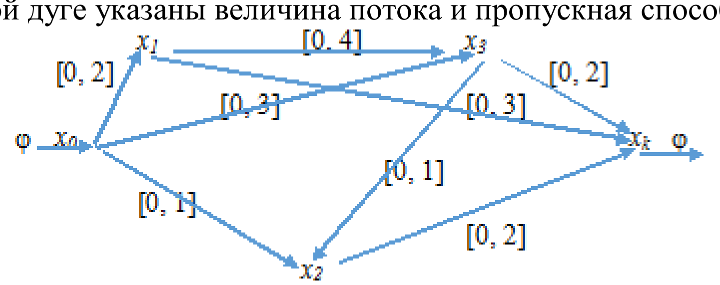
3) все непомеченные вершины x_i, из которых идут дуги (насыщенные или ненасыщенные) в помеченную вершину x_j, пометить индексом –j, что свидетельствует о возможности уменьшения потока в вершину x_j по дуге (x_i, x_j);

4) если в результате этих действий окажется помеченной вершина-сток x_k, то между начальной и конечной вершинами сети найдется переход, все вершины которого различны и помечены индексами предыдущих вершин, формирующих переход, по которому можно увеличить поток; перейти к шагу 5. Иначе конец;

5) увеличить поток в маршруте, сформированном на шаге 4, на единицу и перейти к шагу 2.

Признаком окончания работы алгоритма является невозможность пометки вершины-стока.

Например, требуется найти величину максимального потока и его распределение в графе-сети G_{11} (на каждой дуге указаны величина потока и пропускная способность):



Для расчета максимального потока разобьем множество вершин графа на пары непересекающихся подмножеств, в одно из которых входит вершина-исток x_0, в другое – вершина-сток x_k:

1) $\{x_0\}, \{x_1, x_2, x_3, x_k\}$;
2) $\{x_0, x_1\}, \{x_2, x_3, x_k\}$;
3) $\{x_0, x_2\}, \{x_1, x_3, x_k\}$;
4) $\{x_0, x_3\}, \{x_1, x_2, x_k\}$;
5) $\{x_0, x_1, x_2\}, \{x_3, x_k\}$;
6) $\{x_0, x_1, x_3\}, \{x_2, x_k\}$;
7) $\{x_0, x_2, x_3\}, \{x_1, x_k\}$;
8) $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}, \{x_k\}$.

Выпишем множества дуг, соединяющих вершины из сформированных подмножеств – они дадут нам разрезы A_i (i = 1, 2, …, 8) графа:

1) $(x_0, x_1), (x_0, x_2), (x_0, x_3)$;
2) $(x_0, x_2), (x_0, x_3), (x_1, x_3), (x_1, x_k)$;
3) $(x_0, x_1), (x_0, x_3), (x_2, x_3), (x_2, x_k)$;
4) $(x_0, x_1), (x_0, x_2), (x_3, x_2), (x_3, x_k)$;
5) $(x_0, x_3), (x_1, x_3), (x_1, x_k), (x_2, x_3), (x_2, x_k)$;
6) $(x_0, x_2), (x_1, x_k), (x_3, x_2), (x_3, x_k)$;
7) $(x_0, x_1), (x_2, x_k), (x_1, x_3), (x_3, x_k)$;
8) $(x_1, x_k), (x_2, x_k), (x_3, x_k)$.

Теперь рассчитаем пропускные способности разрезов графа и найдем минимальную из них – это и будет максимальный поток в заданной сети:

$A_1 = c_{01} + c_{02} + c_{03} = 2 + 1 + 3 = 6;$

$A_2 = c_{02} + c_{03} + c_{13} + c_{1k} = 1 + 3 + 4 + 3 = 11;$

$A_3 = c_{01} + c_{03} + c_{23} + c_{2k} = 2 + 3 + 1 + 2 = 8;$

$A_4 = c_{01} + c_{02} + c_{32} + c_{3k} = 2 + 1 + 2 + 2 = 7;$

$A_5 = c_{03} + c_{13} + c_{1k} + c_{23} + c_{2k} = 3 + 4 + 3 + 1 + 2 = 13;$

$A_6 = c_{02} + c_{1k} + c_{32} + c_{3k} = 1 + 3 + 1 + 2 = 7;$

$A_7 = c_{01} + c_{2k} + c_{13} + c_{3k} = 2 + 2 + 4 + 2 = 10;$

$A_8 = c_{1k} + c_{2k} + c_{3k} = 3 + 2 + 2 = 7.$

Очевидно, φ = min{6, 11, 8, 7, 13, 7, 10, 7} = 6.

Для распределения потока по сети рассмотрим работу алгоритма по шагам итераций:

1) итерация 1:

Шаг 1. присваиваем начальной вершине x_0 метку 0 (поскольку данное действие не входит в цикл, это значение метки сохраняется на все последующие итерации);

x_i	Шаг итерации						
	1	2	3	4	5	6	7
x_0	0	0	0	0	0	0	0
x_1							
x_2							
x_3							
x_k							

Шаг 2:

- связанным с x_0 непомеченным вершинам x_1, x_2, x_3, в которые ведут ненасыщенные дуги, присваиваем метки +0 – это означает, что для них есть возможность увеличения потока из вершины x_0:

x_i	Шаг итерации						
	1	2	3	4	5	6	7
x_0	0	0	0	0	0	0	0
x_1	+0						
x_2	+0						
x_3	+0						
x_k							

- связанной с помеченными вершинами x_1, x_2, x_3 непомеченной вершине x_k присваиваем метки +1, +2, +3, вершине x_3 приписываем метку +1, а вершине x_2 – метку +3: это означает, что есть возможность увеличения потока из указанных вершин:

x_i	Шаг итерации						
	1	2	3	4	5	6	7
x_0	0	0	0	0	0	0	0
x_1	+0						
x_2	+0; +3						
x_3	+0; +1						
x_k	+1; +2; +3						

Шаг 3. Опускается.

Шаг 4. Поскольку помечена вершина-сток, между начальной и конечной вершинами сети сформированы переходы (возможно, только один), все вершины в которых различны и помечены индексами предыдущих вершин: $\nu_{0k} = \{(x_0, x_3, x_k), (x_0, x_2, x_k), (x_0, x_1, x_k), (x_0, x_1, x_3, x_2, x_k), (x_0, x_1, x_3, x_k), (x_0, x_3, x_2, x_k)\}$. Выберем переход (x_0, x_3, x_k).

Шаг 5. Приращение потока $\Delta\varphi = 1$ проходит по маршруту $\mu = \{(x_0, x_3), (x_3, x_k)\}$:

(x_i, x_j)	c_{ij}	Шаг итерации						
		1	2	3	4	5	6	7
(x_0, x_1)	2	0						
(x_0, x_2)	1	0						
(x_0, x_3)	3	1						
(x_1, x_3)	4	0						
(x_1, x_k)	3	0						
(x_2, x_k)	2	0						
(x_3, x_2)	1	0						
(x_3, x_k)	2	1						

2) итерация 2:

Шаг 2:

- связанным с x_0 непомеченным вершинам x_1, x_2, x_3, в которые ведут ненасыщенные дуги, присваиваем метки +0 – это означает, что для них есть возможность увеличения потока из вершины x_0:

x_i	Шаг итерации						
	1	2	3	4	5	6	7
x_0	0	0	0	0	0	0	0
x_1	+0	+0					
x_2	+0; +3	+0					
x_3	+0; +1	+0					
x_k	+1; +2; +3						

- связанной с помеченными вершинами x_1, x_2, x_3 непомеченной вершине x_k присваиваем метки +1, +2, +3, вершине x_3 приписываем метку +1, а вершине x_2 – метку +3: это означает, что есть возможность увеличения потока из указанных вершин:

x_i	Шаг итерации						
	1	2	3	4	5	6	7
x_0	0	0	0	0	0	0	0
x_1	+0	+0					
x_2	+0; +3	+0; +3					
x_3	+0; +1	+0; +1					
x_k	+1; +2; +3	+1; +2; +3					

Шаг 3. Опускается.

Шаг 4. Поскольку помечена вершина-сток, выбираем один из переходов, например, тот же, поскольку его дуги еще не насыщены, - (x_0, x_3, x_k).

Шаг 5. Приращение потока $\Delta\varphi = 1$ проходит по маршруту $\mu = \{(x_0, x_3), (x_3, x_k)\}$:

(x_i, x_j)	c_{ij}	Шаг итерации						
		1	2	3	4	5	6	7
(x_0, x_1)	2	0	0					
(x_0, x_2)	1	0	0					
(x_0, x_3)	3	1	2					
(x_1, x_3)	4	0	0					
(x_1, x_k)	3	0	0					
(x_2, x_k)	2	0	0					
(x_3, x_2)	1	0	0					
(x_3, x_k)	2	1	**2**					

Видно, что дуга (x_3, x_k) стала насыщенной (здесь и далее факт насыщения дуги выделен в таблице особым шрифтом).

3) итерация 3:

Шаг 2:

- связанным с вершиной x_0 непомеченным вершинам x_1, x_2, x_3, в которые ведут ненасыщенные дуги, присваиваем метки +0 – это означает, что для них есть возможность увеличения потока из вершины x_0:

x_i	Шаг итерации						
	1	2	3	4	5	6	7
x_0	0	0	0	0	0	0	0
x_1	+0	+0	+0				
x_2	+0; +3	+0; +3	+0				
x_3	+0; +1	+0; +1	+0				
x_k	+1; +2; +3	+1; +2; +3					

- связанной с помеченными вершинами x_1, x_2, x_3 непомеченной вершине x_k присваиваем метки +1, +2, вершине x_3 приписываем метку +1, а вершине x_2 – метку +3: это означает, что есть возможность увеличения потока из указанных вершин:

x_i	Шаг итерации						
	1	2	3	4	5	6	7
x_0	0	0	0	0	0	0	0
x_1	+0	+0	+0				
x_2	+0; +3	+0; +3	+0				
x_3	+0; +1	+0; +1	+0; +1				
x_k	+1; +2; +3	+1; +2; +3	+1; +2				

Шаг 3. Опускается.

Шаг 4. Поскольку помечена вершина-сток, из множества оставшихся переходов $\nu_{0k} = \{(x_0, x_2, x_k), (x_0, x_1, x_k), (x_0, x_1, x_3, x_2, x_k), (x_0, x_1, x_3, x_k), (x_0, x_3, x_2, x_k)\}$ выбираем один - $(x_0, x_1, x_3, x_2, x_k)$.

Шаг 5. Приращение потока $\Delta\varphi = 1$ проходит по маршруту $\mu = \{(x_0, x_1), (x_1, x_3), (x_3, x_2), (x_2, x_k)\}$:

(x_i, x_j)	c_{ij}	Шаг итерации						
		1	2	3	4	5	6	7
(x_0, x_1)	2	0	0	1				
(x_0, x_2)	1	0	0	0				
(x_0, x_3)	3	1	2	2				
(x_1, x_3)	4	0	0	1				
(x_1, x_k)	3	0	0	0				
(x_2, x_k)	2	0	0	1				
(x_3, x_2)	1	0	0	1				
(x_3, x_k)	2	1	2	2				

Видно, что дуга (x_3, x_2) стала насыщенной.

4) итерация 4:

Шаг 2:

- связанным с вершиной x_0 непомеченным вершинам x_1, x_2, x_3, в которые ведут ненасыщенные дуги, присваиваем метки +0 – это означает, что для них есть возможность увеличения потока из вершины x_0:

x_i	Шаг итерации						
	1	2	3	4	5	6	7
x_0	0	0	0	0	0	0	0
x_1	+0	+0	+0	+0			
x_2	+0; +3	+0; +3	+0	+0			
x_3	+0; +1	+0; +1	+0; +1	+0			
x_k	+1; +2; +3	+1; +2; +3	+1; +2				

- связанной с помеченными вершинами x_1, x_2, x_3 непомеченной вершине x_k присваиваем метки +1, +2, вершине x_3 приписываем метку +1: это означает, что есть возможность увеличения потока из указанных вершин:

x_i	Шаг итерации						
	1	2	3	4	5	6	7
x_0	0	0	0	0	0	0	0
x_1	+0	+0	+0	+0			
x_2	+0; +3	+0; +3	+0	+0			
x_3	+0; +1	+0; +1	+0; +1	+0; +1			
x_k	+1; +2; +3	+1; +2; +3	+1; +2	+1; +2			

Шаг 3. Опускается.

Шаг 4. Поскольку помечена вершина-сток, из множества оставшихся переходов $\nu_{0k} = \{(x_0, x_2, x_k), (x_0, x_1, x_k), (x_0, x_1, x_3, x_k), (x_0, x_3, x_2, x_k)\}$ выбираем один - (x_0, x_1, x_k).

Шаг 5. Приращение потока $\Delta\varphi = 1$ проходит по маршруту $\mu = \{(x_0, x_1), (x_1, x_k)\}$:

(x_i, x_j)	c_{ij}	Шаг итерации						
		1	2	3	4	5	6	7
(x_0, x_1)	2	0	0	1	**2**			
(x_0, x_2)	1	0	0	0	0			
(x_0, x_3)	3	1	2	2	2			
(x_1, x_3)	4	0	0	1	1			
(x_1, x_k)	3	0	0	0	1			
(x_2, x_k)	2	0	0	1	1			
(x_3, x_2)	1	0	0	**1**	**1**			
(x_3, x_k)	2	1	**2**	**2**	**2**			

Видно, что дуга (x_0, x_1) стала насыщенной.

5) итерация 5:

Шаг 2:

- связанным с вершиной x_0 непомеченным вершинам x_2, x_3, в которые ведут ненасыщенные дуги, присваиваем метки +0 – это означает, что для них есть возможность увеличения потока из вершины x_0:

x_i	Шаг итерации						
	1	2	3	4	5	6	7
x_0	0	0	0	0	0	0	0
x_1	+0	+0	+0	+0			
x_2	+0; +3	+0; +3	+0	+0	+0		
x_3	+0; +1	+0; +1	+0; +1	+0	+0		
x_k	+1; +2; +3	+1; +2; +3	+1; +2				

- связанной с помеченной вершиной x_2 непомеченной вершине x_k присваиваем метку +2: это означает, что есть возможность увеличения потока из указанной вершины:

x_i	Шаг итерации						
	1	2	3	4	5	6	7
x_0	0	0	0	0	0	0	0
x_1	+0	+0	+0	+0			
x_2	+0; +3	+0; +3	+0	+0	+0		
x_3	+0; +1	+0; +1	+0; +1	+0; +1	+0		
x_k	+1; +2; +3	+1; +2; +3	+1; +2	+1; +2	+2		

Шаг 3. Осталась непомеченной вершина x_1, из которой идет дуга в помеченную вершину x_3: помечаем вершину x_1 меткой -3, что означает возможное уменьшение потока по дуге (x_1, x_3) из вершины x_1 в вершину x_3:

x_i	Шаг итерации						
	1	2	3	4	5	6	7
x_0	0	0	0	0	0	0	0
x_1	+0	+0	+0	+0	-3		
x_2	+0; +3	+0; +3	+0	+0	+0		
x_3	+0; +1	+0; +1	+0; +1	+0; +1	+0		
x_k	+1; +2; +3	+1; +2; +3	+1; +2	+1; +2	+2		

Шаг 4. Поскольку помечена вершина-сток, из оставшихся переходов $\nu_{0k} = \{(x_0, x_2, x_k), (x_0, x_1, x_3, x_k), (x_0, x_3, x_2, x_k)\}$ выбираем один - (x_0, x_1, x_3, x_k).
Шаг 5. Приращение потока $\Delta\varphi = 1$ проходит по маршруту $\mu = \{(x_0, x_3), (x_3, x_1), (x_1, x_k)\}$:

(x_i, x_j)	c_{ij}	Шаг итерации						
		1	2	3	4	5	6	7
(x_0, x_1)	2	0	0	1	2	2		
(x_0, x_2)	1	0	0	0	0	0		
(x_0, x_3)	3	1	2	2	2	3		
(x_1, x_3)	4	0	0	1	1	0		
(x_1, x_k)	3	0	0	0	1	2		
(x_2, x_k)	2	0	0	1	1	1		
(x_3, x_2)	1	0	0	1	1	1		
(x_3, x_k)	2	1	2	2	2	2		

Видно, что дуга (x_1, x_3) уменьшила поток на 1, а дуга (x_0, x_3) стала насыщенной.

6) итерация 6:

Шаг 2:

- связанной с вершиной x_0 непомеченной вершине x_2, в которую ведет ненасыщенная дуга, присваиваем метку +0:

x_i	Шаг итерации						
	1	2	3	4	5	6	7
x_0	0	0	0	0	0	0	0
x_1	+0	+0	+0	+0			
x_2	+0; +3	+0; +3	+0	+0	+0	+0	
x_3	+0; +1	+0; +1	+0; +1	+0	+0		
x_k	+1; +2; +3	+1; +2; +3	+1; +2				

- связанной с помеченной вершиной x_2 непомеченной вершине x_k присваиваем метку +2: это означает, что есть возможность увеличения потока из указанной вершины:

x_i	Шаг итерации						
	1	2	3	4	5	6	7
x_0	0	0	0	0	0	0	0
x_1	+0	+0	+0	+0			
x_2	+0; +3	+0; +3	+0	+0	+0	+0	
x_3	+0; +1	+0; +1	+0; +1	+0; +1	+0		
x_k	+1; +2; +3	+1; +2; +3	+1; +2	+1; +2	+2	+2	

Шаг 3. Остались непомеченными вершины x_1 и x_3: помечаем вершину x_1 меткой –3, что означает возможное уменьшение потока по дуге (x_1, x_3) из вершины x_1 в вершину x_3, а вершину x_3 – меткой $-k$, что означает возможное уменьшение потока по дуге (x_3, x_k) из вершины x_3 в вершину x_k:

x_i	Шаг итерации						
	1	2	3	4	5	6	7
x_0	0	0	0	0	0	0	0
x_1	+0	+0	+0	+0	-3	-3	
x_2	+0; +3	+0; +3	+0	+0	+0	+0	
x_3	+0; +1	+0; +1	+0; +1	+0; +1	+0	-k	
x_k	+1; +2; +3	+1; +2; +3	+1; +2	+1; +2	+2	+2	

Шаг 4. Поскольку помечена вершина-сток, из множества оставшихся переходов $\nu_{0k} = \{(x_0, x_2, x_k), (x_0, x_3, x_2, x_k)\}$ выбираем один из переходов – остался возможным только один переход (x_0, x_2, x_k), т.к. дуга (x_0, x_3) насыщена.

Шаг 5. Приращение потока $\Delta\varphi = 1$ проходит по маршруту $\mu = \{(x_0, x_2), (x_2, x_k)\}$:

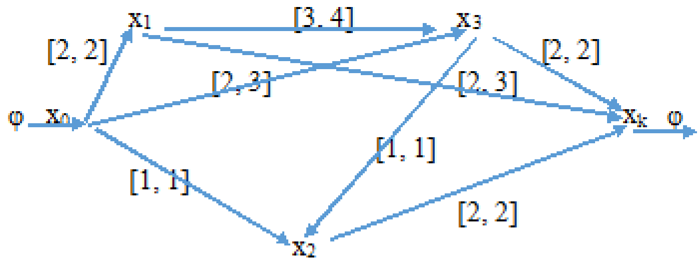
(x_i, x_j)	c_{ij}	Шаг итерации						
		1	2	3	4	5	6	7
(x_0, x_1)	2	0	0	1	2	2	2	
(x_0, x_2)	1	0	0	0	0	0	1	
(x_0, x_3)	3	1	2	2	2	3	3	
(x_1, x_3)	4	0	0	1	1	0	0	
(x_1, x_k)	3	0	0	0	1	2	2	
(x_2, x_k)	2	0	0	1	1	1	2	
(x_3, x_2)	1	0	0	1	1	1	1	
(x_3, x_k)	2	1	2	2	2	2	2	

Видно, что дуга (x_0, x_2) стала насыщенной.

7) итерация 7. Невозможен ни один переход от вершины x_0 к вершине x_k, так как дуги (x_0, x_1), (x_1, x_3) и (x_0, x_2) насыщены, и невозможно поставить метки у вершин x_1, x_2 и x_3. Работа алгоритма закончена:

(x_i, x_j)	c_{ij}	Шаг итерации						
		1	2	3	4	5	6	7
(x_0, x_1)	2	0	0	1	2	2	2	2
(x_0, x_2)	1	0	0	0	0	0	1	1
(x_0, x_3)	3	1	2	2	2	3	3	2
(x_1, x_3)	4	0	0	1	1	0	0	3
(x_1, x_k)	3	0	0	0	1	2	2	2
(x_2, x_k)	2	0	0	1	1	1	2	2
(x_3, x_2)	1	0	0	1	1	1	1	1
(x_3, x_k)	2	1	2	2	2	2	2	2

Таким образом, предлагается следующее распределение потока по графу G_{11}:



Литература: [1], с. 113–132.

Контрольные вопросы для самопроверки:

1. Какие алгоритмы решения прикладных задач рассмотрены в работе?
2. Для каких прикладных задач могут использоваться рассмотренные алгоритмы?

10.3. Задание к практической работе

1. Задан неориентированный реберно-взвешенный граф. Построить для него остовы минимального веса методами Дейкстры и Краскала. Сравнить полученные результаты.

2. Задан неориентированный реберно-взвешенный граф. Найти для него кратчайшие маршруты между всеми парами вершин.

3. Задан ориентированный реберно-взвешенный граф типа сеть. Найти для него максимальный поток.

10.4. Методические указания и порядок выполнения работы

1) ознакомиться с заданием к практической работе (п. 10.3);
2) прочитать соответствующий теоретический материал из литературного источника [1], с. 113–132;
3) изучить типовой пример решения подобных задач из раздела 10.2.

10.5. Требования к отчету и защите

Формирование отчета и защита работы не требуется.

11. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 10. ОПЕРАЦИИ НА ГРАФАХ

11.1. Общие сведения

Цель: получение практических навыков выполнения алгебраических операций на графах.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: используется инструментарий медиаклассов.

Условия допуска к выполнению: к практическому занятию допускаются все пришедшие на него.

Критерии положительной оценки: участие в решении задач преподавателем у доски отмечается в учетной карточке.

Планируемое время выполнения:

Аудиторное время выполнения (под руководством преподавателя): 3 акад. ч.

Время самостоятельной подготовки: 0,5 акад. ч.

11.2. Теоретическое введение

Операции на графах включают одну унарную операцию и несколько бинарных: объединение, пересечение, разность, композицию.

К *унарным операциям* относится операция **дополнения** графа ¬: для графа $G = \langle X, R \rangle$ его дополнение есть граф $G' = \neg G = \langle X, \neg R \rangle$, где $\neg R = \{\overline{r_i} = (x_i, x_j)\}$ – дополнение отношения

R (знак $\neg$ – дополнение множества отношений, знак $\overline{r_i}$ – отрицание отношения). Для дополнения графа матрица смежности вычисляется по правилу: $\bar{r}(i,j) = 1$, если $r(i, j) = 0$; $\bar{r}(i,j) = 0$, если $r(i, j) = 1$.

Объединение графов $\cup$

Для графов $G_1 = \langle X_1, R_1 \rangle$ и $G_2 = \langle X_2, R_2 \rangle$ их объединение есть граф $G = G_1 \cup G_2$, для которого $X = X_1 \cup X_2$ и $R = R_1 \cup R_2$.

Для вычисления матрицы смежности графа G следует выполнить объединение матриц смежности графов G_1 и G_2:

1) матрицы смежности исходных графов выравнивают по числу строк и столбцов, при этом недостающие строки и столбцы заполняют нулями;
2) значение элементов матрицы смежности результирующего графа вычисляют по формуле: $r(i, j) = r_1(i, j) \vee r_2(i, j)$.

Пересечение графов $\cap$

Для графов $G_1 = \langle X_1, R_1 \rangle$ и $G_2 = \langle X_2, R_2 \rangle$ их пересечение есть граф $G = G_1 \cap G_2$, для которого $X = X_1 \cup X_2$ и $R = R_1 \cap R_2$:

1) матрицы смежности графов выравнивают по числу строк и столбцов, должны иметь число строк и столбцов, при этом недостающие строки и столбцы заполняют нулями;
2) значение элементов матрицы результирующего графа вычисляют по формуле: $r(i, j) = r_1(i, j) \cdot r_2(i, j)$.

**Разность графов **

Для графов $G_1 = \langle X_1, R_1 \rangle$ и $G_2 = \langle X_2, R_2 \rangle$ разность графов $G_1 \backslash G_2$ есть граф G, для которого $X = X_1 \cup X_2$ и $R = R_1 \backslash R_2$. Разность графов равносильна пересечению графов $G_1 = \langle X_1, R_1 \rangle$ и графа $\neg G_2 = \langle X_2, \neg R_2 \rangle$.

Тогда для вычисления элементов матрицы смежности графа G следует вычислить матрицу смежности графа $\neg G_2$ и выполнить операцию пересечения матриц смежности графов G_1 и $\neg G_2$, то есть $r(i, j) = r_1(i, j) \cdot \overline{r_2}(i, j)$.

Композиция графов $\circ$

Для графов $G_1 = \langle X_1, R_1 \rangle$ и $G_2 = \langle X_2, R_2 \rangle$ композиция этих графов есть граф $G = G_1 \circ G_2$, для которого $X = X_1 \cup X_2$, а $r(i, j) \in R$ существует тогда и только тогда, когда графы G_1 и G_2 имеют хотя бы одну вершину x_k, такую, что обеспечивает маршрут с началом в множестве вершин первого графа и концом в множестве вершин второго графа.

Значения элементов матрицы смежности вычисляют по формуле: $r(x_i, x_j) = \bigvee_{k=1}^{n} (r_1(x_i, x_k) \cdot r_2(x_k, x_j))$.

Помимо рассмотренных алгебраических операций на графах существует их исследование, выражающее тождество их строения – это *изоморфизм* графов. Изоморфизм есть однозначное отображение объектов произвольной природы. Для исследования изоморфизма объектов необходимо проверить прямое отображение одного объекта на другой и обратное отображение второго объекта на первый.

Пусть даны операторы прямого – h_i и обратного – h_i^{-1} отображений вершин и ребер двух графов $G_1 = \langle X_1, R_1 \rangle$ и $G_2 = \langle X_2, R_2 \rangle$:

$h_1: X_1 \to X_2$, $h_2: R_1 \to R_2$,

$h_1^{-1}: X_2 \to X_1$, $h_2^{-1}: R_2 \to R_1$.

Граф G_1, для которого каждая вершина $x_{i1} \in X_1$ и инцидентное ей ребро $r_1(x_i, x_j) \in R_1$ отображаются на графе G_2 вершиной $h_1(x_{i1}) = x_{l2} \in X_2$ и инцидентным ребром $h_2(r_1(x_i, x_j)) = r_2(l,m) \in R_2$, называют *гомоморфным* графу G_2.

Граф G_2, для которого каждая вершина $x_{i2} \in X_2$ и инцидентное ей ребро $r_2(x_i, x_j) \in R_2$ отображаются на графе G_1 вершиной $h_1^{-1}(x_{i2}) = x_{l1} \in X_1$ и инцидентным ребром $h_2^{-1}(r_2(x_i, x_j)) = r_1(l,m) \in R_1$, называют *гомоморфным* графу G_1.

Если существует прямой и обратный гомоморфизм для всех вершин графов G_1 и G_2, то графы *изоморфны*.

Существуют условия, позволяющие судить о изоморфизме графов:

• необходимым условием изоморфизма является равенство числа вершин, ребер, петель и одинаковость наборов степеней вершин;

• достаточным условием является одинаковость матриц смежности графов.

Литература: [1], с. 107–113.

Контрольные вопросы для самопроверки:

1. Какие операции над графами рассмотрены в данной работе?
2. Что такое изоморфизм графов и какова прагматика соответствующих исследований?

11.3. Задание к практической работе

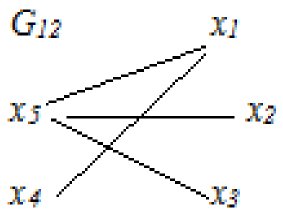
1. Дан граф. Выполнить его дополнение.
2. Даны два графа. Выполнить бинарные операции на графах.
3. Даны графы. Определить, изоморфны ли они.

11.4. Методические указания и порядок выполнения работы

- ознакомиться с заданием к практической работе (п. 11.3);

1) прочитать соответствующий теоретический материал по литературному источнику [1], с. 107–113;
2) изучить типовой пример решения подобных задач:

1. Дан граф G_{12}, сформировать его дополнение $\neg G_{12}$.



Для решения задачи построим матрицу смежности исходного графа, инвертируем ее элементы и по полученному результату сформируем граф:

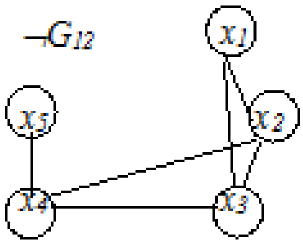
1) матрица смежности исходного графа имеет вид:

R_{G12}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	0	0	0	1	1	
x_2	0	0	0	0	1	
x_3	0	0	0	0	1	
x_4	1	0	0	0	0	
x_5	1	1	1	0	0	

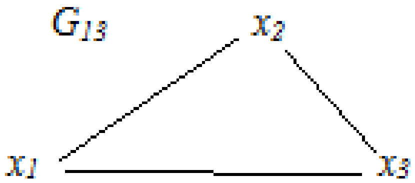
2) инвертируем элементы полученной матрицы:

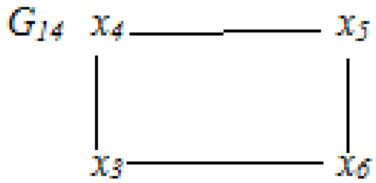
$R_{\neg G12}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	1	0	0
x_2	1	1	1	1	0
x_3	1	1	1	1	0
x_4	0	1	1	1	1
x_5	0	0	0	1	1

3) по полученной матрице смежности построим граф:



2. Даны графы G_{13} и G_{14}. Выполнить операции объединения, пересечения, разности, композиции:





Решение:

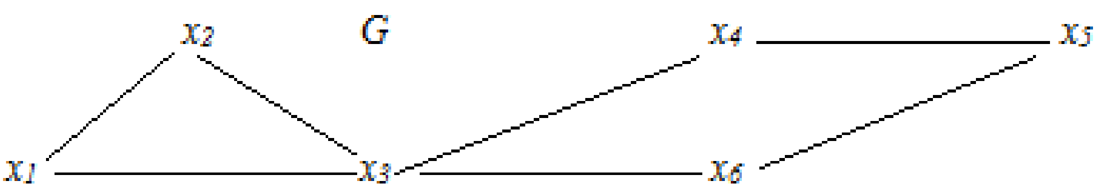
1) построим матрицы смежности обоих графов, которые будем использовать при решении задачи, при этом в каждую добавим недостающие вершины (для графа G_{13} – x_4, x_5, x_6, для графа G_{14} – x_1, x_2):

R_{13}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	1	0	0	0
x_2	1	0	1	0	0	0
x_3	1	1	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0

R_{14}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	0	0	0	0	0
x_2	0	0	0	0	0	0
x_3	0	0	0	1	0	1
x_4	0	0	1	0	1	0
x_5	0	0	0	1	0	1
x_6	0	0	1	0	1	0

2) для операции объединения $G = G_{13} \cup G_{14}$ выполним вычисления элементов $r(i, j)$ результирующей матрицы R по формуле $r(i, j) = r_{13}(i, j) \vee r_{14}(i, j)$, а результаты используем для построения графа-результата G:

R	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	1	0	0	0
x_2	1	0	1	0	0	0
x_3	1	1	0	1	0	1
x_4	0	0	1	0	1	0
x_5	0	0	0	1	0	1
x_6	0	0	1	0	1	0



3) для операции пересечения $G = G_{13} \cap G_{14}$ выполним вычисления элементов $r(i, j)$ результирующей матрицы R по формуле $r(i, j) = r_{13}(i, j) \cdot r_{14}(i, j)$, а результаты используем для построения графа-результата G:

R	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	0	0	0	0	0
x_2	0	0	0	0	0	0
x_3	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0

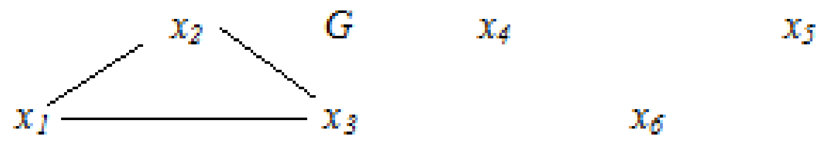
По матрице смежности R видно, что получен пустой граф, представленный только вершинами $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$;

4) для операции разности $G = G_{13} \setminus G_{14}$ вначале построим дополнение для графа-вычитаемого G_{14} в виде матрицы смежности, инвертировав все исходные элементы матрицы смежности R_{14}:

$\neg R_{14}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1	1	1	1	1	1
x_2	1	1	1	1	1	1
x_3	1	1	1	0	1	0
x_4	1	1	0	1	0	1
x_5	1	1	1	0	1	0
x_6	1	1	0	1	0	1

После этого выполним пересечение графа-уменьшаемого с дополнением графа-вычитаемого, вычислив элементы $r(i, j)$ результирующей матрицы R по формуле $r(i, j) = r_{13}(i, j) \cdot \bar{r}_{14}(i, j)$, а результаты используем для построения графа-результата G:

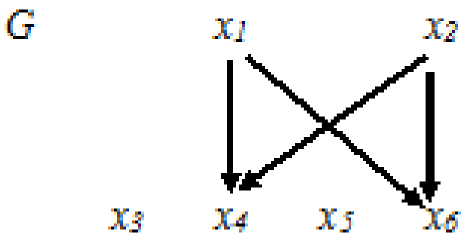
R	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	1	0	0	0
x_2	1	0	1	0	0	0
x_3	1	1	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0



Видно, что результирующий граф G содержит только три ребра, но шесть вершин;

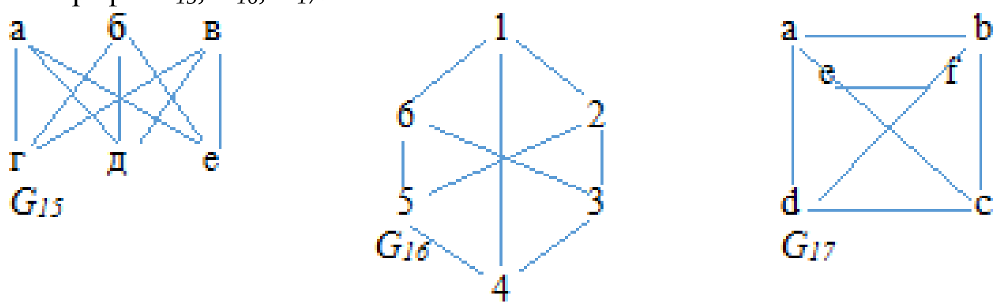
5) для операции композиции $G = G_{13} \circ G_{14}$ выполним вычисления элементов $r(i, j)$ результирующей матрицы R по формуле $r(x_i, x_j) = \bigvee_{k=1}^{n} (r_{13}(x_i, x_k) \cdot r_{14}(x_k, x_j))$, а результаты используем для построения графа-результата G:

R	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	0	0	1	0	1
x_2	0	0	0	1	0	1
x_3	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0



Из рисунка видно, что результирующих граф по типу не соответствует исходным графам: те были неориентированные, а полученный граф стал ориентированным.

3. Даны графы G_{15}, G_{16}, G_{17}:



Являются ли эти графы изоморфными?

Решение:

Воспользуется достаточным условием наличия изоморфизма графов, которое определяется через одинаковость матриц смежности.

В таблицах представлены матрицы смежности этих графов с добавленной строкой, в которой указаны степени вершин. При этом в матрицах R_{16} и R_{17} сделаны одновременные перестановки одноименных строк и столбцов, чтобы визуально убедиться в идентичности всех трех матриц смежности:

R_{15}	а	б	в	г	д	е
а	0	0	0	1	1	1
б	0	0	0	1	1	1
в	0	0	0	1	1	1
г	1	1	1	0	0	0
д	1	1	1	0	0	0
е	1	1	1	0	0	0
δ	3	3	3	3	3	3

R_{16}	1	3	5	2	4	6
1	0	0	0	1	1	1
3	0	0	0	1	1	1
5	0	0	0	1	1	1
2	1	1	1	0	0	0
4	1	1	1	0	0	0
6	1	1	1	0	0	0
δ	3	3	3	3	3	3

R_{17}	a	c	f	b	d	e
a	0	0	0	1	1	1
c	0	0	0	1	1	1
f	0	0	0	1	1	1
b	1	1	1	0	0	0
d	1	1	1	0	0	0
e	1	1	1	0	0	0
δ	3	3	3	3	3	3

Видно, что графы имеют одинаковое число вершин, ребер, одинаковые степени вершин, а в результате исполнения операций перестановок строк и столбцов полностью совпадают. Это подтверждает прямой и обратный гомоморфизм каждой пары графов, то есть три графа изоморфны.

11.5. Требования к отчету и защите

Формирование отчета и защита работы не требуется.

12. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном учебно-методическом пособии изложены материалы по девяти практическим занятиям, входящим в учебный курс «Математическая логика и теория алгоритмов».

Структура описания каждого занятия включает:

- общие сведения о практическом занятии;
- теоретическое введение;
- задание к практической работе;
- методические указания и порядок выполнения работы;
- требования к отчету и защите.

13. ЛИТЕРАТУРА

1. Пономарев, В. Ф. Дискретная математика для инженеров: учеб. пособие / В. Ф. Пономарев. – Москва: Горячая линия, 2009. – 319 с.
2. Пономарев, В. Ф. Математическая логика: учеб. пособие / В. Ф. Пономарев. – 2-е изд. исп. и доп. – Калининград: КГТУ, 2005. – 201 с.
3. Пономарев, В. Ф. Математическая логика: учеб. пособие / В. Ф. Пономарев; Калинингр. гос. техн. ун-т. – Калининград: КГТУ, 2001. – Ч. 1. Логика высказываний. Логика предикатов. – 2001. – 130 с.
4. Пономарев, В. Ф. Математическая логика: учеб. пособие / В. Ф. Пономарев; Калинингр. гос. техн. ун-т. – Калининград: КГТУ, 2001. – Ч. 2. Логика реляционная. Логика нечеткая. – 2001. – 106 с.
5. Пономарев, В. Ф. Основы теории алгоритмов: учеб. пособие / В. Ф. Пономарев; Калинингр. гос. техн. ун-т. – Калининград: КГТУ, 2005. – 56 с.
6. Пономарев В. Ф. Модели вычислительных алгоритмов: учеб. пособие по дисц. «Теория алгорит. и автомат.» напр. 552800 – ИВТ / В. Ф. Пономарев. – Калининград: Калининград, 1998. – 85 с.
7. Колесников, А. В. Дискретная математика. Практикум: учеб. пособие для студ. спец. 230102.65 – Автоматиз. системы обраб. информ. и упр. и 230101.65 – Вычисл. машины, комплексы, системы и сети / А. В. Колесников; ФГОУ ВПО «КГТУ». – Калининград: ФГОУ ВПО «КГТУ», 2006. – 115 с.
8. Судоплатов, С. В. Математическая логика и теория алгоритмов: учебник / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова; М-во образования РФ; НГТУ. – Москва [и др.]: [НГТУ], 2008. – 224 с.
9. Аляев, Ю. А. Дискретная математика и математическая логика: учебник / Ю. А. Аляев, С. Ф. Тюрин. – Москва: Финансы и статистика, 2006. – 368 с.
10. Гаврилов, Г. П. Задачи и упражнения по дискретной математике: учеб. пособие / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. – Изд. 3-е, перераб. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 416 с.
11. Гурова, Л. М. Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. пособие / Л. М. Гурова, Е. В. Зайцева. – Москва: МГГУ, 2006. – 262 с.
12. Фалевич, Б. Я. Теория алгоритмов: учеб. пособие / Б. Я. Фалевич. – Москва: Машиностроение, 2004. – 160 с.
13. Математическая логика и теория алгоритмов / отв. ред. С. Л. Соболев. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1982. – 174 с.
14. Успенский, В. А. Теория алгоритмов: основные открытия и приложения / В. А. Успенский, А. Л. Семенов. – Москва: Наука, 1987. – 288 с.
15. Марков, А. А. Теория алгоритмов / А. А. Марков, Н. М. Нагорный. – Москва: Наука, 1984. – 432 с.
16. Алферова, З. В. Теория алгоритмов: учеб. пособие / З. В. Алферова. – Москва: Статистика, 1973.
17. Лавров, И. А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И. А. Лавров, Л. Л. Максимова. – 2-е изд. – Москва: Наука, 1984. – 223 с.

Локальный электронный методический материал

Ольга Мстиславовна Топоркова

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Редактор С. Кондрашова
Корректор Т. Звада

Уч.-изд. л. 6,5. Печ. л.3,9.

Издательство федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Калининградский государственный технический университет».
236022, Калининград, Советский проспект, 1