Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**А. И. Руденко**

# МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины
для студентов по направлению подготовки
19.03.03 Продукты питания животного происхождения

Калининград
Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ»
2023

УДК 519.6

Рецензент

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» С. М. Алексеева

Руденко, А. И.

Математика: учебно-методическое пособие по изучению дисциплины для студентов по направлению подготовки 19.03.03 Технология продукции и организация общественного питания. / А. И. Руденко. – Калининград: Изд-во ФГБОУ ВО «КГТУ», 2023. – 67 с.

В учебно-методическом пособии приведен тематический план изучения дисциплины. Представлены методические указания по изучению дисциплины. Даны рекомендации по подготовке к промежуточной аттестации и по выполнению самостоятельной работы. Пособие подготовлено в соответствии с требованиями утвержденной рабочей программы математического и естественнонаучного модуля по дисциплине «Математика» направления подготовки 19.03.03 Технология продукции и организация общественного питания.

Табл., список лит. – 7 наименований

Учебно-методическое пособие рассмотрено и одобрено в качестве локального электронного методического материала на заседании кафедры прикладной математики и информационных технологий института цифровых технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» 07.09.2023 г., протокол № 7

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины рекомендовано к использованию в учебном процессе в качестве локального электронного методического материала методической комиссией ИЦТ от 26.09.2023 г., протокол № 9

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины рекомендовано к использованию в учебном процессе в качестве локального электронного методического материала методической комиссией ИАПС от 30.10.2023 г., протокол № 8

УДК 519.6

## ОГЛАВЛЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие представляет комплекс систематизированных материалов для самостоятельного изучения дисциплины «Математика» для студентов очной формы обучения бакалавриата по направлению подготовки 19.03.03 Продукты питания животного происхождения.

Целью освоения дисциплины является получение систематизированных знаний об основных закономерностях и особенностях математической области знаний и ее технического приложения, с акцентом на изучение прикладных математических аспектов технического направления; о проблемах, связанных с областью будущей профессиональной деятельности, выработка навыков получения, анализа и обобщения информации.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

*знать:*

– фундаментальные основы высшей математики, включая математический анализ;

– простейшие приложения математического анализа в профессиональных дисциплинах;

– фундаментальные (базовые) понятия и определения теории вероятностей и математической статистики;

– логику вероятностных отношений в недетерминированных условиях;

– основные методы теории вероятностей и математической статистики, применяемые для решения типовых задач;

– основы статистического анализа массовых явлений, фундаментальные (базовые) понятия и методы линейной и векторной алгебры и аналитической геометрии;

– определители, их свойства и способы вычисления;

– матрицы, их виды и операции над матрицами;

– системы линейных уравнений, их виды, исследование систем и методы решения;

– векторы, их виды и операции над векторами;

– линейные пространства, их преобразования;

– основные геометрические объекты двумерного и трехмерного пространств;

*уметь:*

– самостоятельно использовать математический аппарат, содержащийся в литературе по специальным наукам;

– расширять свои математические познания;

– осуществлять постановку задач вероятностного содержания;

– строить алгоритм решения конкретной типовой задачи, выбирать метод ее решения и обосновывать свой выбор;

– выбирать оптимальный метод решения задачи, оценивать полученный результат, строить простейшие математические модели прикладных и профессиональных задач;

– получать вероятные оценки искомых параметров изучаемых процессов и явлений с заданным уровнем значимости;

– пользоваться стандартными приемами прогноза событий и общепринятыми таблицами классических стандартных распределений;

– оценивать уровень достоверности разнородных групп данных, определять необходимый объем исходной информации для получения надежных результатов;

– использовать аппарат линейной и векторной алгебры и аналитической геометрии для решения теоретических и практических задач связанных:

– с вычислением определителей любого порядка;

– с применением операций над матрицами;

– с решением систем линейных уравнений;

– с применением векторной алгебры;

– с представлением процессов в виде линейной или квадратичной зависимости и исследование их методами аналитической геометрии двумерного и трехмерного пространств;

*владеть:*

– первичными навыками и основными методами решения математических задач из общеинженерных и специальных дисциплин;

– математической символикой, основными способами представления математической информации (аналитическим, графическим, символьным, словесным и др.), определением области применения математического знания к решению конкретной задачи;

– навыками работы с типовыми пакетами программ статистического анализа и обработки экспериментальных данных;

– методами построения математических моделей и их исследования в различных сферах профессиональной деятельности, математическими знаниями, как структурированной информацией;

– навыками решения задач методами алгебры и геометрии.

# 1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Тематический план дисциплины по семестрам ОП приведен в таблице.

Таблица. Тематический план.

| | Раздел (модуль) дисциплины | Тема |
|---|---|---|
| **Теоретическое обучение (лекции) I семестр** | | |
| 1 | Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии | 1. Матрицы. Действия над матрицами. Определитель матрицы. Обратная матрица. Ранг матрицы. Методы решения системы уравнений |
| | | 2. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Разложение вектора по базису. Вычисление скалярного, векторного и смешанного произведений векторов |
| | | 3. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости. Виды уравнений прямой на плоскости. Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой. Уравнения плоскости. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Расстояние от точки до плоскости. Кривые 2-ого порядка |
| 2 | Основы математического анализа | 4. Введение в математический анализ: понятие множества, функция, способы задания функции. Предел числовой последовательности. Предел функции. Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация |
| | | 5. Определение производной. Основные правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функции. Производные основных элементарных функций. Производные функций, заданных неявно и параметрически. Производные высших порядков. Дифференциал, его свойства. Дифференциалы высших порядков. Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя. Исследование функций и построение их графиков |
| | | 6. Функции нескольких переменных. Область определения, предел, непрерывность. Частные производные, полный дифференциал. Частные производные высших порядков. Экстремумы функции нескольких переменных. Применение функций нескольких переменных в экономических приложениях |
| **Теоретическое обучение (лекции) II семестр** | | |
| | Основы математического анализа | 7. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Интегралы от основных элементарных функций |
| | | 8.Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование, метод замены переменного, метод интегрирова- |

| | Раздел (модуль) дисциплины | Тема |
|---|---|---|
| 3 | | ния по частям. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование рациональных (дробных), тригонометрических и иррациональных выражений. Интегрирование функций, интегралы от которых не выражаются через элементарные |
| | | 9. Вычисление определенных интегралов. Основные методы вычисления определенных интегралов. Некоторые геометрические приложения определенных интегралов. Несобственные интегралы первого и второго рода |
| 3 | Дифференциальные уравнения | 10. Однородные и неоднородные дифференциальные уравнения первого порядка и методы их решения. Задача Коши. Нахождение общего и частного решения дифференциального уравнения. Линейные однородные и неоднородные уравнения второго порядка. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами |
| 4 | Ряды | 11. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Свойства сходящихся рядов. Необходимое условие сходимости. Признаки сходимости рядов с положительными членами. Знакочередующиеся и знакопеременные ряды. Функциональные ряды. Область сходимости. Степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды |
| 5 | Основы теории вероятностей | 12. Предмет теории вероятностей. Классификация событий, алгебра событий. Элементы комбинаторики. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Полная вероятность. Формула Байеса. Повторение испытаний. Дискретные случайные величины. Непрерывные случайные величины |
| 6 | Элементы математической статистики | 13. Выборка и ее представления. Статистическое оценивание |
| | **Практические занятия** | |
| | **Раздел** | **Тема** |
| 1 | Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии | Первый семестр |
| | | 1. Матрицы. Действия над матрицами. Определитель матрицы. Обратная матрица. Ранг матрицы. Методы решения системы уравнений |
| | | 2. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Разложение вектора по базису. Вычисление скалярного, векторного и смешанного произведений векторов |
| | | 3. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости. Виды уравнений прямой на плоскости. Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой. Уравнения плоскости. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Расстояние от точки до плоскости. Кривые 2-ого порядка |

| | Раздел (модуль) дисциплины | Тема |
|---|---|---|
| 2 | Основы математического анализа | 4. Введение в математический анализ: понятие множества, функция, способы задания функции. Предел числовой последовательности. Предел функции. Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация |
| | | 5. Определение производной. Основные правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функции. Производные основных элементарных функций. Производные функций, заданных неявно и параметрически. Производные высших порядков. Дифференциал, его свойства. Дифференциалы высших порядков. Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя. Исследование функций и построение их графиков |
| | | 6. Функции нескольких переменных. Область определения, предел, непрерывность. Частные производные, полный дифференциал. Частные производные высших порядков. Экстремумы функции нескольких переменных. Применение функций нескольких переменных в экономических приложениях |
| | | Второй семестр |
| | | 7. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Интегралы от основных элементарных функций. Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование, метод замены переменного, метод интегрирования по частям. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование рациональных (дробных), тригонометрических и иррациональных выражений. Интегрирование функций, интегралы от которых не выражаются через элементарные |
| | | 8. Вычисление определенных интегралов. Основные методы вычисления определенных интегралов. Некоторые геометрические приложения определенных интегралов. Несобственные интегралы первого и второго рода |
| 3 | Дифференциальные уравнения | 9. Однородные и неоднородные дифференциальные уравнения первого порядка и методы их решения. Задача Коши. Нахождение общего и частного решения дифференциального уравнения. Линейные однородные и неоднородные уравнения второго порядка. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами |
| 4 | Ряды | 10. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Свойства сходящихся рядов. Необходимое условие сходимости. Признаки сходимости рядов с положительными членами. Знакочередующиеся и знакопеременные ряды. Функциональные ряды. |

| | Раздел (модуль) дисциплины | Тема |
|---|---|---|
| | | Область сходимости. Степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды |
| 5 | Основы теории вероятностей | 11. Предмет теории вероятностей. Классификация событий, алгебра событий. Элементы комбинаторики. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Полная вероятность. Формула Байеса. Повторение испытаний. Дискретные случайные величины. Непрерывные случайные величины |
| 6 | Элементы математической статистики | 12. Выборка и ее представления. Статистическое оценивание |
| | **Текущий контроль** | |
| | **Раздел** | **Тема** |
| 1,2 | – Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии<br>– Основы математического анализа(пределы и производная функции) | Первый семестр<br>Контрольная работа |
| 2,10 | – Основы математического анализа (неопределенный и определенный интегралы).<br>– Основы теории вероятностей | Второй семестр<br>Контрольная работа |

## 2. СОДЕРЖАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Курс разбит на темы, в которых даны указания литературы, рекомендуемой для изучения.

**Раздел «Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии»**

**Тема 1.** Матрицы. Действия над матрицами. Определитель матрицы. Обратная матрица. Ранг матрицы. Методы решения системы уравнений.

**Методические рекомендации**

Изучение данной темы следует начать с понятия матрицы и их видов. Затем изучить операции над матрицами. Важно усвоить понятие определителя матрицы, способы его вычисления. Перейдите к свойствам определителя, а также научитесь применять это понятие при нахождния обратной матрицы и решении систем линейных уравнений по формулам Крамера, систем уравнений в матричном виде. Применение метода Гаусса требует знания ранее полученные.

Необходимо самостоятельно изучить понятие ранг матрицы и теорему Кронекера-Капелли.

При изучении темы 1 обязательно используются знания, умения и навыки, полученные при довузовской подготовке по математике.

**Рекомендуемая литература по теме**

В предлагаемой литературе [2, 4, 5] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

**Контрольные вопросы**

1. Сформулируйте определение матрицы и ее виды.
2. Сложение матриц. Умножение матриц на число. Умножение матриц.
3. Как вычисляются определители второго и третьего порядков? Свойства определителей.
4. Каков алгоритм нахождения обратной матрицы?
5. Напишите формулы Крамера для решения систем линейных уравнений.
6. Решение систем линейных уравнений средствами матричного исчисления.
7. В чем заключается методом Гаусса?
8. Что такое ранг матрицы?
9. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.

**Тема 2.** Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Разложение вектора по базису. Вычисление скалярного, векторного и смешанного произведений векторов.

**Методические рекомендации**

Понятие вектора в современной математике является довольно широким понятием, связанным с понятием линейных операций (сложением и умножением на число). Такие операции уже встречались, например, в арифметике, теории матриц. В каждом конкретном случае они определялись по-своему, в соответствии со спецификой тех множеств, для которых они рассматриваются (числа, матрицы). Но свойства этих операций одинаковы. Именно эта общность и сближает их. При решении задач следует учесть особенности применяемой терминологии. Пояснение всех терминов, используемых в задачах найти в методических рекомендациях по изучению данной темы, а рекомендуемой литературе.

При изучении темы 2 обязательно используются знания, умения и навыки, полученные при изучении предыдущей темы дисциплины и довузовской подготовке по математике.

Необходимо самостоятельно изучить решение задачи – разложение вектора по базису.

**Рекомендуемая литература по теме**

В предлагаемой литературе [2, 4, 5] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

**Контрольные вопросы**

1. Сформулируйте понятие вектора и линейные операции над векторами: сложение, вычитание, умножение вектора на число.
2. Напишите условие коллинеарности векторов.
3. Что такое проекция вектора на ось?
4. Разложение вектора по базису.
5. Прямоугольная декартова система координат на плоскости и в пространстве.
6. Напишите разложение вектора по координатному базису. Координаты вектора.
7. Линейные операции над векторами, заданными своими координатами.
8. Напишите координаты вектора, заданного двумя точками и расстояние между ними.
9. Направляющие косинусы вектора.
10. Деление отрезка в данном отношении.
11. Скалярное и векторное произведение векторов.
12. Смешанное произведение векторов.
13. В чем состоит геометрический и физический смысл скалярного произведения?
14. В чем состоит геометрический и физический смысл векторного произведения?
15. В чем состоит геометрический смысл смешанного произведения?

**Тема 3.** Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости. Виды уравнений прямой на плоскости. Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой. Уравнения плоскости. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Расстояние от точки до плоскости. Кривые 2-ого порядка.

**Методические рекомендации**

Аналитическая геометрия – область математики, в которой геометрические задачи решаются алгебраическим способом. Важно научиться анализировать геометрические свойства линии на основе анализа их уравнений, представлять публично полученные результаты. Владеть: понятийным и формальным математическим аппаратом аналитической геометрии; методами решения стандартных задач аналитической геометрии, связанных с длинами, площадями, объемами, а также с важнейшими свойствами и взаимным расположением линий.

При изучении темы 3 обязательно используют знания, умения и навыки, полученные при изучении двух предыдущих тем дисциплины и довузовской подготовке по математике.

Необходимо самостоятельно изучить кривые 2-го порядка.

**Рекомендуемая литература по теме**

В предлагаемой литературе [2, 4, 5] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

**Контрольные вопросы**

1. Задание множеств точек уравнениями и неравенствами. Уравнение линии на плоскости.
2. Прямая на плоскости. Общее уравнение.
3. Угловой коэффициент прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
4. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
5. Уравнение прямой в отрезках.
6. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых.
7. Понятие о кривых второго порядка. Канонические уравнения эллипса, окружности, параболы, гиперболы.
8. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду в простейших случаях.
9. Общее уравнение плоскости.
10. Уравнения прямой в пространстве.
11. Взаимоположение прямых.
12. Взаимоположение плоскостей.
13. Взаимоположение прямой и плоскости.
14. Напишите формулу расстояние от точки до плоскости.

**Раздел «Основы математического анализа»**

**Тема 4.** Введение в математический анализ: понятие множества, функция, способы задания функции. Предел числовой последовательности. Предел функции. Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация.

**Методические рекомендации**

При изучении тем данного раздела и всех последующих разделов дисциплины «Математика» обязательно используются умения проводить алгебраические преобразования, решать уравнения и неравенства, знание основных тригонометрических формул, умение проводить тригонометрические преобразования и решать тригонометрические уравнения и неравенства, понимание функции, графика функции и основных ее свойств, знание графиков и свойств основных элементарных функций (довузовская подготовка по математике).

Понятие функции – одно из наиболее важных в математике и ее приложениях. В самом общем понимании функция – это зависимость между двумя переменными. В курсе математического анализа изучают главным образом числовые функции. Наглядное представление о числовой функции дает ее график. Это – некоторое множество точек на координатной плоскости, обычно – некоторая линия. Задать функцию означает: указать область определения функции и описать правило, позволяющее по данному значению аргумента находить соответствующее значение функции. Наиболее употребительными являются три способа задания функции: табличный, аналитический, графический. Наиболее простые приложения математического анализа ограничиваются кругом так называемых элементарных функций. Это: степенные функции, показательные функции, тригонометрические функции, обратные тригонометрические.

Важно усвоить понятия предела функции, бесконечно малых и бесконечно больших функций и методы вычисления пределов. Изучив эту тему студент будет готов к восприятию понятий производной и интеграла.

**Рекомендуемая литература по теме**

В предлагаемой литературе [2, 4, 5] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

**Контрольные вопросы**

1. Функция и способы ее задания. Область определения функции.
2. Основные элементарные функции и их графики.
3. Понятие предела функции.
4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
5. Основные теоремы о пределах.
6. Понятие о неопределенных выражениях. Раскрытие неопределенностей.
7. Первый и второй замечательный пределы.
8. Непрерывность функции. Понятие о точках разрыва функции.

**Тема 5.** Определение производной. Основные правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функции. Производные основных элементарных функций. Производные функций, заданных неявно и параметрически. Производные высших порядков. Дифференциал, его свойства. Дифференциалы высших порядков. Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя. Исследование функций и построение их графиков.

**Методические рекомендации**

Понятие производной – одно из основных понятий математического анализа. Всякий процесс или явление, протекающее во времени, характеризуются наряду с другими показателями такой важной характеристикой, как скорость. Можно говорить о задаче нахождения скорости неравномерного движения, химической реакции, нагревания и остывания нагретого тела, производительности труда и т. д. Все эти задачи приводят к однотипным вычислениям, результат которых называют производной.

Производная функции и некоторые ее приложения известны по школьному курсу математики. Теперь, ввиду огромной важности производной при изучении различных дисциплин, необходимо повторить и углубить имеющиеся знания, а также дополнить их новыми. Необходимо научиться вычислять производные сложной функции, обратной, неявно заданной функции, параметрической функции, применять логарифмическое дифференцирование, находить производные высших порядков (в том числе $n$-ю производную). Особое место в данной теме занимает понятие дифференциала функции, тесно связанное с понятием производной, а также его применение при приближенных вычислениях значений функции. Также необходимо научиться применять производную для вычисления пределов функций (правила Лопиталя) и для исследования поведения функций (монотонность, экстремумы, выпуклость, точки перегиба, наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке).

При изучении темы 5 обязательно используются знания, умения и навыки, полученные при изучении предыдущей темы дисциплины и довузовской подготовке по математике.

Важно усвоить понятие производной, способы ее вычисления, а также научиться применять это понятие при решении прикладных задач.

**Рекомендуемая литература по теме**

В предлагаемой литературе [2, 4, 5] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

**Контрольные вопросы**

1. Сформулируйте определение производной функции. Какие задачи приводят к понятию производной? Что такое дифференцирование?
2. В чем состоит геометрический и физический смысл производной? Напишите уравнения касательной и нормали к кривой в заданной точке.
3. Напишите по памяти правила дифференцирования и таблицу производных.
4. По какому правилу найти производную сложной и обратной функции?
5. Сформулируйте правило дифференцирования неявных и параметрически заданных функций.
6. Что такое логарифмическое дифференцирование?
7. Что такое производные высших порядков? Сформулируйте механический смысл второй производной.
8. Дайте понятие дифференциала. Что такое главная часть приращения функции? В чем состоит геометрический смысл дифференциала функции?
9. Напишите правила вычисления дифференциала. В чем состоит инвариантность формы первого дифференциала?
10. Как применяется дифференциал к приближенным вычислениям? Сформулируйте понятие дифференциалов высших порядков.
11. Сформулируйте теоремы о дифференцируемых функциях.

12. В чем состоят правила Лопиталя раскрытия неопределенностей?

13. Сформулируйте определение возрастающей (убывающей) функции. Как определить промежутки возрастания (убывания) функции?

14. Что такое экстремум функции? Сформулируйте необходимое, достаточное условия экстремума. Сформулируйте правило нахождения экстремумов функции.

15. Что такое наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке? Сформулируйте правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

16. Что такое точки перегиба? Сформулируйте правило нахождения промежутков выпуклости и точек перегиба функции.

17. Дайте понятие асимптоты графика функции. Как найти асимптоты?

**Тема 6.** Функции нескольких переменных. Область определения, предел, непрерывность. Частные производные, полный дифференциал. Частные производные высших порядков. Экстремумы функции нескольких переменных. Применение функций нескольких переменных в экономических приложениях.

**Методические рекомендации**

В данной теме рассматриваются переменные величины, зависящие от нескольких других переменных величин. Необходимость изучения такого вида зависимостей вызваны тем, что во многих процессах и явлениях, встречающихся в природе, технике, в практической деятельности человека, числовые значения одной величины определяются набором из двух, трех и большего количества независимых переменных. При изучении этих явлений используют понятие функции нескольких переменных. До сих пор мы рассматривали функции одной действительной переменной. Но это понятие не охватывает все зависимости, существующие в природе. Даже в самых простых задачах встречаются величины, значения которых определяются совокупностью значений нескольких величин. Так, например, температура тела $T$ в данный момент времени $t$ может меняться от точки к точке. Каждая точка тела определяется тремя координатами $x, y, z$, поэтому температура тела зависит от трех переменных $x, y, z$. Если еще учесть, что температура тела $T$ изменяется в разные моменты времени $t$, то ее значения будут определяться уже четырьмя переменными, т. е. $T = T(t, x, y, z)$. Другой пример. Площадь прямоугольника со сторонами $x$ и $y$ определяется значениями двух переменных $x, y$. Объем прямоугольного параллелепипеда с измерениями $x, y, z$ определяется значениями переменных $x, y$ и $z$. Таких примеров можно привести много. Данный раздел посвящен изучению такого рода зависимостей. Здесь будет введено понятие функции нескольких переменных и дан аппарат для изучения поведения таких функций: линии и поверхности уровня, предел и непрерывность функции двух переменных, частные и полное приращения функции двух переменных, частные производные функции двух переменных, частные и полный дифференциалы, градиент функции, производная по направлению, экстремум функции двух переменных, наибольшее и наименьшее значения функции в данной области.

При изучении данного раздела обязательно используются знания, умения и навыки, приобретенные при изучении предыдущих темах, а именно, предел, непрерывность, производная функции одной действительной переменной.

**Рекомендуемая литература по теме**

В предлагаемой литературе [2, 4, 5] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

**Контрольные вопросы**

1. Функции двух переменных. Область определения. Линии уровня. Понятие о функциях трех и более переменных.
2. Предел функции. Непрерывность.
3. Частные производные. Их геометрический и механический смысл.
4. Полный дифференциал, его приложение к приближенным вычислениям.
5. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков.
6. Экстремумы функции двух переменных. Необходимые условия. Понятие о достаточных условиях экстремума.

**Тема 7.** Первообразная функция и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Интегралы от основных элементарных функций. Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование, метод замены переменного, метод интегрирования по частям. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование рациональных (дробных), тригонометрических и иррациональных выражений. Интегрирование функций, интегралы от которых не выражаются через элементарные.

**Методические рекомендации**

В предыдущих разделах мы изучали производную функции и ее приложения к решению практических задач.

В этом разделе рассматривается второе основное понятие математического анализа понятие интеграла. Интегрирование действие, обратное нахождению производной.

Изучение данного раздела следует начать с понятия первообразной функции. Затем изучите понятия: неопределенный интеграл, интегрирование. Перейдите к свойствам неопределенного интеграла, которые непосредственно вытекают из его определения. Так как интегрирование – это действие, обратное дифференцированию, то можно получить таблицу основных интегралов, используя таблицу производных (или дифференциалов). Эти интегралы называются табличными, их следует выучить наизусть. Все методы вычисления неопределенных интегралов сводятся к указанию приемов, приводящих заданный интеграл к табличному. Поэтому табличные интегралы надо помнить и уметь их узнавать. Докажите свойства неопределенного интеграла, они также используются при вычислении интегралов. Изучите, в чем состоят основные методы интегрирования: метод непосредственного интегрирования; подведение переменной под знак дифференциала; метод замены переменной; интегрирование по частям; интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен; интегрирование дробно-рациональных функций; интегрирование тригонометрических функций, интегрирование простейших иррациональных функций. Отработайте навык вычисления неопределенных интегралов на практике. Это умение будет необходимо вам для изучения следующей темы 8 «Определенный интеграл» и раздела «Дифференциальные уравнения».

Важно усвоить основные формулы интегрирования и методы интегрирования, так как понятие интеграла пронизывает не только всю современную математику, но и физику, химию и многие общетехнические и специальные дисциплины.

**Рекомендуемая литература по теме**

В предлагаемой литературе [2, 4, 5] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

**Контрольные вопросы**

1. Что такое первообразная?
2. Сформулируйте определение неопределенного интеграла и перечислите его свойства.
3. Запишите по памяти таблицу основных интегралов.
4. В чем состоит метод занесения переменной под знак дифференциала?
5. В чем состоит метод замены переменной?
6. В чем состоит метод интегрирования по частям в неопределенном интеграле?
7. Сформулируйте понятия простейших рациональных дробей и их интегрирование.
8. Как интегрировать рациональные функции (дроби)?
9. Интегрирование некоторых видов тригонометрических функций.
10. Универсальная тригонометрическая подстановка.
11. Интегралы вида: $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$.
12. Какие есть подходы при интегрировании иррациональных функций?

**Тема 8.** Вычисление определенных интегралов. Основные методы вычисления определенных интегралов. Некоторые геометрические приложения определенных интегралов. Несобственные интегралы первого и второго рода.

**Методические рекомендации**

При изучении данного раздела обязательно используются знания, умения и навыки, приобретенные при изучении предыдущих разделов, а именно, неопределенный интеграл, предел и производная функции одной переменной. К понятию определенного интеграла приводит задача вычисления площади криволинейной трапеции.

Поэтому, целесообразно начать с разбора задач, приводящих к понятию определенного интеграла. Затем ввести определение определенного интеграла, теорему о существовании определенного интеграла, геометрический и физический смысл определенного интеграла. Доказать формулу Ньютона-Лейбница, она дает удобный способ вычисления определенных интегралов. И рассмотреть основные свойства определенного интеграла. Далее необходимо на практике выработать навык вычисления определенных интегралов, применяя: формулу Ньютона-Лейбница, метод замены переменной в определенном интеграле, метод интегрирования по частям в определенном интеграле. Обратите внимание на интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах. Изучите понятия несобственных интегралов – интеграла с бесконечным промежутком интегрирования от непрерывной функции и интеграла с конечным промежутком интегрирования от функции, имеющей на нем бесконечный разрыв. Решите задачи на геометрические приложения определенного интеграла: вычисление площадей плоских фигур, вычисление объемов тел, вычисление длин дуг, вычисление площадей поверхностей вращения.

Многие задачи механики, например, вычисление давления жидкости на пластину; вычисление работы переменной силы на прямолинейном отрезке пути; вычисление работы по выкачиванию жидкости из резервуара можно решить, используя методы интегрирования.

**Рекомендуемая литература по теме**

В предлагаемой литературе [2, 4, 5] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

**Контрольные вопросы**

1. Геометрический смысл определенного интеграла.
2. Основные свойства определенного интеграла.
3. Формула Ньютона-Лейбница.
4. Замена переменной в определенном интеграле.
5. Формула интегрирования по частям для определенного интеграл.
6. Несобственные интегралы (случай бесконечных пределов интегрирования).
7. Несобственные интегралы (интегралы от разрывных функций).
8. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых координатах.
9. Вычисление длин дуг плоских кривых.
10. Вычисление объемов тел вращения.

**Раздел «Дифференциальные уравнения»**

**Тема 9.** Однородные и неоднородные дифференциальные уравнения первого порядка и методы их решения. Задача Коши. Нахождение общего и частного решения дифференциального уравнения. Линейные однородные и неоднородные уравнения второго порядка. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

**Методические рекомендации**

Многочисленные задачи естествознания, техники, механики, биологии, химии и других отраслей знаний сводятся к тому, что по заданным свойствам некоторого процесса или явления необходимо найти математическую модель самого процесса в виде формулы, связывающей переменные величины, т. е. в виде функциональной зависимости.

Дифференциальное уравнение – это уравнение, связывающее независимую переменную $x$, неизвестную функцию $y$ и ее производные или дифференциалы. Дифференциальные уравнения обычно возникают, когда зависимость между переменными величинами $x$ и $y$ непосредственно установить не получается, но возможно найти связь между дифференциалами этих переменных. Например, рассмотрим такую задачу. Найти кривую, проходящую через точку $M_0(0;2)$ и обладающую тем свойством, что в каждой её точке угловой коэффициент касательной равен удвоенной абсциссе точки касания. Для решения этой задачи обозначим искомую функцию $y=f(x)$ и воспользуемся геометрическим смыслом производной, согласно которому производная функции в точке равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в этой точке. Согласно условию задачи можем записать, что $y'=2x$. Мы получили дифференциальное уравнение, где неизвестная функция $y$ стоит под знаком производной. Чтобы ее выразить надо проинтегрировать это уравнение: $y=x^2+C$, где $C$ – произвольная постоянная. Получили бесконечное множество решений дифференциального уравнения – множество парабол, полученных параллельным сдвигом параболы $y=x^2$ вдоль оси $Ox$ на $C$ единиц. Все эти параболы удовлетворяют условию задачи: угловой коэффициент касательной равен удвоенной абсциссе точки касания. Выберем одну из них, которая проходит через точку $M_0(0;2)$. Подставляя координаты точки, найдем $C$: $2=0^2+C$, $C=2$. Таким образом, искомой кривой будет парабола $y=x^2+2$.

При рассмотрении данного примера мы сталкивались с основными понятиями теории дифференциальных уравнений: порядок дифференциального уравнения, общее решение, интегральные кривые, начальное условие, частное решение дифференциального уравнения. После изучения этих понятий укажите их по тексту решения этого примера. Рассмотрите основные типы дифференциальных уравнений первого и второго порядка и методы их решения. Выработайте навык их решения на практике.

При изучении данного раздела обязательно используются знания, умения и навыки, приобретенные при изучении предыдущем разделе, а именно, неопределенный интеграл и производная функции одной переменной.

**Рекомендуемая литература по теме**

В предлагаемой литературе [2, 4, 5] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

**Контрольные вопросы**

1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Общее и частное решения. Задача Коши. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши.
2. Интегрирование простейших типов дифференциальных уравнений первого порядка. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
5. Дифференциальные уравнения высших порядков. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши.
6. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.
7. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Однородные уравнения. Свойства их решений.
8. Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения.
9. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
10. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Теорема о структуре общего решения.
11. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

**Раздел «Ряды»**

**Тема 10.** Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Свойства сходящихся рядов. Необходимое условие сходимости. Признаки сходимости рядов с положительными членами. Знакочередующиеся и знакопеременные ряды. Функциональные ряды. Область сходимости. Степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды.

**Методические рекомендации**

Ряды являются обобщением обычных сумм и многочленов на бесконечное число слагаемых. Для изучения рядов используется частный случай функций: функций натурального аргумента – последовательностей – и их пределов при $n \to \infty$, понятие о которых дается в курсе дифференциального исчисления. Введение рядов позволяет изучать функции, не являющиеся элементарными, находить интегралы, которые невозможно вычислить методами, описанными в курсе интегрального исчисления. В дальнейшем ряды находят применение в курсе теории вероятностей.

При изучении данного раздела используются знания, умения и навыки, приобретенные при изучении предыдущих разделов, а именно, предел и производная функции одной действительной переменной, интегралы.

Ряды с действительными членами можно разделить на две основные группы: числовые ряды и функциональные. Среди числовых рядов выделяют: ряды с положительными членами и знакопеременные ряды. Среди функциональных рядов особый интерес представляют степенные ряды и тригонометрические ряды.

Начать изучение данного раздела следует с числовых рядов. Выясните, что такое числовой ряд, частичные суммы ряда, сходящиеся и расходящиеся ряды, сумма ряда. Изучите свойства сходящихся рядов и необходимое условие сходимости ряда. Затем изучите признаки сходимости рядов с положительными членами (вопросы 3–5). После этого перейдите к изучению знакопеременных рядов, абсолютной и условной сходимости. Изучив числовые ряды, переходите к изучению функциональных рядов, а именно степенных рядов. Особое внимание уделите определению области сходимости степенного ряда и разложению функций в ряды Тейлора и Маклорена. Решите задачи на практическое применение рядов для приближенного вычисления значений функций и вычисления определенных интегралов.

**Рекомендуемая литература по теме**

В предлагаемой литературе [2, 4, 5] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

**Контрольные вопросы**

1. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости ряда.
2. Теоремы сравнения.
3. Признаки Даламбера и Коши.
4. Интегральный признак сходимости ряда.
5. Теорема Лейбница. Оценка остатка знакочередующегося ряда.
6. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов.
7. Понятие равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса.
8. Теорема о непрерывности суммы функционального ряда.
9. Теоремы о почленном интегрировании и почленном дифференцировании функционального ряда.
10. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.
11. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. Непрерывность суммы ряда.
12. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
13. Разложение функции в степенной ряд. Ряд Тейлора.
14. Разложение по степеням $x$ бинома $(1+x)^m$.
15. Условия разложимости функции в ряд Тейлора.

16. Разложение по степеням $x$ функций $e, \cos x, \sin x, \ln(1+x)$.

**Раздел «Основы теории вероятностей»**

**Тема 11.** Предмет теории вероятностей. Классификация событий, алгебра событий. Элементы комбинаторики. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Полная вероятность. Формула Байеса. Повторение испытаний. Дискретные случайные величины. Непрерывные случайные величины.

**Методические рекомендации**

Теория вероятностей является одним из основных методов исследования в естествознании, технике и других науках. Она развилась из потребностей практики и её аксиомы и теоремы в абстрактной форме отражают закономерности, присущие случайным событиям массового характера, т. е. событиям, которые могут произойти, но могут и не произойти по причинам, не поддающимся непосредственному учету в данных условиях. Изучение количественных закономерностей, которым подчиняются массовые случайные события, и составляет предмет теории вероятностей

Данный раздел имеет особое значение, так как в нем излагаются основы теории вероятностей, без понимания и усвоения которых дальнейшее изучение вызовет значительные затруднения. Непосредственно подсчитать вероятность события возможно только в задачах, соответствующих экспериментам с конечным числом равновозможных несовместных исходов. При этом подсчёт числа элементов различных подмножеств пространства элементарных событий осуществляется по формулам и правилам комбинаторики. Чаще всего вероятность события вычисляется по формулам сложения и умножения вероятностей. Для этого сложное событие надо при помощи операций над событиями выразить через простейшие события, вероятности которых уже известны. При использовании формулы Байеса следует следить за тем, чтобы сформулированные гипотезы образовывали полную группу несовместных событий. Повторение испытаний. Формула Бернулли. Теорема Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Лапласа. Студенту необходимо выучить виды случайных величин: дискретные и непрерывные, закон распределения вероятностей дискретной случайной величины. Уметь находить числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин, применяя их свойства. А также раскрывать смысл табличного и графического задания функции распределения дискретной случайной величины. Знать, что такое интегральная функция распределения непрерывной случайной величины, какова её связь с плотностью вероятности. Научиться давать характеристику понятиям «плотность вероятности», «математическое ожидание» и «дисперсия» для различных законов распределения.

**Рекомендуемая литература по теме**

В предлагаемой литературе [1, 3, 6] изучить соответствующие разделы и главы.

**Контрольные вопросы**

1. Какие события называются достоверными, случайными, невозможными?

2. Какие события называют элементарными? Что такое пространство элементарных событий?

3. Дайте определение суммы, разности, произведения случайных событий. Что такое совместные и несовместные события?

4. Дайте классическое определение вероятности.

5. Что называется относительной частотой случайного события?

6. Дайте определение зависимых и независимых случайных событий; условной вероятности.

7. Сформулируйте теоремы умножения вероятностей для зависимых и независимых событий.

8. Сформулируйте теоремы сложения вероятностей для совместных и несовместных событий.

9. Приведите формулу полной вероятности.

10. Сформулируйте теорему Байеса.

11. Что такое повторение испытаний. Приведите формулу Бернулли.

12. Дайте определение дискретной случайной величины.

13. Дайте понятие ряда распределения, многоугольника распределения, аналитического задания закона распределения вероятностей.

14. Каким образом определяют интегральную функцию распределения дискретной случайной величины? Раскройте смысл табличного и графического задания функции распределения дискретной случайной величины.

15. Каковы свойства интегральной функции распределения? Дайте определение вероятности попадания дискретной случайной величины в заданный интервал.

16. Дайте определение математического ожидания дискретной случайной величины. Объясните сущность понятия математического ожидания.

17. Сформулируйте свойства математического ожидания случайных величин.

18. Сформулируйте понятия «дисперсия» и «среднеквадратичное отклонение дискретных случайных величин». Какие свойства дисперсии случайных величин вы знаете?

19. Сформулируйте равномерный закон распределения дискретных случайных величин. Ряд распределения, функция распределения, математическое ожидание и дисперсия для данного вида распределения.

20. Сформулируйте биноминальный закон распределения. Аналитическое задание и многоугольник распределения.

21. Поясните распределение Пуассона. Аналитическое задание. Графики многоугольника и функции распределения. Математическое ожидание и дисперсия.

22. Приведите понятие и примеры непрерывных случайных величин. Почему для непрерывной случайной величины вероятность $P(X=x_i)$ равна нулю?

23. Как определяется плотность вероятности непрерывной случайной величины, её связь с функцией распределения?

24. Назовите свойства плотности вероятности непрерывной случайной величины.

25. Что такое интегральная функция распределения непрерывной случайной величины, какова её связь с плотностью вероятности?

26. Дайте определение математическому ожиданию непрерывной случайной величины.

27. Что такое нормальный закон распределения непрерывных случайных величин? Дайте характеристику понятиям «плотность вероятности», «математическое ожидание» и «дисперсия» для этого закона.

28. Как определяется функция распределения непрерывной случайной величины, имеющей нормальный закон распределения?

29. Какие свойства дисперсии случайных величин вы знаете?

**Раздел «Элементы математической статистики»**

**Тема 12.** Выборка и ее представления. Статистическое оценивание.

**Методические рекомендации**

Раздел математики, изучающий математические методы сбора, систематизации, обработки и интерпретации результатов наблюдений с целью выявления статистических закономерностей.

Необходимо изучить основные методы математической статистики, применяемые для решения типовых задач.

**Рекомендуемая литература по теме.** В предлагаемой литературе [1, 3, 6] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

**Контрольные вопросы**

1. Генеральная и выборочная совокупности. Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения и ее свойства.

2. Графическое изображение статистического распределения. Полигон и гистограмма.

3. Числовые характеристики статистического распределения: выборочная средняя, выборочная дисперсия, среднее квадратическое отклонение, размах, мода, медиана. Методы их вычисления.

4. Оценка неизвестных параметров распределения. Точечные оценки. Свойства оценок: несмещенность, состоятельность, эффективность. Точечные оценки математического ожидания и дисперсии. «Исправленная дисперсия».

5. Интервальные оценки. Доверительный интервал, доверительная вероятность.

6. Доверительный интервал для математического ожидания при известной генеральной дисперсии нормального распределения.

7. Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной генеральной дисперсии нормального распределения.
8. Доверительный интервал для дисперсии нормального распределения.

## 2.1 Тематика практических занятий

Тема 1. Матрицы и действия над ними. Определители. Их свойства и вычисление.

Тема 2. Обратная матрица. Элементарные преобразования матрицы. Системы линейных уравнений.

Тема 3. Векторы. Основные определения. Линейные операции. Проекция вектора на ось. Линейная зависимость векторов. Разложение вектора по базису. Декартова прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве. Координаты вектора и точки. Линейные операции над векторами в координатной форме.

Тема 4. Скалярное произведение векторов. Свойства. Приложения.

Тема 5. Векторное и смешанное произведения векторов. Свойства. Приложения.

Тема 6. Уравнение линии на плоскости. Различные способы задания прямой.

Тема 7. Кривые второго порядка, их характеристики и свойства.

Тема 8. Различные виды уравнений плоскости и прямой в пространстве.

Тема 9. Понятие функции. Классификация функций.

Тема 10. Предел числовой последовательности и функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы.

Тема 11. Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывных функций. Точки разрыва и их классификация.

Тема 12. Производная функции. Механический и геометрический смысл. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции. Основные правила дифференцирования. Таблица производных.

Тема 13. Дифференцирование функций. Вычисление производных сложных функций, параметрически заданных и неявных функций.

Дифференциал. Свойства. Производные и дифференциалы высших порядков.

Тема 14. Теоремы Ферма, Лагранжа, Ролля о дифференцируемых функциях. Правило Лопиталя.

Тема 15. Приложение производной к исследованию функций и построению их графиков.

Тема 16. Функции нескольких переменных. Предел. Непрерывность. Частные производные. Экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум. Функция Лагранжа.

Тема 17. Первообразная функция. Неопределенный интеграл. Свойства. Таблица. Основные методы интегрирования.

Тема 18. Комплексные числа. Многочлены. Корни многочлена. Разложение на множители. Рациональные дроби. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование.

Тема 19. Интегрирование рациональных дробей с помощью разложения на простейшие дроби. Интегрирование тригонометрических функций. Интегрирование рациональных дробей.

Тема 20. Понятие определенного интеграла. Свойства.

Тема 21. Определенный интеграл, основные свойства. Формула Ньютона-Лейбница.

Тема 22. Несобственные интегралы 1 и 2-го рода.

Тема 23. Приложение определенного интеграла к решению геометрических и физических задач.

Тема 24. Дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения первого порядка. Решение задачи Коши.

Тема 25. Дифференциальные уравнения высших порядков. Линейные дифференциальные уравнения. Однородные уравнения. Свойства решений.

Тема 26. Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного д.у. Линейные неоднородные д.у. с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Тема 27. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла. Двойной интеграл. Свойства. Вычисление.

Тема 28. Числовые ряды. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Признаки сходимости.

Тема 29. Знакопеременные ряды. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница.

Тема 30. Функциональные и степенные ряды, интервал сходимости. Свойства степенных рядов. Ряды Фурье.

Тема 31. Предмет теории вероятностей. Классификация событий, алгебра событий. Элементы комбинаторики. Различные подходы к введению понятия вероятности события. Аксиомы теории вероятностей. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Полная вероятность.

Тема 32. Формулы Бейеса, Бернулли, Пуассона. Вероятность наступления хотя бы одного события. Локальная и интегральная теоремы Лапласа. Невероятнейшее число наступления события.

Тема 33. Случайные величины, дискретные и непрерывные случайные величины. Распределение дискретных случайных величин. Функция распределения, ее основные свойства. Числовые характеристики дискретных случайных величин. Функция распределения вероятностей, плотность распределения непрерывных случайных величин, их свойства. Числовые характеристики непрерывных случайных величин, их свойства.

Тема 34. Примеры законов распределения случайных величин и их числовые характеристики Предельные теоремы вероятностей (закон больших чисел).

Тема 35. Основные понятия и задачи математической статистики. Полигон и гистограмма. Числовые характеристики генеральной и выборочной совокупностей. Статистические функции параметров распределения (точечные, интервальные).

### 2.2 Типовые задания для практических занятий

**Тема 1.**

Решить систему уравнений следующими методами:

а) методом Крамера,

б) матричным методом.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases}$$

*Решение*:

а) Составим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

Для его вычисления воспользуемся свойством определителя о том, что величина определителя не изменится, если к элементам любой его строки (столбца) прибавить элементы любой другой строки (столбца), умноженной(го) на число.

(Первую строку умножаем на (–1) и прибавляем ко второй и к третьей строке).

Получим: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix}$

Применяя свойство о разложении определителя по элементам любой строки (столбца) (в данном случае по элементам первого столбца), получим:

$$\Delta = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2$$

Составим вспомогательные определители и вычислим их аналогичным образом:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -17 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 2 \begin{vmatrix} -5 & -17 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-15 + 17) = 4$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 6 \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$x_1$, $x_2$, $x_3$ вычисляются по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}$$

$x_1 = \frac{4}{2} = 2; \quad x_2 = \frac{6}{2} = 3; \quad x_3 = \frac{-2}{2} = -1$

б) Для решения системы матричным методом введем обозначения матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \quad X = A^{-1}B. \tag{1}$$

Так как $\Delta = 2 \neq 0$, то для матрицы А существует обратная матрица $A^{-1}$. Найдем обратную матрицу. Для этого вычислим алгебраические дополнения всех элементов главного определителя $\Delta$ системы

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{31} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Союзной матрицей А* для матрицы А будет матрица:

$$A^* = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = 2, \text{ то } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Учитывая равенство (1), имеем:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 2; \; x_2 = 3; \; x_3 = -1.$

**Тема 2.**

Выясните, образуют ли вектора $\vec{p} = (3;-1;0)$, $\vec{q}(2;3;1)$, $\vec{r}(-1;4;3)$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x}(2;3;7)$ по этому базису.

*Решение*:

Вычисляем $\vec{p}\vec{q}\vec{r} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 22 \neq 0.$

Следовательно, векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ образуют базис, и вектор $\vec{x}$ линейно выражается через базисные векторы: $\vec{x} = \alpha \cdot \vec{p} + \beta \cdot \vec{q} + \gamma \cdot \vec{r}$

или в координатной форме

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta - \gamma = 2 \\ -\alpha + 3\beta + 4\gamma = 3 \\ \qquad \beta + 3\gamma = 7 \end{cases}$$

Решаем полученную систему по формулам Крамера.

Находим: $\Delta = 22,$

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 66, \qquad \Delta_\beta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -44, \qquad \Delta_\gamma = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 66.$$

$\alpha = \dfrac{\Delta_\alpha}{\Delta} = \dfrac{66}{22} = 3, \qquad \beta = \dfrac{\Delta_\beta}{\Delta} = \dfrac{-44}{22} = -2, \qquad \gamma = \dfrac{\Delta_\gamma}{\Delta} = \dfrac{66}{22} = 3,$ поэтому

$\vec{x} = (3;-2;3)$

$\vec{x} = 3 \cdot \vec{p} - 2 \cdot \vec{q} + 3 \cdot \vec{r}$

**Тема 3.**

Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(4;4;10),\ A_2(4;10;2),\ A_3(2;8;4),\ A_4(9;6;4)$

Найти:

1. Длину ребра $A_1A_2$, если

$A_1(4;4;10),\ A_2(4;10;2)$

*Решение*:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

$$d = \sqrt{(4-4)^2 + (10-4)^2 + (2-10)^2} = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

Ответ: $|A_1A_2| = 10$

2. Угол между ребрами $A_1A_2$ и $A_1A_4$, если

$A_1(4;4;10),\ A_2(4;10;2),\ A_4(9;6;4)$

*Решение*:

Найдем координаты векторов по формулам: $\{x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0\}$

$\overrightarrow{A_1A_2} = (4-4;10-4;2-10)$

$\overrightarrow{A_1A_2} = (0;6;-8)$

$\overrightarrow{A_1A_4} = (9-4;6-4;4-10)$

$\overrightarrow{A_1A_4} = (5;2;-6)$

Угол между векторами $\overrightarrow{A_1A_2} = (0;6;-8)$ и $\overrightarrow{A_1A_4} = (5;2;-6)$ вычисляется по формуле: $\cos\alpha = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}} \cdot \sqrt{x_2^{\,2} + y_2^{\,2} + z_2^{\,2}}}$

$$\cos\alpha = \frac{0\cdot 5 + 6\cdot 2 + (-8)\cdot(-6)}{\sqrt{0^2 + 6^2 + (-8)^2} \cdot \sqrt{5^2 + 2^2 + (-6)^2}} = \frac{60}{10\sqrt{65}} = \frac{6}{\sqrt{65}}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{6}{\sqrt{65}}\right)$$

Ответ: $\alpha = \arccos\left(\dfrac{6}{\sqrt{65}}\right)$

3. Угол между ребром $A_1A_4$ и гранью $A_1A_2A_3$.

$\overrightarrow{A_1A_4} = (5;2;-6)$

$A_1(4;4;10),\ A_2(4;10;2),\ A_3(2;8;4)$

*Решение*:

Найдем уравнение плоскости, содержащей точки $A_1, A_2, A_3$.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-4 & z-10 \\ 4-4 & 10-4 & 2-10 \\ 2-4 & 8-4 & 4-10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-4 & y-4 & z-10 \\ 0 & 6 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix} =$$

$= (-4)6(-6) + (y-4)(-8)(-2) + (z-10)0\square 4 - (z-10)6(-2) -$

$-(y-4)0(-6) - (x-4)4(-8) =$

$= -36x + 144 + 16y - 64 + 12z - 120 + 32x - 128 =$

$= -4x + 16y + 12z - 168 = 0$

$-4x + 16y + 12z - 168 = 0$

$x - 4y - 3z + 42 = 0$ – уравнение плоскости.

Вектор нормали к этой плоскости имеет координаты $\vec{n}(1;-4;-3)$

Косинус угла между плоскостью и вектором равен синусу угла между этим вектором и вектором нормали.

$\vec{n}(1;-4;-3)$ $\overrightarrow{A_1A_4} = (5;2;-6)$

$$\sin\alpha = \frac{1\cdot 5 + (-4)\cdot 2 + (-3)\cdot(-6)}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{5^2 + 2^2 + (-6)^2}} = \frac{15}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{65}} = \frac{15}{13\sqrt{10}}$$

$\alpha = \arcsin\left(\frac{15}{13\sqrt{10}}\right)$

Ответ: $\alpha = \arcsin\left(\frac{15}{13\sqrt{10}}\right)$

4. Площадь грани $A_1A_2A_3$

*Решение*:

Грань $A_1A_2A_3$ – треугольник, его площадь вычислим по формуле

$S = \frac{1}{2}|a \times b|$, где $|a \times b|$ – модуль векторного произведения двух векторов (сторон треугольника), по определению он равен произведению длин двух векторов на синус угла между ними, т.е. $S = \frac{1}{2}|a||b|\sin(\alpha)$.

Найдем векторное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$

$\overrightarrow{A_1A_2} = (0;6;-8)$

$\overrightarrow{A_1A_3} = (2-4;8-4;4-10)$

$\overrightarrow{A_1A_3} = (-2;4;-6)$

$$\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 6 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -36i + 16j + 12k + 32i = -4i + 16j + 12k$$

Результатом будет вектор с координатами $(-4;12;16)$, найдем его длину

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 16^2 + 12^2} = \sqrt{416} = 4\sqrt{26}$$

$$S = \frac{1}{2}4\sqrt{26} = 2\sqrt{26}$$

Ответ: $S = 2\sqrt{26}$

5. Объем пирамиды.

*Решение*:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right) \cdot \overrightarrow{A_1A_4}\right|$$

$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right) \cdot \overrightarrow{A_1A_4}\right|$, где – $\left(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right) \cdot \overrightarrow{A_1A_4}$ – смешанное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2} = (0;6;-8)$, $\overrightarrow{A_1A_3} = (-2;4;-6)$ и $\overrightarrow{A_1A_4} = (5;2;-6)$

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right) \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \\ 5 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-6) \cdot 5 + (-2) \cdot 2 \cdot (-8) + 8 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot (-6) \cdot 6 =$$

$$-180 + 32 + 160 - 72 = -60$$

$$V = \frac{1}{6}60 = 10$$

Ответ: $V = 10$

6. Уравнение прямой $A_1A_2$

*Решение*:

Каноническое уравнение прямой имеет вид:

$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$, где $(x_1,y_1,z_1)$ – точка, принадлежащая прямой – $A_1(4;4;10)$, $(a,b,c)$– направляющий вектор этой прямой – $\overrightarrow{A_1A_2}=(0;6;-8)$.

$$\frac{x-4}{0}=\frac{y-4}{6}=\frac{z-10}{-8}$$

Ответ: $\frac{x-4}{0}=\frac{y-4}{6}=\frac{z-10}{-8}$

7. Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.

См. пункт 3)

$x-4y-3z+42=0$– уравнение плоскости.

Ответ: $x-4y-3z+42=0$

Уравнение высоты, опущенной из вершины $A_4$ на грань $A_1A_2A_3$.

$A_4(9;6;4)$

$x-4y-3z+42=0$

Вектор нормали к этой плоскости имеет координаты $\vec{n}(1;-4;-3)$, т.е. он и будет направляющим вектором высоты

$$\frac{x-9}{1}=\frac{y-6}{-4}=\frac{z-4}{-3}$$

Ответ: $\frac{x-9}{1}=\frac{y-6}{-4}=\frac{z-6}{-3}$

**Тема 4.**

Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1;-1;2)$ параллельно вектору $\vec{a}=(1;3;-2)$.

*Решение*

1. Найдём направляющий вектор данной прямой.

В качестве направляющего вектора прямой, проходящей через точку $M_0$ возьмём вектор $\vec{s}$ равный вектору $\vec{a}$, то есть $\vec{s}=(1;3;2)$

2. Составим каноническое уравнение прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{-2}$

**Тема 5.**

Задача 1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

*а)* $\lim\limits_{x\to-2}\frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$ *б)* $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}$

*в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x-3}{2x^3+4x+3}$ *г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^5+3x^3+4}{3x^2-4x+2}$

*д)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+6x-2}{7x^3+8x^2-4}$ *е)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+6x-2}{7x^3+8x^2-4}$

*ж)* $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi^2-x^2}$

*Решение*:

*а)* $\lim\limits_{x\to-2}\frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$

Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия разложим квадратные трехчлены на линейные множители по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Имеем:

$$\lim_{x\to-2}\frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}=\lim_{x\to-2}\frac{5(x+2)\left(x+\frac{3}{5}\right)}{3(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)}$$

Сократив общий множитель $(x+2)$, получим:

$$\lim_{x\to-2}\frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}=\lim_{x\to-2}\frac{5x+3}{3x-4}=\frac{7}{10}=0{,}7$$

*б)* $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}$

Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия умножим, и числитель, и знаменатель данной дроби на выражение, сопряженное числителю (знаменателю), а именно: $\sqrt{21+x}+5$. Имеем:

$$\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{21+x}-5)(\sqrt{21+x}+5)}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)}=$$

Для упрощения числителя воспользуемся формулой:

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, где $a=\sqrt{21+x}-5$, $b=\sqrt{21+x}+5$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{21+x})^2-5^2}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)}=\lim_{x\to4}\frac{21+x-25}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)}=$$

Разложим первый сомножитель знаменателя по формуле:

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, где $a=x,\quad b=4$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)}{(x-4)(x^2+8x+16)(\sqrt{21+x}+5)}=$$

$$\lim_{x\to4}\frac{1}{(x^2+8x+16)(\sqrt{21+x}+5)}=\frac{1}{480}$$

*в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x-3}{2x^3+4x+3}$

Если числитель и знаменатель дроби представляют собой алгебраические многочлены и имеется неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, то для ее раскрытия и числитель, и знаменатель делят на x в старшей степени. В данном случае старшая степень 3, поэтому, и числитель, и знаменатель делим на $x^3$, имеем:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{10x}{x^3}-\dfrac{3}{x^3}}{\dfrac{2x^3}{x^3}+\dfrac{4x}{x^3}+\dfrac{3}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{10}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}}{2+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}=$$

(по теореме о пределе частного, имеем)

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{10}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}\right)}=$$

(по теореме о пределе суммы, имеем)

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{10}{x^2}-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x^3}}{\lim\limits_{x\to-\infty}2+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x^2}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x^3}}=\frac{0}{2}=0$$

*г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+3x^3+4}{3x^2-4x+2}$

Имеем также неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Старшая степень x равна 5. Поэтому делим и числитель, и знаменатель на $x^5$. Имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^5}{x^5}+\dfrac{3x^3}{x^5}+\dfrac{4}{x^5}}{\dfrac{3x^2}{x^5}+\dfrac{4x}{x^5}+\dfrac{2}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{4}{x^5}\right)}{\left(\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{4}{x^4}+\dfrac{2}{x^5}\right)}=\infty$$

так как предел числителя равен 2, а знаменателя 0.

*д)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+6x-2}{7x^3+8x^2-4}$

Для вычисления данного предела, и числитель, и знаменатель дроби делим на $x^3$, имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+6x-2}{7x^3+8x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\dfrac{6}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}}{7+\dfrac{8}{x}-\dfrac{4}{x^3}}=\frac{5}{7}$$

*е)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+6x-2}{7x^3+8x^2-4}$

Имеем неопределенность вида: $1^{\infty}$.

Для ее раскрытия воспользуемся вторым замечательным пределом:

$$\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=e \quad \text{или} \quad \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3+3}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x-3}+\frac{3}{2x-3}\right)^{2-5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-3}{3}}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x-3}{3}}\right)^{\frac{2x-3}{3}}\right)^{\frac{3}{2x-3}\cdot(2-5x)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3}{2x-3}\cdot(2-5x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2-5x)\cdot 3}{2x-3}}=e^{-\frac{15}{2}}$$

*ж)* $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi^2-x^2}$

Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Для ее раскрытия будем использовать первый замечательный предел: $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\sin u}=1$

Для этого сделаем следующие преобразования:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi^2-x^2}=\left|\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right|==\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)}{(\pi-x)(\pi+x)}=\left|1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi-x}{4}\right)}{(\pi-x)(\pi+x)}=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin\left(\frac{\pi-x}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi-x}{4}\right)}{(\pi-x)(\pi+x)}=$$

$$=2\lim_{x\to\pi}\frac{\sin\left(\frac{\pi-x}{4}\right)}{\frac{\pi-x}{4}\cdot 4}\cdot\lim_{x\to\pi}\sin\left(\frac{\pi-x}{4}\right)\cdot\lim_{x\to\pi}\frac{1}{\pi+x}=$$

$$=\left|\lim_{x\to\pi}\frac{\sin\left(\frac{\pi-x}{4}\right)}{\frac{\pi-x}{4}\cdot 4}=1;\quad \lim_{x\to\pi}\frac{1}{\pi+x}=\frac{1}{2\pi};\quad \lim_{x\to\pi}\sin\left(\frac{\pi-x}{4}\right)=0\right|=$$

$$=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot 0=0$$

**Тема 6.**

Задача 1. Найти производные следующих функций**:**

*а)* $y=\sqrt{5+2x^2}+\dfrac{4}{(x^2-4x+5)^3}$ *в)* $y=\dfrac{\cos^2(3x+2)}{x^2-2x}$

*б)* $y=\sin^5(3x+1)\cdot\arccos\sqrt{x}$

*г)* $y=(\sin x)^{\sqrt{x+1}}$

*Решение*:

*а)* $y=\sqrt{5+2x^2}+\dfrac{4}{(x^2-4x+5)^3}$

При нахождении производной данной функции воспользуемся следующими формулами: $(u\pm v)'=u'\pm v'$

$(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$

Имеем:

$$y'=\left(\left(5+2x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)'+\left(4\left(x^2-4x+5\right)^{-3}\right)'=$$
$$=\frac{1}{2}\left(5+2x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4x-12\left(x^2-4x+5\right)^{-4}(2x-4)$$

$$y'=2x\left(5+2x^2\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{12(2x-4)}{\left(x^2-4x+5\right)^4}$$

*б)* $y=\sin^5(3x+1)\cdot\arccos\sqrt{x}$

При вычислении производной данной функции воспользуемся формулой: $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$

Имеем:

$$y'=(\sin^5(3x+1))'\cdot\arccos\sqrt{x}+\sin^5(3x+1)(\arccos\sqrt{x}) \qquad (*)$$

При вычислении производной первого сомножителя воспользуемся формулой $(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$, где

$$u=\sin(3x+1)\Rightarrow(\sin^5(3x+1))'=$$
$$=5\sin^4(3x+1)\cdot\cos(3x+1)\cdot 3=15\sin^4(3x+1)\cdot\cos(3x+1)$$

При вычислении производной второго сомножителя воспользуемся следующей формулой: $(\arccos u)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

$$(\arccos\sqrt{x})'=-\frac{1}{\sqrt{1-(x^{\frac{1}{2}})^2}}\cdot(x^{\frac{1}{2}})'=-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Подставляя вычисленные производные в равенство (*), имеем:

$$y'=15\sin^4(3x+1)\cdot\cos(3x+1)\cdot\arccos\sqrt{x}-\sin^5(3x+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$$

*в)* $y=\dfrac{\cos^2(3x+2)}{x^2-2x}$

В данном случае сначала воспользуемся формулой:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$y'=\frac{(\cos^2(3x+2))'\cdot(x^2-2x)-\cos^2(3x+2)\cdot(x^2-2x)'}{(x^2-2x)^2}$$

Производную числителя и знаменателя вычисляем, используя формулу $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

$(\cos^2(3x+2))' = 2\cos(3x+2) \cdot (-\sin(3x+2)) \cdot 3 = -3\sin(2(3x+2))$,

т.к. $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha$ .

$(x^2 - 2x)' = 2x - 2$.

В результате:

$$y' = \frac{-3\sin(6x+4) \cdot (x^2 - 2x) - \cos^2(3x+2) \cdot (2x-2)}{(x^2 - 2x)^2}.$$

**Тема 7.**

Задача 1. Найти неопределенные интегралы.

а) $\int \cos(\ln x) \frac{dx}{x}$.

*Решение*:

Так как $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$, то

$$\int \cos(\ln x) \frac{dx}{x} = \int \cos(\ln x) d(\ln x) = \sin(\ln x) + C$$

Проверка:

$$d(\sin(\ln x) + C = \cos(\ln x) \frac{1}{x} dx$$

*á*) $\int \ln x dx.$

*Решение*:

Положим $u = \ln x \quad dv = dx.$

Найдем $du = \frac{dx}{x}; \quad v = \int dx = x.$

Применяя формулу интегрирования по частям $\int u dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

*â*) $\int \frac{x^3 + x + 1}{x \cdot (x^2 + 1)} dx$

*Решение*:

Данная подынтегральная дробь – неправильная, поэтому сначала выделим целую часть $\frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{x^3 + x + 1}{x^3 + x} = 1 + \frac{1}{x^3 + x}$

Представим дробь $\frac{1}{x^3 + x}$ в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+D}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+x(Bx+D)}{x(x^2+1)}=\frac{Ax^2+Bx^2+A+Dx}{x(x^2+1)}=$$
$$\frac{x^2(A+B)+Dx+A}{x(x^2+1)}$$

Тогда $A+B=0, D=0, A=1$, следовательно $A=1, B=-1, D=0$.

Получим

$$\int\frac{x^3+x+1}{x\cdot(x^2+1)}dx=\int\left(1+\frac{1}{x}+\frac{-x}{x^2+1}\right)dx=\int dx+\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=x+\ln|x|+\ln|x^2+1|+C$$

ã) $\int\cos^4 xdx$

*Решение*:

Применим формулу понижения степени:

$2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$

$$\int(\cos^2 x)^2dx=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2dx=\frac{1}{4}\int(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx=$$
$$=\frac{1}{4}\left(x+\sin 2x+\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx\right)=\frac{1}{4}\left(x+\sin 2x+\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)\right)+C$$

**Тема 8.**

Задача 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x+2, \quad y=2x-\frac{x^2}{2}+6$

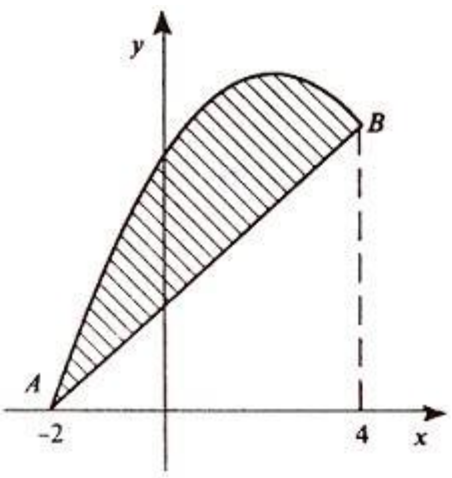
*Решение*:

Найдем абсциссы точек пересечения прямой с параболой, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y=x+2, \\ y=2x-\dfrac{x^2}{2}+6. \end{cases}$$

Решая эту систему получим $x_1=-2, \quad x_2=1.$ Это и будут пределы интегрирования. Это и будут пределы интегрирования.

Итак, данные линии пересекаются в точках *A*(-2; 0), *B*(4; 6).




Эти линии образуют замкнутую фигуру, площадь которой равна:

$$S = \int_{-2}^{4}\left(2x - \frac{x^2}{2} + 6 - x - 2\right)dx = \int_{-2}^{4}\left(x - \frac{x^2}{2} + 4\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x\right)\Bigg|_{-2}^{4} =$$

$$\frac{16}{2} - \frac{64}{6} + 16 - \frac{4}{2} - \frac{8}{6} + 8 = 18$$

**Тема 9.**

***Пример 1.*** Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка.

$$\left(1+e^x\right)ydy = e^x dx\left(1+y^2\right)$$

*Решение*

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными т.к. коэффициент при $dx$ представляет собой произведение двух сомножителей: $e^x$зависит только от $x$, а $(1+y^2)$ – только от $y$. Аналогично, коэффициент при $dy$ тоже является произведением двух сомножителей: $(1+e^x)$ зависит только от х, а второй сомножитель – $y$.

Чтобы привести его к виду с разделенными переменными, разделим все члены уравнения на $(1+e^x)(1+y^2)$, в результате получим: $\frac{ydy}{1+y^2} = \frac{e^x dx}{1+e^x}$

Решим это уравнение. (Заметим, что постоянную С можно записывать как $\frac{C}{2}$, $2C$, $\ln C$, $\sin C$ ). Здесь произвольную постоянную удобнее взять в виде $\ln C$.

$$\int \frac{ydy}{1+y^2} = \int \frac{e^x dx}{1+e^x} + \ln C$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln(1+e^x) + \ln C$$

$$\ln\sqrt{1+y^2} = \ln C(1+e^x)$$

$\sqrt{1+y^2} = C(1+e^x)$ -это общий интеграл исходного уравнения.

***Пример 2***. Найти частное решение дифференциального уравнения.

$(xy^2+y^2)dx+(x^2-x^2y)dy=0, \quad y(1)=1$

*Решение*

Преобразуем левую часть уравнения:

$y^2(x+1)dx+x^2(1-y)dy=0$

Разделим переменные, поделив на $x^2y^2$:

$$\frac{x+1}{x^2}dx+\frac{1-y}{y^2}dy=0$$

Интегрируя, получаем общий интеграл:

$$\int\frac{x+1}{x^2}dx+\int\frac{1-y}{y^2}dy=0; \quad \int\frac{dx}{x}+\int x^{-2}dx+\int y^{-2}dy-\int\frac{dy}{y}=0$$

$$\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\ln|y|=c; \quad \ln\left|\frac{x}{y}\right|-\frac{x+y}{xy}=c$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что $x=0$ и $y=0$ являются решениями данного дифференциального уравнения.

Найдем частный интеграл, подставив в общий значения $x=1$ и $y=1$, получим $\ln 1-2=c, \quad c=-2$, таким образом $\ln\left|\frac{x}{y}\right|-\frac{x+y}{xy}=-2$.

**Тема 10.**

***Пример 3***. Найти общее решение дифференциального уравнения**:**

$$y'=\frac{x+2y}{2x-y}$$

*Решение*

$$y'=\frac{1+2\frac{y}{x}}{2-\frac{y}{x}},$$

Введем замену $\frac{y}{x}=u$. Тогда $y=ux$, а $y'=u+u'x$.

Заданное уравнение принимает вид:

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+2u}{2-u},$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{2-u},$$

$$\frac{2-u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x},$$

$$\int\left(\frac{2}{1+u^2}-\frac{u}{1+u^2}\right)du=\int\frac{dx}{x},$$

$$2arctgu-\frac{1}{2}\ln\left|1+u^2\right|=\ln|x|+\ln C.$$

Возвращаясь, к замене $\frac{y}{x}=u$ получим:

$$2arctg\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{y^2}{x^2}\right|=\ln|x|+\ln C.$$

***Пример 4.*** Решить дифференциальное уравнение

$$xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$$

*Решение*

Разрешим уравнение относительно $y'$:

$$y'=\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x}$$

Уравнение однородное, сделаем замену: $u=\frac{y}{x}$ или $y=ux$, тогда $y'=xu'+u$.

Подставив в уравнение выражения для $y$ и $y'$, получим:

$$xu'=\sqrt{1-u^2}$$

Получим уравнение с разделяющимися переменными.

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\int\frac{dx}{x}$$

$\arcsin u=\ln|c|\cdot|x|$ или возвращаясь к функции $y$, будем иметь: $\arcsin\frac{y}{x}=\ln|cx|$.

Так как $\left|\ln|cx|\right|\le\frac{\pi}{2}$, т.е. $e^{-\frac{\pi}{2}}\le|cx|\le e^{\frac{\pi}{2}}$, или $y=\sin\ln|cx|$.

Непосредственно проверим, что $x=0$ не является решением уравнения. Множитель $\sqrt{1-u^2}=0$ дает решения $u=\pm1$, т. е. $y=\pm x$, которые являются решением. Это подтверждает непосредственная проверка.

**Тема 11.**

***Пример 5.*** Решить дифференциальное уравнение $y'+2xy=xe^{-x^2}$

*Решение*

Заданное уравнение является ЛНДУ. Будем искать решение уравнения в виде произведения двух функций: $y=u\cdot v\Rightarrow y'=u'v+v'u$. После этой подстановки данное уравнение примет вид: $u'v+v'u+2xuv=xe^{-x^2}$

Вынесем за скобки $u$: $u'v+u(v'+2xv)=xe^{-x^2}$ $(*)$

Найдем *одну* из функций $v$, такую, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль: $v'+2xv=0$. Это уравнение будет с разделяющимися переменными. Решим его.

$$\frac{dv}{dx}+2xv=0,$$
$$dv=-2xvdx,$$
$$\frac{dv}{v}=-2xdx,$$
$$\ln|v|=-x^2$$
$$v=e^{-x^2}$$
Подставим найденную функцию в уравнение $(*)$.
$$u'e^{-x^2}=xe^{-x^2},$$
$$u'=x,$$
$$\frac{du}{dx}=x,$$
$$du=xdx,$$
$$u=\frac{x^2}{2}+C$$
Так как $y = uv$, то $y=(\frac{x^2}{2}+C)\cdot e^{-x^2}$ – общее решение данного уравнения.

***Пример 6.*** Найти общее решение дифференциального уравнения: $xy'+y=y^2\ln x$.

*Решение*

Это уравнение Бернулли. Воспользуемся подстановкой:
$y=uv;\quad y'=u'v+uv'$.

Подставим $y$ и $y'$ в исходное уравнение:
$xu'v+xuv'+uv=u^2v^2\ln x$ или $xu'v+u(xv'+v)=u^2v^2\ln x$.

Потребуем, чтобы $xv'+v=0$, тогда
$\frac{xdv}{dx}-v=0$ или $\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}$.

Интегрируя, получим: $\ln v=-\ln x,\quad v=\frac{1}{x}$.

Подставим найденное значение $v$ в уравнение, получим:
$u'=u^2\frac{\ln x}{x^2}$ или $\frac{du}{u^2}=\frac{\ln xdx}{x^2}$.

Интегрируя, получим: $\frac{1}{u}=\frac{1}{x}(\ln x+1+cx)$ или $u=\frac{x}{\ln x+1+cx}$.

Так как $y=uv$, то $y=\frac{1}{\ln x+1+cx}$.

Кроме того, очевидно, что решением уравнения будет $y=0$.

**Тема 12.**

Решить задачу Коши:

$y'' - 4y' + 13y = 0 \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = -2$

*Решение*:

Характеристическое уравнение: $k^2 - 4k + 13 = 0$ имеет корни $k = 2 \pm 3i$

Корни характеристического уравнения комплексные сопряженные им соответствуют частные решения $e^{2x}\cos 3x; \quad e^{2x}\sin 3x.$

Следовательно, общее решение $y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x).$

Подставляя начальные условия в найденное общее решение и его производную:

$y' = 2e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + e^{2x}(-3C_1\sin 3x + 3C_2\cos 3x),$

получим систему: $\begin{cases} 1 = C_1 \\ -2 = 2C_1 + 3C_2 \end{cases}$

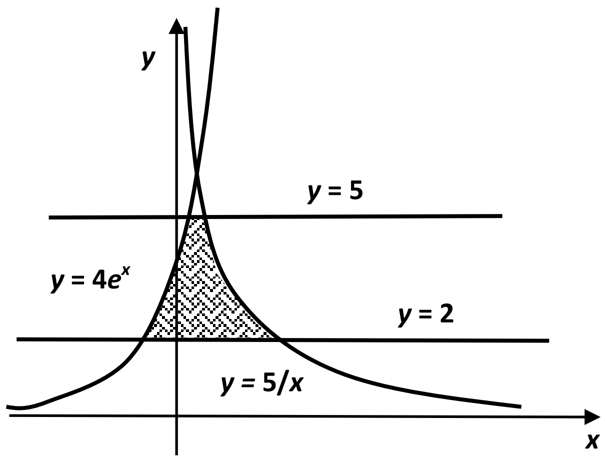
Решая ее, получим: $C_1 = 1. \quad C_2 = -\dfrac{4}{3}.$

Тогда частное решение примет вид: $y = e^{2x}(\cos 3x - \dfrac{4}{3}\sin 3x).$

**Тема 13.**

С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры $D$, ограниченной линиями $y = \dfrac{1}{5}x, \quad y = 2, \quad y = 5 = 0 \quad y = 4e^x$

*Решение*:




Эту площадь удобно вычислять, считая $y$ внешней переменной. Тогда границы области задаются уравнениями $y = \dfrac{1}{5}x, \quad x = \ln\dfrac{y}{4}$ и

$$S=\int_2^5 dy\int_{\ln\frac{y}{4}}^{\frac{5}{y}}dx=\int_2^5\left(x\;\Big|_{\ln\frac{y}{4}}^{\frac{5}{y}}\right)dy=\int_2^5\left(\frac{5}{y}-\ln\frac{y}{4}\right)dy=5\ln y\;\Big|_2^5-\int_2^5\ln\frac{y}{4}dy$$

где $\int_2^5\ln\frac{y}{4}dy$ вычисляется с помощью интегрирования по частям:

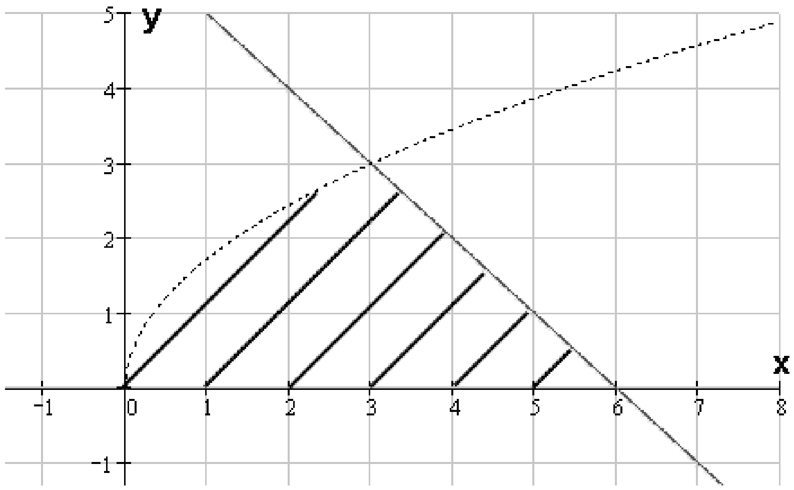
$$\int_2^5\ln\frac{y}{4}dy=\left|\begin{matrix} u=\ln\frac{y}{4} & dv=dy \\ du=\frac{1}{y}dy & v=y\end{matrix}\right|=y\ln\frac{y}{4}\;\Big|_2^5-\int_2^5 dy=5\ln\frac{5}{4}-2\ln\frac{1}{2}-3=5\ln 5-8\ln 2-3$$

Следовательно, $S=5\ln 5-5\ln 2-5\ln 5+8\ln 2+3=5\ln 2+3.$

С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x+y=6, y=\sqrt{3x}, z=4y, z=0.$. Сделать чертеж проекции данного тела на плоскость *Oxy*

*Решение*:

Найдем проекцию тела на плоскость *Oxy*




$$V=\int_0^3 dy\int_{\frac{1}{3}y^2}^{6-y}dx\int_0^{4y}dz=\int_0^3 dy\int_{\frac{1}{3}y^2}^{6-y}4y\,dx=\int_0^3\left(24y-4y^2-\frac{4}{3}y^3\right)dy=\left(12y^2-\frac{4}{3}y^3-\frac{1}{3}y^4\right)\Big|_9^3=45.$$

Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$ вдоль дуги $L$ дуга параболы $y=x^2$ от точки $A(1;-1)$ до точки $B(1;1)$. Сделать чертеж.

*Решение*:

Воспользуемся формулой:

$$\int_L P(x;y)dx+Q(x;y)dy=\int_a^b\left[P(x;y(x))+Q(x;y(x))\cdot y'(x)\right]\,dx$$

$$\int\limits_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^2-2xx^2+2x\left(x^4-2xx^2\right)\right)\,dx=$$

$$\int\limits_{-1}^{1}\left(x^2-2x^3+2x^5-4x^4\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{4x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=-\frac{4}{15}$$

**Тема 14.**

Задача 1. Исследовать на сходимость следующие ряды:

à) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}$

Вычислим

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{-1}=$(используя второй замечательный предел) $=\frac{1}{e}\neq 0$.

Ряд расходится.

á) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$

Имеем по признаку Даламбера: $u_n=\frac{3^n n!}{n^n},\quad u_{n+1}=\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$.

Вычислим

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3^{n+1}(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot 3^n n!}=\frac{3n^n}{(n+1)^n}=\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\ .$$

Следовательно,

$$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{3}{e}>1\,.$$

Ряд расходится.

â) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$

Для данного ряда, по радикальному признаку Коши:

$$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0<1$$

Следовательно, ряд сходится.

ã) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{1+n^2}$

Для применения интегрального признака рассмотрим несобственный интеграл:

$$\int_1^\infty \frac{2}{1+x^2}dx = 2\lim_{b\to\infty}\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = 2\lim_{b\to\infty} arctgx\Big|_1^\infty = 2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Несобственный интеграл сходится, а значит сходится ряд.

Задача 2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)^3}$$

Проверим условия теоремы Лейбница для знакочередующегося ряда: 1)его члены монотонно убывают $\left(1>\frac{1}{2^3}>\frac{1}{4^3}>...\right)$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(2n)^3}=0$.

Следовательно, этот ряд сходится.

Этот ряд сходится абсолютно, так как сходится ряд из абсолютных величин членов данного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^3}$.

Этот ряд сходится по признаку сравнения (сравнить его с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, который сходится).

Задача 3. Найти радиус сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 10^n}$$

*Решение*:

Радиус сходимости вычислим по формуле:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Имеем:

$$a_n=\frac{1}{n\cdot 10^n},\quad a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)\cdot 10^{n+1}}$$

Поэтому

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 10^{n+1}}{n\cdot 10^n}=10\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=10$$

Значит, данный ряд сходится при значениях удовлетворяющих неравенству: $|x|<10$ или $-10<x<10$.

Исследуем поведение ряда на концах промежутка. Подставляя в данный ряд $x=10$, получим гармонический расходящийся ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

При $x=-10$ получим числовой, знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, который сходится условно.

Таким образом, данный степенной ряд сходится при всех значениях $x$, удовлетворяющих неравенствам $-10\le x<10$.

**Тема 15.**

Пример 1. Из 30 студентов 10 имеют спортивные разряды. Какова вероятность того, что выбранные наудачу 3 студента – разрядники?

*Решение.*

Пусть событие $A$ – 3 выбранных наудачу студента являются разрядниками. Общее число случаев выбора трех студентов из тридцати равно $n=C_{30}^3$, так как комбинации представляют собой сочетания, ибо отличаются только составом студентов. Точно также число студентов, благоприятствующих событию $A$, равно $m=C_{10}^3$. Итак,

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{10}^3}{C_{30}^3}=\frac{61}{203}\approx 0{,}030.$$

Пример 2. В лифт на первом этаже девятиэтажного дома вошли 4 человека, каждый из которых может выйти независимо друг от друга на любом этаже. Какова вероятность того, что все пассажиры выйдут: а) на 6ом этаже; б) на одном этаже?

*Решение.*

а) Пусть событие $A$ – все пассажиры выйдут на 6-ом этаже. Каждый пассажир может выйти со 2-ого по 9-ый этаж 8 способами. По правилу произведения общее число способов выхода четырех пассажиров из лифта равно $n = 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8$. Число случаев, благоприятствующих событию $A$, равно $m = 1$. Следовательно,

$$P(A)=\frac{1}{8^4}=0{,}00024.$$

б) Пусть событие $B$ – все пассажиры выйдут на одном этаже. Теперь событию $B$ будут благоприятствовать $m = 8$ случаев (все выйдут на 2 этаже, 3-м,…, 9-м этаже). Поэтому $P(B)={8}/{8^4}=0{,}00195.$

Пример 3. По условиям лотереи «Спортлото 6 из 45» участник лотереи, угадавший 4, 5, 6 видов спорта из отобранных при случайном розыгрыше 6 видов спорта из 45, получает денежный приз. Найти вероятность того, что будут угаданы: а) все 6 цифр; б) 4 цифры.

*Решение.*

а) Пусть событие А – угадывание всех 6 видов спорта из 45. Общее число всех вариантов заполнения карточек спортлото, есть $n=C_{45}^6$. Число случаев, благоприятствующих событию А, есть $m=1$. Поэтому

$$P(A)=\frac{1}{C_{45}^{6}}\approx 0{,}0000001.$$

б) Пусть событие В – угадывание 4 видов спорта из 6 выигравших из 45. Найдем число способов, какими можно выбрать 4 вида спорта из 6 выигравших, т. е. $C_6^4$. Но это еще не все: к каждой комбинации 4-х выигравших номеров следует присоединить комбинацию 2-х невыигравших номеров из 45 – 6 = 39:; таких комбинаций $C_{39}^2$. По правилу произведения общее число случаев, благоприятствующих событию В, равно $m=C_6^4\cdot C_{39}^2$. Итак,

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{C_6^4\cdot C_{39}^2}{C_{45}^6}=0{,}00136$$

*Формула полной вероятности. Формула Байеса*

Пример 1. Частица пролетает мимо трех счетчиков, причем она может попасть в каждый из них с вероятностью 0,3, 0,2, 0,4. Если частица попадает в первый счетчик, то она регистрируется с вероятностью 0,6, во второй – с вероятностью 0,5 и в третий – с вероятностью 0,55. Найти вероятность того, что частица будет зарегистрирована (событие А).

*Решение*. Выдвигаем гипотезы:

$H_1$ – частица попадает в первый счетчик $P(H_1) = 0{,}3$,

$H_2$ – частица попадает во второй счетчик $P(H_2) = 0{,}2$,

$H_3$ – частица попадает в третий счетчик $P(H_3) = 0{,}4$.

Эти события не пересекаются, но не составляют полной группы. Чтобы получить полную группу добавим событие $H_4$ – частица не попадает ни в один счетчик

$$P(H_4) = 1 – 0{,}3 – 0{,}2 – 0{,}4 = 0{,}1.$$

Условные вероятности равны:

$P(A/H_1) = 0{,}6$; $P(A/H_2)=0{,}5$; $P(A/H_3)=0{,}55$; $P(A/H_4)=0$.

По формуле полной вероятности имеем:

$$P(A)=0{,}3\cdot 0{,}6+0{,}2\cdot 0{,}5+0{,}4\cdot 0{,}55+0{,}1\cdot 0=0{,}5.$$

Пример 2. Три завода выпускают одинаковые изделия, причем первый завод производит 50 %, второй – 20 %, третий – 30 % всей продукции. Первый завод выпускает 1 %. брака, второй – 8 %, третий – 3 %. Наудачу выбранное изделие оказалось бракованным (событие А). Найти вероятность того, что оно изготовлено на втором заводе.

*Решение*.

Гипотезы:

$H_1$ – изделие изготовлено на первом заводе, $P(H_1) = 0{,}5$;

$H_2$ – изделие изготовлено на втором заводе, $P(H_2) = 0,2$;

$H_3$ – изделие изготовлено на третьем заводе, $P(H_3) = 0,3$.

По условию задачи: $P(A/H_1) = 0,01$, $P(A/H_2) = 0,08$, $P(A/H_3) = 0,03$.

Окончательно имеем:

$$P(H_2/A) = 0,2\cdot 0,08/(0,5\cdot 0,01+0,2\cdot 0,08+0,3\cdot 0,03) = 8/15.$$

**Тема 16.**

Пример 1. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка равна 0,8 и не зависит от номера выстрела. Требуется найти вероятность того, что при 5 выстрелах произойдет ровно 2 попадания в мишень.

*Решение*.

В этом примере $n=5$, $p=0,8$ *и* $m=2$; по формуле Бернулли находим:

$$P_5(2) = C_5^2 0,8^2 0,2^3 = 0,0512.$$

Пример 2. Вероятность наступления события А в каждом из 900 независимых испытаний равна $p=0,8$. Найдите вероятность того, что событие А произойдет: а) 750 раз; б) от 710 до 740 раз.

*Решение*.

а) Воспользуемся локальной формулой Муавра-Лапласа.

$x = \dfrac{750 - 900\cdot 0,8}{\sqrt{900\cdot 0,8\cdot 0,2}} = 2,5$. По приложению 1 пособия 2 находим: $\varphi(2,5) = 0,0175$

Тогда

$$P_{900}(750) \approx \frac{0,0175}{\sqrt{900\cdot 0,8\cdot 0,2}} = 0,00146.$$

б) $x_1 = \dfrac{710 - 900\cdot 0,8}{\sqrt{900\cdot 0,8\cdot 0,2}} = -0,83;$ $\qquad x_2 = \dfrac{740 - 900\cdot 0,8}{\sqrt{900\cdot 0,8\cdot 0,2}} = 1,67$

По приложению 2 пособия 2 находим:

$$\Phi(-0,83) = -\Phi(0,83) = -0,2967; \qquad \Phi(1,67) = 0,4527.$$

Окончательно имеем:

$$P_{900}(710 \le m \le 740) = 0,4527 + 0,2967 = 0,7492.$$

Пример 3. В тираже «Спортлото 6 из 49» участвуют 10 000 000 карточек. Найти вероятность события А – хотя бы в одной из них зачеркнуты все 6 выигрышных номеров.

*Решение*. Перейдем к противоположному событию – ни на одну карточку не выпал максимальный выигрыш $\overline{A}$. В каждой карточке номера зачеркиваются случайным образом и не зависят от других карточек, поэтому применима схема Бернулли с параметрами $n = 10000000, p = \frac{C_6^6 C_{43}^0}{C_{49}^6} = 7 \cdot 10^{-8}$. Поскольку λ = np = 0,7, то для определения воспользуемся формулой Пуассона. Тогда

$P(\overline{A}) = P_{10000000}(0) \approx P(0;0,7) = 0,49659; P(A) = 0,50341$. Таким образом, вероятность, что из 10 000 000 карточек, хотя бы одна окажется с максимальным выигрышем чуть больше ½.

*Случайные величины. Основные законы распределения. Числовые характеристики случайных величин*

Пример 1. На зачете студент получил 4 задачи. Вероятность решить правильно каждую задачу равна 0,8. Определить ряд распределения случайной величины – числа правильно решенных задач и построить многоугольник распределения. Найти функцию распределения и построить ее график.

*Решение*.

Возможные значения случайной величины X: 0, 1, 2, 3, 4. Соответствующие вероятности вычисляем по формуле Бернулли:

$P(X = 0) = C_4^0 0,8^0 0,2^4 = 0,0016;$

$P(X = 1) = C_4^1 0,8^1 0,2^3 = 0,0256;$

$P(X = 2) = C_4^2 0,8^2 0,2^2 = 0,1536;$

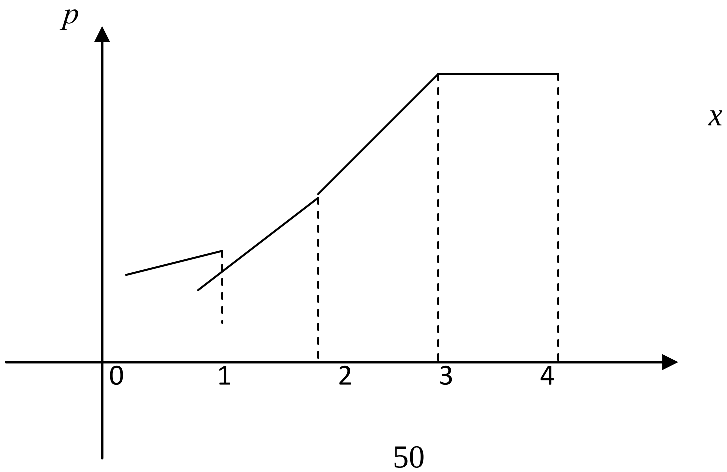
$P(X = 3) = C_4^3 0,8^3 0,2^1 = 0,4096;$

$P(X = 4) = C_4^4 0,8^4 0,2^0 = 0,4096.$

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| p | 0,0016 | 0,0256 | 0,1536 | 0,4096 | 0,4096 |

Проверка: 0,0016 + 0,0256 + 0,1536 + .0,4096+ 0,4096 = 1

Многоугольник распределения представлен на рисунке.



Используя данные из таблицы и формулу для функции распределения $F(x) = P(X < x). = \sum_{x_i < x} p_i$ , получим функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ 0{,}0016, 0 < x \le 1, \\ 0{,}0272, 1 < x \le 2, \\ 0{,}1808, 2 < x \le 3, \\ 0{,}5904, 3 < x \le 4, \\ 1, x > 4. \end{cases}$$

Построим ее график.

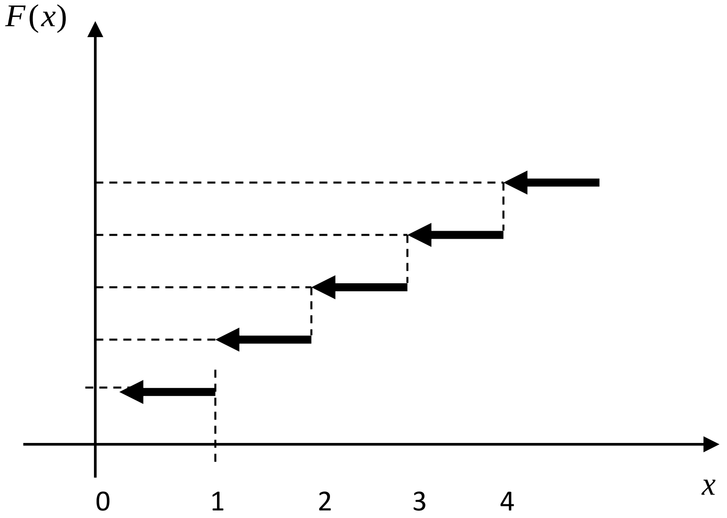



График функции распределения

Пример 2. Вероятность получить заданный эффект в физическом опыте равен 0,4. Определить ряд распределения случайной величины X, равной числу «пустых» опытов, которые должен произвести экспериментатор, прежде чем он получит необходимый эффект.

*Решение.*

Случайная величина распределена по геометрическому закону.

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | … |
|---|---|---|---|---|---|
| p | 0,4 | 0,4·06 | $0{,}4^2 \cdot 0{,}6$ | $0{,}4^3 \cdot 0{,}6$ | … |

Пример 3. Составить ряд распределения случайной величины X – числа угаданных номеров в «Спортлото 6 из 49».

*Решение.* $p_i = \dfrac{C_6^i C_{43}^{6-i}}{C_{49}^6}$ – гипергеометрический закон.

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| p | 0,4360 | 0,4130 | 0,1324 | 0,0176 | 0,00097 | $2\cdot10^{-5}$ | $7\cdot10^{-8}$ |

Пример 4. Задан закон распределения дискретной случайной величины:

| x | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| p | 0,1 | 0,3 | 0,5 | 0,1 |

Найти математическое ожидание и дисперсию.

*Решение.*

$M(x) = -1\cdot 0{,}1 + 0\cdot 0{,}3 + 1\cdot 0{,}5 + 2\cdot 0{,}1 = 0{,}6$

$D(x) = (-1)^2\cdot 0{,}1 + 0^2\cdot 0{,}3 + 1^2\cdot 0{,}5 + 2^2\cdot 0{,}1 - 0{,}6^2 = 0{,}64$

Пример 5. Случайная величина X имеет плотность вероятности (показательный закон) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{0, если\, x < 0}{\lambda e^{-\lambda x}, если\, x \ge 0} \end{cases}$. Найти математическое ожидание и дисперсию.

*Решение.*

$$M(x) = \int_0^{+\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx = -xe^{-\lambda x}\Big| + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$D(x) = \int_0^{+\infty} x^2\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

**Тема 34.**

Пример 1. Среднее количество вызовов, поступающих на коммутатор завода в течение часа, равно 300. Оценить вероятность того, что в течение следующего часа число вызовов на коммутатор превысит 400.

*Решение*. По условию *M(X) = 300*. Согласно неравенству Маркова

$$P(X > 400) \le \frac{300}{400},\ \text{т.е.}$$

вероятность того, что число вызовов превысит 400, будет не более 0,75.

**Тема 35.**

Пример 1. Получена таблица частот оценок по контрольной работе у 40 учащихся класса:

| оценка | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| частота | $\frac{3}{40}$ | $\frac{8}{40}$ | $\frac{25}{40}$ | $\frac{4}{40}$ |

Найдите: выборочное среднее значение оценки; выборочную дисперсию; исправленную выборочную дисперсию; выборочное среднее квадратическое отклонение; исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.

*Решение*.

1. Выборочное среднее находим по формуле:

$$: \bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{2\cdot 3 + 3\cdot 8 + 4\cdot 25 + 5\cdot 4}{40} = 3{,}75$$

2. Выборочную дисперсию находим по формуле

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^2 = \frac{(2-3{,}75)^2 + (3-3{,}75)^2 + (4-3{,}75)^2 + (5-3{,}75)^2}{40} = 0{,}5375$$

3. Исправленную выборочную дисперсию находим по формуле

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_и = \frac{40}{39}\cdot 0{,}5375 \approx 0{,}55$$

4. Выборочное среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{0{,}5375} \approx 0{,}73$$

1. Исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0{,}55} \approx 0{,}74$$

Пример 2. Найдите доверительный интервал для математического ожидания $a$ нормально распределенной случайной величины, для которой по выборке объема $n$=25 найдены выборочное среднее $\bar{x}_в = 2{,}4$ и исправленная выборочная дисперсия $D_в = 4$, если надежность должна равняться $\gamma = 0{,}95$.

*Решение*.

Пользуясь таблицей (приложение 4 пособие 2), находим $t_\gamma = 2{,}064$. Тогда согласно формуле $\bar{x}_в - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}$ имеем:

$$\bar{x}_в - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 2{,}4 - 2{,}064\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = 1{,}5744; \qquad \bar{x}_в + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 2{,}4 + \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = 3{,}2256.$$

Искомый доверительный интервал (1,5744; 3,2256).

## 2.3. Типовые задания для контрольных работ

Контрольная работа №1

1. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -5,\\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 &= -4,\\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 &= 12,\\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 5. \end{aligned}$$

*Выполнить проверку!*

2. Даны вершины треугольника: $A(1;-1;2), B(5;-6;2), C(1;3;-1)$. Найти длину его высоты, опущенной на сторону $AC$.
3. Составить уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$перпендикулярных к прямой $10x-3y+9=0$.
4. Вычислить: $\lim_{x\to 0}\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$.
5. Вычислить производную и преобразовать ее:

$$y=ln\sqrt[4]{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right).$$

Контрольная работа №2

1. Найти неопределенные интегралы.

$$\int\frac{x^2-3}{x^3+x^2-2x}dx,\ \int\frac{dx}{4\sin x-3\cos x-5}$$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка
$y''+y'tgx=\sin 2x$
3. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертеж проекции данного тела на плоскость $Oxy$. $x=\sqrt{25-y^2},\quad y=4,\quad z=x,\quad z=0.$
4. Вычислить криволинейный интеграл второго рода
$\int\limits_L(6-y)dx-(3-y)dy$, где $L$ – арка циклоиды
$x=3t-3\sin t, y=3-3\cos t, 0\le t\le 2\pi$.

5. Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение:
$y''+3y'+2y=\sin 3x+2\cos 3x$

6. Заданы среднее квадратичное отклонение σ нормально распределенной случайной величины X, выборочная средняя $\bar{x}$ , объем выборки n. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания, а с заданной надежностью γ=0,95. Исходные данные приведены в таблице 3.

Таблица 3.

| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 (0) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| σ | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| $\bar{x}$ | 18,21 | 18,31 | 18,41 | 18,51 | 18,61 | 18,71 | 18,81 | 18,91 | 20,01 | 20,11 |
| n | 16 | 49 | 36 | 100 | 81 | 25 | 16 | 49 | 36 | 64 |

## 3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

Внеаудиторная самостоятельная работа в рамках данной дисциплины включает в себя:

- подготовку к аудиторным занятиям (лекциям, практическим занятиям) и выполнение соответствующих заданий;
- самостоятельную работу над отдельными темами учебной дисциплины в соответствии с тематическим планом;
- выполнение контрольной работы для студента заочной формы обучения;
- подготовку к экзамену.

**Подготовка к лекционным занятиям**

При подготовке к лекции рекомендуется повторить ранее изученный материал, что дает возможность получить необходимые разъяснения преподавателя непосредственно в ходе занятия. Рекомендуется вести конспект, главное требование к которому быть систематическим, логически связанным, ясным и кратким. По окончанию занятия обязательно в часы самостоятельной подготовки, по возможности в этот же день, повторить изучаемый материал и доработать конспект.

**Подготовка к практическим занятиям**

Подготовка к практическим занятиям предусматривает:

- изучение теоретических положений, лежащих в основе будущих расчетов или методики расчетов;
- детальную проработку учебного материала, рекомендованной литературы и методической разработки на предстоящее занятие;

**Самостоятельная работа над отдельными темами учебной дисциплины**

При организации самостоятельного изучения ряда тем лекционного курса обучаемый работает в соответствии с указаниями, выданными преподавателем. Указания по изучению теоретического материала курса составляются дифференцированно по каждой теме и включают в себя следующие элементы: название темы; цели и задачи изучения темы; основные вопросы темы; характеристику основных понятий и определений, необходимых обучаемому для усвоения данной темы; список рекомендуемой литературы; наиболее важные фрагменты текстов рекомендуемых источников, в том числе таблицы, рисунки, схемы и т. п.; краткие выводы, ориентирующие обучаемого на определенную совокупность сведений, основных идей, ключевых положений, систему доказательств, которые необходимо усвоить; контрольные вопросы, предназначенные для самопроверки знаний.

**Подготовка к экзамену**

При подготовке к экзамену большую роль играют правильно подготовленные заранее записи и конспекты. В этом случае остается лишь повторить пройденный материал, учесть, что было пропущено, восполнить пробелы, закрепить ранее изученный материал.

В ходе самостоятельной подготовки к экзамену при анализе имеющегося теоретического и практического материала студенту также рекомендуется проводить постановку различного рода задач по изучаемой теме, что поможет в дальнейшем выявлять критерии принятия тех или иных решений, причины совершения определенного рода ошибок. При ответе на вопросы, поставленные в ходе самостоятельной подготовки, обучающийся вырабатывает в себе способность логически мыслить, искать в анализе событий причинно-следственные связи.

В ходе подготовки к экзамену преподаватель проводит консультацию, на которой доводится порядок проведения экзамена и даются ответы на вопросы, вызвавшие затруднения у студентов в процессе подготовки.

## 4. ТРЕБОВАНИЯ К АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

### 4.1 Текущая аттестация

Текущий контроль (контроль выполнения заданий на самостоятельную работу) предназначен для проверки хода и качества усвоения студентами учебного материала и стимулирования их учебной работы. Он может осуществляться в ходе всех видов занятий в форме, избранной преподавателем или предусмотренной рабочей программой дисциплины.

Текущий контроль предполагает постоянный контроль преподавателем качества усвоения учебного материала, активизацию учебной деятельности студентов на занятиях, побуждение их к самостоятельной систематической работе. Он необходим обучающимся для самоконтроля на разных этапах обучения. Их результаты учитываются выставлением преподавателем оценок в журнале учета успеваемости и в ходе ежемесячной аттестации.

В ходе изучения дисциплины студентам предстоит пройти следующие этапы текущей аттестации.

В первом семестре:

– выполнить задания по темам практических занятий первого семестра;

– выполнить контрольную работу № 1 по разделам: «Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии», «Основы математического анализа (пределы и производная функции)»;

– выполнить и защитить индивидуальное домашнее задание по теме «Исследование функции и построение ее графика».

Во втором семестре:

– выполнить задания по темам практических занятий второго семестра;

– выполнить контрольную работу № 2 по разделам: «Основы математического анализа (неопределенный и определенный интегралы)», «Основы теории вероятностей;

– выполнить и защитить индивидуальное домашнее задание по теме «Неопределенный интеграл, определенный интеграл и его приложения, несобственные интегралы».

При текущей аттестации учитывается:

– выполнение студентами всех работ и заданий, предусмотренных рабочей программой дисциплины, а именно выполнение заданий на практических занятиях;

– самостоятельную работу обучающихся;

– посещаемость аудиторных занятий.

**4.2 Условия получения положительной оценки**

В первом и втором семестре промежуточная аттестация по дисциплине проводится в форме экзамена.

Студенты допускаются к экзамену при положительной аттестации по результатам текущего контроля.

Результаты текущего контроля успеваемости оцениваются по пятибалльной шкале:

оценка **«отлично» (5)** – график самостоятельной работы и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся на 100 % и более (с опережением);

оценка **«хорошо» (4)** – график самостоятельной работы и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся на 75 % и более;

оценка **«удовлетворительно» (3)** – график самостоятельной работы и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся на 50 % и более;

оценка **«неудовлетворительно» (2)** – график самостоятельной работы и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся менее чем на 50 %.

Экзамен проводится в соответствии с перечнем вопросов к экзамену, размещенному в ЭИОС КГТУ и представленному в приложении.

Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса и три задачи. Выбор экзаменационных вопросов для включения в билет осуществляется из принципа равной сложности всех билетов и наибольшего охвата каждым билетом учебного материала.

На усмотрение преподавателя экзамен может быть проведен в письменной, устной или комбинированной форме.

Готовясь к ответу, студент все доказательства, формулы, структурные схемы, графики и т. д. записывает и изображает на полученном листе в форме удобной для использования при устном ответе экзаменатору.

Ответ студента должен быть четким, конкретным и кратким. После ответа преподаватель задает вопросы, помогающие ему выявить ход мыслей, логику рассуждений и способность применять полученные знания в практической деятельности. Если требуется уточнить оценку или степень знаний студентом по тому или иному вопросу, задаются дополнительные вопросы.

Шкала оценивания результатов освоения дисциплины на экзамене, основана на четырехбалльной системе.

Оценка «отлично» выставляется в случае, если студент исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно излагает ответы на вопросы билета, умеет делать обобщения и выводы, владеет основными терминами и понятиями, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, использовал в ответе материал дополнительной литературы, дал правильные ответы на дополнительные вопросы.

Оценка «хорошо» выставляется в случае, если студент грамотно и по существу излагает ответ на вопросы билеты, не допуская существенных неточностей, но при этом его ответы были недостаточно обоснованы, владеет основными терминами и понятиями, правильно применяет теоретические положения при решении задач, использует в ответе материал только основной литературы; владеет основными умениями; при ответе на дополнительные вопросы допускал неточности и незначительные ошибки.

Оценка «удовлетворительно» выставляется в случае, если студент при ответе на вопросы продемонстрировал знания только основного материала, но допускал неточности, использовал недостаточно правильные формулировки, испытывает затруднения при решении задач; использовал при ответе только лекционный материал; при ответе на дополнительные вопросы допускал ошибки.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется в случае, если студент не смог объяснить смысл написанного им при подготовке к ответу текста; не ориентируется в терминологии дисциплины; не может ответить на дополнительные вопросы.

Компетенции в той части, в которой они должны быть сформированы в рамках изучения дисциплины, могут считаться сформированными в случае, если студент получил на экзамене положительную оценку.

# СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

## Основная литература


1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 12-е изд. – Москва: Юрайт, 2014. – 479 с.


## Дополнительная литература


2. Шипачев, В. С. Высшая математика. Полный курс: учебник / В. С. Шипачев, А. Н. Тихонов. – 4-е изд., испр. и доп. – Москва: Юрайт, 2012. – 608 с. – ISBN 978-5– 9916-1806-9.
3. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 11-е изд., пере-раб. и доп. – Москва: Юрайт, 2014. – 404 с. – ISBN 978-5-9916-3625-3.
4. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие / П. Е. Данко [и др.]. – 7-е изд., испр. – Москва: АСТ: Мир и Образование; Минск: Харвест, 2014. – 815 с. – ISBN 978-5-17-083948-3 (АСТ) (в пер.). – ISBN 978-5-94666-735-7 (Мир и Образование). – ISBN 978-985-18-3012-7 (Харвест).
5. Гусак, А. А. Основы высшей математики: пособие для студентов ву-зов / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. – Минск: ТетраСистемс, 2012. – 205 с. – Ре-жим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=111939 (дата обращения: 03.12.2020). – ISBN 978-985-536-274-7. – Текст: электронный.


## Учебно-методические пособия


6. Виницкая, Ж. И. Математика: учебно-методическое пособие / Ж. И. Виницкая, Т. А. Кутузова, Н. К. Мозговая. – Калининград: Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ», 2020 г. Ч. 1. – 110 с.
7. Антипов, Ю. Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебно-методическое пособие / Ю. Н. Антипов, Ж. И. Виницкая, Т. А. Кутузо-ва. – Калининград: Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ», 2016. – 78 с.

# ПРИЛОЖЕНИЕ

## ВОПРОСЫ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ (ЭКЗАМЕН) ПО ДИСЦИПЛИНЕ

### 1 семестр

**Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии**

1. Определители второго порядка. Их свойства.
2. Системы линейных уравнений второго порядка с двумя неизвестными.
3. Определители третьего порядка. Их свойства. Разложение определителя по элементам строки или столбца.
4. Системы линейных уравнений третьего порядка с тремя неизвестными. Правило Крамера.
5. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
6. Матрицы. Виды матриц. Действия с матрицами.
7. Обратная матрица.
8. Ранг матрицы.
9. Решение системы линейных уравнений матричным способом.
10. Теорема Кронекера-Капелли.
11. Векторы. Основные понятия.
12. Действия над векторами.
13. Линейная зависимость и независимость векторов.
14. Проекция вектора.
15. Разложения вектора по двум векторам.
16. Разложение вектора по трём векторам.
17. Координаты вектора.
18. Действия над векторами, заданными координатами.
19. Скалярное произведение векторов, его свойства.
20. Некоторые применения скалярного произведения.
21. Векторное произведение. Его свойства.
22. Некоторые применения векторного произведения.
23. Смешанное произведение векторов, его свойства.
24. Некоторые применения смешанного произведения.
25. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
26. Общее уравнение прямой.
27. Уравнение прямой, проходящей через точку в данном направлении.
28. Уравнение прямой, проходящей через две точки (в плоскости).
29. Угол между прямыми (в плоскости).
30. Условия параллельности и перпендикулярности прямых (в плоскости).
31. Расстояние от точки до прямой.
32. Общее уравнение плоскости.
33. Уравнение плоскости, проходящей через три точки.
34. Угол между плоскостями.

35. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
36. Расстояние от точки до плоскости.
37. Канонические и параметрические уравнения прямой.
38. Уравнение прямой, проходящей через две точки (в пространстве).
39. Угол между прямыми (в пространстве)..
40. Условия параллельности и перпендикулярности прямых (в пространстве).
41. Угол между прямой и плоскостью.
42. Условие параллельности прямой и плоскости.
43. Условия перпендикулярности прямой и плоскости.
44. Пересечение прямой и плоскости.
45. Окружность.
46. Эллипс.
47. Гипербола.
48. Парабола.

**Основы математического анализа**

1. Целые, рациональные, действительные числа. Числовые множества, операции над множествами.
2. Комплексные числа: модуль и аргумент комплексного числа; алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы комплексного числа; операции над комплексными числами.
3. Переменная величина. Функция: основные понятия (аргумент, значение функции, область определения, множество значений, нули функции, возрастание, убывание, четность, нечетность, периодичность). Обратная функция. Способы задания функции.
4. Числовая последовательность. Понятие и свойства предела последовательности. Ограниченность последовательности.
5. Предел функции: определение, свойства.
6. Первый и второй замечательные пределы.
7. Вычисление пределов: понятие неопределенности и методы раскрытия основных неопределенностей.
8. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация.
9. Бесконечно малые и бесконечно большие величины: классификация, свойства, эквивалентности.
10. Производная функции одной переменной: понятие, геометрический и физический смысл. Уравнения касательной и нормали к графику функции.
11. Правила дифференцирования.
12. Производная сложной функции.
13. Таблица производных основных элементарных функций.
14. Связь дифференцируемости и непрерывности функции
15. Дифференцирование обратных, неявных и параметрически заданных функций.
16. Дифференциал: определение, свойства, геометрический смысл.

17. Теорема Ферма.
18. Теорема Ролля.
19. Теорема Коши.
20. Теорема Лагранжа.
21. Правило Лопиталя (Раскрытие неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$).
22. Правило Лопиталя (Раскрытие неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$).
23. Монотонность функции на данном промежутке.
24. Экстремум функции.
25. Необходимое условие экстремума дифференцируемых функций
26. Достаточное условие экстремума.
27. Наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке.
28. Выпуклость и вогнутость графика функции на заданном промежутке; точка перегиба.
29. Исследование функции на экстремум с помощью второй производной.
30. Асимптоты графика функции.
31. Общий план исследования функции и построения графика.
32. Функция нескольких переменных: понятие, область определения, множество значений, линии и поверхности уровня.
33. Предел функции двух переменных. Непрерывность функции двух переменных.
34. Частные и полное приращения функции двух переменных. Частные производные функции двух переменных.
35. Частные и полный дифференциалы. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.
36. Производные сложных функций двух переменных. Полная производная.
37. Производные функции, заданной неявно.
38. Частные производные и дифференциалы высших порядков функции двух переменных.
39. Градиент функции. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
40. Производная по направлению.
41. Экстремум функции двух переменных.
42. Наибольшее и наименьшее значения функции в данной области.

**2 семестр**

**Основы математического анализа**

1. Первообразная и неопределенный интеграл: понятие, свойства. Таблица неопределенных интегралов.
2. Интегрирование по частям.

3. Метод непосредственного интегрирования. Замена переменной.

4. Интегрирование некоторых выражений, содержащих квадратный трехчлен.

5. Понятие многочлена. Рациональные дроби. Выделение правильной рациональной дроби. Простейшие дроби. Метод неопределённых коэффициентов.

6. Интегрирование простейших дробей.

7. Интегрирование дробно-рациональных функций.

8. Интегрирование простейших иррациональных выражений.

9. Интегрирование тригонометрических выражений.

10. Определенный интеграл: определение, свойства, геометрический смысл.

11. Свойства определённого интеграла. Теорема о среднем значении функции.

12. Интеграл с переменным верхним пределом и его свойство. Формула Ньютона-Лейбница.

13. Замена переменной в определенном интеграле.

14. Интегрирование по частям в определенном интеграле.

15. Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольной системе координат.

16. Вычисление площадей плоских фигур в полярной системе координат.

17. Вычисление площадей плоских фигур, заданных параметрически.

18. Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода: определение, признаки сходимости.

**Дифференциальные уравнения**

1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка: понятие, общее и частные решения, задача Коши.
2. Условия существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка.
3. Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными.
4. Однородные дифференциальные уравнения.
5. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка.
6. Дифференциальные уравнения Бернулли.
7. Дифференциальные уравнения высших порядков: основные понятия.
8. Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Структура общего решения. Метод вариации постоянных.
9. Решение однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, когда $D \geq 0$.
10. Решение однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, когда $D < 0$.
11. Решение однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, когда $D = 0$.

12. Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Метод неопределённых коэффициентов нахождения частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, когда $f(x) = P_n(x)$..

13. Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Метод неопределённых коэффициентов нахождения частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, когда $f(x) = M \sin \alpha x + N \cos \alpha x$.

14. Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Метод неопределённых коэффициентов нахождения частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, когда $f(x) = P_n(x), \cdot e^{\beta x}$.

15. Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Метод неопределённых коэффициентов нахождения частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, когда $f(x) = \alpha \cdot e^{\beta x}$.

16. Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Метод неопределённых коэффициентов нахождения частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, когда $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$.

**Ряды**

1. Числовые ряды. Общие понятия. Арифметическая и геометрическая прогрессии как примеры числовых рядов.
2. Числовой ряд с положительными членами.
3. Необходимый признак сходимости.
4. Достаточный признак сходимости числовых рядов с положительными членами: признак Даламбера.
5. Достаточный признак сходимости числовых рядов с положительными членами: радикальный признак Коши.
6. Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами: признаки сравнения.
7. Интегральный признак сходимости числовых рядов с положительными членами.
8. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды: определения; признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда; условная и абсолютная сходимость.

9. Степенные ряды: определение; радиус и интервал сходимости. Теорема Абеля.

10. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение в ряд Тейлора функции f(x)= $e^x$ .

11. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение в ряд Тейлора функции f(x)= $\ln(1+x)$.

12. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение в ряд Тейлора функции f(x)= $\frac{1}{1-x}$ .

13. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение в ряд Тейлора функции f(x)= $\sin(x)$ .

**Основы теории вероятностей**

1. Основные формулы комбинаторики: размещения, перестановки, сочетания.
2. Классическое определение вероятности события. Свойства вероятности.
3. Теоремы сложения вероятностей несовместных событий.
4. Теорема умножения вероятностей независимых событий.
5. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей зависимых событий.
6. Теорема сложения вероятностей совместных событий.
7. Вероятность появления хотя бы одного события.
8. Формула полной вероятности.
9. Теорема гипотез. Формула Байеса.
10. Повторение испытаний. Формула Бернулли.
11. Локальная теорема Лапласа.
12. Распределение Пуассона.
13. Интегральная теорема Лапласа.
14. Относительная частота появления события.
15. Вероятность отклонения относительной частоты от теоретической вероятности.
16. Случайные величины. Дискретные и непрерывные случайные величины.
17. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины.
18. Ряд и многоугольник распределения.
19. Числовые характеристики дискретных случайных величин.
20. Математическое ожидание дискретной случайной величины, его свойства.

21. Математическое ожидание числа появлений события в независимых испытаниях.
22. Отклонение случайной величины от её математического ожидания.
23. Дисперсия дискретной случайной величины, её свойства.
24. Формула для вычисления дисперсии.
25. Дисперсия числа появления событий в независимых испытаниях.
26. Среднее квадратическое отклонение.
27. Функция распределения случайной величины, её свойства, график.
28. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины, её свойства.
29. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал.
30. Нахождение функции распределения по известной плотности распределения.
31. Показательное распределение.
32. Биномиальное распределение.

**Элементы математической статистики**

1. Закон равномерного распределения вероятностей.
2. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.
3. Нормальное распределение, его математическое ожидание, дисперсия.
4. Нормальная кривая.
5. Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины.
6. Генеральная и выборочная совокупность. Повторная и бесповторная выборки.
7. Эмпирическая функция распределения.
8. Полигон и гистограмма.
9. Точечные оценки. Выборочная средняя и выборочная дисперсия.
10. Интервальные оценки. Доверительный интервал.
11. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при известном $\delta$.
12. Мода, медиана.

Локальный электронный методический материал

Алексей Иванович Руденко

МАТЕМАТИКА

Редактор С. Кондрашова

Уч.-изд. л. 4,9. Печ. л.4,2.

Издательство федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Калининградский государственный технический университет»
236022, Калининград, Советский проспект,1