Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Л. Г. Белякова

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие по освоению дисциплины
для студентов, обучающихся в магистратуре по направлению подготовки
08.04.01 Строительство

Калининград
2023

УДК 72 (076)

Рецензент

кандидат физико-математических наук, и. о. заведующего кафедрой прикладной математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «КГТУ»
А. И. Руденко

Белякова, Л. Г. Прикладная математика: учеб.-методич. пособие по освоению дисциплины для студ., обучающихся в магистратуре по направлению подгот. 08.04.01 Строительство / **Л. Г. Белякова.** – Калининград: ФГБОУ ВО «КГТУ», 2023. – 36 с.

В учебно-методическом пособии приведены тематический план изучения дисциплины для студентов магистратуры, критерии и нормы оценки. Представлены методические указания по изучению дисциплины. Даны рекомендации по подготовке к промежуточной аттестации в форме зачета и по выполнению самостоятельной работы. Пособие подготовлено в соответствии с требованиями утвержденной рабочей программы по дисциплине «Прикладная математика» направления подготовки 08.04.01 Строительство.

Табл. - 3, рис. - 1, список лит. – 16 наименований

Учебно-методическое пособие рассмотрено и одобрено в качестве локального электронного методического материала на заседании кафедры прикладной математики и информационных технологий института цифровых технологий ФГБОУ ВО «КГТУ» 25.10.2023 г., протокол № 12

Локальный электронный методический материал. Учебно-методическое пособие. Рекомендовано к использованию в учебном процессе методической комиссией института ИЦТ от 26.09.2023 г., протокол № 09

УДК 72 (076)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Данное пособие предназначено для студентов, обучающихся в магистратуре по направлению 08.04.01 «Строительство» и изучающих дисциплину «Прикладная математика».

Цели освоения дисциплины:

- совершенствование знаний о математических моделях и методах, возникающих в процессе научно-исследовательской и проектной деятельности в области строительства;
- формирование приемов и навыков построения и практического исследования математических моделей методами оптимизации, статистического анализа;
- приобретение умений и навыков применения стандартных математических пакетов, использования методов прикладной математики для решения поставленных профессиональных задач.

В результате освоения дисциплины студент должен:

знать

- основные теоремы прикладных разделов математического анализа, линейной алгебры;
- основные алгоритмы типовых численных методов решения математических задач;
- основные виды уравнений математической физики, их связь с инженерными задачами; современные алгоритмы численных методов решения уравнений в частных производных, лежащие в основе современных программ для решения инженерных задач строительной отрасли;
- основные методы сбора и анализа информации, способы формализации цели и методы ее достижения, принципы соблюдения информационной гигиены;
- основные методы статистического анализа данных;

уметь

- решать задачи статистической обработки и анализа экспериментальных данных, используя стандартные функции пакета MathCad и табличного процессора Excel;
- анализировать данные расчетов математических задач;
- решать типовые задачи по основным разделам курса, используя методы линейной алгебры, математического анализа и стандартные функции пакета MathCad;
- использовать теоретические понятия и практические методы при решении практических задач;
- осуществлять математическую постановку задач, возникающих в профессиональной деятельности;

- анализировать данные расчетов математических задач;

- применять доступные компьютерные и программные ресурсы при реализации численных схем на ЭВМ;

- анализировать, обобщать и воспринимать информацию, ставить цель и формулировать задачи по её достижению, находить новинки научно-технической литературы, справочники и выделять в них главное из общей массы доступной информации; соблюдать информационную гигиену;

владеть

- навыками решения стандартных задач оптимизации, обработки данных и математического моделирования;

- основами работы в пакете MathCad и табличном процессоре Excel;

- набором стандартных методов обработки информации и численного моделирования;

- навыками работы в глобальных компьютерных сетях; навыками использования информационно-коммуникационных технологий для представления информации;

- навыками статистической обработки и анализа экспериментальных данных с использованием стандартных функций пакета MathCad и табличного процессора Excel;

- набором стандартных методов обработки информации и численного моделирования.

Зачет выставляется по результатам текущего контроля успеваемости при условии выполнения и успешной защиты практических заданий, контрольных работ (для заочной формы обучения), по результатам тестирования, система и критерии оценивания приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Система и критерии выставления оценки

<table>
<tr><td rowspan="4">Система оценок
Критерий</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>0-40 %</td><td>41-60 %</td><td>61-80 %</td><td>81-100 %</td></tr>
<tr><td>«неудовлетвори-тельно»</td><td>«удовлетвори-тельно»</td><td>«хорошо»</td><td>«отлично»</td></tr>
<tr><td>«не зачтено»</td><td colspan="3">«зачтено»</td></tr>
<tr><td>*1*</td><td>*2*</td><td>*3*</td><td>*4*</td><td>*5*</td></tr>
<tr><td>Системность и полнота знаний в отношении изучаемых объектов</td><td>Обладает частичными и разрозненными знаниями, которые не может научно корректно связывать между собой (только некоторые из них</td><td>Обладает минимальным набором знаний, необходимым для системного взгляда на изучаемый объект</td><td>Обладает набором знаний, достаточным для системного взгляда на изучаемый объект</td><td>Обладает полнотой знаний и системным взглядом на изучаемый объект</td></tr>
</table>

Система оценок / Критерий	2	3	4	5
	0-40 %	41-60 %	61-80 %	81-100 %
	«неудовлетвори-тельно»	«удовлетвори-тельно»	«хорошо»	«отлично»
	«не зачтено»	«зачтено»		
	может связывать между собой)			
Работа с информацией	Не в состоянии находить необходимую информацию, либо в состоянии находить отдельные фрагменты информации в рамках поставленной задачи	Может найти необходимую информацию в рамках поставленной задачи	Может найти, интерпретировать и систематизировать необходимую информацию в рамках поставленной задачи	Может найти, систематизировать необходимую информацию, а также выявить новые, дополнительныеисточники информации в рамках поставленной задачи
Научное осмысление изучаемого явления, процесса, объекта	Не может делать научно-корректных выводов из имеющихся у него сведений, в состоянии проанализировать только некоторые из имеющихся у него сведений	В состоянии осуществлять научно корректный анализ предоставленн ой информации	В состоянии осуществлять систематический и научно-корректный анализ предоставленной информации, вовлекает в исследование новые релевантные задаче данные	В состоянии осуществлять систематический и научно корректный анализ предоставленной информации, вовлекает в исследование новые релевантные поставленной задаче данные, предлагает новые ракурсы поставленной задачи
Освоение стандартных алгоритмов решения профессиональ ных задач	В состоянии решать только фрагменты поставленной задачи в соответствии с заданным алгоритмом, не освоил предложенный алгоритм, допускает ошибки	В состоянии решать поставленные задачи в соответствии с заданным алгоритмом	В состоянии решать поставленные задачи в соответствии с заданным алгоритмом, понимает основы предложенного алгоритма	Не только владеет алгоритмом и понимает его основы, но и предлагает новые решения в рамках поставленной задачи

Для оценки результатов освоения дисциплины используются:

- оценочные средства текущего контроля успеваемости;
- оценочные средства для промежуточной аттестации по дисциплине.

К оценочным средствам текущего контроля успеваемости относятся:

- задания для практических занятий;

- задания для контрольных работ;
- тестовые задания по дисциплине.

В соответствии с учебным планом по дисциплине «Прикладная математика» предусмотрены практические занятия для очной и заочной форм обучения. На выполнение некоторых практических работ необходимо затратить более двух академических часов

Для успешного освоения дисциплины, в соответствии с учебным планом, ей предшествуют дисциплины «Математический анализ» и «Теория вероятностей и математическая статистика».

В пособии представлены основная структура дисциплины, тематический план, содержащий перечень изучаемых тем, обязательных практических работ, мероприятий текущей аттестации и отводимое на них аудиторное время (занятия в соответствии с расписанием), а также время и темы для самостоятельного изучения дисциплины. При формировании личного образовательного плана на семестр следует оценивать рекомендуемое время на изучение дисциплины.

В разделе «Содержание дисциплины и указания к изучению» приведены подробные сведения об изучаемых вопросах, по которым вы можете ориентироваться в случае пропуска каких-то занятий, а также методические рекомендации преподавателя для самостоятельной подготовки, каждая тема имеет ссылки на литературу (или иные информационные ресурсы), а также контрольные вопросы для самопроверки.

Помимо данного пособия, студентам следует использовать материалы, размещенные в соответствующем данной дисциплине разделу ЭИОС, в которые более оперативно вносятся изменения для адаптации дисциплины под конкретную группу.

1. Тематический план занятий

1. Тематический план для студентов *очной* формы обучения

Таблица 2

№	Раздел (модуль) дисциплины	Тема	Объем контактной работы, ч	Объем самостоятельной работы, ч
		Теоретическое обучение (лекции)		
		Введение	2	
1	**Элементы теории вероятностей и математической статистики**			
1.1		Обработка экспериментальных данных	2	3
1.2		Методы построения математических моделей по экспериментальным данным.	2	3
1.3		Элементы статистического анализа.	2	2
1.4		Системы массового обслуживания	2	3
2	**Оптимизация. Линейное программирование (ЛП)**			
2.1		Анализ экстремальных задач. Экстремумы функций многих переменных.	4	5
2.2		Математическая модель задач ЛП. Графический способ решения задач.	2	2
2.3		Симплекс – метод решения.	4	3
2.4		Транспортная задача. Решение задач ЛП и ТЗ в Mathcad и Excel	2	3
2.5		Сетевое планирование в решении производственных задач	2	1
3	**Интерполяция и численные методы**			
3.1		Интерполирование. Полиномы Лагранжа и Ньютона	2	2
3.2		Итерационные методы решения уравнений. Использование Excel Mathcad.	2	2
3.3		Методы приближенного решения дифференциальных уравнений. Метод Рунге-Кутта	2	2
			30	**31**

		Практические (лабораторные занятия)		
1	**Элементы теории вероятностей и математической статистики**			
1.1		Обработка экспериментальных данных с применением пакета прикладных программ	2	4
1.2		Построение математических моделей по экспериментальным данным	2	4
1.3		Парная и множественная регрессия	2	3
1.4		Системы массового обслуживания (СМО)	2	3
2	**Оптимизация. Линейное программирование (ЛП)**			
2.1		Экстремальные задачи и Поиск экстремумов функций многих переменных.	4	7
2.2		Графический способ решения задач линейного программирования	2	4
2.3		Симплекс – метод решения задач линейного программирования	4	4
2.4		Транспортная задача. Решение задач ЛП и ТЗ в Mathcad и Excel	2	4
2.5		Построение сетевых графиков в производстве	2	3,75
3	**Интерполяция и численные методы**			
3.1		Интерполирование. Полиномы Лагранжа и Ньютона	2	3
3.2		Итерационные методы решения уравнений. Использование Excel Mathcad.	4	5
3.3		Приближенное решение дифференциальных уравнений. Метод Рунге-Кутта	2	4
		Тестирование	**30**	**48,85**
		Рубежный (текущий) и итоговый контроль		
		Итоговое тестирование (зачет)	х	4,15
		Всего	**60**	**84**

2.Тематический план для студентов ***заочной*** формы обучения

Таблица 3

	Раздел (модуль) дисциплины	**Тема**	**Объем контактной работы, ч**	**Объем самостоятельной работы, ч**
		Теоретическое обучение (лекции)		
		Введение		2
1	**Элементы теории вероятностей и математической статистики**			
1.1		Обработка экспериментальных данных	1	3
1.2		Методы построения математических моделей по экспериментальным данным.	1	3
1.3		Элементы статистического анализа	1	3
1.4		Системы массового обслуживания	-	3
2	**Оптимизация. Линейное программирование (ЛП)**			
2.1		Анализ экстремальных задач. Экстремумы функций многих переменных.	1	6
2.2		Математическая модель задач ЛП. Графический способ решения задач.	1	4
2.3		Симплекс – метод решения.	1	4
2.4		Транспортная задача. Решение задач ЛП и ТЗ в Mathcad и Excel	1	6
2.5		Сетевое планирование в решении производственных задач	1	3
3	**Интерполяция и численные методы**			
3.1		Интерполирование. Полиномы Лагранжа и Ньютона	-	3
3.2		Итерационные методы решения уравнений. Использование Excel Mathcad.	1	3
3.3		Методы приближенного решения дифференциальных уравнений. Метод Рунге-Кутта	1	3
			10	**46**
		Практические (лабораторные		

		занятия)		
1	**Элементы теории вероятностей и математической статистики**			
1.1		Обработка экспериментальных данных с применением пакета прикладных программ	2	4
1.2		Построение математических моделей по экспериментальным данным	1	4
1.3		Парная и множественная регрессия	2	4
1.4		Системы массового обслуживания (СМО)	-	3
2	**Оптимизация. Линейное программирование (ЛП)**			
2.1		Анализ экстремальных задач. Экстремумы функций многих переменных.	1	9
2.2		Математическая модель задачи линейного программирования. Графический способ решения задач ЛП.	1	7
2.3		Симплекс – метод решения задач линейного программирования	1	7
2.4		Транспортная задача. Решение задач ЛП и ТЗ в Mathcad и Excel	1	6
2.5		Построение сетевых графиков в производстве	1	5,5
3	**Интерполяция и численные методы**			
3.1		Интерполирование. Полиномы Лагранжа и Ньютона	1	5
3.2		Итерационные методы решения уравнений. Использование Excel и Mathcad.	-	7
3.3		Приближенное решение дифференциальных уравнений. Метод Рунге-Кутта	1	6
			12	**67,5**
		Рубежный (текущий) и итоговый контроль		
		Итоговое тестирование (зачет)	х	**8,5**
		Всего	**22**	**113,5**

2. Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа студентов является обязательной частью образовательного процесса. Наряду с изучением лекционного материала необходимо самостоятельно более подробно рассмотреть указанные в данном пособии темы. Подготовка к практическим занятиям заключается в изучении теоретического материала с использованием учебно-методических пособий и нормативной документации. Только после этого можно приступать к выполнению практических заданий.

Для студентов очной и заочной форм тематические планы представлены отдельно, в которых представлено количество часов, которое требуется затратить на ту или иную тему дисциплины. При заочной форме обучения студентами большая часть материала изучается самостоятельно

При освоении прикладной математики студент должен выполнить контрольную работу и пройти тестирование.

Контрольная работа по дисциплине выполняется в рукописном виде с распечатками компьютерных расчетов в некоторых заданиях. Выполненная и оформленная контрольная работа сдается преподавателю на проверку до начала проведения промежуточной аттестации. В случае, если работа имеет недостатки, она отправляется на доработку; при отсутствии замечаний к выполненной работе - допускается к защите. Защита контрольной работы проводится в период экзаменационной сессии. Результаты защиты оцениваются «зачтено» или «не зачтено» (табл. 1).

Тестирование по дисциплине проводится на практических занятиях, каждый вариант теста включает в себя 10 вопросов или заданий открытого или закрытого типа.

3. Содержание дисциплины

Введение

Перечень изучаемых вопросов.

Задачи построения математических моделей с помощью статистического анализа. Целесообразность применения методов линейного программирования. Транспортная задача и её применение в описании строительных работ. Сетевой график. Решение различных инженерных задач численными методами с применением Mathcad и Excel.

Раздел 1. Элементы теории вероятностей и математической статистики

Тема 1.1 ***Обработка экспериментальных данных***

Перечень изучаемых вопросов.

Генеральная и выборочная совокупность. Вариационный ряд. Полигон и гистограмма. Числовые характеристики выборочной совокупности: Мода и медиана, среднее арифметическое, дисперсия и стандартное отклонение.

Методические указания к изучению

В этой теме изучаются различные совокупности однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты.

Основной задачей математической статистики является исследование свойств *генеральной совокупности* по *выборочной совокупности*, т.е. выяснение вероятностных свойств совокупности любых объектов, таких как: вид распределения, числовых характеристик и т. д. Выборочная совокупность позволяет оценить интересующий признак генеральной совокупности и обладает определенными свойствами:

1) она должна быть *репрезентативной* (представительной), т.е. выборка должна правильно представлять свойства и пропорции генеральной совокупности;

2) выборка должна быть случайной (и только тогда она будет репрезентативной), т.е. каждый объект выборки отобран случайно из генеральной совокупности и все объекты имеют одинаковую вероятность попасть в выборку.

Число объектов совокупности называется *объемом* совокупности.

Если полученные в ходе наблюдения или эксперимента значения признака записывают в последовательности измерений, то получают *простой статистический ряд*. Такой ряд неудобен для анализа, поэтому варианты можно записать в порядке возрастания, тогда получают *вариационный ряд*.

Количество элементов вариационного ряда может быть достаточно велико. Для удобства работы с данными их представляют в виде статистического распределения. Различают два вида статистического распределения: *дискретное* и *интервальное*.

Дискретным (точечным) статистическим распределением называется перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот. Дискретное статистическое распределение графически можно представить в виде полигона частот (относительных частот). *Полигоном* частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x1; m1), (x2; m2), \ldots, (xк; mк)$.

Для построения *полигона* относительных частот на оси абсцисс откладывают варианты xi, а на оси ординат – соответствующие им относительные частоты *pi*. Интервальное статистическое распределение графически представляют в виде гистограммы.

Гистограммой называют совокупность смежных прямоугольников, расположенных на одной прямой, основания которых одинаковы и равны ширине интервала, а высоты равны отношению *частоты* или *относительной частоты* к ширине интервала. Отношение *mi* называют соответственно плотностью частоты или плотностью относительной частоты.

Статистическое распределение, заданное в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот m_i встречаемости вариант в интервале, называется *интервальным* (непрерывным) статистическим распределением.

Для этого проводятся испытания, результаты которых записываются в виде *вариационного ряда*. Затем с помощью специальных формул находятся числовые характеристики. Для больших выборок удобно использовать инструменты Excel.

К *числовым характеристикам* статистических рядов относят моду, медиану, выборочную среднюю, выборочную дисперсию и среднее квадратическое отклонение (стандартное отклонение). Из них мода, медиана и выборочная средняя являются характеристиками *положения вариант* в статистическом ряду. Выборочная дисперсия и среднее квадратическое отклонение являются характеристиками рассеяния вариант вокруг среднего значения.

Мода – это варианта, которой соответствует наибольшая частота. Для моды вводится обозначение Мо. Статистический ряд может иметь не одну моду, а несколько.

Медиана – это варианта, которая расположена в центре вариационного ряда. Она делит вариационный ряд на две равные части. Для медианы вводится обозначение Ме. При нечетном числе вариант за медиану принимают центральную варианту, справа и слева от медианы находится одинаковое количество вариант. При четном числе вариант за медиану принимают среднее значение из двух центральных вариант.

Выборочной средней $\overline{x}$ называется величина, равная среднему арифметическому значению вариант. *Дисперсия* s^2 для выборок с небольшим объемом (n<30) характеризует квадраты отклонения вариант от среднего значения. *Среднее квадратическое отклонение* (стандартное отклонение) s равно квадратному корню из приведенной дисперсии.

Литература.

[2, 8-10]

Контрольные вопросы.

1. Как получить точечный и интервальный вариационные ряды выборочной совокупности?
2. Что такое полигона и гистограммы?
3. Перечислите основные числовые характеристики вариационного ряда.
4. Дайте определение следующих числовых характеристик: среднее арифметическое, дисперсия, стандартное отклонение, мода и медиана.
5. О чем говорят результаты полученных исследований?

Тема 1.2 ***Методы построения математических моделей по экспериментальным данным.***

Перечень изучаемых вопросов.

Корреляционный и дисперсионный анализ. Понятие многомерной выборки. Статистическая связь между признаками. Нахождение линейной эмпирической формулы.

Методические указания к изучению.

Для построения математической модели по экспериментальным данным используют понятия корреляционного и дисперсионного анализа.

Дисперсионный анализ применяется для исследования влияния одной или нескольких качественных переменных (факторов) на одну зависимую количественную переменную (отклик).

Сущность дисперсионного анализа заключается в расчленении общей дисперсии изучаемого признака на отдельные компоненты, обусловленные влиянием конкретных факторов, и проверке гипотез о значимости влияния этих факторов на исследуемый признак. Сравнивая компоненты дисперсии друг с другом посредством F — критерия Фишера, можно определить, какая доля общей вариативности результативного признака обусловлена действием регулируемых факторов.

Анализ временных рядов применим к одиночным или связанным временным рядам и позволяет выделять различные формы периодичности и взаимовлияния временных процессов, а также осуществлять прогнозирование будущего поведения временного ряда.

Исследователя нередко интересует, как связаны между собой две или большее количество переменных в одной или нескольких изучаемых выборках. Например, могут ли учащиеся с высоким уровнем тревожности демонстрировать стабильные академические достижения, или связана ли продолжительность работы учителя в школе с размером его заработной платы, или с чем больше связан уровень умственного развития учащихся — с их успеваемостью по математике или по литературе и т.п.?

Такого рода зависимость между переменными величинами называется корреляционной, или корреляцией. Корреляционная связь — это согласованное изменение двух признаков, отражающее тот факт, что изменчивость одного признака находится в соответствии с изменчивостью другого.

Итак, корреляционный анализ – это группа статистических методов, направленная на выявление и математическое представление структурных зависимостей между выборками

Задача корреляционного анализа сводится к установлению направления (положительное или отрицательное) и формы (линейная, нелинейная) связи между варьирующими признаками, измерению ее тесноты, и, наконец, к проверке уровня значимости полученных коэффициентов корреляции

Конкретный вид функциональной зависимости между величинами X и Y, установленный по двумерной выборке, называют *эмпирической формулой*. Простейшим видом эмпирической формулы является линейная функция $y=ax+b$.

Задача установления эмпирической формулы заключается в вычислении по выборке коэффициентов a и b. Аналогично можно получить коэффициенты и других функций для представления результатов наблюдений, например $y = ax^2 + bx + c$ и т. д.

Для получения линейной эмпирической формулы имеется несколько способов: метод *«натянутой нити», метод сумм и метод наименьших квадратов (МНК).*

Литература.

[4-7, 8]

Контрольные вопросы.

1. В чем отличие корреляционного и дисперсионного анализа?
2. Какая выборка называется многомерной?
3. Опишите статистическую связь между признаками?
4. Запишите общий вид линейной эмпирической формулы

Тема 1.3 ***Парная и множественная регрессия***

Перечень изучаемых вопросов.

Регрессия. Парная и множественная регрессия. Метод наименьших квадратов для нахождения коэффициентов линейной регрессии. Коэффициент линейной корреляции.

Методические указания к изучению

При изучении этой темы раздела требуется, в первую очередь, получить представление о «регрессии», «парной регрессии» или «множественной регрессии», а затем переходить к освоению методов нахождения параметров регрессии.

Итак, по одномерной выборке мы составляли вариационные ряды, а в двумерном случае составляют корреляционные таблицы. Все полученные (в опытах) варианты (значения) или интервалы значений одной случайной величины записывают в первый столбец корреляционной таблицы, а все варианты или интервалы другой случайной величины – в первую строку. Получаем таблицу пар значений (x_i, y_i). Построение корреляционных таблиц удобнее выполнять в приложении Excel.

Регрессия - (лат. regressio — обратное движение, отход) в теории вероятностей и математической статистике — односторонняя стохастическая зависимость, устанавливающая соответствие между случайными переменными.

Парная регрессия – это регрессия между двумя переменными, а множественная регрессия – между несколькими переменными. Уравнение линейной парной регрессии имеет вид y=ax+b связи переменных y и x, где y – зависимая переменная (результативный признак), x – независимая объясняющая переменная (признак-фактор, регрессор), ε – случа*йный член регрессии. Уравнение множественной регрессии* $y=f(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Метод наименьших квадратов для нахождения коэффициентов линейной парной или множественной регрессии достаточно трудоёмкий процесс. Поэтому удобнее использовать пакет «Анализа данных» приложения Excel

Корреляция или *корреляционная зависимость* — статистическая взаимосвязь двух или более случайных величин. Математической мерой корреляции двух случайных величин служит параметрический показатель, который называется *коэффициентом корреляции*. Если зависимость рассматривается линейная, то этой мерой будет коэффициент линейной корреляции

Литература

[1, 3, 4, 10]

Контрольные вопросы

1. Запишите общий вид уравнения парной регрессии.
2. В каком случае используют множественную регрессию?
3. Какой метод используют для нахождения коэффициентов регрессии?
4. Дайте определение коэффициентом корреляции.

Тема 1.4 ***Системы массового обслуживания (СМО).***

Перечень изучаемых вопросов.

Основные понятия СМО. Требование. Входящий поток требований. Время обслуживания. Математическая модель СМО.

Методические указания к изучению

Рассматриваемая тема связана с ситуациями обслуживания, с которыми мы сталкиваемся повсеместно. *Система массового обслуживания (СМО)* — это система, которая производит обслуживание поступающих в неё требований. Обслуживание *требований* в СМО осуществляется обслуживающими приборами. Классическая СМО содержит от одного до бесконечного числа приборов. В зависимости от наличия возможности ожидания поступающими требованиями начала обслуживания СМО подразделяются на:

– *системы с потерями*, в которых требования, не нашедшие в момент поступления ни одного свободного прибора, теряются;
– *системы с ожиданием*, в которых имеется накопитель бесконечной ёмкости для буферизации поступивших требований, при этом ожидающие требования образуют очередь;

– *системы с накопителем конечной ёмкости* (ожиданием и ограничениями), в которых длина очереди не может превышать ёмкости накопителя; при этом требование, поступающее в переполненную СМО (отсутствуют свободные места для ожидания), теряется.

Выбор требования из очереди на обслуживание производится с помощью так называемой дисциплины обслуживания. Их примерами являются FCFS/FIFO (пришедший первым обслуживается первым), LCFS/LIFO (пришедший последним обслуживается первым), random (случайный выбор). В системах с ожиданием накопитель в общем случае может иметь сложную структуру.

Основные понятия СМО:

Требование (заявка) — запрос на обслуживание. Входящий поток требований — совокупность требований, поступающих в СМО.

Время обслуживания — период времени, в течение которого обслуживается требование.

Математическая модель СМО — это совокупность математических выражений, описывающих входящий поток требований, процесс обслуживания и их взаимосвязь.

Литература

[1-3]

Контрольные вопросы

1. Дайте определение СМО.

2. Приведите примеры признаков, которые могли бы использоваться для объектов профессиональной деятельности.

3. Дайте определение следующим объектам: требование, время обслуживания и математическая модель СМО.

3. На какие виды подразделяются СМО в зависимости от наличия возможности ожидания?

Раздел 2. Оптимизация. Линейное программирование (ЛП)

Тема 2.1 ***Анализ экстремальных задач. Экстремумы функции многих переменных***

Перечень изучаемых вопросов

Экстремальные задачи. Минимум или максимум функций. Абсолютные и условные экстремумы функций. Критические точки функции. локальных экстремумов. Первое и второе необходимые условия достижения локального экстремума. Достаточное условие локального экстремума.

Методические указания к изучению.

При изучении данной темы раздела обязательно используются знания, умения и навыки, приобретенные при изучении разделов высшей математики, а именно, предел, непрерывность, производная функции одной или нескольких переменных, градиент функции, производная по направлению, экстремум функции двух переменных, наибольшее и наименьшее значения функции в данной области

Экстремальные задачи, то есть задачи на поиск минимума или максимума некоторой функции, достаточно хорошо известны из математического анализа. В рамках традиционного курса высшей математики рассматриваются детерминированные статические однокритериальные задачи с одним или несколькими аргументами.

Постановка прикладных экстремальных задач, как правило, производится в словесной форме. Например, найти на заданной плоскости бетонной плиты такую точку, суммарное расстояние от которой до двух заданных вне плоскости точек было минимальным. Или, вписать в круг прямоугольник наибольшей площади. Таких примеров можно привести много. Данный раздел посвящен изучению такого рода зависимостей.

Первый этап решения задачи состоит в ее формализации. Так, при формализации первого примера рационально ввести *систему координат* таким образом, чтобы одна из осей совпадала с заданной прямой, а другая –проходила через одну из заданных точек. Задача не содержит ограничений на значения аргумента и, поэтому относится к числу задач на *безусловный* экстремум.

При формализации второго примера выберем в качестве аргументов длины сторон прямоугольника x и y. В результате получена задача на *условный экстремум*.

Для решения такого рода задач используется понятие функции нескольких переменных и используется аппарат для изучения поведения таких функций: линии и поверхности уровня, предел и непрерывность функции двух переменных, частные производные функции двух переменных, *экстремум функции двух переменных*, наибольшее и наименьшее значения функции в данной области.

Целью решения экстремальной задачи является достижение *абсолютного (глобального) максимума* или *минимума функции*.

Порядок решения экстремальной задачи состоит в выделении множества *критических точек*, среди которых производится поиск точек абсолютных экстремумов. В множество критических точек следует включать:

–точки локальных экстремумов;

–точки, соответствующие границам допустимой области;

–точки разрыва оптимизируемой функции.

Для нахождения *локальных экстремумов* используется система необходимых и достаточных условий. *Первое необходимое условие достижения локального экстремума*: производная первого порядка приравнивается к нулю, что позволяет получить алгебраическое уравнение относительно x, решение которого дает одну или несколько точек, в которых возможен локальный экстремум. Такие точки называют стационарными.

Второе необходимое условие: производная второго порядка ≥ 0 для минимума или ≤ 0 для максимума. Выполнение этого условия проверяется в локальных экстремумах. Достаточное условие локального экстремума состоит в одновременном выполнении первого и второго необходимых условий при строгом неравенстве во втором.

Литература:

[1, 5, 9]

Контрольные вопросы

1. Какие задачи называются экстремальными?
2. По какому правилу вычисляется производная сложной и неявной функции двух переменных.
3. Что такое экстремум функции двух переменных?
4. Сформулируйте необходимое и достаточное условия достижения экстремума.

Тема 2.2 ***Математическая модель задачи линейного программирования. Графический способ решения задач***.

Перечень изучаемых вопросов.

Линейное программирование. Математическая модель задачи ЛП. Система ограничений. Целевая функция. Каноническая форма задачи ЛП. Графический способ. Область допустимых решений. Оптимальное решение.

Методические указания к изучению

При изучении вопросов *линейного программирования* очень важно правильно записать постановку задач, т.е. получить математическую запись модели задачи. Таким образом, необходимо умение переводить словесное описание задачи на язык математических символов.

Составление математической модели начинают с *выбора переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_N$, совокупность числовых значений которых однозначно определяет один из вариантов процесса. После выбора переменных необходимо составить *ограничения* по тексту задачи, которым эти переменные должны удовлетворять. Нельзя забывать, очевидно вытекающие из условий задачи ограничения $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_N \geq 0$. Эти ограничения означают, что отрицательное значение переменных x_i не имеет содержательного смысла.

Наконец, составляется линейная *целевая функция*, которую необходимо минимизировать или максимизировать и, которая в математической форме отражает критерий выбора лучшего варианта.

После составления математической модели необходимо рассмотреть возможные пути ее упрощения и выбрать подходящий вычислительный метод для решения задачи.

Для численного решения задачи ЛП требуется предварительно привести ее к каноническому виду. Каноническая форма задачи характеризуется следующими тремя признаками:

- однородная система ограничений в виде системы уравнений;

- однородные условия неотрицательности, распространяющиеся на все переменные, участвующие в задаче;

- минимизация (максимизация) целевой функции.

Графически могут решаться задачи, заданные в произвольной форме, содержащие не более двух переменных; задачи, заданные в канонической форме, с числом свободных переменных; задачи в произвольной форме записи, которые после приведения к канонической форме будут содержать не более двух свободных переменных.

Решение задач выполняется в два этапа: этап 1 -- построение *области допустимых решений*; этап 2 -- построение в допустимой области *оптимального решения* в угловых точках.

Если оптимальное решение существует, то возможен один из трех исходов: а) оптимальное решение единственное и совпадает с одной из вершин области (угловая точка); б) оптимальные решения соответствуют всем точкам отрезка, соединяющего две вершины области (две угловые точки); в) оптимальные решения соответствуют всем точкам допустимого луча, исходящего из вершины области

Литература:

[3, 4, 7, 10]

Контрольные вопросы

1. Как построить математическую модель задачи линейного программирования?
2. Какая система называется системой ограничений в линейном программировании?
3. Как получить целевую функцию при постановке задачи ЛП?
4. Чем отличается каноническая от математической записи задачи ЛП?
5. Как построить область допустимых решений?
6. По какой схеме будете выбирать оптимальное решение при решении задачи ЛП графическим способом?

Тема 2.3 ***Симплекс – метод решения задач линейного программирования.***

Перечень изучаемых вопросов

Допустимое базисное решение. Дополнительные переменные. Оптимальное опорное решение. Критерий оптимальности

Методические указания к изучению

Материал данной темы непосредственно связан с предшествующей темой, где указана постановка задачи линейного программирования. Симплекс-метод позволяет эффективно найти оптимальное решение, избегая простой перебор всех возможных угловых точек. Существуют рациональные способы последовательного перебора допустимых базисных решений, которые позволяют рассматривать не все допустимые базисные решения, а их минимальное число.

Основной принцип метода: вычисления начинаются с какого-то «стартового» базисного решения, а затем ведется поиск решений, «улучшающих» значение целевой функции. Это возможно только в том случае, если возрастание какой-то переменной приведет к увеличению значения целевой функции. Необходимые условия для применения симплекс-метода - задача должна иметь каноническую форму.

Алгоритм решения задачи линейного программирования симплекс методом следующий.

– Свести поставленную задачу к канонической форме путём переноса свободных членов в правую часть и ввода дополнительных переменных. В случае отрицательных переменных неравенство умножается на -1.
– Если в записи используется знак «меньше или равно», новая переменная используется положительная, в противном случае — отрицательная.
– В зависимости от количества вводимых значений все переменные принимаются за основные. Их необходимо выразить через неосновные и перейти к базовому решению.
– Через неосновные переменные выражается целевая функция.
– Если при решении отыскивается ответ с максимумом или минимумом линейной формы и все неосновные переменные получаются только положительными, то задача считается выполненной.
– Если найденный максимум (минимум) линейной формы в целевой функции имеет одну или несколько неосновных переменных с отрицательными коэффициентами, необходимо перейти к новому базисному решению.
– Из переменных, входящих в форму с отрицательными или положительными коэффициентами, выбирается наибольшая (по модулю) и переводится в основные.

Другими словами, указывается оптимальное опорное решение, способ перехода от одного нахождения ответа к другому, варианты улучшения расчётов. После нахождения первоначального решения с «единичным базисом» вычисляется оценка разложения векторов по базису и заполняется для удобства вычислений и наглядности симплексная таблица. При заполнении симплексной таблицы вводим векторы для дополнительных переменных, у которых только одна координата ненулевая и равная 1, а остальные равны 0.

Базис:	x_1	x_2	...	x_n	
x_n	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
x_{n-1}	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...
x_{n-2}	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
Z	c_1	c_2	...	c_n	0

Таблица 4. Симплексная таблица

Процесс нахождения оптимального решения задачи линейного программирования с помощью симплексной таблицы достаточно трудоёмкий, поэтому рекомендуется использовать для нахождения оптимального плана при решении задач ЛП компьютерную программу Mathcad.

Литература:

[3,4,7,10]

Контрольные вопросы:

1. Какое решение называется допустимым базисным решением?
2. Что такое дополнительные переменные?
3. Как выявить оптимальное опорное решение?
4. Сформулируйте критерий оптимальности при решении задачи ЛП симплексным методом.

Тема 2.4 ***Транспортная задача. Решение задач ТЗ в Mathcad и Excel***

Перечень изучаемых вопросов.

Транспортная задача (ТЗ). Математическая формулировка задачи. Критерий стоимости. Минимум затрат на перевозку. Критерий времени. Минимум времени. Методы решения.

Методические указания к изучению

Транспортная задача (классическая) — задача об оптимальном плане перевозок однородного продукта из однородных пунктов наличия в однородные пункты потребления на однородных транспортных средствах (предопределённом количестве) со статичными данными и линеарном подходе (это основные условия задачи).

Для классической транспортной задачи выделяют два типа задач: *критерий стоимости* (достижение минимума затрат на перевозку) или расстояний и *критерий времени* (затрачивается минимум времени на перевозку).

Под названием транспортная задача, определяется широкий круг задач с единой математической моделью, эти задачи относятся к задачам линейного программирования и могут быть решены *оптимальным методом*. Однако, спец. метод решения транспортной задачи позволяет существенно упростить её решение, поскольку транспортная задача разрабатывалась для минимизации стоимости перевозок.

Математическая формулировка транспортной задачи. Однородный груз сосредоточен у m поставщиков в объемах $a_1, a_2, \dots a_m$. Данный груз необходимо доставить n потребителям в объемах $b_1, b_2, \dots b_n$. Пусть c_{ij} – стоимость перевозки груза от поставщика i до потребителя j. Требуется составить такой план перевозок, который позволял бы полностью вывезти продукты всех производителей, полностью обеспечивающий потребности всех потребителей и дающий минимум суммарных затрат на перевозку. Обозначим как x_{ij} – объёмы перевозок от поставщика i до потребителя j.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

Методы решения. Классическую транспортную задачу можно решить *симплекс-методом*, но в силу ряда особенностей её можно решить проще (для задач малой размерности). Условия задачи располагают в таблице, вписывая в ячейки количество перевозимого груза из A_i в B_j, а в маленькие клетки — соответствующие тарифы

Требуется определить *опорный план* и путём последовательных операций найти оптимальное решение. Опорный план можно найти следующими методами.

1. *Метод «северо-западного угла»* (диагональный или улучшенный)

На каждом этапе максимально возможным числом заполняют левую верхнюю клетку оставшейся части таблицы. Заполнение таким образом, что полностью выносится груз из A_i в B_j или полностью удовлетворяется потребность.

2. *Метод «наименьшего элемента»*

Суть этого метода заключается в сведении к минимуму побочных перераспределений товаров между потребителями. После нахождения опорного плана перевозок, нужно применить один из алгоритмов его улучшения, приближения к оптимальному.

3. *Метод потенциалов*

Метод потенциалов является модификацией симплекс-метода решения задачи линейного программирования применительно к транспортной задаче. Он позволяет, отправляясь от некоторого допустимого решения, получить оптимальное решение за конечное число итераций.

При решении несбалансированной транспортной задачи (ТЗ открытого типа) применяют приём, позволяющий сделать её сбалансированной (ТЗ закрытого типа). Для этого вводят *фиктивные пункты назначения или отправления*. Выполнение баланса транспортной задачи необходимо для того, чтобы иметь возможность применить алгоритм решения, построенный на использовании транспортных таблиц.

Литература

[3, 4, 5]

Контрольные вопросы

1. Какая задача называется транспортная задачей?
2. Как записать формулировку транспортной задачи.
3. Запишите критерий стоимости.
4. Как определить минимум затрат и времени на перевозку?
5. Какие методы решения транспортной задачи Вы знаете?

Тема 2.5 ***Сетевое планирование в решении производственных задач***

Перечень изучаемых вопросов.

Сетевое планирование. Методы сетевого планирования. Детерминированные сетевые методы. Вероятностные сетевые методы. Работа, событие и путь в сетевом планировании. Метод критического пути (МКП). Метод Монте-Карло (ММК)

Методические указания к изучению

Сетевое планирование — метод анализа сроков (ранних и поздних) начала и окончания нереализованных частей проекта, позволяет увязать выполнение различных работ и процессов во времени, получив прогноз общей продолжительности реализации всего проекта.

Методы сетевого планирования.

1. Детерминированные сетевые методы
   - Диаграмма Ганта с дополнительным временным люфтом 10-20 %
   - Метод критического пути (МКП)
2. Вероятностные сетевые методы
   - Неальтернативные
     - Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло)
     - Метод оценки и пересмотра планов (ПЕРТ, PERT)
   - Альтернативные
     - Метод графической оценки и анализа (GERT)

Методы сетевого планирования могут широко и успешно применяются для оптимизации планирования и управления сложными разветвленными комплексами работ, которые требуют участия большого числа исполнителей и затрат ограниченных ресурсов.

Задача сетевого планирования состоит в том, чтобы графически, наглядно и системно отобразить и оптимизировать последовательность и взаимозависимость работ, действий или мероприятий, обеспечивающих своевременное и планомерное достижение конечных целей.

Для отображения и алгоритмизации тех или иных действий или ситуаций используются экономико-математические модели, которые принято называть сетевыми моделями, простейшие из них - сетевые графики. С помощью сетевой модели руководитель работ или операции имеет возможность системно и масштабно представлять весь ход работ или оперативных мероприятий, управлять процессом их осуществления, а также маневрировать ресурсами.

Итак, сетевое планирование – это метод управления, который основывается на использовании математического аппарата теории графов и системного подхода для отображения и алгоритмизации комплексов взаимосвязанных работ, действий или мероприятий для достижения четко поставленной цели.

Следует выделить следующие понятия, необходимые для сетевого планирования.

Работа – производственный процесс, требующий затрат времени и материальных ресурсов и приводящий к достижению определенных результатов.

По своей физической природе работы можно рассматривать как действие, (например, заливка фундамента бетоном, составление заявки на материалы, изучение конъюнктуры рынка), процесс (пример - старение отливок, выдерживание вина, травление плат) и ожидание (процесс, требующий только затраты времени и не потребляющий никаких ресурсов.

По количеству затрачиваемого времени работа может быть:

– *действительной,* то есть протяжённым во времени процессом, требующим затрат ресурсов;

– *фиктивной*, не требующей затрат времени и, представляющей связь между какими-либо работами.

Событие — это факт окончания одной или нескольких работ, необходимых и достаточных для начала следующих работ. События устанавливают технологическую и организационную последовательность работ. События ограничивают рассматриваемую работу и по отношению к ней могут быть начальными и завершающими. *Начальное событие* определяет начало работы и является конечным для предшествующих работ. *Завершающее событие* – событие, которое не имеет последующих работ в

Путь - это любая последовательность работ в сети, в которой конечное событие каждой работы этой последовательности совпадает с начальным событием следующей за ней работы. Путь от исходного до завершающего события называется полным. Продолжительность пути определяется суммой продолжительностей составляющих его работ. Путь, имеющий максимальную длину, называют *критическим*.

При построении и кодировании событий сетевого графика необходимо соблюдать ряд правил, которые рассматриваются в полном объёме во время проведения аудиторных занятий.

Существуют различные методы сетевого планирования. Модели, в которых взаимная последовательность и продолжительности работ заданы однозначно, называются *детерминированными сетевыми моделями*. К наиболее популярным детерминированным моделям относятся метод построения диаграмм Ганта и *метод критического пути* (CPM).

Если продолжительность некоторых работ заранее нельзя задать однозначно, то используются вероятностные модели, которые делятся на два типа: *не альтернативные*, когда зафиксирована последовательность выполнения работ, а продолжительность всех или некоторых работ характеризуется функциями распределения вероятности; *альтернативны*е, когда продолжительности всех или некоторых работ и связи между работами носят вероятностный характер.

Метод критического пути (МКП) позволяет рассчитать возможные календарные графики выполнения комплекса работ на основе описанной логической структуры сети и оценок продолжительности выполнения каждой работы, определить критический путь для проекта в целом.

В основе метода лежит определение наиболее длительной последовательности задач от начала проекта до его окончания с учетом их взаимосвязи. Задачи, лежащие на критическом пути, имеют нулевой резерв времени выполнения и в случае изменения их длительности изменяются сроки всего проекта. В связи с этим при выполнении проекта, критические задачи требуют более тщательного контроля, в частности, своевременного выявления проблем и рисков, влияющих на сроки их выполнения и, следовательно, на сроки выполнения проекта в целом.

Метод критического пути исходит из того, что длительность операций можно оценить с достаточно высокой степенью точности и определенности. Основным достоинством метода критического пути является возможность манипулирования сроками выполнения задач, не лежащих на критическом пути. Таким образом, критический путь – это последовательность операций, не имеющих резерва.

Метод Монте-Карло (ММК) — общее название группы численных методов, основанных на получении большого числа реализаций стохастического (случайного) процесса, который формируется таким образом, чтобы его вероятностные характеристики совпадали с аналогичными величинами решаемой задачи.

Суть данного метода состоит в том, что результат испытания зависит от значения некоторой случайной величины, распределенной по заданному закону. Поэтому результат каждого отдельного испытания также носит случайный характер. Проведя серию испытаний, получают множество частных значений наблюдаемой характеристики (выборку). Полученные статистические данные обрабатываются и представляются в виде численных оценок интересующих исследователя величин (характеристик системы). Важной особенностью данного метода является то, что его реализация практически невозможна без использования компьютера.

Итак, в настоящее время сетевое планирование играет большую роль. Методы сетевого планирования могут широко и успешно применяются для оптимизации планирования и управления сложными разветвленными комплексами работ, которые требуют участия большого числа исполнителей и затрат ограниченных ресурсов.

Литература

[5, 7, 8, 10]

Контрольные вопросы.

1. Какие методы сетевого планирования называются детерминированными?

2. Какие методы сетевого планирования называются вероятностными?

3. Дайте понятия работы, события и пути в сетевом планировании.

4. В чем суть метода критического пути?

5. В чем суть метода Монте-Карло?

Раздел 3. Интерполяция и численные методы

Тема 3.1 *Интерполирование. Полиномы Лагранжа и Ньютона*

Перечень изучаемых вопросов.

Интерполирование. Интерполяционный полином. Глобальная и локальная интерполяция. Многочлен Лагранжа. Узлы интерполяции. Многочлен Ньютона с разделенными разностями.

Методические указания к изучению

При освоении вопросов интерполирования требуется знания численных методов. Численные методы представляют собой весьма разнообразный математический аппарат, содержащий ряд определений, понятий, алгоритмов и теорем. Следует знать, что освоить численные методы невозможно без самостоятельного решения задач.

В численных методах одним из основных вопросов является оценка погрешности. Поэтому рекомендуем обратить особое внимание на соответствующие теоремы по оценкам погрешности для различных интерполяционных методов, теории наилучших приближений в функциональных пространствах, а также оценки погрешности основных квадратурных формул.

Пусть функция f(x) задана набором точек (x_i, y_i) на интервале $[a, b]$: $y_i = f(x_i)$, *i=1,2,…,n;* $a \leq x_i \leq b$. Задача интерполяции – найти функцию F(x), принимающую в точках x_i те же значения y_i. Тогда, условие интерполяции запишется так $F(x_i) = y_i$. При этом предполагается, что среди значений x_i нет одинаковых. Абсциссы точек x_i называют *узлами интерполяции*. Если *F(x)* ищется только на отрезке $[a, b]$– то это задача интерполяции, а если за пределами первоначального отрезка, то это задача *экстраполяции*.

Задача нахождения интерполяционной функции F(x) имеет много решений, так как через заданные точки (x_i, y_i) можно провести бесконечно много кривых, каждая из которых будет графиком функции, для которой выполнены все условия интерполяции. Для практики важен случай интерполяции функции многочленами

$F(x) = P_m(x_i) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_m \cdot x^m$, где $i = 0,1,\ldots,m$.

При этом искомый полином называется *интерполяционным полиномом*.

Если функция $f(x)$ интерполируется на отрезке $[a,b]$ с помощью единого многочлена $P_m(x)$ для всего отрезка, то такую интерполяцию называют *глобальной*. В случае *локальной интерполяции* на каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$ строится отдельный интерполяционный полином невысокой степени.

При глобальной интерполяции на всем интервале $[a,b]$ строится единый многочлен. Одной из форм записи интерполяционного многочлена для глобальной интерполяции является многочлен Лагранжа. $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x)$, где $l_i(x)$ – базисные многочлены степени n. Такие, что

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

Погрешность интерполяции методом Лагранжа зависит от свойств функции $f(x)$, от расположения узлов интерполяции и точки x. Полином Лагранжа имеет малую погрешность при небольших значениях *n* $(n<20)$. При больших *n* погрешность начинает расти.

Другая форма записи интерполяционного многочлена – интерполяционный *многочлен Ньютона* с разделенными разностями.

Пусть функция $f(x)$ задана с произвольным шагом, и точки таблицы значений пронумерованы в произвольном порядке. Тогда, используя понятие разделенной разности, интерполяционный многочлен Ньютона можно записать в следующем виде:

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)\cdot(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)\cdot(x - x_0)\cdot(x - x_1) + \ldots +$$
$$+ f(x_0, x_1, \ldots, x_n)\cdot(x - x_0)\cdot(x - x_1)\ldots\cdot(x - x_{n-1})$$

Литература.

[1,5-8,10]

Вопросы по теме.

1. В чем отличие между интерполяционными формулами Ньютона и Лагранжа?
2. Что такое интерполяция Ньютона?
3. Зачем нужен интерполяционный полином Лагранжа?
4. Когда удобно использовать интерполяционный многочлен Лагранжа?
5. Какой метод интерполяции лучше?
6. В чем суть метода Лагранжа?

Тема 3.2 ***Итерационные методы решения уравнений и систем уравнений. Использование Excel и Mathcad***

Перечень изучаемых вопросов.

Итерационные методы. Начальное приближение. Итерация. Сходимость метода.

Методические указания к изучению

При изучении материала этой темы следует обратить внимание на приобретении навыков решения задач в средах Excel и Mathcad. *Итерационный метод* или метод простой итерации — численный метод решения уравнений и систем линейных алгебраических уравнений. Суть метода заключается в нахождении по приближённому значению величины следующего приближения, являющегося более точным.

Метод позволяет получить значения корней уравнения или решение системы с заданной точностью в виде предела последовательности некоторых векторов (в результате итерационного процесса). Характер *сходимости* и сам факт сходимости метода зависит от выбора начального приближения корня.

Электронные таблицы Excel и математическая программа Mathcad задумывались разработчиками как средства работы на компьютере пользователей, не желавших или не умевших использовать традиционные языки программирования при выполнении сложных научно-технических и инженерных расчетов.

Вычислительные задачи, возникающие при выполнении этих расчетов, можно разбить на ряд элементарных математических задач, таких как исследование функций, решение *алгебраических уравнений* и *систем уравнений*, обработка экспериментальных данных и т. д.

Технология работы в средах Excel и Mathcad имеет много общего. В обеих программах на экране дисплея перед глазами пользователя имеется рабочее окно, на котором с помощью клавиатуры, мыши и панелей инструментов пишутся математические выражения, тут же происходит их вычисление и, при необходимости, отладка и оптимизация. Такая открытость алгоритма (совмещение на одном листе комментариев, формул, результатов расчетов и их графической интерпретации) особенно полезна в учебном процессе.

Навыки, приобретенные студентами при отработке задач, понадобятся им в процессе дальнейшего обучения в вузе, а также в профессиональной деятельности инженера – строителя.

Литература.

[1, 5-9, 10]

Вопросы по теме

1. Какие операции можно проводить с помощью Excel и Mathcad?
2. Что такое начальное приближение?
3. Дайте определение итерации.
4. В чём заключается сходимость метода?

Тема 3.3 ***Приближенное решение дифференциальных уравнений. Метод Рунге-Кутта***

Перечень изучаемых вопросов. Дифференциальное уравнение порядка n. Решение задачи Коши ДУ. Ломаная Эйлера. Метод Эйлера. Метод Рунге – Кутта. Метод Эйлера.

Методические указания к изучению

При решении научных и инженерно-технических задач часто бывает необходимо математически описать какую-либо динамическую систему. Лучше всего это делать в виде дифференциальных уравнений (ДУ) или системы дифференциальных уравнений. Наиболее часто они такая задача возникает при решении проблем, связанных с моделированием кинетики химических реакций и различных явлений переноса (тепла, массы, импульса) – теплообмена, перемешивания, сушки, адсорбции, при описании движения макро- и микрочастиц.

Дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение вида

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$ Именно такая форма записи принята в качестве стандартной при рассмотрении численных методов решения ОДУ

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}).$$

Решение $y = \varphi(x)$ удовлетворяет начальным условиям $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$, если $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_0'$, ... , $\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. Нахождение решения уравнения

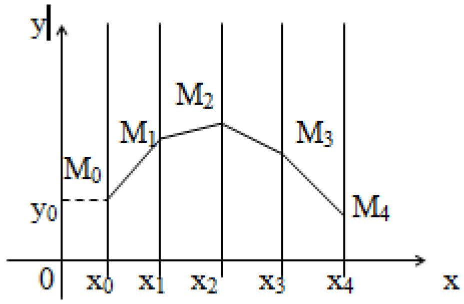
$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$, называется *решением задачи Коши.*

Известные методы точного интегрирования дифференциальных уравнений позволяют найти решение в виде аналитической функции, однако эти методы применимы для очень ограниченного класса функций. Большинство уравнений, встречающихся при решении практических задач нельзя проинтегрировать с помощью этих методов.

Существует несколько методов численного интегрирования дифференциальных уравнений, которые отличаются друг от друга по сложности вычислений и точности результата. Рассмотрим некоторые численные методы решения задачи Коши обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Метод Эйлера. Суть метода Эйлера в самой примитивной его форме сводится к тому, что мы берем начальную точку, вычисляем в ней значение производной, находя, таким образом, тангенс угла наклона. Затем находим уравнение прямой с таким тангенсом угла наклона и, проходящей через нашу начальную точку.

Если взять последовательность точек x_0, x_1, x_2, ... и заменить на получившихся отрезках интегральную кривую на отрезки касательных к ней, то получим ломаную линию.



При подстановке заданных начальных условий (x_0, y_0) в дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ получаем *угловой коэффициент касательной* к интегральной кривой в начальной точке

$$tg\alpha_0 = y' = f(x_0, y_0).$$

Заменив на отрезке [x_0, x_1] интегральную кривую на касательную к ней, получим значение $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$. Далее проводим аналогичную операцию для отрезка [x_1, x_2], в результате которой получаем $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1)$.

Продолжая подобные действия далее, получаем ломаную кривую, которая называется *ломаной Эйлера*. Тогда можно записать общую формулу вычислений

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Если последовательность точек x_i выбрать так, чтобы они отстояли друг от друга на одинаковое расстояние h, называемое *шагом вычисления*, то получаем формулу $y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h$

Следует отметить, что точность метода Эйлера относительно невысока. Увеличить точность можно, конечно, уменьшив шаг вычислений, однако, это приведет к усложнению расчетов. Поэтому на практике применяется так называемый *уточненный метод Эйлера или формула пересчета.*

Метод Рунге – Кутта. Метод Рунге – Кутта является более точным по сравнению с методом Эйлера. Суть уточнения состоит в том, что искомое решение представляется в виде разложения в ряд Тейлора $y_{i+1} = y_i + y_i'h + y_i''\frac{h^2}{2!} + y_i'''\frac{h^3}{3!} + y_i^{IV}\frac{h^4}{4!} + ...$

Если в этой формуле ограничиться двумя первыми слагаемыми, то получим формулу метода Эйлера. Метод Рунге – Кутта учитывает четыре первых члена разложения.

$$y_{i+1} = y_i + y_i'h + y_i''\frac{h^2}{2!} + y_i'''\frac{h^3}{3!} = y_i + \Delta y_i \,.$$

В методе Рунге – Кутты приращения Δy_i предлагается вычислять по формуле $\Delta y_i = \frac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right)$, где коэффициенты k_i вычисляются по формулам $k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i)$; $k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right)$; $k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right)$; $k_4^{(i)} = hf\left(x_i + h; y_i + k_3^{(i)}\right)$;

К классу методов Рунге — Кутты относятся явный метод Эйлера и модифицированный *метод Эйлера с пересчётом*, которые представляют собой соответственно методы первого и второго порядка точности. Существуют стандартные явные методы третьего порядка точности, не получившие широкого распространения. Наиболее часто используется и реализован в различных математических пакетах (Maple, MathCAD, Maxima) классический метод Рунге — Кутты, имеющий четвёртый порядок точности.

Краевая задача. В этом случае известны значения функции и (или) ее производных в более чем одной точке, например, в начальный и конечный момент времени, и необходимо найти частное решение дифференциального уравнения между этими точками. Сами дополнительные условия в этом случае называются *краевыми* (граничными) условиями. Естественно, что краевая задача может решаться для ОДУ не ниже 2-го порядка.

Литература.

[1, 6-8]

Контрольные вопросы:

1. Какие есть численные методы?

2. Какой метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет получить более точный результат?
3. В чем заключается суть метода Эйлера?
4. Чем отличается метод Эйлера от метода Рунге Кутта?
5. В чем заключается метод Рунге Кутты?
6. Какой порядок точности имеет метод Рунге Кутта?

Перечень основной и дополнительной литературы

Основная литература

1. Карнаухова, О. А. Прикладные задачи в математике: учебное пособие / О. А. Карнаухова, В. А. Шершнева, Т. О. Кочеткова. — 2-е изд., испр. и доп. — Красноярск: СФУ, 2020. — 216 с. — Режим доступа: для авториз. пользователей. —Лань: электроннобиблиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/181564 (дата обращения: 01.02.2023). — ISBN 978-5-7638-4204-3. — Текст: электронный.

2. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие/В.Е.Гмурман. - М.: Высш. шк., 2002. – 406 с.

3. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 1986.

4. Вентцель Е.С. Исследование операций. М, Советское радио, 1972.

Дополнительная литература

5. Розов, А. К. Оптимальные статистические решения / А. К. Розов. - Изд. 2-е, перераб. и доп. - Санкт-Петербург: Политехника, 2016. - 261, [1] с. – ISBN 978-5-7325-1075-1. - Текст: непосредственный.

6. Ермакова, Т. В. Численные методы: учеб. пособие / Т. В. Ермакова, В. В. Серебряков; ФГБОУ ВПО "КГТУ". - Калининград: КГТУ, 2012. - 143 с. - Текст: непосредственный.

7. Мухина, С. Н. Компьютерная математика на базе MATHCAD: учеб. пособие для студ., обуч. по напр. 080100 "Экономика" по проф. "Коммерция" и "Экономика предприятий" / С. Н. Мухина; Федер. агентство по рыболовству, Калинингр. гос. техн. ун-т, Балт. гос. акад. рыбопромыслового флота. - Калининград: БГАРФ, 2014. - 138 с. - Текст: непосредственный

Учебно-методические пособия, нормативная литература

8. Наумов, В. А. Математическое моделирование: учеб.-метод. пособие по лабораторным работам в среде Mathcad для студентов вузов, обучающихся в

бакалавриате по направлению подгот. "Природообустройство и водопользование" / В. А. Наумов; Калинингр. гос. техн. ун-т. - Калининград: КГТУ, 2015. - 72 с. - Текст: непосредственный.

9. Гайдюков, А. А. Информатика. Информационные технологии: Решение математических задач в Excel: учеб.-метод. пособие для студентов высш. учеб. заведений для техн. специальностей / А. А. Гайдюков; Калинингр. гос. техн. ун-т. - Калининград: КГТУ, 2010. - 33 с. - Текст: непосредственный.

10. Пахнутов, И. А. Методы математического моделирования: [учеб.-метод. пособие] / И. А. Пахнутов; Калинингр. гос. техн. ун-т. - 2-е изд., перераб. и доп. - Калининград: КГТУ, 2009. - 86 с. - Текст: непосредственный.

Локальный электронный методический материал

Людмила Георгиевна Белякова

Прикладная математика

Редактор И. Голубева

Локальное электронное издание
Уч.-изд. л. 2,8. Печ. л. 2,3.

Издательство федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Калининградский государственный технический университет».
236022, Калининград, Советский проспект,1