Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

С. Н. Мухина

ТЕОРИЯ ИГР И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины
для студентов магистратуры по направлению подготовки
09.04.01 – Информатика и вычислительная техника

Калининград
Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ»
2023

УДК 519.83

Рецензент:
кандидат физико-математических наук, исполняющий обязанности заведующего кафедрой прикладной математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет»
А. И. Руденко

Мухина, С. Н.

Теория игр и методы оптимизации : учебно-методическое пособие по изучению дисциплины для студентов магистратуры по направлению подготовки 09.04.01 – Информатика и вычислительная техника / С. Н. Мухина. – Калининград : Изд-во ФГБОУ ВО «КГТУ», 2023. – 60 с.

Учебно-методическое пособие является руководством по изучению дисциплины «Теория игр и методы оптимизации» для студентов магистратуры по направлению подготовки 09.04.01 – Информатика и вычислительная техника. Содержит характеристику дисциплины (цель и планируемые результаты изучения дисциплины, место дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы), тематический план с описанием для каждой темы форм проведения занятия, вопросов для изучения, методических материалов к занятию.

Рис. 21, табл. 9, список лит. – 8 наименований

Учебно-методическое пособие рассмотрено и одобрено в качестве локального электронного методического материала на заседании кафедры прикладной математики и информационных технологий Института цифровых технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» 29.12.2022, протокол № 13.

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины рекомендовано к использованию в учебном процессе в качестве локального электронного методического материала методической комиссией Института цифровых технологий 05.07.2023, протокол № 8.

УДК 519.83

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие по учебной дисциплине «Теория игр и методы оптимизации» представляет комплекс систематизированных учебных методических материалов и предназначено для научно-методического обеспечения профессиональной подготовки студентов магистратуры по направлению подготовки 09.04.01 – Информатика и вычислительная техника, изучающих дисциплину во втором семестре.

Цель создания пособия – обеспечить качественное методическое оснащение учебного процесса изучения дисциплины. Учебно-методическое пособие способствует успешному осуществлению учебной деятельности, эффективному усвоению учебного материала, позволяет организовать систему управления самостоятельной работой студентов, мотивирует к более глубокому изучению дисциплины.

Дисциплина «Теория игр и методы оптимизации» относится к математическому блоку основной профессиональной образовательной программы магистратуры высшего образования 09.04.01 – Информатика и вычислительная техника.

Теория игр – основной математический инструмент современных исследований, а также освоения сопутствующих дисциплин: теории вероятности, методов оптимизации и анализа данных. Во время обучения магистранты смогут развить свое стратегическое мышление и научатся принимать более взвешенные и обоснованные решения. Целью освоения дисциплины является: знакомство с основными понятиями теории оптимизации и теории игр, развитие навыков построения оптимизационных и теоретико-игровых моделей, овладение основными алгоритмами оптимизации.

Общими задачами преподавания системы математических дисциплин для студентов, отражающимися в ее содержании, являются: развитие интеллектуальных и творческих способностей, познавательных процессов; формирование элементов соответствующих компетенций; формирование у студента личностного знания о роли математики как части общечеловеческой культуры, как универсального языка науки.

После изучения дисциплины студент должен:

знать: основные понятия теории оптимизации и теории игр.

уметь: строить и анализировать математические модели практических оптимизационных и теоретико-игровых задач.

владеть: навыками применения основных алгоритмов оптимизации.

Место дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы

Дисциплина «Теория игр и методы оптимизации» относится к математическому блоку основной профессиональной образовательной программы магистратуры высшего образования 09.04.01 – Информатика и вычислительная техника.

Магистратура ориентирована на выпускников вузов, имеющих дипломы бакалавра или специалиста, желающих продолжить свое образование в сфере вычислительной техники и информатики. Основная образовательная программа магистратуры готовит студентов для карьеры в производственном секторе, управлении, науке и образовании.

В рамках дисциплины студенты изучают модели и методы математического программирования, теории игр, теории очередей, систем планирования и управления, также использование компьютерных технологий.

Основными видами аудиторных учебных занятий по дисциплине являются лекции, практические и лабораторные занятия.

Формирование знаний обучающихся обеспечивается проведением лекционных занятий.

Изучение разделов тематического плана сопровождается практическими и лабораторными занятиями, в ходе которых происходит закрепление теоретических знаний, формирование и совершенствование умений, навыков и компетенций.

Особое значение придается самостоятельной работе магистрантов. Самостоятельная работа – форма организации образовательного процесса, стимулирующая активность, самостоятельность, познавательный интерес магистрантов. Подготовленность магистранта к самостоятельной деятельности определяет его успешность и результативность в научно-исследовательской и профессиональной работе.

Контроль знаний в ходе изучения дисциплины осуществляется в виде текущего контроля, а также промежуточной аттестации в форме экзамена во втором учебном семестре в соответствии с рабочим планом.

1 ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

1.1 Тематический план для студентов очной формы обучения

Таблица 1 – Трудоемкость освоения дисциплины в четвертом семестре по очной форме

№ п/п	Раздел (модуль) дисциплины	Контактная работа с преподавателем					СРС	Подготовка и аттестация в период сессии
		ЛК	ЛР	ПР	РЭ	КА		
1	Математическое программирование	6	4	2	1	0,25	15	
2	Теория игр	16	6	6	1	1	35	
3	Сетевое планирование и управление	4	2	4	1	0,5	15	
4	Системы массового обслуживания	4	2	4	1	0,5	15	
ИТОГО:		**30**	**14**	**16**	**4**	**2,25**	**80**	**33,75**
Всего		**180**						

1.2 Тематический план для студентов заочной формы обучения

Таблица 2 – Трудоемкость освоения дисциплины в четвертом семестре по очной форме

№ п/п	Раздел (модуль) дисциплины	Контактная работа с преподавателем					СРС	Подготовка и аттестация в период сессии
		ЛК	ЛР	ПР	РЭ	КА		
1	Математическое программирование	1	2	0	0,5	0,25	20	
2	Теория игр	3	0	2	0,5	1,5	54,5	
3	Сетевое планирование и управление	1	1	1	0,5	0,25	40	
4	Системы массового обслуживания	1	1	1	0,5	0,75	40	
ИТОГО:		**6**	**4**	**4**	**2**	**2,75**	**154,5**	**6,75**
Всего		**180**						

2 СОДЕРЖАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Структура дисциплины представлена четырьмя тематическими разделами.

2.1 Раздел 1. Математическое программирование

Студенты магистратуры знакомы с содержанием данного раздела. Цель изучения раздела – повторить изученный ранее материал, расширить материал для использования методов линейного программирования к решению задач теории игр, рассмотреть другие разделы математического программирования для решения задач оптимизации.

Перечень изучаемых вопросов

1. Задачи математического и линейного программирования.
2. Методы решения задач линейного программирования.
3. Теория двойственности.
4. Задачи целочисленного, дробно-линейного и нелинейного программирования.

Методические указания

Математическое программирование (МП) – это раздел прикладной математики, который разрабатывает теоретические основы и методы решения экстремальных задач.

Общая задача математического программирования формулируется следующим образом: найти переменные задачи $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые обеспечивают экстремум целевой функции

$$F(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \max\ (\min)$$

и удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{cases} \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1,2, \dots, l, \\ \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le (\ge) 0, \quad i = l+1, \dots m. \end{cases}$$

К математическому программированию относятся следующие задачи:

- ***линейное программирование*** (***ЛП***) – задачи, в которых целевая функция и ограничения задачи являются линейными;
- ***целочисленное программирование*** – задачи, в которых неизвестные переменные могут принимать только целочисленные значения;
- ***дробно-линейное программирование*** (***ДЛП***) – оптимизационные задачи, в которых целевая функция представляет собой отношение двух линейных функций, а ограничения, определяющие область возможных изменений переменных, являются линейными;
- ***нелинейное программирование*** (***НП***) – задачи, в которых целевая функция и (или) ограничения могут быть нелинейными;
- ***динамическое программирование*** (***ДП***) – задачи, в которых процесс решения можно разбить на отдельные этапы;

- ***стохастическое программирование*** изучает задачи, в которых содержатся случайные величины в целевой функции и (или) в ограничениях;

- ***параметрическое программирование*** – в этом разделе рассматриваются задачи, в которых коэффициенты при неизвестных переменных в целевой функции и (или) в ограничениях зависят от некоторых параметров.

Замечание. *Слово «программирование» не имеет прямого отношения к программированию на алгоритмических языках и означает «планирование».*

Линейное программирование
Примеры математических моделей задач линейного программирования и их решение в среде MathCAD

Модель 1. Задача нахождения оптимального плана выпуска продукции

Предприятие производит n видов продукции с использованием m видов ресурсов. Для производства единицы продукции используется строго определенное количество ресурсов того или иного вида. Ресурсы каждого вида на предприятии ограничены. Предприятие получает определенную прибыль от реализации единицы продукции. Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальна.

Математическая модель

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ – число единиц продукции P_j каждого вида, запланированных к производству; b_i $(i = 1..m)$ – запас ресурса S_i; a_{ij} – число единиц ресурса S_i, затрачиваемого на изготовление единицы продукции P_j; c_j – прибыль от реализации единицы продукции P_j.

Необходимо найти такой план $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ выпуска продукции, удовлетворяющий системе $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$

и условию неотрицательности $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0$, при котором функция

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to max$$

принимает максимальное значение.

Пример 1. Для изготовления четырех видов продукции используют три вида ресурсов. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, прибыль, получаемая от единицы продукции каждого вида, приведены ниже. *Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной*.

Запас ресурса	Число единиц ресурсов на изготовление единицы продукции			
	I	II	III	IY
$S_1 = 3400$	2	1	0,5	4
$S_2 = 1200$	1	5	3	1
$S_3 = 3000$	3	-	6	1
Прибыль от единицы продукции	7,5	3	6	12

Решение. Решение в пакете Mathcad приведено на рисунке 1.

Исходные данные: n- количество производимых изделий;
m - количество используемого сырья;
B - вектор имеющихся ресурсов;
A - матрица, каждый элемент которой являяется расходом i-го ресурса на производство единицы изделия j;
C - вектор прибыли от единицы изделия каждого вида.

$n := 4 \qquad m := 3$

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0.5 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3400 \\ 1200 \\ 3000 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 7.5 \\ 3 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ X - начальное приближение $F(X) := C \cdot X$

Given $\quad A \cdot X \le B \quad X \ge 0 \quad P := \mathrm{maximize}(F, X)$

оптимальный план значение прибыли

$P^T = (700 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 500) \qquad F(P) = 1.125 \times 10^4$

$A \cdot P = \begin{pmatrix} 3.4 \times 10^3 \\ 1.2 \times 10^3 \\ 2.6 \times 10^3 \end{pmatrix}$ - количество использованных ресурсов

Рис. 1 – Задача об оптимальной производственной программе

Модель 2. Задача о раскрое материалов

На раскрой (распил, обработку) поступает материал одинакового размера. Его требуется раскроить на заготовки определенного размера в заданном количестве таким образом, чтобы общее количество используемого исходного материала было минимальным или количество отходов было минимальным.

Математическая модель

Математическая модель раскроя строится в два этапа. На первом этапе производится построение вариантов раскроя, в результате которого определяются: количество вариантов n и количество заготовок каждого вида a_{ij}, получаемых при различных вариантах раскроя. Заготовки располагаются в порядке убывания их размеров. Построение вариантов осуществляется методом полного перебора.

На втором этапе производится непосредственное построение модели. Введем обозначения: i – индекс заготовок ($i = 1 \dots m$); j – индекс вариантов раскроя; b_i – необходимое количество заготовок i-го типа; a_{ij} – количество заготовок i-го вида при раскрое единицы исходного материала по варианту j.

Пусть x_j – количество исходного материала, которое необходимо раскроить по варианту j.

$$F(x) = x_1 + x_2 + \dots + x_n \to min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1 \dots n.$$

Пример 2. Фирма выпускает продукцию в виде бумажных рулонов стандартной ширины – по 2 метра. По специальным заказам потребителей фирма может изготовить рулоны и других размеров, для чего производится разрезание стандартных рулонов. Поступили заказы на рулоны нестандартных размеров.

Заказ	Ширина рулона (м)	Количество рулонов
1	0,5	150
2	0,7	200
3	0,9	300

Требуется найти такие сочетания различных вариантов разрезания стандартных рулонов, чтобы поступившие заказы полностью удовлетворить с минимальными потерями (отходами).

Решение. Рассмотрим все возможные варианты раскроя стандартного рулона методом полного перебора.

Ширина рулона (м)	Варианты раскроя рулона						Количество рулонов
		2	3	4	5	6	
0,5	0	2	2	4	1	0	**100**
0,7	1	1	0	0	2	0	**200**
0,9	1	0	1	0	0	2	**300**
Отходы (м)	0,4	0,3	0,1	0	0,1	0,2	-

Пусть x_j $(j = 1 \ldots 6)$ – количество стандартных рулонов, разрезаемых по варианту j. Ограничения связаны с требованием обеспечить изготовление требуемого количества нестандартных рулонов. Используя данные таблицы, получим:

$$\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 100, \\ x_1 + x_2 + 2x_5 = 200, \\ x_1 + x_3 + 2x_6 = 300, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0.$$

Функция цели выражает количество отходов:

$$F(x) = 0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}1x_3 + 0x_4 + 0{,}1x_5 + 0{,}2x_6 \to min.$$

Решение в системе Mathcad приведено на рисунке 2.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$X := (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)^T$ - начальное приближение

$F(X) := C \cdot X$

given $\quad A \cdot X = B \ X \geq 0$

$P := \mathrm{minimize}(F, X)$

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 150 \end{pmatrix} \qquad F(P) = 40$$ - количество отходов (м)

Рис. 2 – Оптимальный раскрой материала
по критерию «минимум отходов»

Как видно из решения примера, оптимальной является следующая программа: 100 рулонов разрезаем, используя 5-й вариант; 150 рулонов – 6-й вариант. Минимальное количество отходов – 40 метров.

Замечание. *Применение математических моделей при раскрое промышленных материалов позволяет экономить до 20 % их объема.*

Модель 3. Задача составления рациона (задача о диете, задача о смесях)

В некотором фермерском хозяйстве производится откорм животных. Для откорма используется n видов кормов, содержащих m видов питательных веществ. Известно содержание питательных веществ (кальций, фосфор и др.) в единице корма каждого вида. Для полноценного питания животных необходимо потребление питательных веществ не меньше заданных количеств. Известна стоимость единицы каждого корма. Необходимо определить рацион, при котором общие затраты на откорм будут минимальными.

Математическая модель

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ – число единиц корма каждого вида; b_i $(i = 1..m)$ – необходимый минимум содержания в рационе питательного вещества S_i; a_{ij} – число единиц питательного вещества S_i в единице корма j-го вида; c_j – стоимость единицы корма j-го вида. Необходимо найти такой рацион $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ \qquad\qquad\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases}$$

и условию $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$,

при котором функция

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to min$$

принимает минимальное значение.

Пример 3. Имеется два вида корма I и II, содержащие питательные вещества (витамины) S_1, S_2, S_3. Содержание числа единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и необходимый минимум питательных веществ, стоимость корма каждого вида приведены ниже. *Необходимо составить дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида питательных веществ было бы не менее установленного предела.*

Необходимый минимум питательных веществ	Число единиц питательных веществ в 1 кг	
	I	II
$S_1 = 9$	3	1
$S_2 = 8$	1	2
$S_3 = 12$	1	6
Стоимость 1 кг	4	6

Решение. Решение в пакете Mathcad приведено на рисунке 3.

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ X - начальное приближение

$F(X) := C \cdot X$ F(X) - функция цели

Given $A \cdot X \ge B \quad X \ge 0$

$OP := \text{minimize}(F, X) \quad OP = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ OP - оптимальный план

$F(OP) = 26$ минимальные затраты

$A \cdot OP = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix}$ количество полученных питательных веществ

Рис. 3 – Расчет оптимального состава дневного рациона

Двойственность в линейном программировании

Каждой задаче ЛП можно сопоставить другую задачу ЛП, называемую двойственной задачей (ДЗ) по отношению к исходной (прямой). Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

$$C = (c_1 \quad \cdots \quad c_n).$$

Исходная задача	*Двойственная задача*
Симметричная пара	
$F(X) = CX \to max,$ $AX \le B,$ $X \ge 0;$	$Z(Y) = B^{т}Y \to min,$ $A^{т}Y \ge C^{т},$ $Y \ge 0.$
Несимметричные пары	
$F(X) = CX \to max,$ $AX = B,$ $X \ge 0;$	$Z(Y) = B^{т}Y \to min,$ $A^{т}Y \ge C^{т},$ $Y -$ произвольного знака.
$F(X) = CX \to min,$ $AX = B,$ $X \ge 0;$	$Z(Y) = B^{т}Y \to max,$ $A^{т}Y \le C^{т},$ $Y -$ произвольного знака.

Правила составления двойственных задач

1. Если целевая функция исходной задачи задается на максимум, то целевая функция ДЗ – на минимум, и наоборот.

2. Во всех ограничениях исходной задачи свободные члены должны находиться в правой части, а члены с неизвестными – в левой. Ограничения-неравенства исходной задачи должны быть записаны так, чтобы знаки неравенств были одного смысла. В задаче на максимум – « $\leq$ », в задаче на минимум – « $\geq$ ».

3. Число переменных в ДЗ равно числу ограничений исходной задачи и наоборот, число ограничений ДЗ равно числу переменных исходной задачи.

4. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции ДЗ являются свободные члены системы ограничений исходной задачи, а свободными членами системы ограничений ДЗ – коэффициенты при неизвестных в целевой функции исходной задачи.

5. Если переменная x_j исходной задачи может принимать только неотрицательные значения, то j-е ограничение в системе ДЗ является неравенством. Если же переменная x_j не ограничена в знаке, т. е. может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то j-е ограничение в системе ДЗ является уравнением. Аналогично если i-е ограничение в системе исходной задачи является неравенством, то i-я переменная ДЗ $y_i \geq 0$. Если же i-е ограничение есть уравнение, то переменная y_i не ограничена в знаке.

6. Матрицы коэффициентов в системах ограничений двойственных задач являются транспонированными (строки одной матрицы служат соответствующими столбцами другой).

Пример 4. Составить задачу, двойственную к данной:

$$F(X) = 3 + 2x_1 + x_2 + 6x_3 \to min,$$
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 7, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

Решение. По правилу составления двойственных задач в задаче на минимум неравенства должны иметь вид « $\geq$ ».

Исходная задача	***Двойственная задача***
$F(X) = 3 + 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to min$	$Z(Y) = 3 + y_1 - 7y_2 + 6y_3 \to max$
$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ -2x_1 - 4x_2 - x_3 \geq -7, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6, \end{cases}$ $x_j \geq 0, j = 1,2,3.$	$\begin{cases} y_1 - 2y_2 - y_3 \leq 2, \\ -3y_1 - 4y_2 + y_3 \leq 1, \\ 2y_1 - y_2 + 3y_3 \leq 5, \end{cases}$ $y_2 \geq 0, y_3 \geq 0,$ $y_1 -$ произвольного знака.

Пример 5. К данной задаче

$$F(X) = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \to max,$$

$$\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \end{cases}$$

$$x_{1,2} \geq 0.$$

составить двойственную, решить прямую и двойственную задачи в системе Mathcad.

Решение. По правилу составления двойственных задач ограничениям-равенствам соответствуют переменные произвольного знака. Решение двойственных задач в MathCAD приведено на рисунке 4.

Исходная задача

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad X := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F(X) := C \cdot X$$

Given

$$A \cdot X = B \qquad X \geq 0 \qquad p := \mathrm{Maximize}(F, X)$$

$$p = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad F(p) = 13.5$$

Двойственная задача

$$Z(Y) := B \cdot Y \qquad Y := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Given $\quad A^T \cdot Y \geq C \qquad p1 := \mathrm{Minimize}(Z, Y)$

$$p1 = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} \qquad Z(p1) = 13.5$$

Рис. 4 – Решение пары двойственных задач

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что значения критериев в прямой и двойственной задачах совпадают. Это основное свойство двойственных задач.

Решение задач целочисленного линейного программирования в MathCAD

Существует огромное количество задач с дискретной природой. Это задачи с физической неделимостью многих факторов и объектов расчета. Например, нельзя построить 4,3 фабрики или купить 1,85 автомобиля.

Дискретными являются задачи с логическими переменными, принимающими только два значения – нуль или единица (т. е. вариант отвергается или принимается). Можно попытаться получить приближенное решение задачи, округляя полученные величины до целых значений. Однако при этом может оказаться, что округленное решение не является планом задачи и существенно отличается от точного решения.

Входящая в библиотеку MathCAD встроенная функция **floor(x)** возвращает наибольшее целое число, меньшее или равное x.

Пример 6. $F(X) = 5x_1 + 7x_2 \to max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 \le 13, \\ 7x_1 + 5x_2 \le 15, \end{cases} \quad x_{1,2} \ge 0.$$

Решение. Решение приведено на рисунке 5.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad X := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F(X) := C \cdot X$$

$$\text{given} \qquad A \cdot X \le B \qquad X \ge 0 \quad P := \text{maximize}(F, X)$$

$$P = \begin{pmatrix} 1.321 \\ 1.151 \end{pmatrix} \quad F(P) = 14.66$$

Решим частично целочисленную задачу

$$\text{Given} \qquad A \cdot X \le B \qquad X \ge 0 \qquad X_1 = \text{floor}(X_1)$$

$$P := \text{maximize}(F, X) \qquad P = \begin{pmatrix} 1.429 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad F(P) = 14.143$$

Найдем полностью целочисленные решения

$$\text{Given} \qquad A \cdot X \le B \qquad X \ge 0 \qquad X_1 = \text{floor}(X_1) \quad X_0 = \text{floor}(X_0)$$

$$P := \text{maximize}(F, X) \qquad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad F(P) = 12$$

Рис. 5 – Решение задачи целочисленного ЛП

Дробно-линейное программирование

Дробно-линейное программирование (ДЛП) рассматривает оптимизационные задачи, в которых целевая функция представляет собой отношение двух линейных функций, а ограничения, определяющие область возможных изменений переменных, являются линейными. Общий вид задачи ДЛП: максимизировать (минимизировать) функцию

$$F(x)=\frac{e_1x_1+e_2x_2+\cdots+e_nx_n}{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}\to\max(\min)$$

при условиях

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i, i=1\ldots m,\\ \quad x_j\ge 0,\quad j=1\ldots n.\end{cases}$$

Пример 7. Дана задача ДЛП $Z(x)=\frac{2x_1-x_2}{x_1+2x_2+1}\to max,$

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=2,\\ 2x_1+x_2+x_4=6,\\ x_j\ge 0,\ \ j=1\ldots 4.\end{cases}$$

Решение. Система Mathcad позволяет решать задачи ДЛП (рисунок 6).

$$Z(x1,x2,x3,x4):=\frac{2\cdot x1-x2}{x1+2x2+1}$$

$x1:=1\ \ x2:=1\,x3:=1\ \ x4:=1$ - начальное приближение

given

$x1-2\cdot x2+x3=2$

$2\cdot x1+x2+x4=6$

$x1\ge 0\ x2\ge 0\ \ x3\ge 0\ \ x4\ge 0$

$X:=\mathrm{maximize}(Z,x1,x2,x3,x4)$

$X^T=(2\ \ 0\ \ 0\ \ 2)\quad Z(2,0,0,2)=1.333$

Рис. 6 – Решение задачи ДЛП

Нелинейное программирование

Нелинейные задачи составляют широкий класс задач, для которых не удалось разработать общие методы решения. В зависимости от вида целевой функции и системы ограничений разработаны специальные методы решения, к которым относятся методы множителей Лагранжа, квадратичное и выпуклое программирование, градиентные методы, приближенные методы решения, графический метод.

Определение безусловных и условных экстремумов в задачах математического программирования с помощью MathCAD

Поиск экстремума функции включает в себя задачи нахождения локального и глобального экстремума. В MathCAD с помощью встроенных функций решается только задача поиска ***локального*** экстремума.

Чтобы найти глобальный максимум (или минимум), требуется либо сначала вычислить все их локальные значения и потом выбрать из них наибольшее (наименьшее), либо предварительно **просканировать** с некоторым шагом рассматриваемую область, чтобы выделить из нее подобласть наибольших (наименьших) значений функции и осуществить поиск глобального экстремума, уже находясь в его окрестности.

Пример 8. Рассмотрим функцию $y = x^4 + 5x^3 - 10x$ на отрезке [-5; 2].

Решение. График функции изображен на рисунке 7.

Функция $y = x^4 + 5x^3 - 10x$ имеет глобальный максимум на левой границе интервала, глобальный минимум, локальный максимум, локальный минимум и локальный максимум на правой границе интервала (в порядке слева направо).

$$f(x) := x^4 + 5\cdot x^3 - 10\cdot x$$

$$x := -5, -4.9 .. 2$$

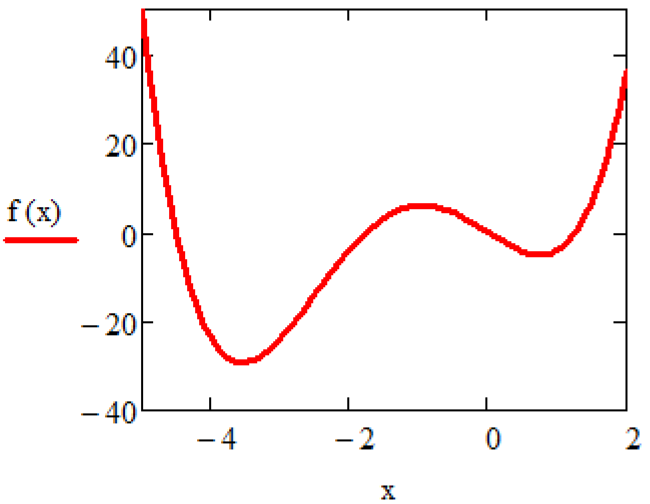

Рис. 7 – График функции на отрезке

Для поиска локальных экстремумов имеются две встроенные функции:

– Minimize (f, x) – вектор значений аргументов, при которых функция f достигает минимума;

– Maximize (f, x) – вектор значений аргументов, при которых функция f достигает максимума.

Здесь $f(x)$ – функция; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – аргументы, по которым производится минимизация (максимизация).

Всем аргументам функции f предварительно следует присвоить некоторые значения, причем для тех переменных, по которым производится минимизация, они будут восприниматься как начальные приближения.

Пример 9. Пример вычисления экстремума функции одной переменной без дополнительных условий показаны на рисунке 8. Поскольку никаких дополнительных условий в них не вводится, поиск экстремумов выполняется для любых значений x от -∞ до +∞.

$f(x) := x^4 + 5 \cdot x^3 - 10 \cdot x$

Минимум функции одной переменной

$x := -1$ Minimize(f ,x) = −3.552 f(−3.552) = −29.371

$x := 1$ Minimize(f ,x) = 0.746 f(0.746) = −5.074

Максимум функции одной переменной

$x := 1$ Maximize(f ,x) = −0.944 f(−0.944) = 6.028

$x := -10$ Maximize(f ,x) =

Рис. 8 – Экстремум функции одной переменной

Как видно из рисунка 8, существенное влияние на результат оказывает выбор начального приближения, в зависимости от чего в качестве ответа выдаются различные точки локального экстремума.

В последнем случае численный метод вообще не справляется с задачей, поскольку начальное приближение $x = -10$ выбрано далеко от области локального максимума и поиск решения уходит в сторону увеличения $f(x)$, т. е. расходится к $f(x) \to +\infty$.

В задачах на условный экстремум функции используется ключевое слово **Given**, после которого с помощью булевых операторов записываются логические выражения (неравенства, уравнения), задающие ограничения на значения аргументов минимизируемой (максимизируемой) функции.

На рисунке 9 показаны примеры поиска условного экстремума на различных интервалах, определенных неравенствами.

Сравним результаты работы на рисунке 9 с предыдущими (рис. 7 и 8).

Выбор правильного начального приближения в случае задач на условный экстремум также необходим.

Например, если вместо условия $-3 < x < 0$ в последнем примере на рис. 6 задать $-5 < x < 0$, то при том же самом начальном $x = -10$ будет найдена точка максимума Maximize (*f, x*) = – 0,944. Это неверно, поскольку максимальное значение достигается функцией *f(x)* на левой границе интервала при $x = -5$.

Выбор начального приближения $x = -4$ решает задачу правильно, выдавая в качестве результата Maximize (*f, x*) = –5.

$$f(x) := x^4 + 5 \cdot x^3 - 10 \cdot x$$

$x := 1$ given $\quad -5 < x < -2$

Minimize(f ,x) = –3.552

$x := 1$ given $\quad x \ge 0$

Minimize(f ,x) = 0.746

$x := -10$ given $\quad -3 < x < 0$

Maximize(f ,x) = –0.944

$x := -10$ given $\quad -5 < x < 0$

Maximize(f ,x) = –0.944

$x := -4$ given $\quad -5 < x < 0$

Maximize(f ,x) = –5

Рис. 9 – Поиск условного экстремума функции

Замечания

1. *Вычисление экстремума функции многих переменных не несет принципиальных особенностей по сравнению с функциями одной переменной.*

2. *Решение задачи нелинейного программирования принципиально не отличается от нахождения решения задачи линейного программирования. Изменится лишь форма записи ограничений в блоке Given.*

По этой теме выполняется лабораторная работа 1 «Модели линейного программирования». Работа выполняется по вариантам в среде Mathcad или в среде Excel.

Контрольные вопросы

1. Предмет и задачи математического программирования. Основные определения.

2. Постановка и различные формы записи задач линейного программирования и их эквивалентность.

3. Двойственная задача линейного программирования и ее построение для задачи линейного программирования в симметрической форме; в канонической форме.

4. Соответствие между переменными взаимодвойственных задач и решение двойственной задачи.

5. Теоремы двойственности и их экономическая интерпретация.

6. Двойственные оценки как мера дефицитности сырья. Теорема об оценках.

7. При каких условиях оптимизационная задача может быть отнесена к классу нелинейных?

8. Приведите пример экономической модели, сводящейся к задаче нелинейного программирования.

9. Перечислите основные трудности, возникающие в процессе решения задачи нелинейного программирования.

10. Сформулируйте постановку задачи целочисленного программирования.

11. Математическая модель задачи целочисленного программирования, ее особенности.

Рекомендуемая литература по разделу

В предлагаемой литературе [3, 4] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу. Задание по вариантам к лабораторной работе 1 выкладывается в ЭИОС.

2.2 Раздел 2. Теория игр

Перечень изучаемых вопросов

1. Основные понятия теории игр. Классификация игр.

2. Матричные игры. Платежная матрица. Верхняя и нижняя цена игры. Решение игр в чистых стратегиях.

3. Решение матричных игр в смешанных стратегиях путем сведения к паре взаимно двойственных задач линейного программирования.

4. Биматричные игры. Равновесия Неша, Парето.

5. Решение игр в условиях неопределенности.

Методические указания

Основные понятия

Матричная игра задается прямоугольной матрицей размерности $m \times n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которая называется ***платежной матрицей***.

Номер *i* строки матрицы соответствует номеру стратегии A_i, применяемой игроком A. Номер *j* столбца соответствует стратегии B_j, применяемой игроком *B*.

Каждый элемент a_{ij} матрицы является действительным числом и представляет собой сумму выигрыша, уплачиваемую игроком *B* игроку *A*, если *A* выбирает стратегию, соответствующую i-й строке, а *B* выбирает стратегию, соответствующую j-му столбцу.

Каждый игрок выбирает для себя наиболее выгодную стратегию. При этом первый игрок стремится выбрать такую стратегию, которая доставляет ему максимальный выигрыш, тогда второй игрок выбирает стратегию, приводящую его к минимальному проигрышу. В этой связи вводят понятия нижней и верхней чистой цены игры.

Нижней чистой ценой игры (максимином) называется число α, определяемое по формуле:

$$\propto = max_i min_j a_{ij}.$$

Верхней чистой ценой игры (минимаксом) называется число β, определяемое по формуле:

$$\beta = min_j max_i a_{ij}.$$

Стратегии игроков, соответствующие максимину (минимаксу), называются ***максиминными (минимаксными)***.

Различают стратегии ***чистые*** и ***смешанные***. Чистая стратегия A_i (i=1,...,m) первого игрока (чистая стратегия B_j (j=1,…,n) второго игрока) – это возможный ход первого (второго) игрока, выбранный им с вероятностью, равной 1.

Если первый игрок имеет *m* стратегий, а второй – *n* стратегий, то для любой пары стратегий первого и второго игроков чистые стратегии можно представить в виде единичных векторов. Например, для пары стратегий *A*1, *B*2 чистые стратегии первого и второго игроков запишутся в виде:

p1= (1; 0;…;0), ***q***2=(0;1;0;…;0).

В матричной игре нижняя чистая цена игры не превосходит верхней чистой цены игры, т. е. $\propto \leq \boldsymbol{\beta}$.

1. Если для чистых стратегий A_i, B_j игроков *A* и *B* соответственно имеет место равенство $\propto = \beta$, то пару чистых стратегий ($A_i, B_j j$) называют ***седловой точкой*** матричной игры, элемент a_{ij} матрицы, стоящий на пересечении i-й

строки и j-го столбца, – ***седловым элементом платежной матрицы***, а число $\nu = \propto = \beta$ – ***чистой ценой игры***.

2. Матричная игра не имеет седловой точки, т. е. $\propto < \beta$, то решение ищется в смешанных стратегиях.

Смешанной стратегией первого игрока называется вектор

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_m),\ p_i \geq 0,\ \sum_i p_i = 1;$$

второго – вектор

$$q = (q_1, q_2, \ldots, q_n), \qquad q_j \geq 0, \qquad \sum_j q_j = 1.$$

Вектор $\boldsymbol{p}$ ($\boldsymbol{q}$) означает вероятность применения i-й чистой стратегии первым игроком (j-й чистой стратегии вторым игроком). Поскольку игроки выбирают свои чистые стратегии случайно и независимо друг от друга, игра имеет случайный характер и случайной становится величина выигрыша (проигрыша). В таком случае средняя величина выигрыша (проигрыша) – математическое ожидание – является функцией смешанных стратегий $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$:

$f(p,q) = \sum_i \sum_j a_{ij} p_i q_j$ – платежная функция игры.

Стратегии $p^* = (p_1^*, \ldots, p_m^*), q^* = (q_1^*, \ldots, q_n^*)$ называются ***оптимальными***, если для произвольных стратегий $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m),\ q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, выполняется условие:

$$f(p, q^*) \leq f(p^*, q^*) \leq f(p^*, q).$$

Использование в игре оптимальных смешанных стратегий обеспечивает первому игроку выигрыш не меньший, чем при использовании им любой другой стратегии $\boldsymbol{p}$, второму игроку – проигрыш, не больший, чем при использовании им любой другой стратегии $\boldsymbol{q}$.

Значение платежной функции при оптимальных стратегиях определяет цену игры ν, т. е. $f(p^*, q^*) = \nu$.

Совокупность оптимальных стратегий и цены игры составляет ***решение игры***.

Стратегия A_l является ***доминирующей*** над стратегией A_i, если все элементы l-й строки не меньше соответствующих элементов i-й строки (стратегия A_i *доминируемая*). Стратегия B_k является ***доминирующей*** над стратегией B_j, если все элементы k-го столбца меньше или равны соответствующим элементам j-го столбца (стратегия B_j *доминируемая*).

Исключение из платежной матрицы доминируемых стратегий (ими игрокам пользоваться заведомо невыгодно) позволяет уменьшить ее размерность, а это упрощает решение игры. Вероятность применения доминируемых стратегий равна нулю.

Матричные игровые задачи

В том случае, когда цели двух конкурирующих сторон являются прямо противоположными, для них можно определить единый критерий: одна из сторон будет заинтересована в увеличении значения этого критерия, а другая – в его уменьшении.

1. Если верхняя и нижняя цены игры совпадают $\propto = \beta = \vartheta$, то игра имеет решение в чистых стратегиях, то есть можно определить стратегии, которые выгодны для обеих сторон.

2. Если $\propto \neq \beta$, то игра решается в смешанных стратегиях. Возможны два случая.

Первый случай. Платежная матрица имеет размерность $2x2$ или путем исключения доминируемых стратегий ее можно упростить до размеров $2x2, 2xm, nx2$. Задача допускает графическое решение.

Второй случай. Платежную матрицу нельзя упростить до указанных размеров. Решение игры ищется путем сведения к паре взаимно двойственных задач ЛП.

Решение матричных игр в смешанных стратегиях путем сведения к паре двойственных задач ЛП

<table>
<tr><th colspan="2">Пусть имеем игру размерности $\boldsymbol{m \times n}$</th></tr>
<tr><td colspan="2">Будем полагать, что все элементы платежной матрицы неотрицательны, т. е. $a_{ij} \geq 0$ (в противном случае ко всем элементам матрицы добавить число $L > 0$; при этом цена игры увеличится на L, а смешанные стратегии не изменятся)</td></tr>
<tr><td>Игрок A</td><td>Игрок B</td></tr>
<tr><td>$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \geq \nu$$</td><td>$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \leq \nu$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Преобразуем эти системы неравенств, разделив обе части на $\nu > 0$, введем новые обозначения</td></tr>
<tr><td>$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \frac{p_i^*}{\nu} \geq 1, \qquad \frac{p_i^*}{\nu} = y_i \geq 0$$</td><td>$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{q_j^*}{\nu} \leq 1, \qquad \frac{q_j^*}{\nu} = x_j \geq 0$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Так как</td></tr>
<tr><td>$$\sum_{i=1}^{m} p_i^* = 1$$</td><td>$$\sum_{j=1}^{n} q_j^* = 1$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">то</td></tr>
<tr><td>$$\sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i^*}{\nu} = \frac{1}{\nu}$$</td><td>$$\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j^*}{\nu} = \frac{1}{\nu}$$</td></tr>
</table>

Игрок *A* стремится максимизировать цену игры (свой выигрыш), то величина $1/_\nu$ будет минимизироваться.	Игрок *B* стремится минимизировать цену игры (свой проигрыш), то величина $1/_\nu$ будет максимизироваться.
Получена пара симметричных взаимно двойственных задач ЛП	
$F = \sum_{i=1}^{m} y_i \to min$ при ограничениях $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq 1,$ $y_i \geq 0.$	$Z = \sum_{j=1}^{n} x_j \to max$ при ограничениях $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1,$ $x_j \geq 0.$
Оптимальные смешанные стратегии находим по формулам	
$p_i^* = y_i \nu, \ \ i = 1 \dots m$	$q_j^* = x_j \nu, \quad j = 1 \dots n$
Цена игры	
$\nu = \dfrac{1}{F_{opt}}$	$\nu = \dfrac{1}{Z_{opt}}$

Пример 10. Игра задана платежной матрицей *A*. Найти решение матричной игры в чистых стратегиях, если оно существует.

Решение. Решение отражено на рисунке 10.

Так как $\alpha = -2 \neq \beta = -1$, то игра неразрешима в чистых стратегиях. Можно только заключить, что цена игры $-2 \leq \nu \leq -1$.

$$\mathrm{ORIGIN} := 1$$

$$A := \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 & -5 & -6 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & -1 & -2 & -2 \\ -7 & -2 & 0 & -5 & -6 \end{pmatrix} \quad A1 := A^T$$

$$m := \mathrm{rows}(A) \quad n := \mathrm{cols}(A)$$

Нижняя цена игры

$$i := 1..m \qquad a_i := \min\left(A1^{\langle i \rangle}\right)$$

$$a = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad \alpha := \max(a) = -2$$

Верхняя цена игры

$$j := 1..n \qquad b_j := \max\left(A^{\langle j \rangle}\right)$$

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \beta := \min(b) = -1$$

$$-2 \leq \nu \leq -1$$

Рис. 10 – Нижняя и верхняя цена игры

Замечание. *Если* $\nu > 0$, *то игра выгодна для игрока A;* $\nu < 0$ *– выгодна для игрока B;* $\nu = 0$ *– игра справедлива, т. е. является одинаково выгодной для обоих участников.*

Пример 11. Найти решение матричной игры (пример 10) в смешанных стратегиях.

Решение. Платежную матрицу, имеющую отрицательные элементы, преобразуем в матрицу с положительными элементами (прибавим ко всем элементам матрицы число $L = 7$). Оптимальные стратегии не изменятся, а цена игры увеличится на 7.

Решение приведено на рисунке 11.

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \\ 9 & 8 & 7 & 8 & 5 \\ 11 & 4 & 9 & 9 & 6 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad c := (1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1)$$

Отыскание оптимальной стратегии первого игрока

$$A1 := A^T \qquad x := a \qquad f(x) := c \cdot x$$

$$\text{Given} \quad A1 \cdot x \ge c^T \quad x \ge 0$$

$$M := \text{minimize}(f, x) \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.071 \\ 0.107 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(M) = 0.179$$

$$\nu 1 := \frac{1}{f(M)} = 5.6$$

$$P := M \cdot \nu 1 \qquad P^T = (0 \;\; 0.4 \;\; 0.6 \;\; 0 \;\; 0)$$

Отыскание оптимальной стратегии второго игрока

$$y := b \qquad z(y) := c \cdot y$$

$$\text{Given} \quad A \cdot y \le c^T \quad y \ge 0$$

$$M1 := \text{maximize}(z, y) \quad M1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.036 \\ 0 \\ 0 \\ 0.143 \end{pmatrix} \quad z(M1) = 0.179$$

$$Q := M1 \cdot \nu 1 \qquad Q^T = (0 \;\; 0.2 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0.8)$$

Цена игры $\nu := \nu 1 - 7 = -1.4$

Рис. 11 – Решение игры в смешанных стратегиях

Игровые методы в теории статистических решений

Для управления производственными процессами необходима информация о состоянии объекта управления в условиях его работы. В случае отсутствия достаточной информации возникает некоторая неопределенность в принятии решения. Причины этого различны: невозможность получения информации к моменту принятия решения; слишком высокие затраты на получение информации; невозможность устранения неопределенности по причинам объективного характера и т. д.

По мере совершенствования средств сбора информации и ее обработки неопределенность в момент принятия управленческих решений будет уменьшаться. Существование неустранимой неопределенности связано со случайным характером многих явлений. Например, случайность спроса на продукцию делает невозможным точное прогнозирование объема ее выпуска. Принятие решения тогда связано с риском. Или, например, прием партии товара для контроля на соответствие стандарту также связан с риском. Неопределенность при контроле может быть устранена в случае контроля всего товара, выпускаемого для реализации. Однако это может оказаться слишком дорогостоящим мероприятием. В целях уменьшения неблагоприятных последствий в каждом конкретном случае следует учитывать степень риска и имеющуюся информацию. И здесь ***лицо, принимающее решение*** (ЛПР), вступает в игровые отношения с некоторым абстрактным лицом, называемым «***природа***», а такие ситуации принято называть ***играми с природой***.

Таким образом, под «природой» понимается ***совокупность неопределенных факторов, влияющих на эффективность принимаемых решений***.

Безразличие природы к результату игры (выигрышу) и возможность получения ЛПР дополнительной информации о ее состоянии отличают игру с природой от обычной игры с двумя сознательными игроками.

Пусть P_j $(j = 1 \dots n)$ – множество стратегий природы; A_i $(i = 1 \dots m)$ – множество стратегий ЛПР. Во взаимоотношениях с природой ЛПР может использовать любые из своих стратегий $A_1 \dots A_m$ в зависимости от состояний P_j природы. При этом он может пользоваться как чистыми, так и смешанными стратегиями. Но игрок P (природа) применяет свои чистые стратегии независимо от того, выгодно это игроку A (ЛПР) или нет, т. е. природа безразлична к своему выигрышу и не стремится воспользоваться промахами игрока A. Поэтому решение игры достаточно находить только для игрока A, так как игрок P не способен воспринимать какие-либо рекомендации и интересоваться результатами решения.

Для i-й стратегии A_i ЛПР и j-го состояния природы P_j имеем некоторое число, обозначающее функцию выигрышей a_{ij}, которая, как правило, является случайной величиной. Предположим, что есть возможность численно оценить величиной a_{ij} эффективность каждой комбинации (A_i, P_j). Тем самым определена ***платежная матрица игры с природой***:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & {}_{mn} \end{pmatrix}.$$

При решении игры с природой наряду с платежной матрицей используется ***матрица рисков***. Элементы r_{ij} матрицы рисков равны разности между максимально возможным выигрышем и тем выигрышем, который ЛПР получит в тех же условиях P_j, применяя стратегию A_i, т. е. $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, где $\beta_j = max_i a_{ij}$.

Оптимальную стратегию ЛПР определяют, используя ряд критериев (таблица 3).

Таблица 3 – Критерии выбора решений

Критерий	**Содержание критерия**	**Правило применения**
Байеса	Известно распределение вероятностей q_j различных состояний P_j природы. Показателем служит либо величина среднего выигрыша, либо величина среднего риска.	За оптимальную принимается та чистая стратегия A_i, при которой: - максимизируется средний выигрыш $\overline{w}_i = \sum_j a_{ij} q_j, \overline{w} = max \overline{w}_i$; - минимизируется средний риск $\overline{r}_i = \sum_j r_{ij} q_j, \overline{r} = min \overline{r}_i$.
Принцип недостаточного основания Лапласа	Одно состояние природы нельзя предпочесть другому. Все состояния природы полагаются равновероятными, т. е. $q_1 = \cdots = q_n = \frac{1}{n}$.	Оптимальной считается стратегия, обеспечивающая максимум среднего выигрыша $\overline{w}_i = \frac{\sum_j a_{ij}}{n}$, $\overline{w} = max \overline{w}_i$.
Максиминный критерий Вальда	Совпадает с критерием выбора максиминной стратегии, позволяющей получать нижнюю чистую цену α в парной игре с нулевой суммой. Это критерий **крайнего пессимизма**, так как ЛПР исходит из предположения, что природа действует против него наилучшим для себя образом.	За оптимальную принимается чистая стратегия, которая в наихудших условиях гарантирует максимальный выигрыш, т. е. $\alpha = maxmin \quad {}_{ij}$.

Критерий минимального риска Сэвиджа	Это – минимаксный критерий в отношении риска. Ориентируют ЛПР на самые неблагоприятные состояния природы.	Оптимальной принимают ту стратегию, при которой величина максимального риска минимизируется в наихудших условиях (достигается минимальный риск из максимально возможных), т. е. $r = minmaxr_{ij}$.
Критерий Гурвица (критерий пессимизма-оптимизма)	Рекомендует рассчитывать на нечто среднее с помощью числа λ – степень оптимизма ($0 \leq \lambda \leq 1$). При $\lambda = 0$ имеем критерий пессимизма Вальда, а при $\lambda = 1$ – критерий крайнего оптимизма (рекомендуется выбирать лучшее из лучшего). В общем случае число λ выбирается из субъективных соображений (опыта, здравого смысла).	За оптимальную чистую стратегию принимается та, для которой выражение $(\lambda \cdot maxa_{ij} + (1-\lambda)mina_{ij})$ принимает максимальное значение.

Пример 12. Объем продаж некоторого товара *V* за рассматриваемый период времени в универмаге колеблется, в зависимости от уровня покупательского спроса, в пределах от 5 до 8 ед. Прибыль универмага от единицы реализованного товара *V* равна 3 ден. ед. Если запаса товара окажется недостаточно для удовлетворения спроса, можно заказать дополнительно некоторое количество товара, что потребует новых затрат на доставку в размере 4 ден. ед. за единицу товара. Если же запасенный товар полностью реализовать не удастся, то расходы на хранение остатка составят 2 ден. ед. за единицу товара. Предполагается, что дополнительно заказанный товар полностью реализуется за тот же рассматриваемый период времени.

Используя игровой подход, высказать рекомендации об оптимальном уровне запаса товара *V* в универмаге, обеспечивающем ему наивысшую эффективность работы с учетом прибыли и возможных дополнительных затрат на заказ и доставку товара, а также хранение остатка. Решение найти в чистых стратегиях: на основе критериев Байеса ($q1$=0,10, $q2$=0,20, $q3$=0,40, $q4$=0,30); Лапласа; Вальда, Сэвиджа, Гурвица (параметр λ Гурвица принять равным 0,65).

Решение. Планирующий орган универмага может принять одно из решений: создать запас товара в 5 ед. (стратегия *A*1); в 6 ед. (стратегия *A*2); в 7 ед. (стратегия *A*3); 8 ед. (стратегия *A*4).

Второй играющей стороной (природой) выступает совокупность объективных внешних условий, определяющая потребительский спрос.

Если для удовлетворения спроса запаса объема продукции товара окажется достаточно в размере 5 ед., это будет означать состояние природы $S1$; в размере 6 ед. – состояние *S*2; в размере 7 ед. – состояние *S*3; в размере 8 ед. – состояние *S*4. Таким образом, имеем: вектор принятия решений $A = (5, 6, 7, 8)$; вектор состояний внешней среды $S = (5, 6, 7, 8)$.

Рассчитаем элементы платежной матрицы по формуле:

$$a_{ij} = \begin{cases} 3S - 4(S - A), \text{если } A \leq S, \\ 3S - 2(A - S), \ \ \text{если } A > S. \end{cases}$$

Платежная матрица примет вид:

Вектор принятия решения	**Вектор состояний внешней среды**			
	$S_1 = 5$	$S_2 = 6$	$S_3 = 7$	$S_4 = 8$
$A_1 = 5$	15	14	13	12
$A_2 = 6$	13	18	17	16
$A_3 = 7$	11	16	21	20
$A_4 = 8$	9	14	19	24

Вычисления, проведенные по всем критериям, представлены на рисунке 12.

Выбираем те стратегии, которым соответствуют наибольшие выигрыши (прибыли) и наименьшие риски.

По критерию Байеса это стратегия *A*3 с прибылью 18,7 ден. ед., Лапласа – тоже *A*3 с прибылью 17 ден. ед., Вальда – *A*2 с прибылью 13 ден. ед., Гурвица – *A*4 с прибылью 18,75 ден. ед. и Сэвиджа – тоже *A*3 с наименьшим риском в 4 ден. ед.

По различным критериям чаще других рекомендовалась стратегия *A*3. Следовательно, нужно создать запас товара в 7 ед.

Замечание. *Решения, предлагаемые различными правилами, не всегда совпадают. Лицу, принимающему решение, следует понимать, что оно будет нести ответственность за последствия. Поэтому к правилам следует относиться не как к рецептам действий, а как к средствам, позволяющим задуматься о последствиях принятия решений и проанализировать возможные варианты.*

$ORIGIN := 1$

$$A := \begin{pmatrix} 15 & 14 & 13 & 12 \\ 13 & 18 & 17 & 16 \\ 11 & 16 & 21 & 20 \\ 9 & 14 & 19 & 24 \end{pmatrix} \quad n := cols(A) \quad m := rows(A)$$

$$j := 1..n \quad i := 1..m$$

критерий Байеса

$$q := (0.1 \;\; 0.2 \;\; 0.4 \;\; 0.3)^T \quad B_i := \sum_{j=1}^{n} (q_j \cdot A_{i,j}) \quad B = \begin{pmatrix} 13.1 \\ 16.5 \\ 18.7 \\ 18.5 \end{pmatrix}$$

Критерий Лапласа

$$L_i := \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \qquad L = \begin{pmatrix} 13.5 \\ 16 \\ 17 \\ 16.5 \end{pmatrix}$$

критерий Вальда

$$V_i := \min\left[\left(A^T\right)^{\langle i \rangle}\right] \qquad V = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix}$$

критерий Сэвиджа

$$\beta_j := \max\left(A^{\langle j \rangle}\right) \quad R_{i,j} := \beta_j - A_{i,j}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & 12 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad S_i := \max\left[\left(R^T\right)^{\langle i \rangle}\right] \quad S = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

критерий Гурвица

$$G_i := 0.65 \cdot \max\left[\left(A^T\right)^{\langle i \rangle}\right] + (1 - 0.65) \cdot \min\left[\left(A^T\right)^{\langle i \rangle}\right] \quad G = \begin{pmatrix} 13.95 \\ 16.25 \\ 17.5 \\ 18.75 \end{pmatrix}$$

Рис. 12 – Решение игры с природой

.

Биматричные игры. Равновесие Нэша
Доминирование. Эффективность по Парето

Игры, в которых множество игроков состоит из двух элементов, а число их стратегий конечно, называются ***биматричными***.

Замечание. Биматричная антагонистическая игра для записи не требует двух матриц, так как матрица выигрыша второго игрока фактически является матрицей выигрыша первого игрока, умноженная на (-1). Поэтому биматричные антагонистические игры называются *матричными*.

1. В равновесии Нэша стратегия любого игрока обеспечивает ему максимальный выигрыш при входящих фиксированных стратегиях других игроков.

Пример 13. Биматричная игра описывается следующими матрицами выигрыша:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Равновесием Нэша в рассматриваемой игре будет та ситуация, от которой ни одному из игроков не выгодно в одностороннем порядке отклоняться. Отметим в матрице A наибольшие элементы в каждом из столбцов, а в матрице B – наибольшие элементы в каждой строке:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \mathbf{4} & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & \mathbf{5} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & 1 & \mathbf{2} & 0 \\ 4 & \mathbf{6} & 0 & 1 \\ 2 & 1 & \mathbf{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Элемент, который оказался выделенным в обеих матрицах, соответствует равновесию Нэша. Это элемент в третьей строке и втором столбце (3;2).

Пример 14. Биматричная игра описывается следующими матрицами выигрыша:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Отметим наилучшие ответы игроков в матрицах выигрыша:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -1 \\ -0{,}5 & \mathbf{0,5} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае нет таких элементов, которые были бы выделены в обеих матрицах. Это означает, что в рассматриваемой игре равновесий Нэша нет.

2. Смешанное равновесие Нэша в конечных играх существует всегда (теорема Нэша).

Пример 15. Биматричная игра описывается следующими матрицами выигрыша:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}8 \\ 0{,}9 & 0{,}2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Отметим наилучшие ответы игроков в матрицах выигрыша (в первой матрице наибольший элемент в каждом столбце, а во второй – наибольшие в каждой строке):

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & \mathbf{0,8} \\ \mathbf{0,9} & 0{,}2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \mathbf{0,5} & 0{,}2 \\ 0{,}1 & \mathbf{0,8} \end{pmatrix}.$$

Совпадающих элементов нет, следовательно, в чистых стратегиях равновесий нет. Найдем равновесия в смешанных стратегиях, используя метод функций наилучших ответов. Составим функции ожидаемого выигрыша для каждого из игроков.

$$\begin{array}{ccc} & q & 1-q \\ p & 0{,}5 & 0{,}8 \\ 1-p & 0{,}9 & 0{,}2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & q & 1-q \\ p & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 1-p & 0{,}1 & 0{,}8 \end{array}$$

$$u_A(p,q) = 0{,}5pq + 0{,}9(1-p)q + 0{,}8p(1-q) + 0{,}2(1-p)(1-q);$$
$$u_B(p,q) = 0{,}5pq + 0{,}1(1-p)q + 0{,}2p(1-q) + 0{,}8(1-p)(1-q).$$

Чтобы построить функции наилучшего ответа, найдем производную каждой из этих функций по «своей» переменной:

$$\frac{\partial u_A}{\partial p} = 0{,}6 - q;$$
$$\frac{\partial u_B}{\partial q} = -0{,}7 + p.$$

Функции наилучших ответов будут иметь вид:

$$p^*(q) = \begin{cases} 0, & q > 0{,}6; \\ [0;1], & q = 0{,}6; \\ 1, & q < 0{,}6; \end{cases}$$

$$q^*(p) = \begin{cases} 0, & p < 0{,}7; \\ [0;1], & p = 0{,}7; \\ 1, & p < 0{,}7. \end{cases}$$

Графики функций наилучшего ответа имеют одну общую точку:

$$(p,q) = (0{,}6; 0{,}7).$$

Эта точка дает равновесие в смешанных стратегиях в данной игре:

$$(p^0; q^0) = \big((0{,}6; 0{,}4); (0{,}7; 0{,}3)\big).$$

По этой теме выполняется лабораторная работа 2 «Игровые модели в среде Mathcad».

Контрольные вопросы

1. Охарактеризуйте предмет теории игр. Укажите основные направления применения результатов теории игр. Дайте понятие игры (в теории игр).

2. В чем заключается неопределенность в игровых ситуациях?

3. Найдите в информационных электронных ресурсах лауреатов Нобелевской премии, которые в своих исследованиях использовали результаты теории игр.

4. Укажите, по каким признакам классифицируются игры. Являются ли: а) антагонистическая игра бескоалиционной; б) парная игра биматричной; в) матричная игра игрой с нулевой суммой; г) биматричная игра антагонистической?

5. Дайте определение ситуации равновесия по Нэшу в бескоалиционной игре.

6. Сформулируйте определение оптимальной по Парето ситуации в бескоалиционной игре.

7. Дайте определение строго (слабо) доминируемой стратегии в бескоалиционной игре.

8. Дайте определение седловой точки платежной матрицы (в матричной игре).

9. Сформулируйте условия доминирования столбцов (строк) платежной матрицы.

10. Дайте определение ситуации равновесия по Нэшу в биматричной игре.

Рекомендуемая литература по разделу

В предлагаемой литературе [1, 2] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу. Задание по вариантам к лабораторной работе 2 выкладывается в ЭИОС.

2.3 Раздел 3. Сетевое планирование и управление

Перечень изучаемых вопросов

1. Сетевая модель и ее основные элементы.
2. Временные параметры сетевых графиков.
3. Сетевое планирование в условиях неопределенности.
4. Оптимизация сетевого графика.

Методические рекомендации

Одним из важнейших приложений теории графов является сетевое планирование и управление (СПУ) сложными комплексами взаимосвязанных работ.

Графической моделью комплекса работ или производственного процесса является ***сетевой график (сетевая модель, сеть)***. С математической точки зрения сетевой график – это связанный орграф без петель и контуров. Сетевые модели состоят из следующих элементов: **работа (или задача); событие**.

Работа – это процесс, который необходимо выполнить для получения определенного (заданного) результата, как правило позволяющего приступить к последующим действиям.

Событие – момент изменения состояния системы, в частности момент начала или окончания любой работы по своей сути является событием. Предполагается, что события не имеют продолжительности и наступают **мгновенно**. В сетевом графике различают три вида событий: исходное, завершающее, промежуточные.

По способу представления информации существуют *два принципиально различных вида сетевых моделей (графиков)*:

1. Сеть вида «вершина – событие, дуги – работы»: вершины соответствуют событиям, а соединяющие их дуги – работам. При графическом представлении работа изображается стрелкой, которая соединяет два события. Она обозначается парой заключенных в скобки чисел (i, j), где i – номер события, из которого работа выходит, j – номер события, в которое она входит. События изображаются кружками. Этот вид сетевой модели представлен на рисунке 13.

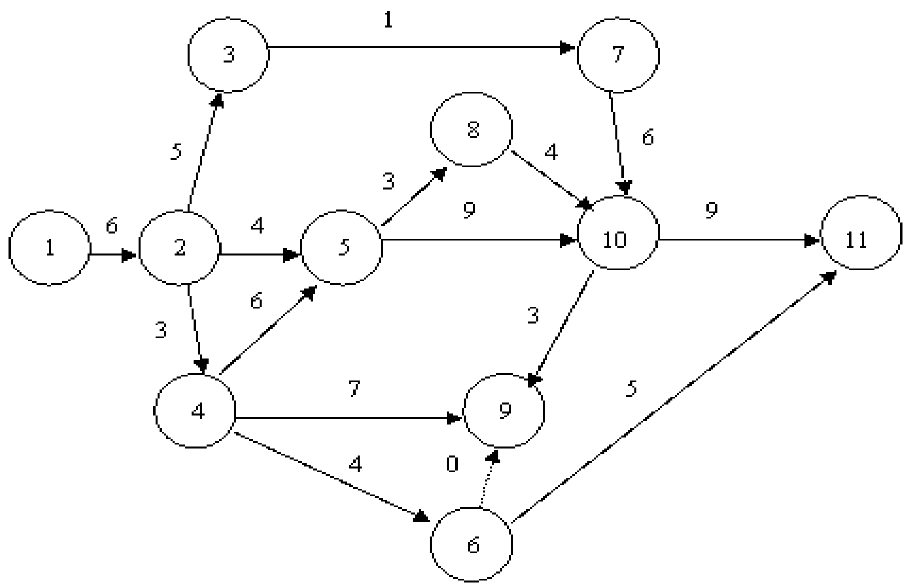

Рис. 13 – Сетевая модель «вершина – событие»

2. Сеть вида «вершина – работа»: вершины соответствуют работам, а дуги – связям. События при необходимости отображаются какими-либо фигурами, например – треугольниками.

Замечание 1. *Мы будем использовать сетевые графики в терминах «вершина – событие, дуги – работы».*

Замечание 2. Требования, предъявляемые к сетевым моделям и алгоритм правильной нумерации событий, происходит по алгоритму Фалкерсона для обычных графов.

Полный путь – это цепочка следующих друг за другом работ, соединяющих начальную и конечную вершины.

Продолжительность пути определяется суммой продолжительностей составляющих его работ.

Полный путь, имеющий максимальную длину, называют ***критическим*** *и обозначают* $L_{кр}$*, а его продолжительность –* $t_{кр}$. В сети может быть несколько критических путей, имеющих одинаковую длину.

Работы и события, принадлежащие критическому пути, называются соответственно ***критическими работами*** и ***критическими событиями***. Остальные работы и события сети будут некритическими.

Несвоевременное выполнение критических работ ведет к срыву сроков всего комплекса работ.

Временные параметры сетевого графика приведены в таблицах 4 и 5.

Таблица 4 – Временные параметры событий

Числовая характеристика	Формула
Ранний срок свершения события определяется величиной наиболее длительного отрезка пути от исходного до рассматриваемого события.	$t_р(j) = max\{t_р(i) + (i,j)\}$
Поздний срок свершения события характеризует самый поздний допустимый срок, к которому должно совершиться событие, не вызывая при этом срыва срока свершения конечного события.	$t_п(n) = t_р(n)$ $t_п(i) = min\{t_п(j) - t(i,j)\}$
Резерв показывает, на какой предельно допустимый срок можно задержать наступление события, не вызывая при этом увеличения срока выполнения всего комплекса работ.	$R(i) = t_п(i) - t_р(i)$

Замечание*. Резервы времени для событий на критическом пути равны нулю* $R(i) = 0$.

Таблица 5 – Временные параметры работы (i, j)

Числовые характеристики	Формула
ранний срок начала	$t_{рн}(i,j) = t_р(i)$
ранний срок окончания	$t_{ро}(i,j) = t_р(i) + t(i,j)$
поздний срок окончания	$t_{по}(i,j) = t_п(j)$
поздний срок начала	$t_{пн}(i,j) = t_п(j) - t(i,j)$
полный резерв времени	$R_п(i\,,j) = t_п(j) - t_р(i) - t(i,j)$
частный резерв времени первого вида R_1	$R_1(i\,,j) = t_п(j) - t_п(i) - t(i,j)$
частный резерв времени второго вида (свободный резерв) R_c	$R_с(i\,,j) = t_р(j) - t_р(i) - t(i,j)$
независимый резерв $R_н$	$R_н(i\,,j) = t_р(j) - t_п(i) - t(i,j)$

Полный резерв времени работы (i, j) показывает, насколько можно увеличить время выполнения конкретной работы при условии, что срок выполнения всего комплекса работ не изменится.

Частный резерв времени первого вида работы (i, j) есть часть полного резерва времени, на которую можно увеличить продолжительность работы, не изменив при этом позднего срока ее начального события.

Частный резерв времени второго вида (свободный резерв) работы (i, j) есть часть полного резерва времени, на которую можно увеличить продолжительность работы, не изменив при этом раннего срока ее конечного события.

Независимый резерв времени работы (i, j) соответствует случаю, когда все предшествующие работы заканчиваются в поздние сроки, а все последующие – начинаются в ранние сроки. Использование этого резерва не влияет на величину резервов времени других работ.

Характеристики пути. Путь характеризуется двумя показателями – продолжительностью и резервом.

Продолжительность пути определяется суммой продолжительностей составляющих его работ.

Резерв определяется как разность между длинами критического и рассматриваемого путей.

Из этого определения следует, что ***работы, лежащие на критическом пути, сам критический путь имеют нулевой резерв времени***.

Расчет сетевой модели методами линейного программирования

К основным задачам сетевого планирования относятся задачи отыскания критического пути сетевого графика и нахождения моментов наступления событий. Эти задачи могут быть описаны в терминах линейного программирования и образуют пару двойственных задач.

Пусть в структурной таблице работы пронумерованы от 1 до m, а события сетевого графика упорядочены и пронумерованы от 0 до n, где 0 – исходное, а n – завершающее событие. Для каждого события j $(0 \le j \le n)$ обозначим:

- $u^{+}(j)$ – множество событий сетевого графика, непосредственно предшествующих событию j;

- $u^{-}(j)$ – множество событий, непосредственно следующих за событием j.

1. Математическая модель задачи выбора критического пути

Для получения математической модели задачи выбора критического пути необходимо составить систему ограничений, охватывающую множество всех полных путей сетевого графика.

С каждой работой свяжем число x_k, равное 1, если эта работа входит в критический путь (является критической), и равное 0 для некритической работы. В системе ограничений должны быть учтены следующие условия:

– из исходного события выходит только одна критическая работа a_k, для которой $x_k = 1$, следовательно,

$$\sum_{k \in u^{-}(0)} x_k = 1\,; \qquad (1)$$

– если в какое-либо событие j входит критическая работа a_k, то должна быть и критическая работа a_l, выходящая из этого события; если в какое-либо событие j не входит критическая работа, то должна отсутствовать критическая работа, выходящая из этого события, следовательно,

$$\sum_{k \in u^{+}(j)} x_k = \sum_{l \in u^{-}(j)} x_l\,, \qquad 1 \le j \le n-1\,; \qquad (2)$$

– в завершающее событие входит только одна критическая работа a_l, для которой $x_l = 1$, следовательно,

$$\sum_{l \in u^{+}(n)} x_l = 1. \qquad (3)$$

Длина полного пути выразится как сумма всех длин t_k (продолжительностей работ), для которых $x_k = 1$:

$$F = \sum_{k=1}^{m} t_k x_k\,. \qquad (4)$$

Формулировка задачи выбора критического пути: требуется найти неотрицательные переменные x_k $(k = 1..m)$, принимающие только два значения 0 или 1, удовлетворяющие ограничениям (1) - (3) и обращающие целевую функцию (4) в максимум.

2. Математическая модель задачи нахождения моментов наступления событий

Пусть y_j – момент свершения события j $(0 \le j \le n)$. Событие j может наступить лишь тогда, когда наступит каждое предшествующее событие i и будет выполнена работа, соединяющая события i и j, имеющая продолжительность t_k. Это значит, что для любой работы должно выполняться неравенство:

$$y_j \ge y_i + t_k \,. \qquad (5)$$

Длительность выполнения всего комплекса работ равна разности между моментами свершения завершающего и исходного событий

$$Z = y_n - y_0 \,. \qquad (6)$$

Формулировка задачи о нахождении моментов свершения событий: определить значения y_j, удовлетворяющих неравенствам (5) и обращающих целевую функцию (6) в минимум.

Рассмотренные задачи (1-4) и (5-6) являются двойственными задачами линейного программирования.

<table>
<tr><th colspan="2">Двойственные задачи линейного программирования
в задачах СПУ</th></tr>
<tr><th>задача
выбора критического пути</th><th>задачи нахождения моментов
наступления событий</th></tr>
<tr><td>Найти числа x_k, для которых
$$F = \sum_{k=1}^{m} t_k x_k \to max$$
при ограничениях
$$\sum_{k \in u^-(0)} x_k = 1,$$
$$\sum_{l \in u^+(n)} x_l = 1,$$
$$\sum_{k \in u^+(j)} x_k - \sum_{l \in u^-(j)} x_l = 0,$$
$$x_k \ge 0.$$</td><td>Найти числа y_j, для которых
$$Z = y_n - y_0 \to min$$
при ограничениях
$$y_j - y_i \ge t_k,$$
y_j – произвольного знака.</td></tr>
</table>

Пример 16. Сеть проекта представлена следующими данными. Найти критические работы и длину критического пути.

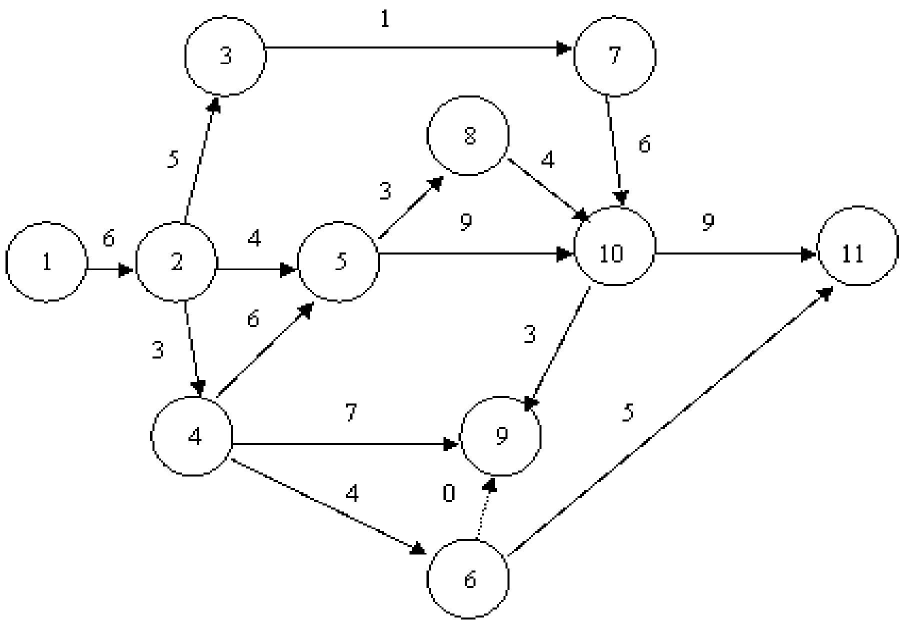

Рис. 14 – Сетевой график

Решение. Составим структурную таблицу комплекса работ. Открываем вычислительный блок и задаем ограничения (рисунок 15). С помощью функции **Maximize** находим критический путь. Критическим работам соответствуют числа, равные 1, т. е. $x_1, x_4, x_6, x_{10}, x_{16}$.

Работа	**Опирается на работы**	**Продолжительность работы**	**Работа**	**Опирается на работы**	**Продолжительность работы**
(1,2) x_1	-	6	(5,8) x_9	(2,3), (4,5)	3
(2,3) x_2	(1,2)	5	(5,10) x_{10}	(2,5), (4,5)	9
(2,5) x_3	(1,2)	4	(6,9) x_{11}	(4,6)	0
(2,4) x_4	(1,2)	3	(6,11) x_{12}	(4,6)	5
(3,7) x_5	(2,3)	1	(7,10) x_{13}	(3,7)	6
(4,5) x_6	(2,4)	6	(8,10) x_{14}	(5,8)	4
(4,6) x_7	(2,4)	4	(9,10) x_{15}	(4,9), (6,9)	3
(4,9) x_8	(2,4)	7	(10,11) x_{16}	(7,10), (8,10), (5,10), (9,10)	9

$ORIGIN := 1$

$C := (6\ \ 5\ \ 4\ \ 3\ \ 1\ \ 6\ \ 4\ \ 7\ \ 3\ \ 9\ \ 0\ \ 5\ \ 6\ \ 4\ \ 3\ \ 9)$

$X := (1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)^T$

$F(X) := C \cdot X$

Given $\quad X \ge 0 \quad X_1 = 1$

$X_1 = X_2 + X_3 + X_4 \qquad X_2 = X_5 \quad X_4 = X_6 + X_8 + X_7 \qquad X_3 + X_6 = X_9 + X_{10}$

$X_7 = X_{11} + X_{12} \qquad X_5 = X_{13} \qquad X_9 = X_{14} \qquad X_8 + X_{11} = X_{15}$

$X_{14} + X_{10} + X_{15} = X_{16} \qquad X_{16} + X_{12} = 1$

$KP := \mathrm{maximize}(F, X)$ критический путь

KP =

	1
1	1
2	0
3	0
4	1
5	0
6	1
7	0
8	0
9	0
10	1
11	0
12	0
13	0
14	0
15	0
16	1

$F(KP) = 33$ длина критического пути

Рис. 15 – Решение прямой задачи ЛП для сетевого графика

Следовательно, (1,2), (2,4), (4,5), (5,10), (10,11) критические работы; критический путь проходит через события 1-2-4-5-10-11. Его длина равна 33.

Пример 17. Решить двойственную задачу для сетевой модели примера 16.

Решение. Моменты свершения событий найдем путем решения двойственной задачи. В силу критерия оптимальности, неравенства, соответствующие критическим событиям, должны выполняться как равенства.

Полученные значения сведем в таблицу (1-я строка – номера событий, *i*; 2-я – $t_р(i)$ ранний срок свершения события; 3-я – $t_п(i\ )$ – поздний срок свершения события). Решение в MathCAD представлено на рисунке 16.

$$Y := (1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)^T \qquad Z(Y) := Y_{10} - Y_0$$

$$\text{Given} \quad Y \ge 0 \qquad Y_1 - Y_0 = 6 \quad Y_2 - Y_1 \ge 5 \quad Y_3 - Y_1 = 3$$

$$Y_4 - Y_1 \ge 4 \quad Y_4 - Y_3 = 6 \quad Y_8 - Y_3 \ge 7 \quad Y_5 - Y_3 \ge 4$$

$$Y_8 - Y_5 \ge 0 \quad Y_6 - Y_2 \ge 1 \quad Y_7 - Y_4 \ge 3 \quad Y_9 - Y_4 = 9$$

$$Y_9 - Y_7 \ge 4 \quad Y_9 - Y_8 \ge 3 \quad Y_9 - Y_6 \ge 6 \quad Y_{10} - Y_5 \ge 5$$

$$Y_{10} - Y_9 = 9$$

$$M := \text{Minimize}(Z, Y)$$

M =

	0
0	0
1	6
2	11
3	9
4	15
5	13
6	12
7	20
8	16
9	24
10	33

$$Z(M) = 33$$

Рис. 16 – Решение двойственной задачи ЛП
для сетевого графика

Так как критические события резервов времени не имеют, то $t_р(i) = t_п(i)$.

i	**1**	**2**	3	**4**	**5**	6	7	8	9	**10**	**11**
$t_р(i)$	0	6	11	9	15	13	12	20	16	24	33
$t_п(i)$	0	6		9	15					24	33

Остальные вычисления проводят по сетевому графику.

По этой теме выполняется лабораторная работа 3 «Расчет сетевой модели методами линейного программирования в среде Mathcad»

Контрольные вопросы

1. Назначение сетевого планирования.
2. Элементы сетевых графиков и их отображение на сетевой модели. Что такое «критический путь»?
3. Перечислите основные правила построения сетевых графиков.
4. Перечислите этапы построения сетевых графиков.
5. Параметры сетевых моделей для работ и способы их вычисления.

6. Параметры сетевых моделей для событий и способы их вычисления.
7. Допустимый срок наступления события и резерв времени события.
8. Полный и свободный резерв времени работы и способы их вычисления.
9. Сущность оптимизации сетевого графика по времени и по ресурсам.
10. Преимущества сетевых моделей.

Рекомендуемая литература по разделу

В предлагаемой литературе [1, 2] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу. Задание по вариантам к лабораторной работе 3 выкладывается в ЭИОС.

2.4 Раздел 4. Системы массового обслуживания

Перечень изучаемых вопросов

1. Структура и классификация систем массового обслуживания.
2. Марковский случайный процесс в СМО. Уравнения Колмогорова.
3. Расчет показателей эффективности СМО.

Методические указания

Сетевые модели, в основе которых лежит теория графов, позволяют проводить их оптимизацию, а также совокупность расчетных и организационных мероприятий по управлению комплексами работ при создании новых изделий и технологий. Цель изучения системы массового обслуживания состоит в том, чтобы контролировать их характеристики для проведения оптимизации системы в целом.

СМО представляют собой системы специфического вида. *Системой* называется целостное множество взаимосвязанных элементов, которые нельзя разделить на независимые подмножества. Основными элементами СМО являются: входной поток заявок; очередь; каналы обслуживания (приборы, операторы, продавцы и пр.); выходной поток заявок (обслуженные заявки).

Классификация СМО

По числу каналов	
одноканальные	***многоканальные***
По дисциплине обслуживания	
с отказами (заявка получает отказ при условии занятости каналов, например вызовов абонента через АТС)	***с ожиданием*** (***очередью***) (в случае занятости системы заявка поступает в очередь, например обслуживание покупателей в магазине)

Показатели эффективности СМО описывают ее возможность справляться с потоком заявок.

Показатели эффективности	
СМО с отказами	***СМО с очередью***
A – абсолютная пропускная способность СМО (среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени); Q – относительная пропускная способность (средняя доля пришедших заявок, обслуживаемых СМО); P_{serv} – вероятность обслуживания (вероятность того, что заявка будет принята на обслуживание); P_{otk} – вероятность отказа (вероятность того, что заявка покинет СМО необслуженной); $\overline{k}$ – среднее число занятых каналов (для многоканальной системы)	К показателям эффективности СМО с отказами добавляются: $L_{СМО}$ – среднее число заявок в системе; $L_{оч}$ – среднее число заявок в очереди; $\overline{L}_{serv}$ – среднее число заявок, находящихся под обслуживанием; $\overline{t}_{wait}$ – среднее время пребывания заявки в очереди; $\overline{t}_{\text{СМО}}$ – среднее время пребывания заявки в СМО; $P_{зан}$ – вероятность того, что канал занят (степень загрузки канала)

Марковский случайный процесс в СМО. Уравнения Колмогорова

Процессы поступления и обслуживания заявок в СМО являются случайными, что обусловлено случайным характером потока заявок и длительности их обслуживания.

Случайным процессом *X(t)* называется процесс, значение которого при любом значении аргумента *t* является случайной величиной. При фиксированном $t=t_0$ $X(t_0)$ представляет собой обычную величину. Случайные процессы упрощают исследование СМО.

В основе СМО находится ***марковский случайный процесс*** (процесс без последствия), когда вероятность состояния СМО в будущем зависит только от ее состояния в настоящем и не зависит от прошлого (название по имени известного российского математика А. А. Маркова). Условие марковского случайного процесса: необходимо, чтобы все потоки событий, при которых система переходит из одного состояния в другое (потоки заявок, потоки обслуживания и т. д.), были пуассоновскими.

Пуассоновский поток (простейший поток) событий обладает следующими свойствами:

- отсутствие последствия (число событий, попавших на заданный временной интервал, не зависит от числа событий, попавших на другие интервалы);

- ординарности (вероятность попадания на элементарный временной интервал двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события);

- стационарности (число событий, попавших на заданный временной интервал, зависит лишь от длины интервала и не зависит от числа событий, попавших на другие интервалы).

Для простейшего потока справедлив закон Пуассона. Плотность вероятности случайной величины при этом $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, где λ – интенсивность потока.

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями пользуются *графом состояний*, где прямоугольниками изображают состояния системы, а переходы из состояния в состояние – стрелками. Если у стрелок проставлены интенсивности, то граф состояния называется *размеченным*. Переходы системы из состояния S_i в состояние S_j происходят под воздействием простейших потоков событий с интенсивностями λ_{ij}. Простейший граф состояний представлен на рисунке 17.

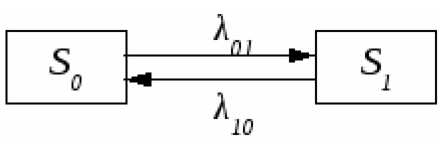

Рис. 17 – Граф состояний

На рис. 17 изображена СМО, состоящая из одного канала обслуживания, который находится в двух возможных состояниях: либо свободен *(S_0)*, либо занят *(S_1)*; λ_{01} – интенсивность поступления заявок; λ_{10} – интенсивность обслуживания заявок в единицу времени. Стрелка из S_0 в S_1 означает переход системы из состояния «канал свободен» в состояние «канал занят». Стрелка из S_1 в S_0 означает обратный переход.

Анализ состояния СМО сводится к определению вероятности, с которой система пребывает в данном состоянии. В общем случае ***вероятностью i-го состояния $p_i(t)$*** называется вероятность того, что в момент t система будет находиться в состоянии S_i. Для любого момента t справедливо соотношение $\sum_{i=0}^{n} p_i(t) = 1$.

Определить вероятности состояний СМО можно, решив систему уравнений Колмогорова.

Правило составления системы уравнений Колмогорова

1. Слева в уравнениях стоит предельная вероятность данного состояния p_i, умноженная на суммарную интенсивность всех потоков, ведущих из данного состояния.

2. Справа – сумма произведений интенсивностей всех потоков, входящих в i-е состояние, на вероятности тех состояний, из которых эти потоки исходят.

3. Для решения системы вводится нормировочное уравнение:

$$\sum_{i=0}^{n} p \quad (t) = 1.$$

Для достаточно большого значения времени *t* распределение вероятностей стабилизируется и практически не зависит от времени.

Расчет показателей эффективности СМО

1. Одноканальные СМО с отказами. Система *S* может находиться в одном из двух состояний: S_0 – канал свободен или S_1 – канал занят. Из состояния S_0 в состояние S_1 систему переводит поток входящих заявок, а из состояния S_1 в состояние S_0 – поток обслуживаний. ***Плотности вероятностей перехода*** из состояния S_0 в состояние S_1 и обратно равны соответственно λ и μ. Граф состояний СМО показан на рисунке 18.

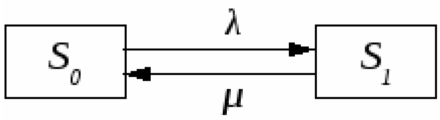

Рис. 18 – Граф состояний одноканальной СМО с отказами

Показатели эффективности одноканальной СМО с отказами вычисляются по формулам, которые приведены в таблице 6.

Таблица 6 – Показатели эффективности одноканальной СМО с отказами

Показатели	**Обозначение**	**Формула для вычисления**
Интенсивность входящего потока заявок	λ	известно из условия задачи
Интенсивность выходящего потока обслуженных заявок	μ	известно из условия задачи; $\mu = \frac{1}{t_{serv}}$
Среднее время обслуживания заявки	t_{serv}	известно из условия задачи; $t_{serv} = \frac{1}{\mu}$
Приведенная интенсивность потока заявок	ρ	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
Относительная пропускная способность СМО	Q	$Q = \frac{1}{\rho + 1}$
Абсолютная пропускная способность СМО	A	$A = \lambda Q$

Показатели	Обозначение	Формула для вычисления
Вероятность того, что заявка будет обслужена	$P_{serv} = P_0$	$P_{serv} = Q$
Вероятность отказа	$P_{otk} = P_1$	$P_{otk} = 1 - P_{serv}$
Среднее время простоя канала	t_{st}	$t_{st} = \frac{1}{\lambda}$
Среднее время пребывания заявки в системе	t_{sys}	$t_{sys} = p_0 \cdot t_{serv}$

2. Многоканальная СМО с отказами. Система *S* имеет следующие состояния (нумеруем по числу заявок, находящихся в системе): $S_0, S_1, \ldots, S_n$, где $S_к$ – состояние системы, когда в ней находится *к* заявок, т. е. занято *к* каналов. Граф состояний СМО показан на рисунке 19.

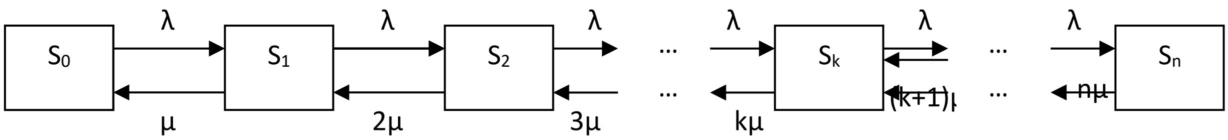

Рис. 19 – Граф состояний многоканальной СМО с отказами

Показатели эффективности многоканальной СМО с отказами вычисляются по формулам, которые приведены в таблице 7.

Таблица 7 – Показатели эффективности многоканальной СМО с отказами

Показатели	Обозначение	Формула для вычисления
Число каналов обслуживания	*n (n>1)*	известно из условия задачи
Интенсивность входящего потока заявок	λ	известно из условия задачи
Интенсивность потока обслуженных заявок, выходящих *из одного канала*	μ	известно из условия задачи; $\mu = \frac{1}{t_{serv}}$
Приведенная интенсивность потока заявок	ρ	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

Показатели	Обозначение	Формула для вычисления
Вероятность того, что занято 0, 1, …, n каналов, соответственно (формулы Эрланга)	$P_0, P_1, \dots, P_n$	$\begin{cases} P_0 = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!}\right)^{-1}, \\ P_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot P_0 \end{cases}$
Вероятность отказа	$P_{otk} = P_n$	$P_{otk} = P_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot P_0$
Относительная пропускная способность СМО	Q	$Q = 1 - P_{otk}$
Абсолютная пропускная способность СМО	A	$A = \lambda Q$
Вероятность того, что заявка будет обслужена	P_{serv}	$P_{serv} = 1 - p_{otk} = Q$
Среднее число занятых каналов	$\overline{k}$	$\overline{k} = \frac{A}{\mu}$

3. Одноканальная СМО с неограниченной очередью. Имеется одноканальная СМО с очередью, на которую не наложены никакие ограничения (ни по длине очереди, ни по времени ожидания). Система S может находится в одном из состояний (по числу заявок, находящихся в СМО): S_0 – канал свободен; S_1 – канал занят (обслуживает одну заявку), очереди нет; S_2 – канал занят, одна заявка в очереди; …; $S_к$ – канал занят, ($к$-1) заявок стоят в очереди и т. д. Граф состояний СМО представлен на рисунке 20.

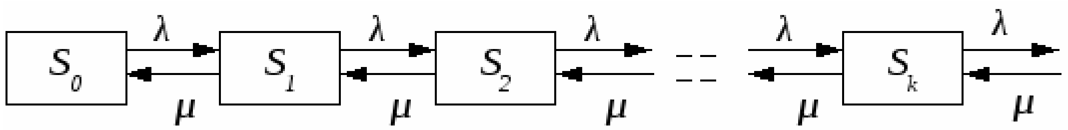

Рис. 20 – Граф состояний одноканальной СМО
с неограниченной очередью

Показатели эффективности одноканальной СМО с очередью вычисляются по формулам, которые приведены в таблице 8.

Таблица 8 – Показатели эффективности одноканальной СМО с неограниченной очередью

Показатели	Обозначение	Формула для вычисления
Длина очереди	∞	
Интенсивность входящего потока заявок	λ	известно из условия задачи
Интенсивность потока обслуженных заявок, выходящих *из одного канала*	μ	известно из условия задачи; $\mu = \frac{1}{t_{serv}}$
Приведенная интенсивность потока заявок	ρ<1	$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$
Вероятность того, что СМО свободна и может обслужить заявку	P_0	$P_0 = 1 - \rho$
Вероятность того, что СМО занята, в очереди нет заявок	P_1	$P_1 = \rho \cdot P_0$
Вероятность того, что СМО занята, в очереди находятся 1,…, *n*,… заявок, соответственно	$P_2, \dots, P_{n+1}, \dots$	$P_k = \rho^k \cdot P_0$, $k = 2, \dots$
Вероятность того, что заявка получит отказ	P_{otk}	$P_{otk} = 0$
Относительная пропускная способность СМО	Q	$Q = 1$
Абсолютная пропускная способность СМО	A	$A = \lambda$
Вероятность того, что заявка будет обслужена	P_{serv}	$P_{serv} = 1$
Среднее число заявок, стоящих в очереди	$\overline{L}_{оч}$	$\overline{L}_{оч} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$
Среднее число заявок, находящихся под обслуживанием	$\overline{L}_{serv}$	$\overline{L}_{serv} = \rho$
Среднее число заявок в СМО (обслуживаемых и стоящих в очереди)	$\overline{L}_{СМО}$	$\overline{L}_{СМО} = \overline{L}_{оч} + \overline{L}_{serv}$

Показатели	Обозначение	Формула для вычисления
Среднее время ожидания заявки в очереди	$\bar{t}_{wait}$	$\bar{t}_{wait} = \dfrac{\bar{L}_{оч}}{\lambda}$
Среднее время пребывания заявки в СМО	$\bar{t}_{СМО}$	$\bar{t}_{СМО} = \dfrac{\bar{L}_{СМО}}{\lambda}$

Замечание. *Прежде чем записать формулы предельных вероятностей, необходимо быть уверенным в их существовании, ведь в случае, когда время* $t \to \infty$, *очередь может неограниченно возрастать. Если* $\rho < 1$, *т. е. среднее число приходящих заявок меньше среднего числа обслуженных заявок (в единицу времени), то предельные вероятности существуют. Если* $\rho \geq 1$, *очередь растет до бесконечности.*

4. Многоканальная СМО с неограниченной очередью. Имеется n-канальная СМО с неограниченной очередью. Система S может находиться в одном из состояний (по числу заявок, находящихся в СМО): S_0 – в системе нет заявок (все каналы свободны); S_1 – занят один канал, остальные свободны; S_2 – заняты два канала, остальные свободны; …; S_n – заняты все n каналов (очереди нет); S_{n+1} – заняты все n каналов, в очереди одна заявка;…; S_{n+r} – заняты все n каналов, в очереди r заявок;…

Показатели эффективности многоканальной СМО с неограниченной очередью вычисляются по формулам, которые приведены в таблице 9.

Таблица 9 – Показатели эффективности многоканальной СМО с неограниченной очередью

Показатели	Обозначение	Формула для вычисления
Число каналов обслуживания	n $(n>1)$	известно из условия задачи
Длина очереди	∞	
Интенсивность входящего потока заявок	λ	известно из условия задачи
Интенсивность потока обслуженных заявок, выходящих *из одного канала*	μ	известно из условия задачи; $\mu = \dfrac{1}{t_{serv}}$

Показатели	Обозначение	Формула для вычисления
Приведенная интенсивность потока заявок	ρ	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}, \ \frac{\rho}{n} < 1$
Предельные вероятности состояний системы (очереди нет)	$P_0, P_1, \ldots, P_n$	$\begin{cases} P_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^{n+1}}{n!\,(n-\rho)}\right)^{-1}, \\ P_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot P_0 \end{cases}$
Предельные вероятности состояний системы (наличие в очереди 1, 2, … заявок)	$P_{n+1}, P_{n+2}, \ldots$ $P_{n+r}, \ldots$	$P_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n! \cdot n} P_0, \ldots,$ $P_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n! \cdot n^r} P_0, \ldots,$
Вероятность того, что заявка окажется в очереди	$P_{оч}$	$P_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!\,(n-\rho)} P_0$
Вероятность того, что заявка получит отказ	P_{otk}	$P_{otk} = 0$
Относительная пропускная способность СМО	Q	$Q = 1$
Абсолютная пропускная способность СМО	A	$A = \lambda$
Вероятность того, что заявка будет обслужена	P_{serv}	$P_{serv} = 1$
Среднее число занятых каналов	$\overline{k}$	$\overline{k} = \rho = \frac{\lambda}{\mu}$

Показатели	Обозначение	Формула для вычисления
Среднее число заявок, стоящих в очереди	$\overline{L}_{\text{оч}}$	$\overline{L}_{\text{оч}} = \dfrac{\rho^{n+1} P_0}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2}$
Среднее число заявок в СМО (обслуживаемых и стоящих в очереди)	$\overline{L}_{\text{СМО}}$	$\overline{L}_{\text{СМО}} = \overline{L}_{\text{оч}} + \rho$
Среднее время ожидания заявки в очереди	$\overline{t}_{wait}$	$\overline{t}_{wait} = \dfrac{\overline{L}_{\text{оч}}}{\lambda}$
Среднее время пребывания заявки в СМО	$\overline{t}_{\text{СМО}}$	$\overline{t}_{\text{СМО}} = \dfrac{\overline{L}_{\text{СМО}}}{\lambda}$

Замечание. *При* $\frac{\rho}{n} < 1$ *предельные вероятности существуют. Если* $\frac{\rho}{n} \geq 1$*, очередь растет до бесконечности.*

5. СМО с ограниченной очередью. СМО с ограниченной очередью отличаются от рассмотренных выше задач лишь тем, что число заявок в очереди ограничено (не может превосходить некоторого заданного числа m). Если новая заявка поступает в момент, когда все места в очереди заняты, она покидает СМО необслуженной. Формулы сведены в таблицу 10.

Пример 18. На вход одноканальной СМО с длиной очереди $m = 2$ поступает поток заявок с интенсивностью 0,85 заявок в час. Среднее время обслуживания одной заявки 1,05 часа. Найти основные характеристики данной СМО.

Решение. Решение приведено на рисунке 21.

$m := 2 \quad \lambda := 0.85 \quad t := 1.05 \quad \mu := \frac{1}{t} = 0.952 \quad \rho := \frac{\lambda}{\mu} = 0.893$

Вероятность простоя канала $P_0 := \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} = 0.294$

Предельные вероятности состояний

$k := 1 .. m+1 \qquad P_k := \rho^k \cdot P_0 \qquad P_k =$

0.263
0.234
0.209

Вероятность отказа $P_{m+1} := 0.209$

Относительная и абсолютная пропускная способность

$Q := 1 - P_{m+1} = 0.791 \qquad A := \lambda \cdot Q = 0.672$

Среднее число заявок в очереди

$$L\text{оч} := \frac{\rho^2 \cdot \left[1 - \rho^m \cdot (m + 1 - m \cdot \rho)\right]}{\left(1 - \rho^{m+2}\right) \cdot (1 - \rho)} = 0.652$$

Среднее число заявок в системе $L\text{смо} := L\text{оч} + 1 - P_0 = 1.358$

Среднее время ожидания в очереди $t\text{wait} := \frac{L\text{оч}}{\lambda} = 0.768$

Среднее время пребывания заявки в системе

$$t\text{смо} := \frac{L\text{смо}}{\lambda} = 1.598$$

Рис. 21 – Расчет показателей эффективности

Контрольные вопросы

1. Что такое система массового обслуживания? Зачем нужна теория массового обслуживания?

2. Каковы классификационные признаки СМО?

3. Нарисуйте граф состояний, описывающий многоканальную систему отказами, выпишите по нему систему дифференциальных алгебраических уравнений.

4. Приведите основные характеристики многоканальной СМО с отказами.

5. Приведите граф состояний описывающий системы с очередью ограниченной длины, и выпишите по нему систему дифференциальных или алгебраических уравнений.

Рекомендуемая литература по разделу

В предлагаемой литературе [1, 2] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу. Задание по вариантам к лабораторной работе 4 выкладывается в ЭИОС.

3 ТРЕБОВАНИЯ К АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

3.1 Текущая аттестация

В ходе изучения дисциплины студентам предстоит пройти следующие этапы текущей аттестации: выполнить задания по темам практических занятий, выполнить четыре лабораторные работы.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества усвоения студентами учебного материала и стимулирования их учебной работы. Он может осуществляться в ходе всех видов занятий в форме, избранной преподавателем или предусмотренной рабочей программой дисциплины.

Текущий контроль предполагает постоянный контроль преподавателем качества усвоения учебного материала, активизацию учебной деятельности студентов на занятиях, побуждение их к самостоятельной систематической работе. Он необходим обучающимся для самоконтроля на разных этапах обучения. Их результаты учитываются выставлением преподавателем оценок в журнале учета успеваемости и в ходе ежемесячной аттестации.

При текущем контроле успеваемости учитывается: выполнение обучающимся всех работ и заданий, предусмотренных рабочей программой дисциплины, а именно выполнение заданий на практических занятиях; выполнение лабораторных работ; самостоятельная работа обучающихся; посещаемость аудиторных занятий.

Результаты текущего контроля успеваемости оцениваются по пятибалльной шкале:

- оценка **«отлично»** (**5**) – график самостоятельной работы и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся на 100 % и более (с опережением);
- оценка **«хорошо»** (**4**) – график самостоятельной работы и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся на 75 % и более;
- оценка **«удовлетворительно»** (**3**) – график самостоятельной работы и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся на 50 % и более;
- оценка **«неудовлетворительно»** (**2**) – график самостоятельной работы и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся менее чем на 50 %.

3.2 Условия получения положительной оценки

Промежуточная аттестация по дисциплине проводится в форме экзамена.

К экзамену допускаются студенты, имеющие по всем текущим контролям положительные оценки.

Экзамен проводится в соответствии с перечнем вопросов к экзамену, размещенному в ЭИОС КГТУ и представленному в Приложении.

Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса и три задачи. Выбор экзаменационных вопросов для включения в билет осуществляется из принципа равной сложности всех билетов и наибольшего охвата каждым билетом учебного материала.

Подготовка к экзамену ведется по конспекту лекций, учебникам и учебным пособиям, рекомендуемым к изучению в начале курса. В ходе подготовки к экзамену преподаватель проводит консультацию, на которой доводится порядок проведения экзамена и даются ответы на вопросы, вызвавшие затруднения у студентов в процессе подготовки.

Экзамен проводится в день, указанный в расписании занятий.

Студент, прибывший для сдачи экзамена, получает билет на бланке установленной формы и занимает указанное ему место для подготовки. После получения билета в течение 40 минут студент имеет право готовиться к ответу. На ответ по билету отводится до 15 минут.

Готовясь к ответу, обучающийся все доказательства, формулы, структурные схемы, графики и т. д. записывает и изображает на полученном листе в форме, удобной для использования при устном ответе экзаменатору.

Ответ обучающегося должен быть четким, конкретным и кратким. После ответа преподаватель задает вопросы, помогающие ему выявить ход мыслей, логику рассуждений и способность применять полученные знания в практической деятельности. Если требуется уточнить оценку или степень знаний обучающегося по тому или иному вопросу, задаются дополнительные вопросы.

Студентам, пользующимся на экзамене материалами, различного рода записями, техническими средствами, не указанными в перечне разрешенных, выставляется оценка «**неудовлетворительно**», о чем докладывается заведующему кафедрой.

Знания, умения и навыки студентов определяются оценками «**отлично**», «**хорошо**», «**удовлетворительно**», «**неудовлетворительно**». Общая оценка объявляется студенту СРАЗУ после окончания его ответа на билет экзамена.

Положительная оценка («**отлично**», «**хорошо**», «**удовлетворительно**») заносится в ведомость и зачетную книжку по окончании экзамена. Оценка «**неудовлетворительно**» выставляется только в ведомость.

Компетенции в той части, в которой они должны быть сформированы в рамках изучения дисциплины, могут считаться сформированными в случае, если студент получил на экзамене положительную оценку.

Библиографический список

Основная литература

1. Мазалов, В. В. Математическая теория игр и приложения / В. В. Мазалов. – 5-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2023. – 500 с. – Лань : электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/306806 (дата обращения: 23.02.2023). – ISBN 978-5-507-46345- 9. – Текст: электронный. – Режим доступа: для авториз. пользователей.

2. Забелин, А. А. Вычислительные методы в теории игр и задачах оптимизации: монография / А. А. Забелин. – Чита : ЗабГУ, 2020. – 231 с. – Лань : электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/173635 (дата об ращения: 23.02.2023). – ISBN 978-5-9293-2597- 7. – Текст: электронный. – Режим доступа: для авториз. пользователей.

3. Крутиков, В. Н. Методы оптимизации : Учебное пособие / В. Н. Крутиков, В. В. Мешечкин ; Кемеровский государственный университет. – 2-е изд., исправ. и доп. – Кемерово : Кемеровский государственный университет, 2019. – 106 с. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=600 281 (дата обращения: 23.02.2023). – ISBN 978-5- 8353-2437-8. – Текст: электронный. – Режим доступа: по подписке.

4. Гладков, Л. А. Методы решения задач оптимизации : Учебное пособие / Л. А. Гладков, Н. В. Гладкова ; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Южный федеральный университет, 2019. – 119 с. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=598 664 (дата обращения: 23.02.2023). – ISBN 978-5- 9275-3436-4. – Текст: электронный. – Режим доступа: по подписке.

5. Мухина, С. Н. Методы оптимальных решений. Примеры и алгоритмы в среде Mathcad : Учебное пособие / С. Н. Мухина. − Калининград : Изд-во БГАРФ, 2014. − с. 118.

Дополнительная литература

1. Семенихина, О. Н. Методы оптимизации. Линейные и нелинейные методы и модели в экономике : Учебное пособие / О. Н. Семенихина, И. Н. Мастяева. – Москва: Евразийский открытый институт, 2011. – 422 с. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=90388 (дата обращения: 23.02.2023). – ISBN 978-5-374-00410-6. – Текст: электронный. – Режим доступа: по подписке.

2. Васильев, Ф. П. Методы оптимизации : Учебник / Ф. П. Васильев. – Изд. нов. перераб. и доп. – Москва : МЦНМО, 2011. – Часть 1. Конечномерные задачи оптимизации. Принцип максимума. Динамическое программирование. – 620 с. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63313 (дата обращения:

23.02.2023). – ISBN 978-5-94057-707-2. – Текст: электронный. – Режим доступа: по подписке.

3. Гладков, Л. А. Методы решения задач оптимизации : Учебное пособие / Л. А. Гладков, Н. В. Гладкова ; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Южный федеральный университет, 2019. – 119 с. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=598664 (дата обращения: 23.02.2023). – ISBN 978-5-9275-3436-4. – Текст: электронный. – Режим доступа: по подписке.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Тестовые задания

Тестовые задания предназначены для оценки в рамках текущего контроля успеваемости знаний, приобретенных студентами на лекционных и практических занятиях и для измерения соответствующих индикаторов достижения компетенции.

Содержание теста определяется в соответствии с содержанием дисциплины пропорционально учебному времени, отведенному на изучение разделов, перечисленных в рабочей программе модуля.

Тестовые задания разработаны в программной среде Moodle (ссылка на электронный ресурс:

https://eios.klgtu.ru/course/view.php?id=9542;

https://cloud.mail.ru/public/Ep4h/8GzWA3pxp).

ТИПОВЫЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ТЕОРИЯ ИГР И ОПТИМИЗАЦИИ»

1. Разделы математического программирования. Задачи математического программирования и области их применения.

2. Основная задача линейного программирования, формы ее записи. Каноническая и стандартная формы задачи, переход от одной формы к другой.

3. Свойства решений задачи линейного программирования. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования.

4. Графический метод решения задачи линейного программирования. Аналитические методы решения задачи линейного программирования. Аналитический симплекс-метод.

5. Двойственность в линейном программировании. Симметричные и несимметричные двойственные задачи. Виды математических моделей двойственных задач.

6. Теоремы двойственности, применение их для нахождения решения двойственной задачи.

7. Постановка задачи целочисленного программирования и методы их решения: метод Гомори, метод ветвей и границ.

8. Предмет теории игр, ее цели и задачи. Определения понятий «конфликт», «игра», «стратегия», «решение игры». Выигрыш и платежная функция.

9. Конечные игры двух игроков с нулевой суммой. Нижняя и верхняя цены игры. Принципы минимакса и максимина. Неустойчивость минимаксных решений.

10. Проблема равновесия в игре. Понятия седловой точки, оптимального решения, оптимальной стратегии. Условие Нэша. Понятие устойчивости игры. Ситуация равновесия.

11. Смешанные стратегии, теорема о минимаксе. Активные стратегии, теорема об активных стратегиях.

12. Упрощение конечной игры. Аналитический метод решения конечных игр 2x2 в смешанных стратегиях.

13. Графоаналитический метод решения конечных игр 2x2, 2xn и mx2 в смешанных стратегиях.

14. Общие методы решения конечных игр mxn. Сведение матричной игры к задаче линейного программирования. Связь решения игры с прямой и двойственной задачами ЛП.

14. Биматричные игры. Постановка задачи. Ситуация равновесия и поведение участников биматричных бескоалиционных игр. «Семейный спор». «Дилемма преступника».

15. Понятие неопределенности в теории игр. Понятие риска в теории игр.

16. Понятие «игры с природой». Задача принятия решений в условиях неопределенности. Задача принятия решений в условиях риска.

17. Критерий Вальда, критерий оптимизма, критерий пессимизма.

18. Критерий Сэвиджа, критерий Гурвица.

19. Критерий Байеса, Критерий Лапласа.

20. Основные понятия сетевого метода: работа, событие, сетевой график. Определение ранга работ. Упорядочение списка работ.

21. Виды сетевых графиков: логические («работы – связи») и структурные («события – работы»). Их преимущества и недостатки.

22. Основные требования к построению структурных сетевых графиков. Причины введения фиктивных работ.

23. Расчет временных характеристик событий: ранние и поздние сроки наступления, резерв времени.

24. Критический путь и его отыскание. Особенности критического пути.

25. Резервы времени работ, их смысл и способы отыскания.

26. Ранние и поздние сроки начала и окончания работ.

27. Отыскание вероятности завершения проекта не позднее заданного срока, гарантированного времени выполнения проекта, определение максимального срока окончания проекта с заданной надежностью.

28. Линейная диаграмма последовательности работ для поиска критического пути.

29. Понятие СМО. Классификация СМО. Характеристики СМО.

30. Уравнения Колмогорова. Предельные вероятности событий.

31. Процесс гибели и размножения.

32. Одноканальные СМО с отказами. Многоканальные СМО с отказами.

34. Одноканальные СМО с неограниченной очередью. Многоканальные СМО с неограниченной очередью.

35. СМО с ограниченной очередью. СМО с ограниченным временем ожидания.

Локальный электронный методический материал

Светлана Николаевна Мухина

ТЕОРИЯ ИГР И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Редактор М. А. Дмитриева

Уч.-изд. л. 2,7. Печ. л. 3,8.

Издательство федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Калининградский государственный технический университет».
236022, Калининград, Советский проспект, 1.