Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

А. Б. Тристанов

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины
для студентов по направлению подготовки 15.03.01 Машиностроение

Калининград
Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ»
2023

УДК 519.2(075)

Рецензент:
кандидат физико-математических наук, исполняющий обязанности заведующего кафедрой прикладной математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет»
А. И. Руденко

Тристанов, А. Б.
Теория вероятностей и математическая статистика: учебно-методическое пособие по изучению дисциплины для студентов по направлению подготовки 15.03.01 Машиностроение / А. Б. Тристанов. – Калининград: Изд-во ФГБОУ ВО «КГТУ», 2023. – 39 с.

В учебно-методическом пособии приведены цели и задачи изучения дисциплины, тематическое содержание дисциплины. Представлены методические указания по самостоятельному изучению дисциплины. Даны рекомендации по подготовке к промежуточной аттестации, приведены критерии оценивания текущей работы студентов. Пособие подготовлено в соответствии с требованиями утвержденной рабочей программы физико-математического модуля по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» для направления подготовки 15.03.01 Машиностроение.
Табл. – 3, список лит. – 11 наименований

Учебно-методическое пособие рассмотрено и одобрено в качестве локального электронного методического материала на заседании кафедры прикладной математики и информационных технологий Института цифровых технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» 24 мая 2023 г., протокол № 5

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины рекомендовано к использованию в учебном процессе в качестве локального электронного методического материала методической комиссией Института цифровых технологий 1 июня 2023 г., протокол № 6

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины рекомендовано к использованию в учебном процессе в качестве локального электронного методического материала методической комиссией ИАПС 31 августа 2023 г., протокол № 6

УДК 519.2(075)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов направления 15.03.01 Машиностроение, изучающих дисциплину «Теория вероятностей и математическая статистика», и соответствует требованиям, предъявляемым к формируемым компетенциям, знаниям, умениям и навыкам в области применения математического аппарата в профессиональной области согласно федеральным государственным образовательным стандартам высшего образования.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью освоения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» является формирование знаний, умений и навыков анализа, моделирования и решения теоретических и практических задач с широким использованием математического аппарата.

В результате освоения дисциплины студент должен:

- знать: фундаментальные (базовые) понятия и определения теории вероятностей и математической статистики; логику вероятностных отношений в недетерминированных условиях; основные методы теории вероятностей и математической статистики, применяемые для решения типовых задач; основы статистического анализа массовых явлений;

- уметь: осуществлять постановку задач вероятностного содержания; строить алгоритм решения конкретной типовой задачи, выбирать метод ее решения и обосновывать свой выбор; выбирать оптимальный метод решения задачи, оценивать полученный результат, строить простейшие математические модели прикладных и профессиональных задач; получать вероятные оценки искомых параметров изучаемых процессов и явлений с заданным уровнем значимости; пользоваться стандартными приемами прогноза событий и общепринятыми таблицами классических стандартных распределений; оценивать уровень достоверности разнородных групп данных, определять необходимый объем исходной информации для получения надежных результатов;

- владеть: математической символикой, основными способами представления математической информации (аналитическим, графическим, символьным, словесным и др.), определением области применения математического знания к решению конкретной задачи; навыками работы с типовыми пакетами программ статистического анализа и обработки экспериментальных данных; методами построения математических моделей и их исследования в различных сферах профессиональной деятельности, математическими знаниями как структурированной информацией.

Для успешного освоения дисциплины, в соответствии с учебным планом, используются знания, умения и навыки, получаемые студентами при освоении предшествующей дисциплины «Математический анализ».

В предлагаемом пособии представлено тематическое содержание дисциплины. Приведены подробные сведения о вопросах, рассматриваемых в данном курсе, и методические рекомендации преподавателя для самостоятельной подготовки. Каждая тема включает ссылки на литературу (или иной информационный ресурс), а также контрольные вопросы для самопроверки.

Даны методические рекомендации по выполнению предусмотренной учебным планом контрольной работы для студентов очной и заочной форм обучения.

Перечислены обязательные мероприятия текущего контроля, самостоятельной работы и усвоения разделов или отдельных тем дисциплины. Изложены требования к промежуточной аттестации по дисциплине.

Помимо данного пособия, студентам следует использовать материалы, размещенные в соответствующем данной дисциплине разделе ЭИОС [11], в которые более оперативно вносятся изменения для адаптации дисциплины под конкретную группу.

2. ТЕМАТИЧЕСКОЕ СОДЕРЖАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Таблица 1 – Темы лекционных и практических занятий

№ раздела	Раздел (модуль) дисциплины	Тема
Лекционные занятия		
1	Теория вероятностей	Тема 1.1 Основные понятия теории вероятностей
		Тема 1.2 Основные теоремы
		Тема 1.3 Случайные величины
		Тема 1.4 Предельные теоремы
2	Математическая статистика	Тема 2.1 Основные понятия математической статистики
		Тема 2.2 Статистическое оценивание параметров распределения
		Тема 2.3 Проверка статистических гипотез
		Тема 2.4 Факторный и корреляционный анализ
Практические занятия		
1	Теория вероятностей	Тема 1. Предмет теории вероятностей. Классификация событий. Алгебра событий. Элементы комбинаторики
		Тема 2. Аксиомы теории вероятностей. Классическое определение вероятности
		Тема 3. Геометрическая и статистическая вероятность
		Тема 4. Теоремы сложения и умножения. Вероятность наступления хотя бы одного события
		Тема 5. Формулы полной вероятности, Байеса, Бернулли, Пуассона. Наивероятнейшее число появлений события. Локальная и интегральная теоремы Лапласа
		Тема 6. Функция распределения и ее свойства. Дискретная случайная величина, ряд распределения. Числовые характеристики дискретных случайных величин. Примеры законов распределений
		Тема 7. Непрерывная случайная величина, плотность распределения и ее свойства. Числовые характеристики непрерывных случайных величин. Примеры законов распределений
		Тема 8. Многомерная случайная величина. Независимость случайных величин
		Тема 9. Функции от случайных величин. Предельные теоремы теории вероятностей, закон больших чисел

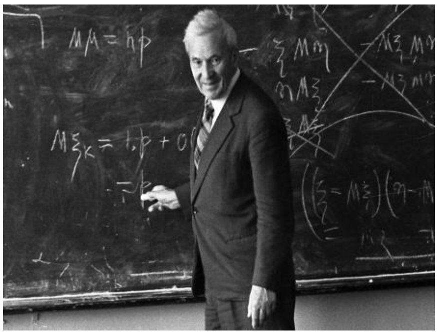
№ раздела	Раздел (модуль) дисциплины	Тема
2	Математическая статистика	Тема 10. Основные задачи и понятия математической статистики. Полигон и гистограмма. Числовые характеристики генеральной и выборочной совокупностей
		Тема 11. Статистическое оценивание параметров распределения: точечные оценки (методы моментов и максимального правдоподобия)
		Тема 12. Интервальные оценки. Распределения Пирсона, Стьюдента, Фишера – Снедекора. Построение доверительных интервалов при нормальном распределении
		Тема 13. Статистические гипотезы: виды и методы проверки. Параметрические гипотезы
		Тема 14. Непараметрические гипотезы. Критерий согласия, Колмогорова
		Тема 15. Элементы корреляционного анализа. Регрессионный анализ

РАЗДЕЛ 1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Тема 1.1 Основные понятия теории вероятностей

Перечень изучаемых вопросов

Элементарные сведения из теории множеств (понятие множества, объединение, пересечение, дополнение множеств). Случайное событие. Алгебра событий. Совместные и несовместные, зависимые и независимые события. Полная группа событий. Аксиоматика Колмогорова[1]. Вероятностное



[1] Колмогоров Андрей Николаевич (12 (25) апреля 1903, Тамбов – 20 октября 1987, Москва) – выдающийся советский математик, один из крупнейших математиков XX в. Один из основоположников современной теории вероятностей; им получены фундаментальные результаты в топологии, геометрии, математической логике, классической механике, теории турбулентности, теории сложности алгоритмов, теории информации, теории функций, теории тригонометрических рядов, теории меры, теории приближения функций, теории множеств, теории дифференциальных уравнений, теории динамических систем, функциональном анализе и в ряде других областей математики и её приложений. Автор новаторских работ по философии, истории, методологии и преподаванию математики.

пространство. Опыт с конечным числом исходов. Классическое определение вероятности. Непосредственный подсчет вероятностей. Схема выбора с возвращением и без возвращения элементов. Частота или статистическая вероятность события. Геометрическая вероятность. Аксиомы теории вероятностей и их следствия.

Методические указания

Теория вероятностей, как и многие другие математические дисциплины, в своей основе имеет теорию множеств. В связи с этим вам следует повторить соответствующие разделы математики, которые изучались ранее.

Основополагающим понятием теории вероятностей является понятие случайного события. Дайте определения элементарному событию (исходу), достоверному и невозможному событию, множеству (пространству) элементарных исходов. Следует уяснить, что любое случайное событие есть подмножество множества элементарных исходов. Рассмотрите простые примеры с бросанием игрального кубика и извлечением карт из колоды. Рассмотрите понятие совместных и несовместных событий. Наглядным является иллюстрация событий с помощью кругов Эйлера. Дайте определение суммы и произведения событий.

Современная теория вероятностей оперирует понятием «вероятностное пространство». Для построения этого понятия потребуется разобраться с более сложным математическим объектом – σ-алгебра.

σ-алгебра – это совокупность некоторого множества и операций над элементами этого множества, такая, что операции замкнуты относительно этого множества. Конкретизируем это понятие для теории вероятностей.

Дадим определение: σ-алгебра событий Σ – это совокупность множества всех подмножеств пространства элементарных исходов и заданных операций сложения и умножения событий. Покажите, что достоверное Ω и невозможное события содержатся в Σ.

Бытовым пониманием вероятности события является степень уверенности в том, что событие произойдет или не произойдет. Более строго вероятность определяется через систему аксиом как мера на вероятностном пространстве.

Аксиоматика Колмогорова. Вероятностью (вероятностной мерой) называют числовую функцию, заданную на σ-алгебре событий Σ, такую что:

1. $P(A) \geqslant 1$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Для любых несовместных событий A и B справедливо:

$P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Вероятностным пространством называют совокупность пространства элементарных исходов, алгебры событий и вероятностной меры – (Ω, Σ, P).

Далее следует рассмотреть частные случаи задания вероятностных мер – классическую, геометрическую и статистическую вероятности. Обязательно приведите примеры типовых задач. Уясните общность задач для одних и тех же вероятностных пространств. Покажите, что, например, задачи «на классическую вероятность» эквивалентны задачам про извлечение цветных шаров из урны.

Завершая изучение этой темы, следует убедиться, что вы можете давать все указанные выше определения и приводить иллюстративные примеры «из жизни». В качестве предмета можно выбирать бросание игральных кубиков, извлечение карт из колоды или шаров из урны.

Рекомендуемая литература по теме

[1, гл. 1; 8, гл. 1–2]

Контрольные вопросы

1. Что называют суммой случайных событий? произведением случайных событий?
2. Как интерпретировать дополнение случайного события до Ω?
3. Покажите, что для случайных событий справедливы законы де Моргана.
4. Что означает замкнутость множества относительно некоторой операции?
5. Проиллюстрируйте с помощью кругов Эйлера совместные и несовместные события.
6. Что такое классическая вероятность? Покажите, что для классической вероятности справедливы аксиомы Колмогорова.
7. *В чем отличия классической и геометрической вероятностей? Какие меры множеств используются для вычисления геометрической вероятности? Обобщите свой ответ на n-мерные пространства.*

Тема 1.2 Основные теоремы

Перечень изучаемых вопросов

Теорема сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность события. Независимость событий. Формула полной вероятности. Теорема Байеса (формула Байеса). Независимые испытания. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли. Локальная и интегральная предельные теоремы. Теорема Пуассона.

Методические указания

После того как мы изучили базовые понятия, аксиомы и свойства, можно переходить к формулированию основных теорем, которые из них следуют. Докажите теоремы о сложении и умножении вероятностей.

Дайте определение зависимым и независимым событиям, условной вероятности. Покажите, что условная вероятность удовлетворяет аксиомам Колмогорова. Как формулируется теорема о произведении вероятностей для зависимых событий?

Уделите достаточно времени для разбора формулы полной вероятности и связанной с ней формулы Байеса.

В продолжение темы разберите доказательства и примеры применения схемы Бернулли, локальной и интегральной предельных теорем Муавра – Лапласа, теоремы Пуассона.

Рекомендуемая литература по теме

[1, гл. 1–2; 8, гл. 3]

Контрольные вопросы

1. Дайте формулировки всех обозначенных в теме 1.2 теорем.
2. Приведите примеры зависимых и независимых событий.
3. Как связаны понятия совместных и зависимых событий?
4. Как вычислить вероятность суммы двух несовместных событий?

Тема 1.3 Случайные величины

Перечень изучаемых вопросов

Понятие случайной величины. Функция распределения случайной величины и ее свойства. Дискретные и непрерывные случайные величины. Плотность распределения непрерывной случайной величины и ее свойства. Биномиальное распределение. Распределение Пуассона. Геометрическое распределение. Равномерное распределение. Экспоненциальное распределение. Нормальное распределение. Распределение Вейбулла. Гамма-распределение. Распределение хи-квадрат. Числовые характеристики случайных величин и их свойства: математическое ожидание, дисперсия, СКО, мода, медиана, начальные и центральные моменты высших порядков. Понятие многомерной случайной величины. Совместная функция распределения. Независимые случайные величины. Многомерное нормальное распределение. Функции случайных величин.

Методические указания

Данная тема является достаточно объемной и потребует большой самостоятельной работы. Традиционно начать следует с изучения основных определений и понятий. Четко уясните понятия функции распределения. Известная функция распределения позволяет получить любую информацию о случайной величине, поэтому все усилия математической статистики, о которой пойдет речь дальше, связаны с нахождением именно функции распределения или хотя бы установлением отдельных ее свойств. Случайные величины делятся на дискретные и непрерывные. Для дискретной случайной величины рассмотрите понятие закона распределения, как соответствия значения случайной величины вероятности появления этого значения. Для непрерывной – плотность распределения. Рассмотрите свойства биномиального распределение, распределения Пуассона, геометрического распределения, равномерного распределения, экспоненциального распределения, нормального распределения, распределения Вейбулла, гамма-распределение и распределение хи-квадрат. Составьте таблицу свойств распределений, зарисуйте графики, если это возможно, функции распределения и плотности распределения для различных параметров. Особое внимание уделите нормальному распределению.

Уяснив понятие функции распределения, перейдем к изучению числовых характеристик случайных величин. Целесообразно расчетные формулы характеристик изучать параллельно для дискретных и непрерывных случайных величин. Обратите внимание, что зачастую параметрами распределений являются именно значения числовых характеристик. Вам нужно знать следующие числовые характеристики и их свойства: математическое ожидание, дисперсия, СКО, мода, медиана. Рассмотрите обобщение числовых характеристик – центральные и начальные моменты высших порядков.

До сих пор мы имели дело с одномерной случайной величиной, но зачастую на практике случайные величины многомерны. Далее переходим к обобщению – многомерным случайным величинам. Дайте определение многомерной случайной величине и совместной функции распределения. Отдельно изучите многомерное нормальное распределение.

На практике придется столкнуться с понятием «функция случайной величины», т.е. случай, когда некоторая числовая величина является функцией (зависит) от одной или нескольких случайных величин. В общем случае данная величина также является случайной, причем закон распределения этой новой случайной величины зависит как от законов распределения аргументов, так и от свойств самой функции. Рассмотрите задачи нахождения распределения такой величины, а также их числовых характеристик [3, разд. 6.7].

Рекомендуемая литература по теме

[1, гл. 3–5; 8, гл. 4–8]

Контрольные вопросы

1. Дайте определение случайной величине. Как связаны случайные величины и случайные события?
2. Докажите свойства функции распределения.
3. Как по известной функции распределения найти вероятность попадания случайной величины в интервал?
4. Как, зная плотность распределения, найти вероятность попадания случайной величины в интервал?
5. Приведите примеры дискретных случайных величин.
6. Перечислите и докажите свойства плотности распределения.
7. Как по известной плотности распределения найти функцию распределения?
8. Дайте характеристику равномерному закону распределения (плотность распределения, функция распределения, основные числовые характеристики).
9. Дайте характеристику нормальному закону распределения (плотность распределения, функция распределения, основные числовые характеристики).
10. Что такое функция Лапласа? Как по таблице значений функции Лапласа узнать вероятность попадания нормальной случайной величины в заданный интервал?
11. Дайте определение n-мерной случайной величины.
12. Дайте определение совместной функции распределения.
13. Что такое функция случайной величины?
14. Как найти функцию распределения функции от непрерывной случайной величины?
15. Как найти функцию распределения функции от дискретной случайной величины?

Тема 1.4 Предельные теоремы

Перечень изучаемых вопросов

Последовательности случайных величин. Сходимость последовательности. Сходимость «почти наверное», по вероятности, в среднеквадратичном. Сходимость функций распределения. Неравенства

Чебышёва. Закон больших чисел в форме Чебышёва, в форме Бернулли. Центральная предельная теорема.

Методические указания

Завершая изучение теории вероятностей, мы обратимся к важной группе теорем, называемых предельными. Эти теоремы являются своеобразным мостом между теорией вероятностей и математической статистикой, объясняя предельное поведение относительной частоты событий.

Дайте определение последовательности случайных величин и рассмотрите основные типы сходимости: сходимость «почти наверное», сходимость по вероятности, сходимость в среднем квадратичном. Рассмотрите сходимость последовательностей функций распределения. Рассмотрите примеры.

Далее переходите к изучению закона больших чисел. Предварительно рассмотрите с доказательством первое и второе неравенства Чебышёва. Дайте определение закона больших чисел как критерия устойчивости средних арифметических случайных величин. Уясните его практический смысл, заключающийся в том, что при предельном росте числа испытаний средние арифметические случайных величин ведут себя как неслучайные и совпадают со своими средними значениями.

Сформулируйте теоремы: закон больших чисел в форме Чебышёва и закон больших чисел в форме Бернулли. Второй является частным случаем первого.

Переходите к формулированию центральной предельной теоремы. Эта теорема играет важную практическую роль, обосновывая использование нормального закона распределения для моделирования различного вида шумов и погрешностей как суммарного результата воздействия большого количества случайных факторов. В завершение сформулируйте интегральную теорему Муавра – Лапласа.

Несмотря на необязательность рассмотрения подробных доказательств теорем в рамках данного курса, тем не менее для студентов, претендующих на получение высоких оценок, изучение доказательств рекомендуется, так как позволяет понять механизмы сформулированных законов.

Рекомендуемая литература по теме

[1, гл. 8; 8, гл. 9]

Контрольные вопросы

1. Дайте определение основным типам сходимости. В чем их отличие?

2. Сформулируйте первое и второе неравенства Чебышёва. Приведите примеры.
3. Приведите геометрическую интерпретацию первого и второго неравенств Чебышёва.

РАЗДЕЛ 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Тема 2.1 Основные понятия математической статистики

Перечень изучаемых вопросов

Предмет математической статистики. Генеральная и выборочная совокупности. Выборка, объем выборки.

Методические указания

Переходя к изучению математической статистики, следует обратить внимание на предмет данной науки – изучение свойств случайных величин, получаемых по результатам экспериментальных исследований. Следует еще раз проанализировать ситуацию проведения эксперимента и уяснить различия предметов теории вероятностей и математической статистики. Основоположниками математической статистики как науки являются Я. Бернулли, П. Лаплас, К. Пирсон. Дальнейшее развитие математическая статистика нашла в работах Г. Крамер, Р. Фишера, Ю. Неймана. Существенный вклад внесли наши соотечественники – П. Л. Чебышёв, А. М. Ляпунов, А. Н. Колмогоров и др.

Далее дайте определение генеральной и выборочной совокупности. Под выборкой далее будем понимать последовательность одинаково распределенных случайных величин, распределение которых совпадает с генеральной совокупностью.

Рекомендуемая литература по теме

[1, гл. 11; 9, гл. 1]

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте основные задачи математической статистики.
2. Что такое генеральная и выборочная совокупности?
3. Приведите примеры практических проблем, приводящих к статистическим задачам.

Тема 2.2 Статистическое оценивание параметров распределения

Перечень изучаемых вопросов

Определение оценки параметра распределения, свойства оценок, точечное оценивание, метод моментов, метод максимального правдоподобия, интервальное оценивание

Методические указания к изучению

Переходя к изучению данной темы, следует вспомнить такие понятия теории вероятностей, как функция распределение и числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсия, мода, медиана, асимметрия, эксцесс, центральный и начальный моменты.

Далее дайте определение точечной оценке параметров распределения.

Под оценкой следует понимать некоторую функцию от значений выборки, которая в некотором смысле приближает реальное значение параметра генеральной совокупности. Следует уяснить, что любая оценка, будучи функцией от случайной выборки, есть случайная величина, поэтому, как и любая случайная величина, оценка имеет свой закон распределения и соответствующие числовые характеристики. Рассмотрите основные свойства точечных оценок: смещенность, состоятельность, эффективность.

Рассмотрите доказательство несмещенности, состоятельности и эффективности выборочного среднего. Покажите, что распределение выборочного среднего подчиняется нормальному закону. Переходите к изучению свойств выборочной и исправленной дисперсии. Покажите, что выборочная дисперсия – смещенная состоятельная оценка дисперсии генеральной совокупности.

В статистике разработано достаточно большое количество методов получения точечных оценок. Рассмотрите метод моментов, метод максимального правдоподобия и метод наименьших квадратов.

Метод моментов, предложенный К. Пирсоном, заключается в определении значения точечной оценки путем решения системы уравнений, полученной путем рассмотрения соответствующих выборочных моментов и их зависимости от оцениваемого параметра. Рассмотрите пример оценки параметра биномиального распределения (вероятности «успеха» в n независимых повторных экспериментах).

Метод максимального правдоподобия был предложен Р. Фишером. Дайте определение функции правдоподобия. Предположим, что функция правдоподобия известна с точностью до оцениваемого параметра, тогда оценкой максимального правдоподобия параметра называют такое его значение, при котором функция правдоподобия достигает максимальное значение. Если функция правдоподобия дифференцируема по искомому параметру, то максимальное значение будет достигаться в соответствующих критических точках.

Далее рассмотрим интервальное оценивание параметров распределения. В отличие от точечного значения, интервальная оценка дает вероятностную оценку точности оценивания неизвестного параметра. Т.е. получаемая оценка представляет собой не конкретное (вспомним – случайное) значение, а интервал, в который оцениваемый параметр попадает с заданной вероятностью. Дайте определение нижней и верхней границам интервальной оценки, коэффициенту доверия (доверительной вероятности, уровню доверия).

Построение интервальной оценки сводится к выполнению следующих шагов: построение центральной статистики с известной функцией распределения, нахождение соответствующих квантилей по известному значению уровня доверия, определение нижней и верхней границ интервалов.

Рассмотрите конкретные примеры построения интервальных оценок, например параметра экспоненциального распределения, математического ожидания нормального распределения при известной и неизвестной дисперсии.

Рекомендуемая литература по теме

[1, гл. 12; 9, гл. 2–3]

Контрольные вопросы

1. Какую оценку называют несмещенной, состоятельной, эффективной?
2. В чем различие точечной и интервальной оценок?
3. В чем заключается метод моментов в построении точечной оценки?
4. Что такое функция правдоподобия?
5. В чем состоит метод максимального правдоподобия построения точечной оценки?
6. Что такое центральная статистика?
7. Какую статистику используют для построения интервальной оценки математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии?

Тема 2.3 Проверка статистических гипотез

Перечень изучаемых вопросов

Понятие статистической гипотезы, статистический критерий, ошибки первого и второго рода, критерий Неймана – Пирсона, отношение правдоподобия, критерий согласия.

Методические указания

Предположим, что на основе некоторой априорной информации известно значение параметра распределения или вид распределения наблюдаемых данных. На основе этой информации формируется гипотеза о том, что это значение совпадает с теоретическим. Такие гипотезы называются статистическими, а соответствующие методы проверки статистических гипотез позволяют определить, можно ли доверять полученным данным и следует ли принять выдвинутую гипотезу.

Общая схема проверки гипотез заключается в построении некоторой функции – статистического критерия, распределение которой известно для случая, когда гипотеза верна. Тогда можно определить некоторое множество значений (критическое множество) данного критерия, вероятность появления которого в случае, если гипотеза верна, маловероятно, и считать, что если значение критерия попадает в это множество, то гипотезу следует отвергнуть, в противном случае – принять.

Рассмотрите ситуации принятия неверной гипотезы и отказа от верной гипотезы, дайте определение ошибкам первого и второго рода и соответствующим им вероятностям.

Рассмотрите подробно критерий Неймана – Пирсона (критерий отношения правдоподобия). Рассмотрите пример построения наиболее мощного критерия проверки гипотезы о значении математического ожидания нормального распределения и значении параметра экспоненциального распределения.

Изучите вопрос определения объема выборки, обеспечивающей заданные вероятности ошибок первого и второго рода.

Рассмотренные выше методы предполагают известную форму распределения генеральной совокупности, т.е. гипотезы строились относительно параметров известного распределения. Перейдем к непараметрическим гипотезам.

Критерий согласия – статистический критерий, предназначенный для обнаружения расхождений между теоретической статистической моделью и экспериментальными данными, которые, по версии исследователя, должны описываться соответствующей теоретической моделью.

Рассмотрите критерий Колмогорова, проверяющий простую гипотезу о совпадении непрерывной теоретической и эмпирической функций распределения. Далее переходите к рассмотрению критерия согласия хи-квадрат.

Зачастую возникает вопрос проверки взаимосвязи или взаимной независимости двух наборов данных. Рассмотрите критерий Спирмена.

Рекомендуемая литература по теме

[1, гл. 13; 9, гл. 4–5]

Контрольные вопросы

1. Что называют уровнем значимости критерия?
2. Что называют мощностью критерия?
3. В соответствии с теоремой Неймана – Пирсона какой критерий является наиболее мощным?
4. Какими свойствами обладает ранговый коэффициент корреляции Спирмена?
5. Какие критерии называют критериями согласия?
6. В чем заключается критерий Колмогорова проверки гипотез?

Тема 2.4 Факторный и корреляционный анализ

Перечень изучаемых вопросов

Задачи корреляционного, регрессионного и дисперсионного анализа. Выборочный коэффициент корреляции, уравнение регрессии, однофакторный анализ.

Методические указания

Установление зависимостей между наблюдаемыми данными является важной частью науки и инженерной практики. Выделим основные задачи данного раздела: выявление наличия взаимосвязей между отдельными группами переменных (корреляционный анализ), установление аналитической зависимости вида Y=F(X), когда переменные носят количественный характер (регрессионный анализ), анализ влияния некоторых качественных параметров X на некоторую величину Y (дисперсионный анализ).

Вспомните определение понятий «ковариация» и «корреляция», понятие зависимых и независимых случайных величин. Далее рассмотрите понятие корреляционного поля и корреляционной таблицы, дайте точечную и интервальную оценку коэффициента корреляции. Рассмотрите примеры данных, имеющих разные значения коэффициентов корреляции и интерпретацию результатов.

Далее переходите к следующей задаче исследования зависимостей. Функцию, описывающую зависимость условного среднего значения выходной переменной Y от заданных фиксированных значений входных переменных X, называют функцией регрессии. Установление реального вида данной функции не всегда возможно, поэтому, как правило, ограничиваются некоторым приближением, например линейным. Изучите уравнение линейной регрессии. Рассмотрите метод наименьших квадратов как способ получения коэффициентов уравнения по имеющимся экспериментальным данным. Рассмотрите применение регрессионного анализа в планировании экспериментов. Обзорно рассмотрите задачу проверки адекватности модели регрессии, значимости ее коэффициентов.

В завершение изучения раздела математической статистики познакомьтесь с задачами дисперсионного анализа, как группы методов, позволяющих установить наличие, например, влияния изменения некоторого качественного параметра на экспериментальный объект.

Рекомендуемая литература по теме

[1, гл. 14–15; 9, гл. 6–8]

Контрольные вопросы

1. Перечислите задачи изучения статистических зависимостей.
2. Приведите примеры статистических зависимостей и практических проблем, приводящих к соответствующим разделам факторного анализа.
3. Какой статистический критерий используется для проверки гипотезы о равенстве 0 коэффициента корреляции?
4. Что называют коэффициентом детерминации?
5. Запишите формулу для вычисления оценки коэффициента корреляции.
6. Приведите пример оценки параметров линейной регрессии.
7. В чем различие однофакторного и двухфакторного дисперсионного анализа?

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Учебным планом обучения предусмотрено выполнение контрольной работы (очная и заочная формы).

Контрольная работа должна быть оформлена в электронном виде с использованием текстового редактора (форматы файла *.docx, *.pdf). Обязательно наличие титульного листа и нумерации страниц. Для студентов заочной формы обучения электронный вариант контрольной работы распечатывается и в сброшюрованном виде регистрируется на кафедре прикладной математики и информационных технологий. По специальному указанию преподавателя печатный вариант может быть заменен на электронный при отправке контрольной работы через ЭИОС. В этом случае регистрация осуществляется в электронном журнале кафедры: файл с контрольной работой и вспомогательные файлы (при их наличии) загружаются в хранилище личных файлов студента в ЭИОС и отправляются в виде ссылки через отдельное задание курса ЭИОС на проверку преподавателю.

В контрольной работе предлагается выполнить несколько заданий с индивидуальными вариантами по указанным темам дисциплины. Варианты заданий, образец их оформления и выполнения размещены в [10, 11]. Если преподаватель не указал иного, то вариант выбирается по последним двум цифрам шифра, а в случае отсутствия такого номера варианта в таблице – по последней цифре.

Целью выполнения контрольной работы является получение студентами практических навыков решения задач по теории вероятностей и математической статистике, формирование у них основы математического подхода к исследованию задач, демонстрация применения математических методов при решении прикладных задач.

Контрольная работа выполняется по разделам (темам):

Раздел «Теория вероятностей»

Случайные события

Тема 1. Предмет теории вероятностей. Классификация событий. Алгебра событий. Элементы комбинаторики.

Тема 2. Аксиомы теории вероятностей. Классическое определение вероятности.

Тема 4. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Вероятность наступления хотя бы одного события.

Тема 5. Формулы полной вероятности, Байеса, Бернулли, Пуассона. Наивероятнейшее число появлений события. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.

Рекомендуемая литература по теме
[1, гл. 1–2; 4, гл. 1–3; 7, гл. 5; 10, гл. 3, с. 10–25, 44–53]

Случайные величины

Тема 6. Функция распределения и ее свойства. Дискретная случайная величина, ряд распределения. Числовые характеристики дискретных случайных величин. Примеры законов распределений.

Тема 7. Непрерывная случайная величина, плотность распределения и ее свойства. Числовые характеристики непрерывных случайных величин. Примеры законов распределений.

Рекомендуемая литература по теме
[1, гл. 3–5; 4, гл. 4–7; 7, гл. 5; 10, гл. 3, с. 26–33, 53–60]

Раздел «Математическая статистика»

Тема 10. Основные понятия и задачи математической статистики. Полигон и гистограмма. Числовые характеристики генеральной и выборочной совокупностей.

Тема 11. Статистическое оценивание параметров распределения: точечные оценки.

Тема 12. Интервальные оценки. Распределения Пирсона, Стьюдента, Фишера – Снедекора. Построение доверительных интервалов при нормальном распределении.

Рекомендуемая литература по теме
[1, гл. 11–12; 4, гл. 9–13; 7, гл. 5; 10, гл. 3, с. 41–43, 60–61]

Образец типового варианта заданий контрольной работы (очная и заочная формы) представлен в Приложении 1.

В случае применения балльно-рейтинговой системы оценивания знаний студентов контрольная работа (очная форма) по усмотрению преподавателя может быть заменена на тестирование по соответствующим разделам (темам) дисциплины. Типовые тестовые задания, предназначенные для самопроверки студентов по окончании изучения раздела (темы), приведены в Приложении 2.

4. ТРЕБОВАНИЯ К АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

4.1. ТЕКУЩАЯ АТТЕСТАЦИЯ

В ходе изучения дисциплины студентам предстоит пройти следующие этапы текущей аттестации:

– выполнить и защитить задания по темам практических занятий;

– выполнить контрольную работу (тестирование) по разделам (темам) «Теория вероятностей (случайные события, случайные величины)», «Математическая статистика».

Преподаватель вправе выбрать методику оценивания знаний студентов: традиционная зачетно-экзаменационная либо балльно-рейтинговая. При выборе методики должно учитываться мнение студентов. В случае если преподаватель выбрал балльно-рейтинговую систему, отдельные студенты вправе просить оценить их знания в рамках традиционной системы.

4.2. ПОРЯДОК ПРИМЕНЕНИЯ РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЫ

В рамках балльно-рейтинговой системы оценка выставляется за качество выполнения и защиту заданий по темам практических занятий, а также по результатам тестирования (таблица 2).

Таблица 2 – Виды деятельности и соотношение трудоемкости

Вид деятельности	Доля	Кол-во ед.	Макс. балл за ед.	Всего
Обязательные виды деятельности				
Посещаемость занятий	30 %	N1	=300/N1	300
Выполнение заданий по темам практических занятий (защита)	40 %	15	=400/15	400
Тестирование	30 %	N2	=300/N2	300
Итого:	100 %			1000
Дополнительные задания (по выбору студента)				
Подготовка реферата (видеодоклада)	12 %	1	120	120
Решение и защита дополнительных задач	10 %	10	10	100
Выполнение задания в рамках НИРС	50 %	1	500	500

4.3. УСЛОВИЯ ПОЛУЧЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ОЦЕНКИ

Завершающим этапом изучения дисциплины является промежуточная аттестация в форме экзамена. К экзамену допускаются студенты, положительно аттестованные по результатам текущего контроля при условии успешной защиты не менее 60 % заданий практических работ и 100 % заданий контрольной работы (не менее 60 % правильных ответов на тестовые вопросы).

При проведении экзамена в традиционной форме экзаменационные материалы компонуются в билеты по два вопроса, относящиеся к различным темам не менее двух разделов дисциплины, и два практических задания. На усмотрение преподавателя экзамен может быть проведен в письменной, устной или комбинированной форме, а также в форме тестирования. При наличии сомнений в отношении знаний и умений студента экзаменатор может (имеет право) задать дополнительные вопросы, а также дать дополнительное задание.

В рамках балльно-рейтинговой системы для студентов очной формы обучения экзамен выставляется по баллам, набранным за выполнение соответствующих видов деятельности (таблица 2); для студентов заочной формы обучения – за качество выполнения и защиту контрольной работы, за выполнение самостоятельных работ, по результатам тестирования.

Универсальная система оценивания результатов обучения включает в себя системы оценок: 1) «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно»; 2) «зачтено», «не зачтено»; 3) 100-балльную/процентную систему и правило перевода оценок в пятибалльную систему (таблица 3).

Таблица 3 – Система оценок и критерии выставления оценки

Система оценок / Критерий	**2**	**3**	**4**	**5**
	0-59 %	**60-74 %**	**75-84 %**	**85-100 %**
	«неудовлетвори-тельно»	**«удовлетво-рительно»**	**«хорошо»**	**«отлично»**
	«не зачтено»	**«зачтено»**		
1. Систем-ность и полнота знаний в отношении изучаемых объектов	Обладает частичными и разрозненными знаниями, которые не может научно корректно связывать между собой (только некоторые из них может связывать	Обладает минимальным набором знаний, необходимых для системного взгляда на изучаемый объект	Обладает набором знаний, достаточным для системного взгляда на изучаемый объект	Обладает полнотой знаний и системным взглядом на изучаемый объект

Система оценок / Критерий	**2**	**3**	**4**	**5**
	0-59 %	**60-74 %**	**75-84 %**	**85-100 %**
	«неудовлетвори-тельно»	**«удовлетво-рительно»**	**«хорошо»**	**«отлично»**
	«не зачтено»	**«зачтено»**		
	между собой)			
2. Работа с информацией	Не в состоянии находить необходимую информацию либо в состоянии находить отдельные фрагменты информации в рамках поставленной задачи	Может найти необходимую информацию в рамках поставленной задачи	Может найти, интерпрети-ровать и систематизи-ровать необходимую информацию в рамках поставленной задачи	Может найти, систематизи-ровать необходимую информацию, а также выявить новые, дополнительные источники информации в рамках поставленной задачи
3. Научное осмысление изучаемого явления, процесса, объекта	Не может делать научно-корректных выводов из имеющихся у него сведений, в состоянии проанализировать только некоторые из имеющихся у него сведений	В состоянии осуществлять научно-корректный анализ предоставлен-ной информации	В состоянии осуществлять системати-ческий и научно-корректный анализ предоставлен-ной информации, вовлекает в исследование новые, релевантные задаче данные	В состоянии осуществлять системати-ческий и научно-корректный анализ предоставлен-ной информации, вовлекает в исследование новые, релевантные поставленной задаче данные, предлагает новые ракурсы поставленной задачи
4. Освоение стандартных алгоритмов решения профессио-нальных задач	В состоянии решать только фрагменты поставленной задачи в соответствии с заданным алгоритмом, не освоил предложенный алгоритм, допускает ошибки	В состоянии решать поставленные задачи в соответствии с заданным алгоритмом	В состоянии решать поставленные задачи в соответствии с заданным алгоритмом, понимает основы предложенного алгоритма	Не только владеет алгоритмом и понимает его основы, но и предлагает новые решения в рамках поставленной задачи

Компетенции в той части, в которой они должны быть сформированы в рамках изучения дисциплины, могут считаться сформированными в случае, если студент получил на экзамене положительную оценку.

4.4. ТИПОВЫЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Случайные события. Классическое, статистическое, геометрическое определения вероятности.

2. Произведение событий. Зависимые и независимые события. Теоремы умножения вероятностей.

3. Сумма событий. Теоремы сложения.

4. Следствия из теорем сложения и умножения. Формула полной вероятности. Формулы Бейеса.

5. Основные формулы комбинаторики. Повторение испытаний. Формула Бернулли.

6. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.

7. Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности события в одном испытании. Закон больших чисел в форме Бернулли.

8. Дискретные случайные величины. Закон распределения. Числовые характеристики и их свойства.

9. Биномиальный, геометрический, гипергеометрический законы распределения. Распределение Пуассона. Простейший поток событий.

10. Интегральная функция распределения и ее свойства.

11. Непрерывные случайные величины. Дифференциальная функция распределения (плотность вероятности) и ее свойства.

12. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

13. Равномерный закон распределения.

14. Показательный закон распределения. Функция надежности.

15. Нормальный закон распределения. Вероятность попадания значений случайной величины в заданный интервал для нормального закона.

16. Вероятность отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания для нормального закона. Правило трех сигм.

17. Понятие о начальных и центральных моментах распределения.

18. Асимметрия и эксцесс эмпирического распределения.

19. Понятие о законе больших чисел. Центральная предельная теорема Ляпунова.

20. Генеральная и выборочная совокупности. Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения и ее свойства.

21. Графическое изображение статистического распределения. Полигон и гистограмма. Числовые характеристики статистического распределения: выборочная средняя, выборочная дисперсия, среднее квадратическое отклонение, размах, мода, медиана. Методы их вычисления.

22. Оценка неизвестных параметров распределения. Точечные оценки. Свойства оценок: несмещенность, состоятельность, эффективность. Точечные оценки математического ожидания и дисперсии. «Исправленная» дисперсия.

23. Интервальные оценки. Доверительный интервал, доверительная вероятность.

24. Доверительный интервал для математического ожидания при известной генеральной дисперсии нормального распределения.

25. Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной генеральной дисперсии нормального распределения.

26. Доверительный интервал для дисперсии нормального распределения.

27. Статистические гипотезы. Проверка статистических гипотез. Статистический критерий. Уровень значимости критерия. Критическая область.

28. Проверка гипотезы о нормальном распределении изучаемой случайной величины. Критерий Пирсона.

29. Функциональная, статистическая, корреляционная зависимости Линейная корреляция. Уравнение регрессии. Коэффициент регрессии.

30. Зависимые и независимые случайные величины. Корреляционный момент (ковариация). Коэффициент корреляции и его свойства.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном учебно-методическом пособии по изучению дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» представлены темы лекционных и практических занятий, даны методические указания по их изучению, контрольные вопросы и ссылки на соответствующую литературу. Также приведены критерии оценивания текущей и промежуточной аттестации по дисциплине и перечень вопросов для подготовки к экзамену.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. Кацко, И. А. Теория вероятностей и математическая статистика / И. А. Кацко, П. С. Бондаренко, Г. В. Горелова. - 3-е изд., испр. и доп. - Санкт-Петербург: Лань, 2023. - 436 с. - Режим доступа: для авториз. пользователей. - Лань: электронно-библиотечная система. - URL: https://e.lanbook.com/book/302663 (дата обращения: 15.02.2023).

2. Балдин, К. В. Основы теории вероятностей и математической статистики: учебник / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев; под общ. ред. К. В. Балдина. - 5-е изд., стер. - Москва: ФЛИНТА, 2021. - 489 с. - Режим доступа: по подписке. - URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=500648 (дата обращения: 18.02.2022).

Дополнительная литература

3. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / В. Е. Гмурман. - 12-е изд. - Москва: Юрайт, 2014. - 478 с.

4. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие / В. Е. Гмурман. - 11-е изд., перераб. и доп. - Москва: Юрайт, 2014. - 404 с.

5. Хуснутдинов, Р. Ш. Сборник задач по курсу теории вероятностей и математической статистики: учеб. пособие / Р. Ш. Хуснутдинов. - 2-е изд., испр. - Санкт-Петербург: Лань, 2022. - 320 с. - Режим доступа: для авториз. пользователей. - Лань: электронно-библиотечная система. - URL: https://e.lanbook.com/book/211733 (дата обращения: 18.02.2022).

6. Антипов, Ю. Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для студентов высш. учеб. заведений, по направлениям подгот. и специальностям в обл. техники и технологии / Ю. Н. Антипов, Ж. И. Виницкая, Т. А. Кутузова; Калинингр. гос. техн. ун-т. - Калининград: КГТУ, 2021. - 194 с.

7. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие / П. Е. Данко [и др.]. - 7-е изд., испр. - Москва: АСТ: Мир и Образование; Минск: Харвест, 2014. - 815 с.

8. Теория вероятностей: учеб. для вузов. - 3-е изд., испр. / А. В. Печинкин, О. И. Тескин, Г. М. Цветкова [и др.]; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. - Серия: Математика в техническом университете. - Вып. XVI. - Москва: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. - 456 с.

9. Математическая статистика: учеб. для вузов / В. Б. Горяинов, И. В. Павлов, Г. М. Цветкова [и др.]; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. -

Серия: Математика в техническом университете. - Вып. XVII. - Москва: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. - 424 с.

10. Антипов, Ю. Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб.-метод. пособие / Ю. Н. Антипов, Ж. И. Виницкая, Т. А. Кутузова. - Калининград: Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ», 2016. - 78 с.

11. ЭИОС ФГБОУ ВО «КГТУ». 15.03.01 Машиностроение / Технологии, оборудование и автоматизация машиностроительных производств / МС Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]. - URL: https https://eios.klgtu.ru/course/view.php?id=2970 (дата обращения: 20.05.2023).

Приложение 1

ТИПОВОЙ ВАРИАНТ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ (ОЧНАЯ ФОРМА)

Раздел «Теория вероятностей»

Случайные события

1. В партии из 80 банок 6 оказалось нестандартными. Найти вероятность того, что две взятые подряд банки окажутся нестандартными.

2. В ящике 10 заклепок: 5 железных, 3 латунные и 2 медные. Взяли наудачу 2 заклепки. Какова вероятность того, что обе они из одного материала?

3. Вероятность того, что телевизор в течение гарантийного срока потребует ремонта, равна 0,2. Найти вероятность того, что из 6 проданных телевизоров в течение гарантийного срока: А – потребуют ремонта не более одного, Б – хотя бы один не потребует ремонта.

4. Посажено 900 семян кукурузы. Вероятность прорастания отдельного семени равна 0,8. Найти вероятность того, что взойдет не менее 700 ростков кукурузы.

5. Произведено 200 независимых испытаний. Вероятность осуществления события А в каждом из которых равна 0,6. Какова вероятность того, что событие осуществится: а) ровно 200 раз, б) от 180 до 190 раз, в) не менее 200 раз?

Случайные величины

6. Дискретная случайная величина задана законом распределения:

X	11.3	11.6	12.4	13.2
P	0.5	0.1	0.2	0.2

Найти M(X), D(X) и G(X). Построить график F(X).

7. Непрерывная случайная величина задана интегральной функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x/5 & 0 < x \le 5. \\ 1 & x > 5 \end{cases}$$

Найти дифференциальную функцию f(x). Найти M(X), D(X) и σ (X). Найти P(3<x<4). Построить график F(X)и f(X).

Раздел «Математическая статистика»

8. В ходе проведения экспериментов получен следующий набор данных для указанных ниже вариантов. Составить интервальный вариационный ряд, определить среднюю выборочную, выборочную дисперсию, среднеквадратическое отклонение выборки. Найти моду и медиану интервального вариационного ряда. Найти 95%-ный доверительный интервал для истинного среднего значения. Построить гистограмму относительных частот.

17,2 10,6 18,9 17,5 14,6 14,1 12,6 21,1 15,5 18,2

17,8 10,4 13,7 13,2 18,7 15,7 16,3 14,8 13,8 15,8

15,4 16,9 14,7 15,3 13,4 17,3 15,4 13,5 15,8 17,8

20,0 18,2 15,3 16,6 16,7 14,5 14,0 17,4 17,2 15,2

16,6 13,6 17,9 13,9 12,9 15,5 17,0 12,7 16,4 14,8

15,3 16,4 16,4 15,7 14,2 13,6 17,9 16,5 15,4 15,6

15,4 17,0 16,9 15,2 16,1 15,9 14,3 14,2 18,0 15,9

17,6 16,3 15,0 14,4 17,3 16,4 14,7 12,3 15,1 15,9

16,7 16,4 15,5 16,7 15,7 15,1 17,7 15,4 11,0 12,5

13,2 14,5 15,4 16,4 15,2 16,6 17,8 15,3 16,1 16,2

ТИПОВОЙ ВАРИАНТ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ (ЗАОЧНАЯ ФОРМА)

Раздел «Теория вероятностей»

Случайные события

1. В каждой из двух урн содержится по 6 черных шаров и по 4 белых. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую. Найти вероятность того, что шар, извлеченный из второй урны, окажется черным.

2. На заводе имеется N=5 цехов. Вероятность того, что некачественная деталь отсутствует в этих цехах, одинакова и равна p=0,2. Составить закон распределения числа цехов, на которых искомая деталь отсутствует в данный момент. Построить многоугольник распределения. Найти дисперсию и среднеквадратичное отклонение числа цехов, на которых искомая деталь отсутствует в данный момент.

Случайные величины

3. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность $p_1 = 0,1$возможного значения x_1, математическое ожидание M(X)=3,9 и дисперсия D(X)=0,09. Найти закон распределения этой случайной величины.

4. Случайная величина X задана интегральной функцией (функцией распределения) F(x). Требуется: 1) найти дифференциальную функцию (плотность вероятности); 2) найти математическое ожидание и дисперсию X; 3) построить графики интегральной и дифференциальной функций.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^2/100 & 0 < x \le 10. \\ 1 & x > 10 \end{cases}$$

Раздел «Математическая статистика»

5. Заданы среднее квадратичное отклонение σ=10 нормально распределенной случайной величины X, выборочная средняя $\bar{x} = 18,61$, объем выборки n=16. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания ***a*** с заданной надежностью γ=0,95.

Приложение 2

ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО РАЗДЕЛАМ И ТЕМАМ ДИСЦИПЛИНЫ

Раздел 1. Теория вероятностей

Случайные события

1. В комбинаторике по формуле $\frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{m}!(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})!}$ рассчитывают:

1. сочетания без повторений из $\boldsymbol{n}$ различных элементов по $\boldsymbol{m}$ элементов
2. сочетания с повторениями из $\boldsymbol{n}$ различных элементов по $\boldsymbol{m}$ элементов
3. размещения с повторениями из $\boldsymbol{n}$ различных элементов по $\boldsymbol{m}$ элементов
4. размещения без повторений из $\boldsymbol{n}$ различных элементов по $\boldsymbol{m}$ элементов

2. Два стрелка производят по одному выстрелу. Вероятности попадания в цель для первого и второго стрелков равны 0,6 и 0,9 соответственно. Вероятность того, что цель будет поражена, равна:

1. 0,54
2. 0,96
3. 0,996
4. 0

3. Несовместные события H_i (i=1,..,n) составляют полную группу. Событие A может наступить только после реализации одного из H_i. Известны вероятности $P(H_i)$ и $P(A|H_i)$. Вероятность $P(A)$ вычисляется по формуле:

1. Муавра – Лапласа
2. полной вероятности
3. Бернулли
4. Байеса

4. В устройстве три независимо работающих элемента, вероятности отказа которых соответственно равны 0,1, 0,2 и 0,05. Устройство отказывает при отказе хотя бы одного элемента. Вероятность отказа устройства равна:

1. 0,316
2. 0,35
3. 0,001
4. 0,15

5.Вероятность поступления на конвейер за смену стандартной детали 0,75. Тогда вероятность того, что среди 300 поступивших на конвейер за смену деталей будет ровно 240 стандартных, равна:

1. 0,003
2. 0,95
3. 0,75
4. 0,007

6. В теории вероятностей при решении задач интегральную теорему Муавра – Лапласа можно применить:
1. только в том случае, если число опытов велико, а вероятность события не близка к нулю
2. для поиска вероятности числа успехов в опытах, заданного в определенных границах
3. только в том случае, если число опытов велико, а вероятность события мала
4. всегда при маловероятном событии
5. для поиска вероятности заданного числа успехов в опытах

7. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле постоянна и равна 0,4. Наивероятнейшее число попаданий при 6 выстрелах будет равно:
1. 2,4
2. 2
3. 3
4. 0,4

Случайные величины

1. Функция распределения F(x) случайной величины X определяет вероятность события:
1. $X = x$
2. $X \geq x$
3. $X < x$
4. $X \approx x$

2. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ 3x/4 + 3/4 & -1 < x \leq 1/3 \\ 1 & x > 1/3 \end{cases}$$

Вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал $\left(0;\ \frac{1}{3}\right)$, равна:

1. 0,5
2. 0,75
3. $\frac{1}{3}$
4. $\frac{1}{4}$

3. Случайная величина X задана плотностью вероятности:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0,25 & 1 \leq x \leq 5 \\ 1 & x > 5 \end{cases}$$

Математическое ожидание M(X) равно:
1. 3
2. $\frac{4}{3}$
3. $\frac{2}{\sqrt{3}}$
4. 0,25

4. Случайная величина X задана плотностью вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \mathrm{C}(x-1) & 1 < x \leq 3 \\ 0 & x > 3 \end{cases}$$

Коэффициент C равен:
1. 1
2. 1/3
3. 3
4.1/2

5. Для случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[-2;\ 2]$, вероятность попадания в интервал $(1; 2)$ равна:
1. 0,75
2. 0
3. 0,25
4. 0,5

6. Дисперсия случайной величины, имеющей распределение Бернулли, определяется формулой:
1. $\mathrm{D(X) = np}$
2. $\mathrm{D(X) = npq}$

3. $D(X) = pq$

4. $D(X) = \sqrt{npq}$

7. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле постоянна и равна 0,4. Математическое ожидание случайной величины X – числа попаданий в мишень при 6 выстрелах – равно:

1. 2,4
2. 2
3. 0,24
4. 0,4

Раздел 2. Математическая статистика

1. Вариационный ряд, варианты которого отличаются друг от друга на постоянную величину, называется:

1. интервальным
2. непрерывным
3. дискретным
4. постоянным

2. Для статистического распределения выборки объема n = 50:

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

выборочное среднее $\overline{x}_в$ равно:

1. 0,2
2. 2,5
3. 0,8
4. 4,2

3. Для случайной величины X, имеющей бесконечное число значений, составляется ряд:

1. непрерывный статистический
2. интервальный статистический
3. вариационный
4. функциональный

4. Несмещенная оценка $\tilde{\theta}_n$, параметра θ распределения генеральной совокупности, дисперсия которой при увеличении n стремится к нулю, является:

1. асимптотически несмещенной

2. асимптотически состоятельной
3. состоятельной
4. эффективной

5. Точечная оценка $\tilde{\theta}$ вероятности выпадения герба при 20 бросаниях монеты, в которых герб выпал 12 раз, найденная методом максимального правдоподобия, равна:
1. 0,5
2. 0,6
3. 0,4
4. 0,8

6. При построении доверительного интервала для генеральной дисперсии при малых объёмах выборки используют распределение:
1. Пирсона
2. нормальное
3. Фишера – Снедекора
4. Стьюдента

7. Выборка 9, 5, 7, 7, 4, 10 извлечена из нормально распределенной генеральной совокупности с дисперсией $\sigma^2 = 1$. 99%-ный доверительный интервал для генеральной средней равен:
1. $(6; 8)$
2. $(5{,}95; 8{,}05)$
3. $(5{,}65; 8{,}35)$
4. $(5{,}8; 8{,}2)$

Локальный электронный методический материал

Александр Борисович Тристанов

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Редактор М. А. Дмитриева

Уч.-изд. л. 1,8. Печ. л. 2,4.

Издательство федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Калининградский государственный технический университет».
236022, Калининград, Советский проспект, 1