

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. В. Вялова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
РАЗДЕЛ «АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ»

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины
для студентов, обучающихся в бакалавриате
по направлениям подготовки
13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Калининград
Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ»
2023

Рецензент

кандидат физико-математических наук, исполняющий обязанности заведующего кафедрой прикладной математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» А. И. Руденко

Вялова, А. В.

Высшая математика (раздел «Алгебра и геометрия»): учебно-методическое пособие по изучению дисциплины для студентов, обучающихся в бакалавриате по направлениям подготовки 13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника, 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника / А. В. Вялова. – Калининград: Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ», 2023. – 32 с.

Учебно-методическое пособие является руководством по изучению дисциплины «Алгебра и геометрия» для студентов очной и заочной форм обучения по направлениям подготовки 13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника, 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника. Содержит характеристику дисциплины, тематический план, методические материалы, вопросы для изучения и контроля по каждой теме, методические указания по выполнению самостоятельной работы, вопросы к экзамену.

Табл. 7, список лит. – 11 наименований

Учебно-методическое пособие рассмотрено и одобрено в качестве локального электронного методического материала на заседании кафедры прикладной математики и информационных технологий института цифровых технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» 2 декабря 2022 г., протокол № 12

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины рекомендовано к использованию в учебном процессе в качестве локального электронного методического материала методической комиссией ИЦТ от 17 января 2023 г., протокол № 1

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины рекомендовано к использованию в учебном процессе в качестве локального электронного методического материала методической комиссией ИМТЭС от 22 марта 2023 г., протокол № 7

УДК 519.6

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Калининградский государственный технический университет», 2023 г.

© Вялова А. В., 2023 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
1. Тематический план	8
1.1 Тематический план для студентов очной формы обучения	8
1.2 Тематический план для студентов заочной формы обучения	8
2. Содержание и методические указания по изучению дисциплины	9
РАЗДЕЛ 1. Элементы линейной алгебры	9
РАЗДЕЛ 2. Векторная алгебра	13
РАЗДЕЛ 3. Аналитическая геометрия на плоскости	17
РАЗДЕЛ 4. Аналитическая геометрия в пространстве	19
РАЗДЕЛ 5. Комплексные числа	22
3. Методические указания по самостоятельной работе	24
Приложения	26
Приложение 1	26
Приложение 2	28
Библиографический список	31

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Алгебра и геометрия» входит в состав ОПОП ВО по направлениям подготовки 13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника и 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника соответственно. Она изучается студентами очной и заочной форм обучения в первом семестре.

Целью освоения дисциплины «Алгебра и геометрия» является формирование знаний, умений и навыков анализа, моделирования и решения теоретических и практических задач с широким использованием математического аппарата, а также компетенций в соответствии с требованиями ФГОС ВО.

Для успешного освоения дисциплины студенту нужно владеть знаниями, умениями и навыками по математике (умение проводить алгебраические преобразования, решать уравнения и неравенства, знание основных тригонометрических формул, умение проводить тригонометрические преобразования и решать тригонометрические уравнения и неравенства, знать основные геометрические фигуры, уметь находить их площади, знать основные виды многогранников и тел вращения и уметь вычислять их площади поверхности и объемы).

В результате освоения дисциплины студент должен:

- знать: основные понятия и методы алгебры и геометрии, простейшие приложения алгебры и геометрии в профессиональных дисциплинах, геометрический и физический смысл основных понятий алгебры и геометрии;

- уметь: использовать методы алгебры и геометрии при решении типовых задач, использовать в познавательной профессиональной деятельности базовые знания дисциплины, переводить на математический язык простейшие проблемы, поставленные в терминах других предметных областей, приобретать новые математические знания, используя образовательные и информационные технологии;

- владеть методами построения математических моделей типовых задач, математической логикой, необходимой для постановки и решения профессиональных задач.

Для оценки результатов освоения дисциплины используются:

- оценочные средства поэтапного формирования результатов освоения дисциплины (текущая аттестация);

- оценочные средства для заключительной аттестации по дисциплине (промежуточная аттестация).

К оценочным средствам поэтапного формирования результатов освоения дисциплины относятся:

- тестовые задания;
- индивидуальные домашние задания;
- задания по темам практических занятий;
- задания по контрольной работе.

Образцы типовых тестов, индивидуальных заданий (для очной формы) и вариантов контрольных работ (для очной и заочной форм) приведены в ФОС по дисциплине.

К оценочным средствам промежуточной аттестации результатов освоения дисциплины относятся:

– экзаменационные вопросы и задания.

К экзамену допускаются студенты, положительно аттестованные по результатам текущего контроля. Для проведения экзамена экзаменационные материалы компонуются в билеты (два вопроса и три практических задания), относящиеся к различным темам не менее чем трех разделов дисциплины. На усмотрение экзаменатора экзамен может быть проведен в письменной, устной или комбинированной форме. При наличии сомнений в отношении знаний и умений студента экзаменатор может (имеет право) задать дополнительные вопросы, а также дать дополнительное задание.

Критерии и шкалы оценивания:

1. Выполнение тестовых заданий оценивается по пятибалльной системе, которая реализована в программном обеспечении.

Оценка «отлично»	Оценка «хорошо»	Оценка «удовлетвори- тельно»	Оценка «неудовлетвори- тельно»
при правильном выполнении не менее 90 % заданий	при правильном выполнении не менее 80 % заданий	при правильном выполнении не менее 60 % заданий	при правильном выполнении менее 60 % заданий

Результаты измерений индикатора считаются положительными при правильном выполнении не менее 60 % заданий.

2. Выполнение индивидуальных домашних заданий (ИДЗ) оценивается по двухбалльной системе.

Не зачтено	Зачтено
расчёты произведены неправильно, использованы неверные алгоритмы и формулы; при защите ИДЗ обучающийся не может дать пояснения к расчётам, обозначениям величин и т. п.	расчёты выполнены по верным формулам и алгоритмам, расчеты произведены правильно; при защите обучающийся демонстрирует понимание хода выполнения ИДЗ, может дать пояснения по содержанию работы

Результаты измерений индикатора считаются положительными при оценке «зачтено» за выполнение ИДЗ.

3. Выполнение заданий по темам практических занятий оценивается по пятибалльной системе.

Оценка «отлично»	Оценка «хорошо»	Оценка «удовлетвори- тельно»	Оценка «неудовлетвори- тельно»
задания выполнены по правильным формулам и алгоритмам и без ошибок	задания выполнены по правильным формулам и алгоритмам, допущено не более двух ошибок	задания выполнены по правильным формулам и алгоритмам, допущено три ошибки	если задания выполнены с использованием неправильных алгоритмов и формул

Результаты измерений индикатора считаются положительными при положительной оценке за выполнение заданий.

4. Выполнение контрольной работы для студентов очной формы обучения оценивается по пятибалльной системе.

Оценка «отлично»	Оценка «хорошо»	Оценка «удовлетворительно»	Оценка «неудовлетвори- тельно»
задания выполнены по правильным формулам и алгоритмам и без ошибок	задания выполнены по правильным формулам и алгоритмам, допущено не более двух ошибок	задания выполнены по правильным формулам и алгоритмам, допущено три ошибки	если задания выполнены с использованием неверных алгоритмов и формул или допущено четыре и более ошибок

Результаты измерений индикатора считаются положительными при положительной оценке за выполнение контрольной работы.

Контрольная работа для студентов заочной формы обучения оценивается по двухбалльной системе: «зачтено» – «не зачтено». Оценка «зачтено» ставится в случае правильного выполнения всех предложенных заданий. Студент, получивший за контрольную работу «зачтено», допускается до экзамена, на котором преподаватель может задать вопросы по выполнению этой контрольной работы.

Результаты измерений индикатора считаются положительными при оценке «зачтено» за выполнение контрольной работы.

5. Шкала оценок уровня освоения дисциплины по экзамену

Оценка			
неудовлетворитель- ный	пороговый	углублённый	продвинутый
«2» (неудовлетвори- тельно)	«3» (удовлетворительно)	«4» (хорошо)	«5» (отлично)
незнание предмета, большое количество принципиальных ошибок, допущен-	за знание предмета с заметными пробелами, не препятствующие последующему обучению;	за прочное знание при малозначительных неточностях; студент имеет си-	за полное и прочное знание материала в установленном объеме; студент имеет систематические и

Оценка			
неудовлетворительный	пороговый	углублённый	продвинутый
«2» (неудовлетворительно)	«3» (удовлетворительно)	«4» (хорошо)	«5» (отлично)
ных при выполнении, предусмотренных программой заданий; студент не может продолжить обучение без дополнительных занятий по дисциплине	студент имеет погрешности в ответе на экзамене и при выполнении экзаменационных заданий, но обладает необходимыми знаниями для их устранения под руководством преподавателя	стематический характер знаний по дисциплине, способен к их самостоятельному наполнению и обновлению в ходе дальнейшей учебной работы	глубокие знания учебного материала; свободно выполняет задания; понимает значение полученных знаний для приобретаемой профессии

Компетенции в той части, в которой они должны быть сформированы в рамках изучения дисциплины, могут считаться сформированными в случае, если студент получил на экзамене положительную оценку.

В предлагаемом пособии представлен тематический план, содержащий перечень изучаемых разделов и отводимое на них время аудиторных занятий и самостоятельной работы. При формировании личного образовательного плана на семестр обучающемуся следует оценивать рекомендуемое время на изучение дисциплины и возможность больших временных затрат на выполнение отдельных заданий или проработку отдельных тем.

В разделе «Содержание и методические указания по изучению дисциплины» приведены перечень вопросов и методические рекомендации по темам модулей, рассматриваемых в данном курсе. Каждая тема включает ссылку на литературу, а также контрольные вопросы для самопроверки.

Раздел «Методические указания по самостоятельной работе» содержит рекомендации по подготовке к лекционным и практическим занятиям, экзамену, а также организации самостоятельной работы над отдельными темами. Для студентов заочной формы обучения приводятся указания к выполнению контрольной работы. В приложении приведены вопросы к экзамену.

Помимо данного пособия, студентам следует использовать материалы, размещенные в соответствующем разделе курса по дисциплине «Алгебра и геометрия» в ЭИОС.

1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

1.1 Тематический план для студентов очной формы обучения

Форма промежуточной аттестации по дисциплине для очной формы обучения – экзамен (1 семестр).

Таблица 1. Трудоемкость освоения по очной форме обучения

№ п/п	Раздел (модуль) дисциплины	Контактная работа с преподавателем			СРС
		ЛК	ПЗ	ЭИОС	
1	Элементы линейной алгебры	4	8	3	8
2	Векторная алгебра	2	6	3	8
3	Аналитическая геометрия на плоскости	4	6	4	8
4	Аналитическая геометрия в пространстве	4	8	4	10
5	Комплексные числа		2	2	5
		14	30	16	39

ЛК – лекции, ПЗ – практические занятия, СРС – самостоятельная работа студентов

1.2 Тематический план для студентов заочной формы обучения

Форма промежуточной аттестации по дисциплине для заочной формы обучения – контрольная работа, экзамен.

Таблица 2. Трудоемкость освоения по заочной форме обучения

№ п/п	Раздел (модуль) дисциплины	Контактная работа с преподавателем			СРС
		ЛК	ПЗ	ЭИОС	
1	Элементы линейной алгебры	2 (УЗ)	1		20
2	Векторная алгебра	2	1	1	20
3	Аналитическая геометрия на плоскости	2	1	2	30
4	Аналитическая геометрия в пространстве		1	2	40
5	Комплексные числа			1	8,5
		4+2(УЗ)	4	6	118, 5

ЛК – лекции, ПЗ – практические занятия, СРС – самостоятельная работа студентов

2. СОДЕРЖАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Структура дисциплины представлена пятью тематическими разделами.

РАЗДЕЛ 1. Элементы линейной алгебры

Тема 1.1 Матрицы и действия над ними. Определители

Перечень изучаемых вопросов:

Понятие матрицы. Виды матриц. Операции над матрицами: сложение, умножение на число, произведение матриц, транспонирование. Свойства операций. Понятие определителя 1-го, 2-го, 3-го порядков. Свойства определителей. Минор и алгебраическое дополнение элемента определителя. Теорема о разложении определителя по элементам строки (столбца).

Методические указания:

Матричный язык широко используется в различных областях современной математики и ее приложениях. Понятие матрицы тесно связано с исследованием и решением систем линейных уравнений. Матрицы применяются в механике, теоретической электротехнике, теории вероятностей, квантовой механике, экономике и многих других областях. При изучении этой темы студент должен усвоить понятие матрицы и научиться выполнять действия над ними.

Для квадратных матриц вводится понятие определителя. Вычисление определителей применяется при решении систем линейных уравнений, нахождении обратной матрицы, вычислении векторного и смешанного произведения векторов, задании плоскости и т. д. Важно запомнить правила вычисления определителей 2-го и 3-го порядков, для наглядности приведены правила треугольников и Саррюса. Следует внимательно изучить и уметь применять свойства определителей, позволяющие упрощать вычисления. С помощью свойств и теоремы о разложении определителя по элементам строки (столбца) студент должен научиться вычислять определители четвертого порядка и понимать, что данный способ является универсальным для нахождения определителя любого порядка.

Для успешного изучения темы надо уметь выполнять арифметические операции над действительными числами. Рекомендуется вспомнить как выполняются алгебраические преобразования, решаются уравнения и неравенства.

Контрольные вопросы:

1. Определение матрицы, краткая форма записи матрицы.
2. Определение равных матриц.
3. Определения единичной, нулевой матриц.
4. Определения треугольной, трапециевидной (ступенчатой) матриц.
5. Операция сложения матриц, ее свойства.
6. Операция умножения матрицы на число, ее свойства.

7. Операция умножения матриц, ее свойства.
8. Операция транспонирования, ее свойства.
9. Определения определителей 1-го, 2-го и 3-го порядков.
10. Правила треугольников и Саррюса для вычисления определителя 3-го порядка.
11. Свойства определителей.
12. Определения минора и алгебраического дополнения элемента определителя.
13. Теорема о разложении определителя по элементам строки (столбца).
14. Алгоритм вычисления определителей порядка 3 и выше.

В предлагаемой литературе [1–5, 7–9] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 1, параграфы 1.1 и 1.2 пособия [11].

Тема 1.2 Обратная матрица. Ранг матрицы

Перечень изучаемых вопросов:

Понятие обратной матрицы. Условие существования обратной матрицы. Правило нахождения обратной матрицы. Свойства обратных матриц. Простейшие матричные уравнения и их решения. Минор матрицы. Ранг матрицы. Нахождение ранга матрицы методом окаймляющих миноров. Элементарные преобразования над строками матриц. Нахождение ранга матрицы при помощи элементарных преобразований.

Методические указания:

Для успешного изучения темы следует повторить материал предыдущего занятия, а именно: вычисление определителей, нахождение алгебраического дополнения элемента определителя, виды матриц, операции умножения матриц и ее свойства, транспонирования матриц.

Студент должен обратить внимание, что обратные матрицы можно находить только для невырожденных матриц. Следует выучить формулу нахождения обратной матрицы и уметь правильно ее применять. С помощью обратной матрицы обучающийся должен отработать методику решения простейших матричных уравнений.

Изучение темы ранга матрицы начинается с понятия минора матрицы, не следует путать с понятием минора элемента определителя матрицы. Нужно выучить определение ранга матрицы и понимать его свойства. Студент должен освоить два метода вычисления ранга матрицы: окаймляющих миноров и элементарных преобразований. Последний позволит в дальнейшем исследовать системы линейных уравнений.

Контрольные вопросы:

1. Определение невырожденной матрицы.
 2. Определение обратной матрицы.
 3. Условие существования обратной матрицы.
 4. Формула для нахождения обратной матрицы.
 5. Свойства обратных матриц.
 6. Простейшие матричные уравнения и их решения.
 7. Определение минора матрицы.
 8. Определение ранга матрицы, свойства ранга матрицы.
 9. Определение базисного минора матрицы.
 10. Нахождение ранга матрицы методом окаймляющих миноров.
 11. Определение элементарных преобразований над строками (столбцами) матрицы.
 12. Определение эквивалентных матриц.
 13. Нахождение ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.
- В предлагаемой литературе [1, 3–5, 7–9] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 1, параграфы 1.3, 1.4 пособия [11].

Тема 1.3 Решение систем линейных уравнений

Перечень изучаемых вопросов:

Понятие системы линейных уравнений. Матричная форма записи. Совместная (несовместная), определенная (неопределенная), однородная системы линейных уравнений. Решение системы. Эквивалентные (равносильные) системы. Критерий совместности систем линейных уравнений. Теоремы о количестве решений совместной системы. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера. Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

Методические указания:

Решение систем линейных алгебраических уравнений – одна из классических задач линейной алгебры, во многом определившая её объекты и методы. Кроме того, системы линейных уравнений и методы их решения играют важную роль во многих прикладных задачах.

При изучении этой темы обучающийся должен освоить перевод системы на матричный язык. Предварительно рекомендуется повторить понятия матрицы, обратной матрицы, действия над матрицами, определение ранга матрицы, способ нахождения ранга матрицы с помощью элементарных преобразований. Для исследования систем на совместность студент должен изучить критерий совместности (теорему Кронекера-Капелли).

Системы линейных уравнений, у которых количество уравнений совпадает с количеством неизвестных и определитель основной матрицы системы отличен от нуля, являются определенными. Студент должен научиться решать их методами Крамера и обратной матрицы. Для решения системы методом Крамера обучающемуся следует повторить вычисление определителей. Для матричного метода нужно вспомнить изученный ранее алгоритм решения матричного уравнения.

Для практического решения систем с большим числом уравнений и неизвестных методы обратной матрицы и Крамера неудобны. В случае же когда число уравнений в системе не совпадает с количеством неизвестных, эти методы применять нельзя. Универсальным способом решения систем линейных уравнений является метод Гаусса, в основе которого лежит принцип последовательного исключения неизвестных. Большинству первокурсников хорошо знаком этот метод для решения систем линейных уравнений 2-го порядка. Цель занятия заключается в освоении матричной реализации этого метода на примере систем произвольного числа уравнений с произвольным количеством неизвестных. Студенту следует обратить внимание, что алгоритм приведения матрицы к ступенчатому виду, который применялся ранее при вычислении ранга матрицы, совпадает с первым этапом метода Гаусса. Поэтому обучающемуся остается освоить вторую часть алгоритма метода Гаусса и уметь правильно записывать общее решение системы. В заключении рассматривается реализация метода Гаусса на примере однородных систем. Студент должен понимать особенности использования метода для однородных систем и уметь находить фундаментальный набор (систему) решений.

Контрольные вопросы:

1. Понятие системы линейных уравнений, краткая форма записи.
2. Основная, расширенная матрицы системы и столбец свободных членов.
3. Матричная форма записи системы линейных уравнений.
4. Определения совместной (несовместной), определенной (неопределенной), однородной системы линейных уравнений.
5. Решение системы. Эквивалентные (равносильные) системы.
6. Критерий совместности системы линейных уравнений.
7. Теоремы о количестве решений совместной системы.
8. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.
9. Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы.
10. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
11. Метод Гаусса решения однородных систем линейных уравнений.
12. Фундаментальный набор (система) решений.

В предлагаемой литературе [1–5, 7–9] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 1, параграфы 1.5–1.7 пособия [11].

РАЗДЕЛ 2. Векторная алгебра

Тема 2.1 Векторы

Перечень изучаемых вопросов:

Векторы, основные понятия. Линейные операции над векторами и их свойства. Проекция вектора на ось, свойства проекций векторов на ось. Декартовы координаты вектора на плоскости и в пространстве. Задача о нахождении длины вектора по его координатам. Направляющие косинусы вектора. Линейные операции над векторами в координатах. Условия коллинеарности и компланарности векторов. Координаты точки. Задачи о нахождении координат вектора по координатам его начала и конца, о делении отрезка в данном соотношении.

Методические указания:

Векторная алгебра – это раздел, в котором изучаются векторы, линейные операции над векторами (сложение векторов и умножение вектора на число) и различные произведения векторов (скалярное, векторное, смешанное). Вектор является фундаментальным понятием курсов линейной алгебры, линейного программирования и многих других математических дисциплин; без него невозможно представить современное изложение механики, теории относительности, теоретической физики.

По итогам изучения этой темы обучающиеся должны знать: определение вектора (геометрического и свободного) и основные понятия, связанные с ним; линейные операции над векторами и их свойства. Следует обратить внимание, что такие операции уже встречались ранее, например, в арифметике, теории матриц. В каждом конкретном случае они определялись по-своему, в соответствии со спецификой тех множеств, для которых они рассматриваются (числа, матрицы). Но свойства этих операций одинаковы. Именно эта общность и сближает их. При решении задач студенту следует учесть особенности применяемой терминологии.

Важной составляющей математического аппарата векторной алгебры является разложение вектора по базису, что позволяет сводить действия над векторами к соответствующим операциям над их координатами. Подобный подход оказывается весьма продуктивным и широко применяется для решения задач линейной алгебры, теории дифференциальных уравнений и математического анализа. В рамках этой темы студент должен научиться: вычислять длину вектора и направляющие косинусы; выполнять действия над векторами, заданными координатами; проверять коллинеарность (сонаправленность) и компланарность векторов по их координатам; определять орт вектора; раскладывать вектор по базису, определять координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении.

Перед изучением темы студенту нужно повторить вычисление определителей и методы решения систем линейных уравнений.

Контрольные вопросы:

1. Определение геометрического вектора.
 2. Определения коллинеарных и компланарных векторов.
 3. Определения сонаправленных и противоположно направленных векторов.
 4. Определение орта вектора.
 5. Определение равных векторов.
 6. Определение свободного вектора.
 7. Операция сложения векторов: правило треугольника и правило параллелограмма. Свойства операции сложения.
 8. Правило сложения n векторов.
 9. Операция умножения вектора на число, свойства.
 10. Определение разности двух векторов.
 11. Определение проекции вектора на ось.
 12. Теорема о нахождении проекции вектора на ось по известной длине вектора и углу между вектором и осью.
 13. Свойства проекций векторов на ось.
 14. Прямоугольная декартова система координат на плоскости и в пространстве. Разложение вектора по координатному базису. Координаты вектора.
 15. Задача о нахождении координат вектора по координатам его начала и конца.
 16. Направляющие косинусы вектора.
 17. Действия над векторами в координатах.
 18. Критерий коллинеарности векторов в координатах.
 19. Критерий компланарности векторов в координатах.
 20. Радиус-вектор точки. Связь координат вектора с координатами его начала и конца.
 21. Задача о делении отрезка в данном соотношении.
- В предлагаемой литературе [1–5, 7, 8, 10] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.
- Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 2, параграфы 2.1–2.3 пособия [11].

Тема 2.2 Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов

Перечень изучаемых вопросов:

Определение скалярного произведения векторов и его свойства. Координатное представление скалярного произведения. Геометрический и физический смысл скалярного произведения. Определение векторного произведения и его свойства. Координатное представление векторного произведения. Геометрический и физический смысл векторного произведения. Определение смешанного произведения векторов и его свойства. Координатное представление смешанного произведения. Геометрический смысл смешанного произведения.

Методические указания:

Тема «Скалярное произведение векторов» проходится в рамках школьной программы по геометрии, поэтому как правило не вызывает затруднений у обучающихся. Однако перед изучением векторного и смешанного произведения полезно повторить эту тему и разобрать ряд задач, которые ранее не встречались в школе. Студент должен уметь вычислять: скалярное произведение векторов по определению и применять его свойства; скалярное произведение векторов, заданных координатами; угол между векторами; проекцию вектора на вектор, используя скалярное произведение векторов; а также проверять перпендикулярность векторов; применять скалярное произведение при решении физических задач.

Перед изучением темы «Векторное и смешанное произведения векторов» студенту рекомендуется вспомнить правила вычисления определителей второго и третьего порядков, повторить определение алгебраического дополнения элемента определителя, свойства определителей и формулировку теоремы о разложении определителя по элементам строки. На практических занятиях студент должен научиться: вычислять векторное и смешанное произведения векторов по определению и в случае, когда векторы заданы своими координатами с учетом свойств этих произведений; применять соответствующие произведения при решении геометрических и физических задач.

По итогам изучения этой темы студент должен освоить различные виды произведений векторов, понимать их свойства и различать их между собой.

Контрольные вопросы:

1. Определение скалярного произведения и его связь с проекциями векторов.
2. Свойства скалярного произведения.
3. Определение ортогональных векторов.
4. Координатное представление скалярного произведения.
5. Вычисление длины вектора по координатам (через скалярное произведение).
6. Вычисление угла между векторами, если векторы заданы координатами (через скалярное произведение).
7. Вычисление проекции вектора на вектор, если векторы заданы своими координатами.
8. Геометрический смысл скалярного произведения векторов.
9. Физический смысл скалярного произведения векторов.
10. Понятия правой и левой тройки векторов.
11. Определение векторного произведения.
12. Свойства векторного произведения.
13. Координатное представление векторного произведения.
14. Геометрический смысл векторного произведения.
15. Физический смысл векторного произведения.

16. Определение смешанного произведения векторов.
17. Свойства смешанного произведения векторов.
18. Критерий компланарности тройки векторов.
19. Координатное представление смешанного произведения.
20. Геометрический смысл смешанного произведения.

В предлагаемой литературе [1–5, 7, 8, 10] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 2, параграфы 2.4–2.6 пособия [11].

Тема 2.3. Линейное пространство

Перечень изучаемых вопросов:

Линейное пространство, линейное подпространство, примеры. Определение линейно-зависимой и линейно-независимой системы векторов. Геометрический смысл линейной зависимости системы из одного, двух и трех векторов. Базис пространства, размерность пространства. Евклидово пространство.

Методические указания:

В данной теме вектор вводится аксиоматически, как элемент векторного (линейного) пространства. Само пространство определяется как множество объектов произвольной природы на котором заданы две операции: внутренняя (сложение) и внешняя (умножение на число), удовлетворяющие системе аксиом. Важно понимать, что в качестве векторов – элементов векторного пространства могут выступать как реальные векторы, изученные ранее, так и матрицы, функции, многочлены или иные математические объекты.

Студент должен владеть понятиями: линейное пространство, подпространство; линейно-зависимая и линейно-независимая система векторов; базис пространства; евклидово пространство.

Практических занятий на эту тему не предусмотрено.

Контрольные вопросы:

1. Определение линейного пространства.
2. Примеры линейных пространств.
3. Линейное подпространство.
4. Примеры линейных подпространств.
5. Понятия линейной зависимости и независимости системы векторов.
6. Свойства линейно зависимых систем векторов.
7. Геометрический смысл линейной зависимости системы из двух (из трех) векторов.
8. Базис пространства. Координаты (аффинные координаты) вектора.
9. Размерность линейного пространства.
10. Евклидово пространство.

В предлагаемой литературе [1, 4, 8, 10] студенту необходимо изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

РАЗДЕЛ 3. Аналитическая геометрия на плоскости

Тема 3.1 Система координат на плоскости: основные понятия. Декартова и полярная системы координат. Уравнение линии на плоскости. Прямая на плоскости

Перечень изучаемых вопросов:

Система координат на плоскости: основные понятия. Прямоугольная (декартова) система координат. Полярная система координат. Связь между полярными и декартовыми координатами точки на плоскости. Уравнение линии на плоскости. Основные виды уравнения прямой: общее уравнение, канонические и параметрические уравнения, уравнение прямой «в отрезках», уравнения с угловым коэффициентом, нормальное уравнение прямой. Угол между прямыми на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости. Расстояние от точки до прямой.

Методические указания:

Аналитическая геометрия – область математики, в которой геометрические объекты изучаются средствами алгебры (линейной и векторной). Важно научиться анализировать геометрические свойства линии на основе анализа их уравнений.

По итогам изучения данной темы студент должен:

– *знать*: различные системы координат на плоскости, способы задания прямой на плоскости; различные формулы для вычисления угла между прямыми; формулу для нахождения расстояния между точкой и прямой;

– *уметь*: переходить от прямоугольных декартовых координат к полярным и наоборот; составлять уравнение геометрического места точек на плоскости; составлять уравнение линии в полярных координатах; узнавать прямую по ее общему, каноническому, параметрическому и т. д. уравнениям; записывать уравнение прямой для любого способа ее задания; исследовать взаимное расположение прямых на плоскости; определять угол между прямыми, находить точку их пересечения; определять расстояние между точкой и прямой на плоскости; определять точку, симметричную относительно данной прямой.

Для успешного освоения этой темы следует повторить тему векторы.

Контрольные вопросы:

1. Понятие системы координат на плоскости. Прямоугольная (декартова) система координат.
2. Полярная система координат.
3. Связь между полярными и декартовыми координатами точки на плоскости.

4. Линия на плоскости: основные понятия.
5. Уравнение прямой по точке и нормальному вектору.
6. Общее уравнение прямой. Частные случаи.
7. Канонические уравнения прямой.
8. Параметрическое уравнение прямой.
9. Уравнение прямой «в отрезках».
10. Уравнения прямой с угловым коэффициентом.
11. Нормальное уравнение прямой.
12. Формулы нахождения угла между прямыми.
13. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
14. Формула для нахождения расстояния от точки до прямой.

В предлагаемой литературе [1–5, 7, 8] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 3, параграфов 3.1, 3.2 пособия [11].

Тема 3.2 Кривые второго порядка

Перечень изучаемых вопросов:

Уравнение линии второго порядка в общем виде. Окружность: определение, каноническое уравнение. Эллипс: определение, каноническое уравнение, эксцентриситет, директрисы. Гипербола: определение, каноническое уравнение, асимптоты, эксцентриситет, директрисы, сопряженные гиперболы. Парабола: определение, каноническое уравнение.

Методические указания:

В данной теме кривые второго порядка определяются как геометрическое место точек, обладающих некоторым свойством. Изучение кривых второго порядка имеет весьма важное как теоретическое, так и прикладное значение. Знания, полученные по теме «Кривые второго порядка», применяются при изучении математического анализа, физики, теоретической механики.

По итогам изучения данной темы студент должен

– *знать*: определения окружности, эллипса, гиперболы, параболы; канонические уравнения этих кривых; геометрический смысл параметров, входящих в уравнение, и соотношения между ними;

– *уметь*: приводить уравнение линии второго порядка к каноническому виду; по уравнению кривой сделать чертёж, определив параметры, фокусы, директрисы, асимптоты; по чертежу записать каноническое уравнение кривой.

Контрольные вопросы:

1. Уравнение линии второго порядка в общем виде.
2. Окружность: определение, вывод канонического уравнения.
3. Эллипс: определение, вывод канонического уравнения.

4. Исследование формы эллипса по его уравнению.
5. Эллипс: эксцентриситет, директрисы, фокальные радиусы.
6. Окружность как частный случай эллипса.
7. Гипербола: определение, вывод канонического уравнения. Равносторонняя гипербола.
8. Исследование формы гиперболы по ее уравнению. Асимптоты гиперболы. Сопряженные гиперболы.
9. Гипербола: эксцентриситет, директрисы, фокальные радиусы.
10. Парабола: определение, вывод канонического уравнения.
11. Исследование формы параболы по ее уравнению. Эксцентриситет.
12. Уравнения линий второго порядка с осями симметрии, параллельными координатным осям.

В предлагаемой литературе [1–5, 7, 8] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 3, параграф 3.3 пособия [11].

РАЗДЕЛ 4. Аналитическая геометрия в пространстве

Тема 4.1 Плоскость

Перечень изучаемых вопросов:

Уравнения плоскости в пространстве: уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору; общее уравнение плоскости; частные случаи общего уравнения плоскости; уравнение плоскости, проходящей через три данные точки; уравнение плоскости в отрезках; нормальное уравнение плоскости. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Расстояние от точки до плоскости.

Методические указания:

Обобщением уравнения прямой на плоскости является уравнение плоскости в пространстве. Студенту следует обратить внимание, что некоторые уравнения прямой на плоскости можно получить из соответствующих уравнений плоскости, полагая аппликату равной нулю.

По итогам работы над темой студент должен

– *знать*: различные виды уравнения плоскости в пространстве; формулу для нахождения угла между плоскостями; формулу для нахождения расстояния от точки до плоскости;

– *уметь*: составлять уравнение плоскости по исходным данным; определять расположение плоскости по ее уравнению; вычислять расстояние от точки до плоскости; вычислять угол между плоскостями; определять взаимное расположение плоскостей; решать основные задачи на плоскость.

Перед изучением темы студенту рекомендуется вспомнить правила вычисления определителей, теорему о разложении определителя по элементам строки, а также повторить основные понятия и формулы из раздела векторная алгебра.

Контрольные вопросы:

1. Уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно вектору.
2. Общее уравнение плоскости.
3. Частные случаи общего уравнения плоскости.
4. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.
5. Уравнение плоскости «в отрезках».
6. Нормальное уравнение плоскости.
7. Формула для нахождения угла между плоскостями.
8. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
9. Формула для нахождения расстояния от точки до плоскости.

В предлагаемой литературе [1–5, 7, 8] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 3, параграф 3.3 пособия [11].

Тема 4.2 Прямая в пространстве

Перечень изучаемых вопросов:

Уравнения прямой в пространстве: канонические уравнения прямой; параметрические уравнения прямой; общее уравнение прямой. Угол между прямыми в пространстве. Взаимное расположение прямых в пространстве.

Методические указания:

При переходе к трехмерному пространству с заданной декартовой прямоугольной системой координат происходит естественное обобщение уравнений прямой на плоскости на трехмерный случай. Студенту следует обратить внимание, что некоторые уравнения прямой на плоскости можно получить из соответствующих уравнений прямой в пространстве, полагая аппликату равной нулю.

По итогам работы над темой студент должен

– *знать*: различные виды уравнения прямой в пространстве; физический смысл параметрического задания прямой в пространстве; формулу для нахождения угла между прямыми;

– *уметь*: составлять уравнение прямой в пространстве по исходным данным; определять положение прямой в пространстве по ее уравнению; вычислять угол между прямыми в пространстве; определять взаимное расположение прямых в пространстве; находить точки пересечения прямых в пространстве, вычислять расстояние от точки до прямой.

Перед изучением темы студенту рекомендуется вспомнить правила вычисления определителей, теорему о разложении определителя по элементам строки, а также повторить основные понятия и формулы из раздела векторная алгебра.

Контрольные вопросы:

1. Каноническое уравнение прямой в пространстве.
2. Параметрическое уравнение прямой в пространстве.
3. Физический смысл параметрического задания прямой в пространстве.
4. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
5. Прямая как линия пересечения двух непараллельных плоскостей.
6. Формула для нахождения угла между прямыми в пространстве.
7. Условия перпендикулярности двух прямых в пространстве.
8. Условия параллельности и совпадения двух прямых в пространстве.
9. Условия пересечения и скрещивания двух прямых в пространстве.
10. Формула для нахождения расстояния от точки до прямой.

В предлагаемой литературе [1–5, 7, 8] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 3, параграф 3.3 пособия [11].

Тема 4.3 Прямая и плоскость в пространстве. Основные задачи

Перечень изучаемых вопросов:

Угол между прямой и плоскостью. Взаимное расположение прямой и плоскости. Пучок плоскостей.

Методические указания:

Перед изучением темы студенту рекомендуется вспомнить правила вычисления определителей, теорему о разложении определителя по элементам строки, повторить формулы и определения раздела векторная алгебра, основные способы задания прямой и плоскости в пространстве.

После изучения этой темы студент должен уметь: вычислять угол между прямой и плоскостью; определять взаимное расположение прямой и плоскости; определять точку пересечения прямой и плоскости; определять проекцию точки на плоскость (прямую); находить точку, симметричную относительно заданной прямой(плоскости).

Контрольные вопросы:

1. Определение угла между прямой и плоскостью.
2. Вывод формулы для нахождения угла между прямой и плоскостью.
3. Условия параллельности прямой и плоскости.
4. Условия перпендикулярности прямой и плоскости.
5. Условие принадлежности прямой плоскости.

6. Задача о нахождении точки пересечения прямой и плоскости.

7. Определение пучка плоскостей.

В предлагаемой литературе [1–5, 7, 8] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 4, параграф 4.3 пособия [11].

В качестве самостоятельной работы студента предлагается выполнение индивидуального практического задания по разделу 4. Задания приведены в пособии [11].

РАЗДЕЛ 5. Комплексные числа

Перечень изучаемых вопросов:

Комплексные числа. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа. Действия над комплексными числами. Возведение в натуральную степень. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа.

Методические указания:

Комплексные числа обладают рядом замечательных свойств, выделяющих их из ряда других полей. В отличие от поля вещественных чисел, комплексные числа образуют алгебраически замкнутое поле. Это означает, что любой многочлен произвольной степени n (n – любое натуральное число) с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней (основная теорема алгебры). Они также нашли значительное применение в анализе: теория функций комплексного переменного оказалась намного более богата, чем теория функций вещественного переменного. Комплексные числа также играют важную роль при рассмотрении представлений функций в виде рядов: при комплексной записи вещественных рядов появляется возможность полностью решить вопрос о сходимости каждого ряда.

Применение комплексных чисел позволяет удобно и компактно сформулировать многие математические модели, применяемые в математической физике и в естественных науках. Поэтому комплексные числа имеют широкое применение как в самой математике, так и в приложениях: в электротехнике, гидродинамике, картографии, квантовой механике, теории колебаний и многих других.

Контрольные вопросы:

1. Определение комплексного числа.
2. Определение сопряженного комплексного числа.
3. Определение равных комплексных чисел.
4. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.
5. Формы записи комплексного числа: алгебраическая, тригонометрическая, показательная.

6. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

7. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Формула Муавра.

8. Извлечение корня из комплексного числа.

9. Действия над комплексными числами в показательной форме.

В предлагаемой литературе [7] студенту необходимо изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

Внеаудиторная самостоятельная работа в рамках данной дисциплины включает в себя:

- подготовку к аудиторным занятиям (лекциям, практическим занятиям) и выполнение соответствующих заданий;
- самостоятельную работу над отдельными темами учебной дисциплины в соответствии с тематическим планом;
- выполнение контрольной работы для студента заочной формы обучения;
- подготовку к экзамену.

3.1 Подготовка к лекционным занятиям

При подготовке к лекции рекомендуется повторить ранее изученный материал. Рекомендуется вести конспект, главное требование к которому быть систематическим, логически связанным, ясным и кратким. По окончании занятия обязательно в часы самостоятельной подготовки, по возможности в этот же день, повторить изучаемый материал и доработать конспект.

3.2 Подготовка к практическим занятиям

Подготовка к практическим занятиям предусматривает:

- изучение теоретических положений, лежащих в основе будущих расчетов или методики расчетов;
- детальную проработку учебного материала, рекомендованной литературы и методической разработки на предстоящее занятие.

3.3 Самостоятельная работа над отдельными темами учебной дисциплины

При организации самостоятельного изучения ряда тем лекционного курса обучаемый работает в соответствии с указаниями, выданными преподавателем. Указания по изучению теоретического материала курса составляются дифференцированно по каждой теме и включают в себя следующие элементы: название темы; цели и задачи изучения темы; основные вопросы темы; характеристику основных понятий и определений, необходимых обучаемому для усвоения данной темы; список рекомендуемой литературы; наиболее важные фрагменты текстов рекомендуемых источников, в том числе таблицы, рисунки, схемы и т. п.; краткие выводы, ориентирующие обучаемого на определенную совокупность сведений, основных идей, ключевых положений, систему доказательств, которые необходимо усвоить; контрольные вопросы, предназначенные для самопроверки знаний.

3.4 Подготовка к экзамену

При подготовке к экзамену большую роль играют правильно подготовленные заранее записи и конспекты. В этом случае остается лишь повторить пройденный материал, учесть, что было пропущено и восполнить пробелы. Полезно закрепить ранее изученный материал, структурируя его при помощи составления плана ответов на вопросы к экзамену. Типовые вопросы и задания к экзамену приведены в приложениях 1 и 2 соответственно.

В ходе самостоятельной подготовки к экзамену при анализе имеющегося теоретического и практического материала студенту также рекомендуется проводить постановку различного рода задач по изучаемой теме, что поможет в дальнейшем выявлять критерии принятия тех или иных решений, причины совершения определенного рода ошибок. При ответе на вопросы, поставленные в ходе самостоятельной подготовки, обучающийся вырабатывает в себе способность логически мыслить, искать в анализе событий причинно-следственные связи.

3.5 Методические указания по выполнению контрольной работы студентами заочной формы обучения

Учебным планом предусмотрено выполнение одной контрольной работы.

В ходе выполнения контрольной работы обучающийся должен проявить умение самостоятельно работать с учебной и научной математической литературой, применять математическую методологию в анализе конкретных данных.

Контрольная работа должна быть выполнена и представлена в срок, установленный графиком учебного процесса. Выполнение контрольной работы включает следующие этапы: ознакомление с программой дисциплины, методическими рекомендациями по выполнению работы; проработку соответствующих разделов дисциплины по рекомендованной учебной литературе, конспектам лекций; выполнение расчетов с применением освоенных методов.

Завершенная работа представляется для проверки преподавателю в установленные учебным графиком сроки. Преподаватель проверяет качество работы, отмечает положительные стороны, недостатки работы и оценивает ее. Обучающиеся, не подготовившие контрольную работу, к экзамену не допускаются.

Задания для контрольной работы составляются преподавателем, который ведет данную дисциплину, и утверждаются кафедрой.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

ТИПОВЫЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ

1. Понятие матрицы, основные виды матриц.
2. Операции над матрицами и их свойства.
3. Определитель квадратной матрицы второго и третьего порядков. Правила вычисления определителя третьего порядка.
4. Свойства определителей.
5. Минор и алгебраическое дополнение элемента определителя. Теорема о разложении определителя по элементам строки (столбца).
6. Обратная матрица: определение, формула для вычисления обратной матрицы, свойства.
7. Простейшие матричные уравнения.
8. Ранг матрицы. Базисный минор. Методы вычисления ранга матрицы методом окаймляющих миноров.
9. Ранг матрицы. Эквивалентные матрицы. Методы вычисления ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.
10. Понятие системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Матричная форма записи СЛАУ. Матричный метод решения системы.
11. Понятие системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.
12. Условия совместности систем линейных уравнений (теорема Кронекера–Капелли). Теоремы о количествах решений совместных систем.
13. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
14. Однородные системы линейных уравнений.
15. Понятие вектора. Определения длины вектора, единичного (нулевого) вектора, коллинеарных, сонаправленных (противоположно направленных), равных, компланарных векторов.
16. Проекция вектора на ось. Свойства проекций векторов на ось. Теорема о нахождении проекции вектора на ось по известной длине вектора и углу между вектором и осью.
17. Прямоугольная декартова система координат на плоскости и в пространстве. Разложение вектора по координатному базису. Координаты вектора. Длина вектора.
18. Направляющие косинусы вектора.
19. Действия над векторами в координатах. Условия коллинеарности и компланарности векторов.
20. Координаты точки. Задачи о нахождении координат вектора по известным координатам его начала и конца, о делении отрезка в данном соотношении.
21. Скалярное произведение векторов, свойства. Координатное представление скалярного произведения.

22. Скалярное произведение векторов. Геометрический и физический смысл.
23. Векторное произведение векторов, свойства. Координатное представление векторного произведения.
24. Векторное произведение векторов, свойства. Геометрический и физический смысл.
25. Смешанное произведение векторов, свойства. Координатное представление, геометрический смысл.
26. Понятие линейного пространства, примеры линейных пространств. Линейные подпространства, примеры. Евклидово пространство.
27. Определение линейно-зависимой и линейно-независимой системы векторов. Базис пространства. Размерность линейного пространства.
28. Определение линейно-зависимой и линейно-независимой системы векторов. Базис пространства. Размерность линейного пространства.
29. Система координат на плоскости: основные понятия. Декартова и полярная системы координат.
30. Прямая на плоскости. Различные виды уравнения прямой.
31. Прямая на плоскости. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Расстояние от заданной точки на плоскости до прямой.
32. Плоскость в пространстве. Различные виды уравнения плоскости.
33. Плоскость в пространстве. Угол между плоскостями. Расстояние от заданной точки до плоскости.
34. Прямая в пространстве. Различные виды уравнения прямой в пространстве.
35. Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямых. Угол между прямыми.
36. Окружность. Вывод уравнения окружности.
37. Эллипс. Вывод уравнения эллипса. Исследование формы. Фокусы, директрисы и эксцентриситет эллипса. Свойства эллипса.
38. Гипербола. Вывод уравнения гиперболы. Исследование формы. Асимптоты, фокусы, директрисы и эксцентриситет гиперболы. Свойства гиперболы.
39. Парабола. Вывод уравнения параболы. Исследование формы. Эксцентриситет параболы.
40. Комплексные числа. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная форма записи комплексного числа.
41. Действия над комплексными числами. Формула Муавра.

ТИПОВЫЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Исследовать на совместность систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

2. Какую работу производит сила $\vec{F} = \{4; -3; 3\}$, если точка приложения ее перемещается из положения $A(1; -1; 0)$ в положение $B(1; 1; 1)$?

3. Решить уравнение: $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Построить кривые по заданным уравнениям: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$; $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Найти эксцентриситет данных кривых.

5. Задайте прямую, проходящую через начало координат и точку $A(-2; 3)$, постройте ее. Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат перпендикулярно прямой OA .

6. Даны вершины треугольника $A(2; 2)$, $B(3; 4)$ и $C(5; 3)$. Составьте уравнение высоты BE и найдите ее длину.

7. Найти $z_1 + z_2$, если $z_1 = 6 + 3i$, $z_2 = 2 - 4i$. Изобразить полученное число на комплексной плоскости, найти его модуль и аргумент.

8. По формулам Крамера решить систему уравнений:
$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0, \\ x + 2y + 4z = 7, \\ -x + y = 1. \end{cases}$$

9. Напишите уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 2x + 3y - z + 5 = 0, \\ 3x - 2y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ параллельно вектору $\vec{a} = \{4, -7, -13\}$.

10. Найти скалярное и векторное произведения векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{k} - 3\vec{j}$.

11. Определить угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{CE}$, если $A(2; 0; 0)$, $B(0; 0; 4)$, $C(2; 0; 2)$, $E(0; 0; 0)$.

12. Найти точку, симметричную с началом координат относительно плоскости $6x + 2y - 9z + 121 = 0$.

13. Написать уравнение окружности с центром $C(-2; 3)$ и радиусом, равным 5. Определить принадлежность точек $A(2; 6)$, $B(1; 7)$, $M(0; 4)$ окружности.

14. Найти значение матричного многочлена $2A^2 + 3A + 5E$ при $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, если

E – единичная матрица третьего порядка.

15. Даны точки $A(-2; 3; -4)$, $B(3; 2; 5)$, $C(1; -1; 2)$, $D(3; 2; -4)$. Вычислить $np_{\vec{CD}} \vec{AB}$.

16. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2; -1; 1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(4; 1; 3)$.
17. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(-2; 3; -4)$, $B(3; 2; 5)$, $C(1; -1; 2)$.
18. Определить β , при котором векторы $\vec{a} = \{3; 2; 4\}$, $\vec{b} = \{0; \beta; 2\}$, $\vec{c} = \{3; 4; 0\}$ компланарны.
19. Вычислить длины диагоналей и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{k} - \vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
20. Выполнить действие: $\sqrt[3]{-1}$.
21. Записать уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат, симметричного относительно начала координат, если его полуоси равны 7 и 2.
22. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-5}{3} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-3}{2}$ и плоскости $2x+y+3z-4=0$.
23. Дан треугольник с вершинами $A(1; -2; 8)$, $B(0; 0; 4)$, $C(6; 2; 0)$. Найдите его площадь и высоту BD .
24. Представить комплексное число в тригонометрической и показательной форме, изобразить на комплексной плоскости $z=2+2i$.
25. Найти значение выражения $\frac{(1+2i)(3-i)}{2-i} - i(5+3i)$.
26. Решить (любым методом) систему уравнений, заданную в виде $AX=B$, где A – матрица системы, B – столбец свободных членов:
- $$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 17 \end{pmatrix}.$$
27. Написать уравнение плоскости, проходящей через следующие две прямые $\frac{x+2}{7} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{5}$ и $\frac{x-1}{14} = \frac{y-3}{6} = \frac{z+2}{10}$.
28. Найти проекцию точки $A(1; -2; 8)$ на прямую $\frac{x-1}{14} = \frac{y-3}{6} = \frac{z+2}{10}$.
29. Найти ранг данной матрицы:
- $$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 & 9 \\ 5 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
30. Привести уравнение кривой второго порядка $-4x^2 - 24x - 63 - 18y + 9y^2 = 0$ к каноническому виду, найти центр, полуоси, асимптоты (если есть), вершины. Сделать чертеж.
31. Найти z^{12} , если $z = -4 + 4i$.
32. Дан треугольник с вершинами $A(1; -2; 8)$, $B(0; 0; 4)$, $C(6; 2; 0)$. Составьте уравнение высоты, опущенной из вершины B .
33. Составить уравнение высоты AH в тетраэдре, вершины которого находятся в точках $A(2; -1; 1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(4; 1; 3)$.

$$34. A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 3 & 9 & -4 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}; \quad B^T(A-B) = ?$$

35. Дана прямая $x - 3y + 6 = 0$. Найдите: а) ее угловой коэффициент, б) ее нормальный вектор, в) точки пересечения с осями координат, г) площадь треугольника, заключенного между этой прямой и осями координат, д) точку пересечения этой прямой с прямой $5x - 2y - 9 = 0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Электронный ресурс]: учебник / Д. В. Беклемишев. – 12-е изд., испр. – Москва: Физматлит, 2009. – 309 с. (ЭБС «Университетская библиотека онлайн»).
2. Ефимов, Н. В. Краткий курс аналитической геометрии: учебник / Н. В. Ефимов. – 13-е изд., стер. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 240 с.

Дополнительная учебная литература

3. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник / Д. В. Беклемишев. – 10-е изд., испр. – Москва: Физматлит, 2004. – 304 с.
4. Бугров, Я. С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учебник / Я. С. Бугров; авт. С. М. Никольский. – 3-е изд., испр. и доп. – Москва: Наука, 1988. – 222 с.
5. Гусак, А. А. Пособие к решению задач по высшей математике / А. А. Гусак. – 3-е изд., стереотип. – Минск: БГУ, 1973. – 529 с.
6. Клетеник, Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии: учеб. пособие / Д. В. Клетеник; ред.: Н. В. Ефимов. – 17-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Профессия, 2004, 2005. – 199 с.
7. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 4-е изд. – Москва: Айрис-пресс, 2006. – 608 с.
8. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие / П. Е. Данко [и др.]. – 7-е изд., испр. – Москва: АСТ: Мир и Образование; Минск: Харвест, 2014. – 815 с.
9. Вялова, А. В. Матрицы и системы линейных уравнений: учеб. пособие для студ. вузов техн. спец./ А. В. Вялова. – Калининград: ФГОУ ВПО «КГТУ», 2009. – 63 с.
10. Вялова, А. В. Элементы векторной алгебры: учеб.- метод. пособие по дисциплине «Алгебра и аналит. геометрия» для студ. вузов техн. спец. 180403.65 – Эксплуатация суд. энергет. установок, 180404.65 – Эксплуатация суд. электрооборудования и средств автоматизации / А. В. Вялова; ФГОУ ВПО «КГТУ». – Калининград: ФГОУ ВПО "КГТУ", 2011. – 70 с.
11. Вялова, А. В. Алгебра и геометрия: учеб.-метод. пособие по практическим занятиям/ А. В. Вялова, Н. А. Елисеева, Т. В. Ермакова. – Калининград: Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ», 2021 – 188 с.

Локальный электронный методический материал

Александра Вячеславна Вялова

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Редактор С. Кондрашова

Уч.-изд. л. 2,7. Печ. л. 2,0.

Издательство федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Калининградский государственный технический университет»
236022, Калининград, Советский проспект, 1