ФГБОУ Калининградский государственный технический университет

**Институт цифровых технологий**

Топоркова Ольга Мстиславовна

# Учебно-методическое пособие по выполнению курсовой работы по дисциплине «Дискретная математика»

Калининград, 2022

**Пособие рассмотрено и одобрено методической комиссией Института цифровых технологий.**
**Протокол от «20» сентября 2022 г., №6**

# Оглавление

## Общие организационно-методические указания

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов направления 09.03.03 Прикладная информатика, изучающих дисциплину «Дискретная математика».

Освоение дисциплины «Дискретная математика» предполагает получение знаний о базовых понятиях двух основных разделов дискретной математики – теории множеств и теории графов, что позволит решать задачи профессиональной деятельности по разработке проектов автоматизации и информатизации прикладных процессов и созданию ИС в прикладных областях. Задачи изучения дисциплины включают, в частности, приобретение навыков решения практических задач по моделированию предметной области с помощью инструментария различных разделов дискретной математики, а также способности применять основные понятия и методы теории множеств и теории графов в формализации решения прикладных задач.

В результате изучения дисциплины студент должен знать методы упомянутых разделов дискретной математики; уметь разрабатывать модели компонентов информационных систем; владеть навыками моделирования предметной области средствами дискретной математики.

Для более глубокого изучения дисциплины в состав самостоятельной работы студентов (СРС) включена курсовая работа. Для ее выполнения, помимо настоящего учебно-методического пособия, полезно использовать учебные материалы:

1. Пономарев, В. Ф. Основы дискретной математики : учеб. пособие для студ. гр. напр. 550000 - Техн. науки / В. Ф. Пономарев. - Калининград : [б. и.], 1999. - 160 с.

2. Пономарев, В. Ф.. Основы дискретной математики : учеб. пособие / В. Ф. Пономарев. - Калининград : КГТУ, 1997. - 162 с.

3. Пономарев, В. Ф. Дискретная математика для информатиков-экономистов : учеб. пособие для студ. спец. 351400 - Прикладная информатика (по экономике) / В. Ф. Пономарев ; Калинингр. гос. техн. ун-т. - Калининград : КГТУ, 2002. - 239 с.

4. Пономарев, В. Ф. Дискретная математика для инженеров : учеб. пособие / В. Ф. Пономарев. - Москва : Горячая линия, 2009. - 319 с.

5. Пономарев, В. Ф. Основы теории графов : учеб. пособие по разд. "Основы теории графов" дисциплины "Дискретная математика" для студентов, обучающихся по направлению 351400 - Прикладная информатика (в экономике) и 654600 - Информатика и вычисл. техника / В. Ф. Пономарев ; Калинингр. гос. техн. ун-т. - Калининград : КГТУ, 2008. - 76 с.

6. Пономарев, В. Ф. Основы теории множеств : учеб. пособие для студ. по спец. 230101.65 - Вычисл. машины, комплексы, системы и сети, 230102.65 - Автоматизир. системы обработки информ. и упр., 351400 -

Прикл. информатика (по экономике) / В. Ф. Пономарев ; Калинингр. гос. техн. ун-т. - Калининград : КГТУ, 2007. - 95 с.

7. Колесников А.В. Дискретная математика. Практикум: Учебное пособие.-Калининград: Изд-во ФГОУ «КГТУ», 2006.-115 с.
8. Горбатов В.А. Фундаментальные основы дискретной математики/ В.А. Горбатов. М.: Наука. Физматлит, 2000. -544 с.
9. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика:- М.:МГТУ им. Н.Э.Баумана.ю 2001.-744 с.
10. Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика.- М.: Вильямс, 2005.-960 с.
11. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов.=СПБ.: Питер, 2005.-304 с.
12. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику.- М.: Высшая школа, 2001.-384 с.
13. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике: Учебное пособие.- Изд. 3-е переработанное.- М.: Наука. Физматлит, 2005.- 416 с.
14. Бурков В.Н. и др. Теория графов в управлении организационными системами.- М,: Синтег, 2000.
15. Дибрель Р. Теория графов. Пер. с англ.-Новосибирск: Изд-во Института математики, 2002.

## *Порядок выполнения курсовой работы*

Курсовая работа включает выполнение двух заданий:

1) по разделу «Основы теории множеств» - минимизацию булевых функций;
2) по разделу «Основы теории графов» - поиск критического пути в графе.

Каждое задание выдается преподавателем по окончании аудиторного изучения соответствующей темы и сопровождается назначением сроков исполнения. Задания выполняются независимо друг от друга, а потому проверяются преподавателем и защищаются студентом по отдельности. После защиты обоих заданий их бумажный вариант оформляется в виде пояснительной записки по курсовой работе и передается через преподавателя в архив кафедры.

Рекомендуется следующая последовательность шагов по выполнению задания:

1) исходные данные выбираются студентом в соответствии с вариантом, выданным преподавателем;
2) после возможного уточнения исходных данных (в случае необходимости) студент знакомится с соответствующим теоретическим материалом в соответствии с приведенным списком литературы, а также по собственному конспекту лекций;

3) выполняется индивидуальное задание в соответствии с примерами, рассмотренными в данном учебно-методическом пособии;
4) выполненное задание для проверки преподавателем оформляется средствами текстового процессора Word в соответствии со структурой (дополнительные требования к оформлению задания см. в приложении 5):
   - титульный лист (приложения 1 и 2);
   - автособираемое оглавление (приложение 4);
   - формулировка задания из методических материалов (пункт «Задание к работе») и содержание своего варианта;
   - ход решения с комментариями;
   - результаты решения;
5) оформленное задание в электронном виде (на почтовый адрес OLGA.TOPORKOVA@KLGTU.RU) представляется преподавателю на проверку;
6) в случае положительного результата проверки работа защищается студентом очно;
7) при выставлении оценки учитываются следующие показатели: срок выполнения задания, качество оформления, наличие ошибок или неточностей, полнота решения задачи, качество защиты;
8) после защиты обоих заданий их электронные версии распечатываются, собираются в единый комплект и передаются преподавателю (титульный лист для курсовой работы см. в приложении 3).

## Задания и методические указания по разделу «Основы теории множеств»

**Задание к работе:**

Минимизировать СДНФ и СКНФ булевой функции. Для этого:

1) составить СДНФ и СКНФ булевой функции в соответствии с вариантом (таблица 1, ячейки с заливкой не используются);

Таблица 1

| Аргумент булевой функции | | | | Старший разряд номера варианта | | | | | | Младший разряд номера варианта | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | Значение булевой функции | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | | | | | | | | | | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | | | | | | | | | | |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | | | | | | | | | | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | | | | | | | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | | | | | | | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | | | | | | | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | | | | | | | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | | | | | | | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | | | | | | | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

2) вычислить минимальные булевы функции $f_{ДНФ}^{min}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $f_{КНФ}^{min}(x_1, x_2, x_3, x_4)$, при этом сопровождать каждый шаг преобразования формул комментариями, ссылаясь, в частности, на правила и законы эквивалентных преобразований.

**Выполнение задания**

## 1. Минимизация СДНФ

Пусть булева функция задана таблицей:

| № п/п | Аргумент булевой функции | | | | Значение булевой функции |
|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 12 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 13 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 14 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Алгоритм минимизации СДНФ включает следующие действия:

1. получить СДНФ булевой функции,
2. получить тупиковую ДНФ;
3. найти минимальную ДНФ.

### 1) Получение СДНФ

Известно, что получить СДНФ можно двумя способами – по таблице функциональной зависимости аргумента булевой функции и ее значения либо преобразовав исходную булеву формулу. В соответствии с заданием на работу мы имеем дело с первым вариантом.

Для формирования СДНФ по таблице:

1) выделим строки, для которых значение булевой функции равно 1, – это строки с номерами 2, 4, 6, 8, 13, 15, 16 (см. таблицу);
2) выпишем конъюнкты значений всех булевых переменных для каждой выделенной строки, при этом нулевые значения компонентов аргумента запишем с инверсией, а единичные значения – без инверсии:

$$2 - \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4$$
$$4 - \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4$$
$$6 - \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4$$
$$8 - \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$$
$$13 - x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4}$$
$$15 - x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}$$
$$16 - x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$$

3) соединим полученные конъюнкты операцией дизъюнкции $\vee$:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4 \vee \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 \vee \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$$

Данная формула есть СДНФ булевой функции, изначально заданной таблицей, поскольку в каждом ее конъюнкте присутствуют все четыре булевы переменные.

**2) Получение тупиковой ДНФ**

*Тупиковая* дизъюнктивная нормальная форма характеризуется тем, что ее конъюнкты равносильны с конъюнктами *сокращенной* ДНФ, но имеют наименьшее число булевых переменных, такое, что любое последующее их уменьшение ведёт к разрушению булевой функции.

Поскольку в данном определении присутствует понятие сокращенной ДНФ, напомним и его: конъюнкты сокращенной ДНФ равносильны с конъюнктами СДНФ, но имеют меньшее число булевых переменных.

Алгоритм получения тупиковой ДНФ сводится к нескольким итерациям получения сокращенной формы, в результате которых формируется искомая тупиковая ДНФ:

1) если в СДНФ есть конъюнкты вида $x_i \cdot f_i$ и $\overline{x_i} \cdot f_i$, то выполнить обобщённое склеивание $x_i \cdot f_i \vee \overline{x_i} \cdot f_i = x_i \cdot f_i \vee \overline{x_i} \cdot f_i \vee f_i$ для каждой переменной $x_i$ каждого конъюнкта последовательно слева направо,
2) выполнить поглощение $x_i \cdot f_i \vee f_i = f_i$ и $\overline{x_i} \cdot f_i \vee f_i = f_i$. Так будет получена *сокращённая* ДНФ;
3) шаги 1) и 2) выполнять до тех пор, пока можно уменьшать число булевых переменных. В этом случае будет получена *тупиковая* ДНФ.

Для нашего примера получение тупиковой ДНФ выполняется следующими итерациями:

1) первая итерация:
   - обобщённое склеивание выполняется с каждой булевой переменной $x_i$ каждого конъюнкта последовательно слева-направо (вновь полученные конъюнкты выделены цветом):

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4 \vee \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 \vee \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_4 \vee \overline{x_1} \cdot x_3 \cdot x_4 \vee \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_4 \vee x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_4} \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

В таблице показано для наглядности, из каких исходных конъюнктов получены новые конъюнкты (знак операции конъюнкции в формулах опущен в целях сокращения объема формул):

| Исходные конъюнкты | Полученные конъюнкты $f_i$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4$ | $\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_4$ | $\overline{x_1}x_3x_4$ | $\overline{x_1}x_2x_4$ | $x_2x_3x_4$ | $x_1x_2\overline{x_4}$ | $x_1x_2x_3$ |
| $\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$ | + | + | | | | | |
| $\overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4$ | + | | | + | | | |
| $\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4$ | | + | + | | | | |
| $\overline{x_1}x_2x_3x_4$ | | | + | + | + | | |
| $x_1x_2x_3x_4$ | | | | | + | | + |
| $x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$ | | | | | | + | |
| $x_1x_2x_3\overline{x_4}$ | | | | | | + | + |

- поглощение выполняется для каждой $f_i$. Это означает практически, что в результирующей формуле предыдущего этапа удаляются те исходные конъюнкты, из которых получены новые конъюнкты:

$$\overline{x_1} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_4 \vee \overline{x_1} \cdot x_3 \cdot x_4 \vee \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_4 \vee x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_4} \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

2) вторая итерация:

- обобщённое склеивание также выполняется с каждой булевой переменной $x_i$ каждого конъюнкта последовательно слева-направо (новый конъюнкт выделен цветом):

$$\overline{x_1} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_4 \vee \overline{x_1} \cdot x_3 \cdot x_4 \vee \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_4 \vee x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_4} \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee \overline{x_1} \cdot x_4$$

В таблице показано для наглядности, из каких исходных конъюнктов получен новый конъюнкт:

| Исходные конъюнкты | Полученные конъюнкты $f_i$ |
|---|---|
| | $\overline{x_1} \cdot x_4$ |
| $\overline{x_1} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4$ | + |
| $\overline{x_1} \cdot x_3 \cdot x_4$ | + |
| $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_4$ | + |
| $\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_4$ | + |

- поглощение выполняется также для каждой $f_i$. В результирующей формуле предыдущего этапа удаляются конъюнкты, участвовавшие в образовании новых конъюнктов:

$$x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_4} \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee \overline{x_1} \cdot x_4$$

Анализ полученной формулы показывает, что следующее обобщённое склеивание не уменьшает длину конъюнктов и число булевых переменных (проверить этот тезис предлагается самостоятельно). Это означает, что уже на второй итерации получена **тупиковая** ДНФ.

### 3) Поиск минимальной ДНФ

Для поиска минимальной ДНФ составляется таблица, строками которой являются конъюнкты СДНФ булевой функции – $K^{(i)}$, а столбцами – конъюнкты тупиковой ДНФ – $K_j$:

| Конъюнкты СДНФ $K^{(i)}$ | Конъюнкты тупиковой ДНФ $K_j$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $\overline{x_1} \cdot x_4$ | $x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ | $x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_4}$ | $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ |
| $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4$ | | | | |
| $\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4$ | | | | |
| $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4$ | | | | |
| $\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ | | | | |
| $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ | | | | |
| $x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4}$ | | | | |
| $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}$ | | | | |

Заполняется таблица по правилам:

1) если конъюнкт $K_j$ тупиковой ДНФ входит в число элементов конъюнкта $K^{(i)}$, то на пересечении строки и столбца ставится 1, в противном случае 0;
2) для каждого конъюнкта $K_j$ тупиковой ДНФ проверяется условие его единичного участия в формировании того или иного конъюнкта СДНФ (т.е. одна единица должна быть в строке для конъюнкта СДНФ). В этом случае $K_j$ является *ядерным конъюнктом* минимальной ДНФ (1 включается в квадратные скобки). Если же в строке несколько единиц, то $K_j$ не является ядерным конъюнктом:

| Конъюнкты СДНФ $K^{(i)}$ | Конъюнкты тупиковой ДНФ $K_j$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $\overline{x_1} \cdot x_4$ | $x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ | $x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_4}$ | $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ |
| $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4$ | [1] | 0 | 0 | 0 |
| $\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4$ | [1] | 0 | 0 | 0 |
| $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4$ | [1] | 0 | 0 | 0 |
| $\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4}$ | 0 | 0 | [1] | 0 |
| $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}$ | 0 | 0 | 1 | 1 |

Ядерными конъюнктами в примере являются $\overline{x_1}\cdot x_4$ и $x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_4}$ , которые покрывают шесть конъюнктов СДНФ: $\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}\cdot x_4$, $\overline{x_1}\cdot x_2\cdot\overline{x_3}\cdot x_4$, $\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\cdot x_4$, $\overline{x_1}\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4$ – в первом случае и $x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4}$, $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\overline{x_4}$ – во втором. Остался непокрытым ядерными конъюнктами один конъюнкт СДНФ - $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4$.

Удалим в последней таблице столбцы, содержащие ядерные конъюнкты, и строки $K^{(i)}$, покрытые ядерными конъюнктами, - получим *сокращённую* таблицу для неядерных конъюнктов:

| Исходные конъюнкты $K^{(i)}$ | Конъюнкты тупиковой ДНФ $K_{\mathrm{j}}$ | |
|---|---|---|
| | $x_2\cdot x_3\cdot x_4$ | $x_1\cdot x_2\cdot x_3$ |
| $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4$ | 1 | 1 |

Видно, что непокрытый конъюнкт покрывается каждым их неядерных конъюнктов. Это позволяет сформировать два варианта минимальной ДНФ, которая обычно формируется из **всех** ядерных конъюнктов и минимального набора неядерных, покрывающих оставшиеся конъюнкты СДНФ.

Ответ: два варианта **минимальной ДНФ**:

$f_{\text{ДНФ}1}^{min}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}\cdot x_4 \vee x_1\cdot x_2\cdot x_3 \vee x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_4}$,

$f_{\text{ДНФ}2}^{min}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}\cdot x_4 \vee x_2\cdot x_3\cdot x_4 \vee x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_4}$.

Выбор одной из двух минимальных формул булевой функции определяется условиями уже другой задачи.

## 2. Минимизация СКНФ

Пусть булева функция задана таблицей:

| № п/п | Аргумент булевой функции | | | | Значение булевой функции |
|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 12 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 13 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 14 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Алгоритм минимизации СКНФ включает следующие действия:

1. получить СКНФ булевой функции,
2. получить тупиковую КНФ;
3. найти минимальную КНФ.

**1) Получение СКНФ**

Для формирования СКНФ по таблице:

1) выделим строки, для которых значение булевой функции равно 0, - это строки с номерами 1, 3, 5, 7, 9, 10, 12 (см. таблицу);
2) выпишем дизъюнкты значений всех булевых переменных для каждой выделенной строки, при этом единичные значения компонентов аргумента запишем с инверсией, а нулевые – без инверсии:

$$1 – x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$$
$$3 – x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4$$
$$5 – x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4$$
$$7 – x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4$$
$$9 – \overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$$
$$10 – \overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}$$

$$12 \text{ - } \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}$$

3) соединим полученные дизъюнкты операцией конъюнкции ·:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4) \cdot (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \cdot (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4) \cdot (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \cdot (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})$.

Данная формула есть СКНФ булевой функции, поскольку в каждом ее дизъюнкте присутствуют все четыре булевы переменные.

**2) Получение тупиковой КНФ**

Алгоритм получения тупиковой КНФ и связанные с ним понятия во многом аналогичны алгоритму получения тупиковой ДНФ, поэтому изложим данную задачу без излишних напоминаний и комментариев:

1) если в СКНФ есть дизъюнкты вида $(x_i \vee f_i)$ и $(\overline{x_i} \vee f_i)$, то выполнить обобщенное склеивание $(x_i \vee f_i) \cdot (\overline{x_i} \vee f_i) = (x_i \vee f_i) \cdot (\overline{x_i} \vee f_i) \cdot f_i$ для каждой булевой переменной $x_i$ каждого дизъюнкта последовательно слева направо;
2) выполнить поглощение $(x_i \vee f_i) \cdot f_i = f_i$ и $(\overline{x_i} \vee f_i) \cdot f_i = f_i$. Так будет получена *сокращённая* КНФ;
3) шаги 1) и 2) выполнять до тех пор, пока можно уменьшить число булевых переменных. В этом случае будет получена *тупиковая* КНФ.

Для нашего примера получение тупиковой КНФ выполняется следующими итерациями:

1) первая итерация:
   - обобщенное склеивание выполняется с каждой булевой переменной $x_i$ каждого дизъюнкта последовательно слева-направо (вновь полученные дизъюнкты выделены цветом):

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \cdot (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \cdot (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4) \cdot \overline{(x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \cdot (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \cdot (x_2 \vee x_3 \vee x_4) \cdot (x_1 \vee x_3 \vee x_4) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \cdot (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4) \cdot (x_1 \vee \overline{x_3} \vee x_4) \cdot (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \cdot (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})$

В таблице показано для наглядности, из каких исходных дизъюнктов получены новые дизъюнкты:

| Исходные дизъюнкты | Полученные дизъюнкты $f_i$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_2 \vee x_3 \vee x_4$ | $x_1 \vee x_3 \vee x_4$ | $x_1 \vee x_2 \vee x_4$ | $x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4$ | $x_1 \vee \overline{x_3} \vee x_4$ | $\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3$ | $\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}$ |
| $x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$ | + | + | + | | | | |
| $x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4$ | | + | | + | | | |
| $x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4$ | | | | + | + | | |
| $x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4$ | | | + | | + | + | |
| $\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$ | + | | | | | + | |
| $\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}$ | | | | | | | + |
| $\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}$ | | | | | | | + |

- поглощение выполняется для каждой $f_i$. Это означает практически, что в результирующей формуле предыдущего этапа удаляются те исходные дизъюнкты, из которых получены новые дизъюнкты:

$$(x_2 \vee x_3 \vee x_4)\cdot(x_1 \vee x_3 \vee x_4)\cdot(x_1 \vee x_2 \vee x_4)\cdot(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4)\cdot(x_1 \vee \overline{x_3} \vee x_4)\cdot(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)\cdot(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})$$

2) вторая итерация:
   - обобщённое склеивание также выполняется с каждой булевой переменной $x_i$ каждого дизъюнкта последовательно слева направо (новый дизъюнкт выделен цветом):

$$(x_2 \vee x_3 \vee x_4)(x_1 \vee x_3 \vee x_4)(x_1 \vee x_2 \vee x_4)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4)(x_1 \vee \overline{x_3} \vee x_4)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})(x_1 \vee x_4)$$

В таблице показано для наглядности, из каких исходных дизъюнктов получен новый дизъюнкт:

| Исходные дизъюнкты | Полученные дизъюнкты $f_i$ |
|---|---|
| | $x_1 \vee x_4$ |
| $(x_1 \vee x_3 \vee x_4)$ | + |
| $(x_1 \vee \overline{x_3} \vee x_4)$ | + |
| $(x_1 \vee x_2 \vee x_4)$ | + |
| $(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4)$ | + |

- поглощение выполняется также для каждой $f_i$. В результирующей формуле предыдущего этапа удаляются дизъюнкты, участвовавшие в образовании новых дизъюнктов:

$$(x_2 \vee x_3 \vee x_4)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})(x_1 \vee x_4)$$

Анализ показывает, что следующее обобщенное склеивание не уменьшает длину дизъюнктов и число булевых переменных. Следовательно, была получена **тупиковая** КНФ.

### 3) Поиск минимальной КНФ

Для поиска минимальной КНФ составляется таблица, строками которой являются дизъюнкты СКНФ булевой функции – $D^{(i)}$, а столбцами – дизъюнкты тупиковой КНФ – $D_j$:

| Дизъюнкты СКНФ $D^{(i)}$ | Дизъюнкты тупиковой КНФ $D_j$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $(x_2 \vee x_3 \vee x_4)$ | $(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$ | $(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})$ | $(x_1 \vee x_4)$ |
| $x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$ | | | | |
| $x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4$ | | | | |
| $x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4$ | | | | |
| $x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4$ | | | | |
| $\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$ | | | | |
| $\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}$ | | | | |
| $\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}$ | | | | |

Таблица заполняется по правилам:

1) если дизъюнкт $D_j$ тупиковой КНФ входит в число элементов дизъюнкта $D^{(i)}$, то на пересечении строки и столбца ставится 1, в противном случае 0;
2) для каждого дизъюнкта $D_j$ тупиковой КНФ проверяется условие его единичного участия в формировании того или иного дизъюнкта СКНФ (т.е. одна единица должна быть в строке для дизъюнкта СКНФ). В этом случае $D_j$ является *ядерным дизъюнктом* минимальной КНФ (1 включается в квадратные скобки). Если же в строке несколько единиц, $D_j$ не является ядерным дизъюнктом:

| Дизъюнкты СКНФ $D^{(i)}$ | Дизъюнкты тупиковой КНФ $D_j$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $(x_2 \vee x_3 \vee x_4)$ | $(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$ | $(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})$ | $(x_1 \vee x_4)$ |
| $x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$ | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4$ | 0 | 0 | 0 | [1] |
| $x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4$ | 0 | 0 | 0 | [1] |
| $x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4$ | 0 | 0 | 0 | [1] |
| $\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}$ | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}$ | 0 | 0 | [1] | 0 |

Для нашего примера ядерными дизъюнктами являются $(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})$ и $(x_1 \vee x_4)$, которые покрывают шесть дизъюнктов СКНФ: $\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}$, $\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}$ –в первом случае и $x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$, $x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4$, $x_1 \vee$

$\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4, x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4$ –во втором. Остался непокрытым ядерными дизъюнктами один дизъюнкт - $\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$.

Удалим в последней таблице столбцы, содержащие ядерные дизъюнкты, и строки $D^{(i)}$, покрытые ядерными дизъюнктами, - получим *сокращённую* таблицу для неядерных дизъюнктов:

| Дизъюнкты СКНФ $D^{(i)}$ | Дизъюнкты тупиковой ДНФ $D_j$ | |
|---|---|---|
| | $(x_2 \vee x_3 \vee x_4)$ | $(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$ |
| $\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$ | 1 | 1 |

Видно, что непокрытый дизъюнкт покрывается каждым из неядерных дизъюнктов. Это позволяет сформировать два варианта минимальной КНФ, которая формируется из **всех** ядерных дизъюнктов и минимального набора неядерных, но покрывающих оставшиеся дизъюнкты СКНФ.

Ответ: два варианта **минимальной КНФ**:

$f_{\text{КНФ}1}^{min}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_4) \cdot (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}) \cdot (x_2 \vee x_3 \vee x_4)$,

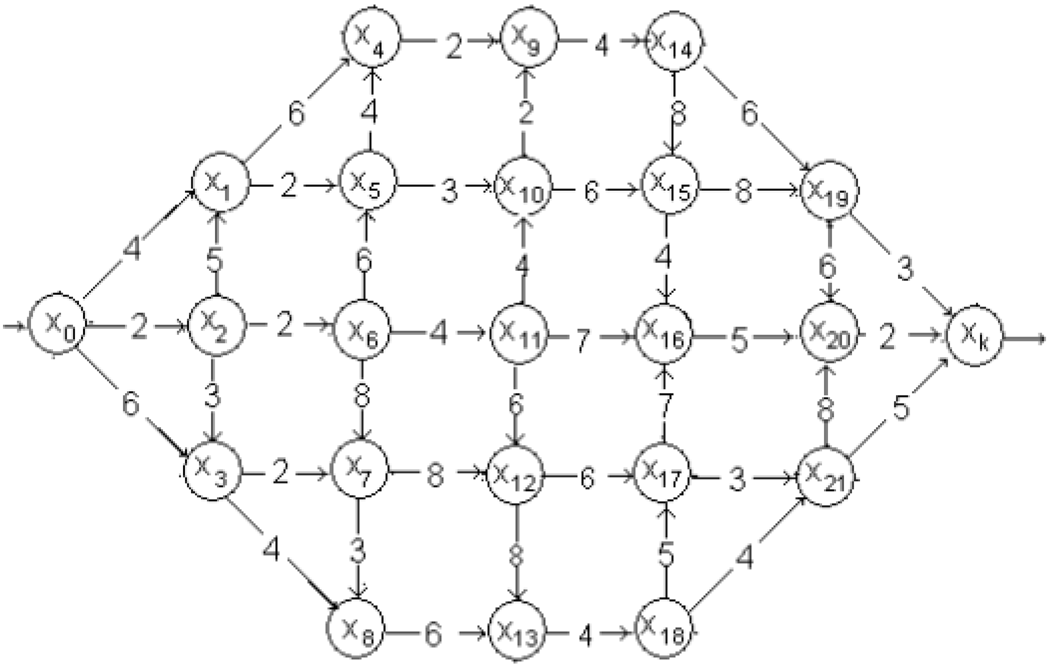
$f_{\text{КНФ}2}^{min}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_4) \cdot (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$.

Выбор одной из двух минимальных формул булевой функции определяется условиями уже другой задачи.

## Задания и методические указания по разделу «Основы теории графов»

**Задание к работе:**

Найти критический путь по алгоритму сетевого управления проектами (СПУ) для модели, приведенной на рисунке:

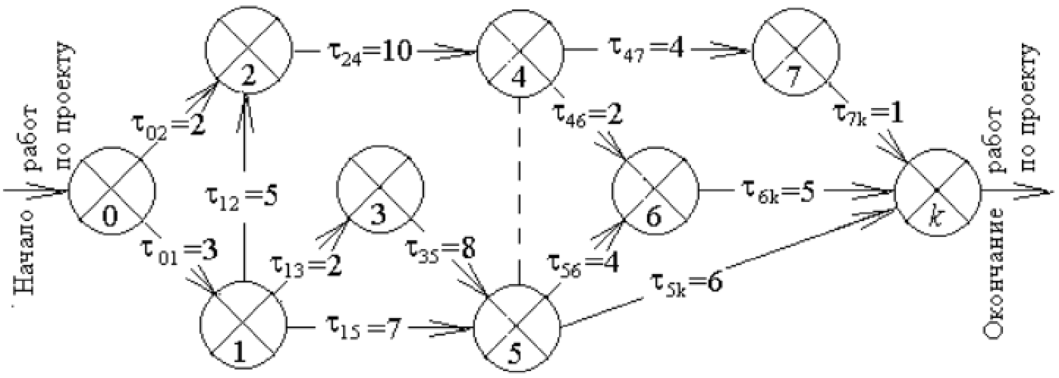



Продолжительности работ показаны на рисунке в условных единицах. Различия вариантов представлены удалением трех дуг и введением двух фиктивных работ – ожиданий (ячейки с заливкой не используются):

| Старший разряд варианта | Удалить дуги $(x_i, x_j)$ | Младший разряд варианта | Ввести фиктивные работы |
|---|---|---|---|
| 1 | $(x_0, x_1), (x_{15}, x_{19}), (x_{19}, x_k)$ | 1 | $(x_3, x_6), (x_8, x_{12})$ |
| 2 | $(x_0, x_3), (x_{17}, x_{21}), (x_{21}, x_k), (x_{12}, x_{13})$ | 2 | $(x_3, x_6), (x_4, x_{10})$ |
| 3 | $(x_6, x_5), (x_{11}, x_{12}), (x_{14}, x_{15})$ | 3 | $(x_5, x_{11}), (x_8, x_{12})$ |
| 4 | $(x_3, x_8), (x_1, x_4), (x_{19}, x_{20})$ | 4 | $(x_7, x_{11}), (x_{16}, x_{21})$ |
| 5 | $(x_1, x_5), (x_3, x_7), (x_{16}, x_{20})$ | 5 | $(x_4, x_{10}), (x_8, x_{12})$ |
| 6 | | 6 | $(x_8, x_{12}), (x_{16}, x_{21})$ |
| 7 | | 7 | $(x_7, x_{11}), (x_8, x_{12})$ |
| 8 | | 8 | $(x_{12}, x_{18}), (x_5, x_{11})$ |
| 9 | | 9 | $(x_4, x_{10}), (x_8, x_{12})$ |
| 0 | $(x_3, x_7), (x_{12}, x_{13}), (x_{15}, x_{19})$ | 0 | $(x_7, x_{11}), (x_5, x_{11})$ |

**Выполнение задания**

Пусть дана сетевая модель СПУ, в которой для компактного изображения параметров события каждая вершина представлена кругом, разделенным на четыре сектора: в одном секторе указан индекс вершины $i$, в другом – ранний момент события $t^p(x_i)$, в третьем – поздний момент события $t^n(x_i)$ и в четвертом – резерв времени на событие $t^0(x_i)$:




Требуется найти критический путь.

Решение задачи разобьем на 4 шага:

1) расчет раннего момента наступления каждого события;
2) расчет позднего времени наступления каждого события;
3) расчет резерва времени каждого события;
4) расчет резерва времени на исполнение каждой работы и определение критического пути.

**Расчет раннего момента наступления каждого события**

На решение данной задачи влияет число дуг, входящих в вершину-событие, а также наличие фиктивной работы между вершинами-событиями. В этой связи сгруппируем вершины исходной сети по числу входящих дуг и в соответствии с наличием связи в виде фиктивной работы:

1) вершины с одной входящей дугой – 1, 3, 4, 7: для них ранние моменты наступления событий рассчитываются сразу после определения раннего момента наступления события для вершины-истока;
2) вершины с несколькими входящими дугами – 2, 5, 6, $k$: для них конечный результат рассчитывается только после расчетов ранних моментов наступления событий для **всех** вершин-истоков и является в некотором смысле «отложенным»;
3) вершины, связанные фиктивной работой, – 4 и 5: для них рассчитываются ранние времена наступления событий без учета ожидания и в соответствии с п.1) и 2), а затем полученные значения выравниваются в сторону бо́льшего значения.

Определим последовательность расчетов в соответствии с исходной сетью и особенностями вершин:

1) поскольку вершины 0, 1, 3 формируют переход и имеют по одной входящей дуге (кроме вершины 0), можно сначала решить задачу для вершин 1 и 3 (при $t^p(0)=0$):

| ***i*** | ***j=h(i)*** | $\boldsymbol{t^p(x_j) = t^p(x_i) + \tau_{ij}}$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | $t^p(1) = t^p(0) + \tau_{01} = 0 + 3 = 3$ |
| 1 | 3 | $t^p(3) = t^p(1) + \tau_{13} = 3 + 2 = 5$ |

2) поскольку определены ранние моменты наступления событий для вершин 1 и 3, можно рассчитать эти характеристики для смежных им вершин 2 и 5 соответственно, которые характеризуются двумя входящими дугами, а вершина 5, кроме того, связана с вершиной 4 фиктивной работой. Это означает, что выполненный на втором этапе расчет для вершины 5 является не окончательным (выделен в таблице цветом) и будет уточнен далее:

| ***i*** | ***j=h(i)*** | $\boldsymbol{t^p(x_j) = t^p(x_i) + \tau_{ij}}$ | $\boldsymbol{t^p(x_j) = max\,\{t^p(x_j)\}}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 2 | $t^p(2) = t^p(0) + \tau_{02} = 0 + 2 = 2$ | $t^p(2) = \max\{t^p(2)\} = \max\{2,8\} = 8$ |
| 1 | 2 | $t^p(2) = t^p(1) + \tau_{12} = 3 + 5 = 8$ | |
| 1 | 5 | $t^p(5) = t^p(1) + \tau_{15} = 3 + 7 = 10$ | $t^p(5) = \max\{t^p(5)\} = \max\{10,13\} = 13$ |
| 3 | 5 | $t^p(5) = t^p(3) + \tau_{35} = 5 + 8 = 13$ | |

3) после расчета раннего времени наступления события 2 можно рассчитать раннее время наступления события 4:

| ***i*** | ***j=h(i)*** | $\boldsymbol{t^p(x_j) = t^p(x_i) + \tau_{ij}}$ |
|---|---|---|
| 2 | 4 | $t^p(4) = t^p(2) + \tau_{24} = 8 + 10 = 18$ |

4) после определения ранних моментов наступления событий 4 и 5, связанных фиктивной работой, можно уточнить итоговые ранние времена наступления обоих событий:

| ***i*** | ***j=h(i)*** | $\boldsymbol{t^p(x_j) = t^p(x_i) + \tau_{ij}}$ | $\boldsymbol{t^p(x_j) = max\,\{t^p(x_j)\}}$ |
|---|---|---|---|
| 4 | 5 | ожидание: $t^p(4) = 18, t^p(5) = 13$ | $t^p(4{,}5) = \max\{t^p(4), t^p(5)\} = 18$ |
| 5 | 4 | | |

Поскольку вершина 4 имеет максимальное значение раннего времени наступления события, именно это значение, равное 18, присваивается вершине 5 (в таблице это действие не отражено);

5) на данном этапе можно рассчитать ранние моменты наступления событий для вершин 7 (имеет только одну входящую дугу) и 6 (имеет две входящие дуги):

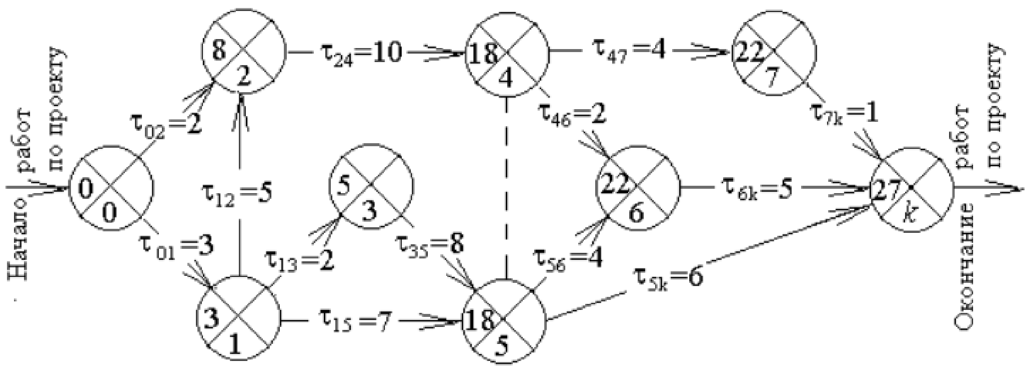
| $i$ | $j$=$h(i)$ | $t^p(x_j) = t^p(x_i) + \tau_{ij}$ |
|---|---|---|
| 4 | 7 | $t^p(7) = t^p(4{,}5) + \tau_{47} = 18 + 4 = 22$ |

| $i$ | $j$=$h(i)$ | $t^p(x_j) = t^p(x_i) + \tau_{ij}$ | $t^p(x_j) = max\,\{t^p(x_j)\}$ |
|---|---|---|---|
| 4 | 6 | $t^p(6) = t^p(4{,}5) + \tau_{46} = 18 + 2 = 20$ | $t^p(6) = \max\{t^p(6)\} = \max\{20{,}22\} = 22$ |
| 5 | 6 | $t^p(6) = t^p(4{,}5) + \tau_{56} = 18 + 4 = 22$ | |

6) теперь определены все моменты наступления ранних событий, чтобы решить аналогичную задачу для вершины $k$, имеющей три входящие дуги:

| $i$ | $j$=$h(i)$ | $t^p(x_j) = t^p(x_i) + \tau_{ij}$ | $t^p(x_j) = max\,\{t^p(x_j)\}$ |
|---|---|---|---|
| 5 | $k$ | $t^p(k) = t^p(4{,}5) + \tau_{5k} = 18 + 6 = 24$ | $t^p(k) = \max\{t^p(k)\} = \max\{20{,}24{,}23\} = 27$ |
| 6 | $k$ | $t^p(k) = t^p(6) + \tau_{6k} = 22 + 5 = 27$ | |
| 7 | $k$ | $t^p(k) = t^p(7) + \tau_{7k} = 22 + 1 = 23$ | |

На рисунке представлены результаты вычислений ранних моментов событий:




**Расчет поздних моментов наступления каждого события**

Исходные данные для этого расчета берутся из результатов решения предыдущей задачи, однако сеть просматривается в направлении от своего стока к истоку, т.е. от вершины $k$ к вершине 0.

По аналогии с предыдущей задачей выделим группы вершин в зависимости от числа исходящих дуг и в соответствии с наличием ожидания:

1) по одной исходящей дуге имеют вершины – 7, 6, 3, 2,
2) вершины с несколькими исходящими дугами – 5, 4, 1, 0,
3) вершины, связанные фиктивной работой, по-прежнему – 4 и 5.

В соответствии со структурой исходной сети определим последовательность расчетов:

1) поскольку известно позднее время вершины $k$ ($t^п(k) = 27$), можно решить аналогичную задачу для смежных вершин 7 и 6:

| ***i*** | ***j=h⁻¹(i)*** | $\boldsymbol{t^п(j) = t^п(i) - \tau_{ij}}$ |
|---|---|---|
| $k$ | 7 | $t^п(7) = t^п(k) - \tau_{7k} = 27 - 1 = 26$ |
| $k$ | 6 | $t^п(6) = t^п(k) - \tau_{6k} = 27 - 5 = 22$ |

2) теперь можно определить предварительные (пока без учета ожидания) искомые параметры для вершин 4 и 5:

| ***i*** | ***j=h⁻¹(i)*** | $\boldsymbol{t^п(j) = t^п(i) - \tau_{ij}}$ | $\boldsymbol{t^п(j) = min\{t^п(j)\}}$ |
|---|---|---|---|
| 6 | 4 | $t^п(4) = t^п(6) - \tau_{46} = 22 - 2 = 20$ | $t^п(4) = \min\{t^п(4)\} = \min\{22,20\} = 20$ |
| 7 | 4 | $t^п(4) = t^п(7) - \tau_{47} = 26 - 4 = 22$ | |
| 6 | 5 | $t^п(5) = t^п(6) - \tau_{56} = 22 - 4 = 18$ | $t^п(5) = \min\{t^п(5)\} = \min\{21,18\} = 18$ |
| $k$ | 5 | $t^п(5) = t^п(k) - \tau_{5k} = 27 - 6 = 21$ | |

3) примем во внимание ожидание между вершинами 4 и 5 и определим окончательно поздние времена наступления соответствующих событий:

| ***i*** | ***j=h⁻¹(i)*** | $\boldsymbol{t^п(j) = t^п(i) - \tau_{ij}}$ | $\boldsymbol{t^п(j) = min\{t^п(j)\}}$ |
|---|---|---|---|
| 4 | 5 | ожидание: $t^п(4) = 20, t^п(5) = 18$ | $t^п(4{,}5) = \min\{t^п(4), t^п(5)\} = 18$ |
| 5 | 4 | | |

4) с вершиной 5 смежна вершина 3, а с вершиной 4 – вершина 2. Определим для них поздние времена наступления событий:

| ***i*** | ***j=h⁻¹(i)*** | $\boldsymbol{t^п(j) = t^п(i) - \tau_{ij}}$ |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 3 | $t^{п}(3) = t^{п}(4{,}5) - \tau_{35} = 18 - 8 = 10$ |
| 4 | 2 | $t^{п}(2) = t^{п}(4{,}5) - \tau_{24} = 18 - 10 = 8$ |

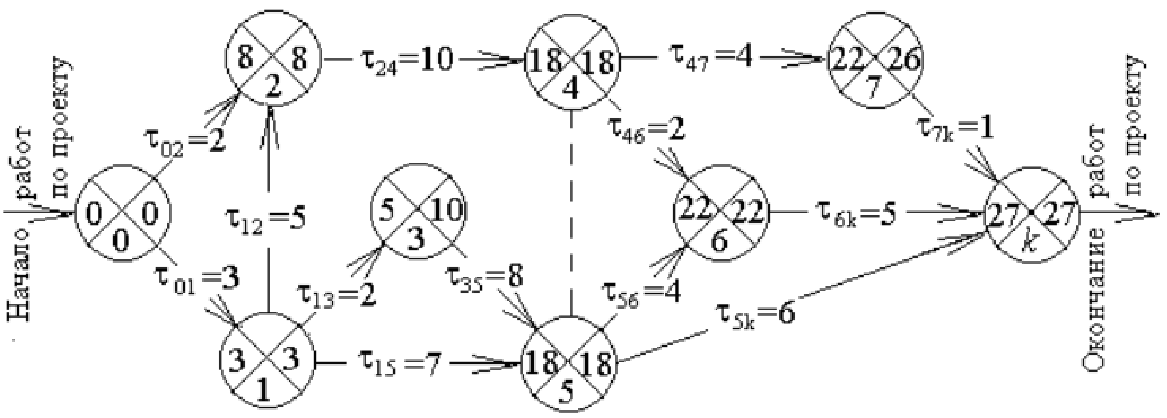
5) дальнейшие расчеты выполним для вершины 1 с тремя исходящими дугами:

| ***i*** | ***j*=*h*$^{-1}$(*i*)** | $\boldsymbol{t^{п}(j) = t^{п}(i) - \tau_{ij}}$ | $\boldsymbol{t^{п}(j) = min\{t^{п}(j)\}}$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 1 | $t^{п}(1) = t^{п}(2) - \tau_{12} = 8 - 5 = 3$ | $t^{п}(1) = \min\{t^{п}(1)\} = \min\{11{,}8{,}3\} = 3$ |
| 3 | 1 | $t^{п}(1) = t^{п}(3) - \tau_{13} = 10 - 2 = 8$ | |
| 5 | 1 | $t^{п}(1) = t^{п}(4{,}5) - \tau_{15} = 18 - 7 = 11$ | |

6) наконец рассчитаем позднее время наступления события для вершины 0:

| ***i*** | ***j*=*h*$^{-1}$(*i*)** | $\boldsymbol{t^{п}(j) = t^{п}(i) - \tau_{ij}}$ | $\boldsymbol{t^{п}(j) = min\{t^{п}(j)\}}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $t^{п}(0) = t^{п}(1) - \tau_{01} = 3 - 3 = 0$ | $t^{п}(0) = \min\{t^{п}(0)\} = \min\{6{,}0\} = 0$ |
| 2 | 0 | $t^{п}(0) = t^{п}(2) - \tau_{02} = 8 - 2 = 6$ | |

На рисунке представлены результаты вычислений поздних моментов событий:

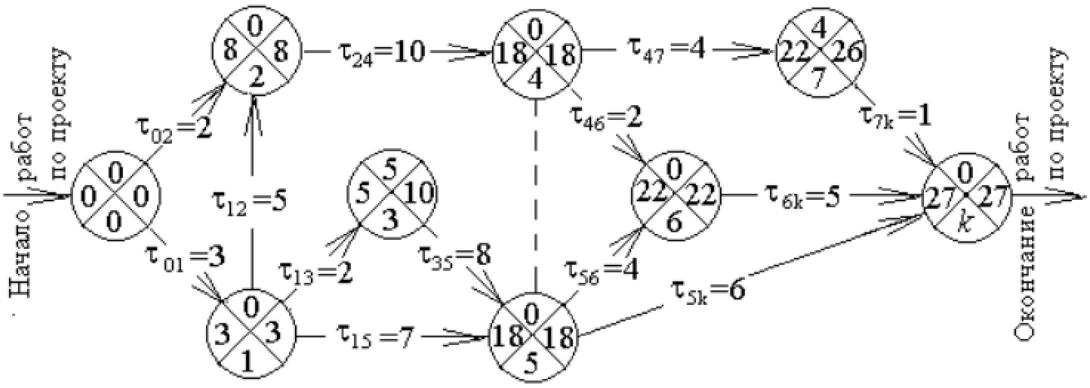



**Расчеты резерва времени каждого события**

Для решения задачи по каждой вершине $i$ рассчитывается ее резерв времени $t^{0}(i)$ по формуле $t^{0}(i) = t^{п}(i) - t^{p}(i)$:

| $r$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $t^{п}(i)$ | 0 | 3 | 8 | 10 | 18 | 18 | 22 | 26 | 27 |
| $t^{p}(i)$ | 0 | 3 | 8 | 5 | 18 | 18 | 22 | 22 | 27 |
| $t^{0}(i)$ | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 |

На рисунке приведены результаты вычислений резервов времени на события:

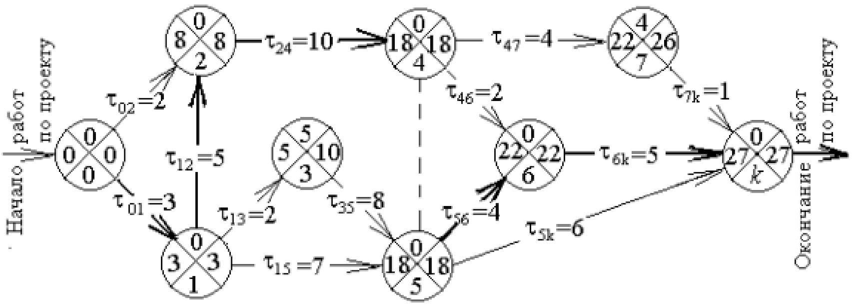



**Расчеты резерва времени на исполнение работы**

Для решения задачи по каждой дуге $(i, j)$ рассчитывается резерв времени $\tau_{ij}^{0}$ на соответствующую работу по формуле $\tau_{ij}^{0} = t^{п}(j) - t^{p}(i) - \tau_{ij}$:

| $r$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **(i,j)** | (0,1) | (0,2) | (1,2) | (1,3) | (1,5) | (2,4) | (3,5) | (4,6) | (4,7) | (5,6) | (5,$k$) | (6,$k$) | (7,$k$) |
| $t^{п}(i)$ | 3 | 8 | 8 | 10 | 18 | 18 | 18 | 22 | 26 | 22 | 27 | 27 | 27 |
| $t^{p}(j)$ | 0 | 0 | 3 | 3 | 3 | 8 | 5 | 18 | 18 | 18 | 18 | 22 | 22 |
| $\tau_{ij}$ | 3 | 2 | 5 | 2 | 7 | 10 | 8 | 2 | 4 | 4 | 6 | 5 | 1 |
| $\tau_{ij}^{0}$ | 0 | 6 | 0 | 5 | 8 | 0 | 5 | 2 | 4 | 0 | 3 | 0 | 4 |

На рисунке полужирными линиями выделен критический путь, для которого $t^{0}(i) = 0$ и $\tau_{ij}^{0} = 0$:




Анализ результатов вычислений по сетевой модели показывает:

- события 1, 2, 4, 5, 6 не имеют резерва времени на событие, то есть они принадлежат критическому пути,
- работы (0, 1), (1, 2), (2, 4), (5, 6), (6, *k*) не имеют резерва времени на работу, то есть они также принадлежат критическому пути,
- события 3 и 7 имеют резерв времени, что позволяет ослабить внимание на исполнение работ $\tau_{13}$, $\tau_{35}$, $\tau_{47}$, $\tau_{7k}$ или уменьшить затраты ресурсов на их исполнение,
- работы (0, 2), (1,5), (4, 6), (5, *k*) имеют резерв времени, что позволяет продлить исполнение этих работ или также уменьшить затраты ресурсов.

## Приложения

### *Приложение 1. Титульный лист для задания*

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Калининградский государственный технический университет»

Факультет автоматизации производства и управления

Кафедра систем управления и вычислительной техники

**Задание № ___**
**по дисциплине «Дискретная математика»**
**Раздел <название раздела>**

Работу принял:
к.т.н., доцент

Топоркова О.М.

______________________________

Работу выполнил:
ст. гр.________________
(шифр учебной группы)
________________________
(Ф.И.О. студента)

(оценка)

Подпись:___________________ Подпись:______________

Дата:______________________ Дата:__________________

Калининград

_________ г.

## *Приложение 2. Пример титульного листа для задания*

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Калининградский государственный технический университет»

Факультет автоматизации производства и управления

Кафедра систем управления и вычислительной техники

**Задание № 1**
**по дисциплине «Дискретная математика»**
**Раздел «Основы теории множеств»**

Работу принял:
к.т.н., доцент

Топоркова О.М.

Работу выполнил:
ст. гр. 12-ИЭ

Иванов И.И.

_____________________________
(оценка)

Подпись:___________________ Подпись:________________

Дата:______________________ Дата: 07.03.2012

Калининград

__________ г.

## *Приложение 3. Титульный лист для курсовой работы*

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Калининградский государственный технический университет»

Факультет автоматизации производства и управления

Кафедра систем управления и вычислительной техники

**Курсовая работа**
**по дисциплине «Дискретная математика»**

Работу принял:
к.т.н., доцент

Топоркова О.М.

______________________________
(оценка)

Подпись:___________________

Дата:______________________

Работу выполнил:
ст. гр.________________
(шифр учебной группы)
________________________
(Ф.И.О. студента)

Подпись:______________

Дата:__________________

Калининград

_________ г.

## *Приложение 4. Пример структуры автособираемого оглавления*

### Оглавление

## *Приложение 5. Требования к оформлению задания в среде текстового процессора Word*

1. Параметры страницы:
   - размер страницы, соответствующий стандартному машинописному листу, - 210х297 мм;
   - поля: сверху, снизу и слева по 3 см, справа - 1 см;
   - в верхнем колонтитуле ввести номер страницы (кроме титульного листа);
   - ориентация – книжная.
2. Параметры текста:
   - шрифт Times New Roman, размер 14, начертание - обычный;
   - отступы абзаца от полей слева и справа – 0;
   - первая строка абзаца - отступ 1,5 см;
   - выравнивание абзаца по левой границе;
   - междустрочный интервал – 1;
   - интервал между абзацами – 0;
   - разрешить автоматический перенос слов.
3. Для широких таблиц использовать альбомную ориентацию страницы. В случае необходимости уменьшить размер шрифта для формул в таблицах. Исключить разбивку таблиц на несколько страниц или включить режим повторения заголовков для таблиц.
4. Включить стили:
   - Заголовок1 – для заголовков Задание к работе и Выполнение задания;
   - Заголовок2 – для заголовков Минимизация СДНФ и Минимизация СКНФ;
   - Заголовок3 – для заголовков Получение СДНФ (СКНФ), Получение тупиковой ДНФ (КНФ), Поиск минимальной ДНФ (КНФ).
5. Раздел Выполнение задания начать с новой страницы.
6. Заголовки разделов не должны разделяться с текстом раздела.