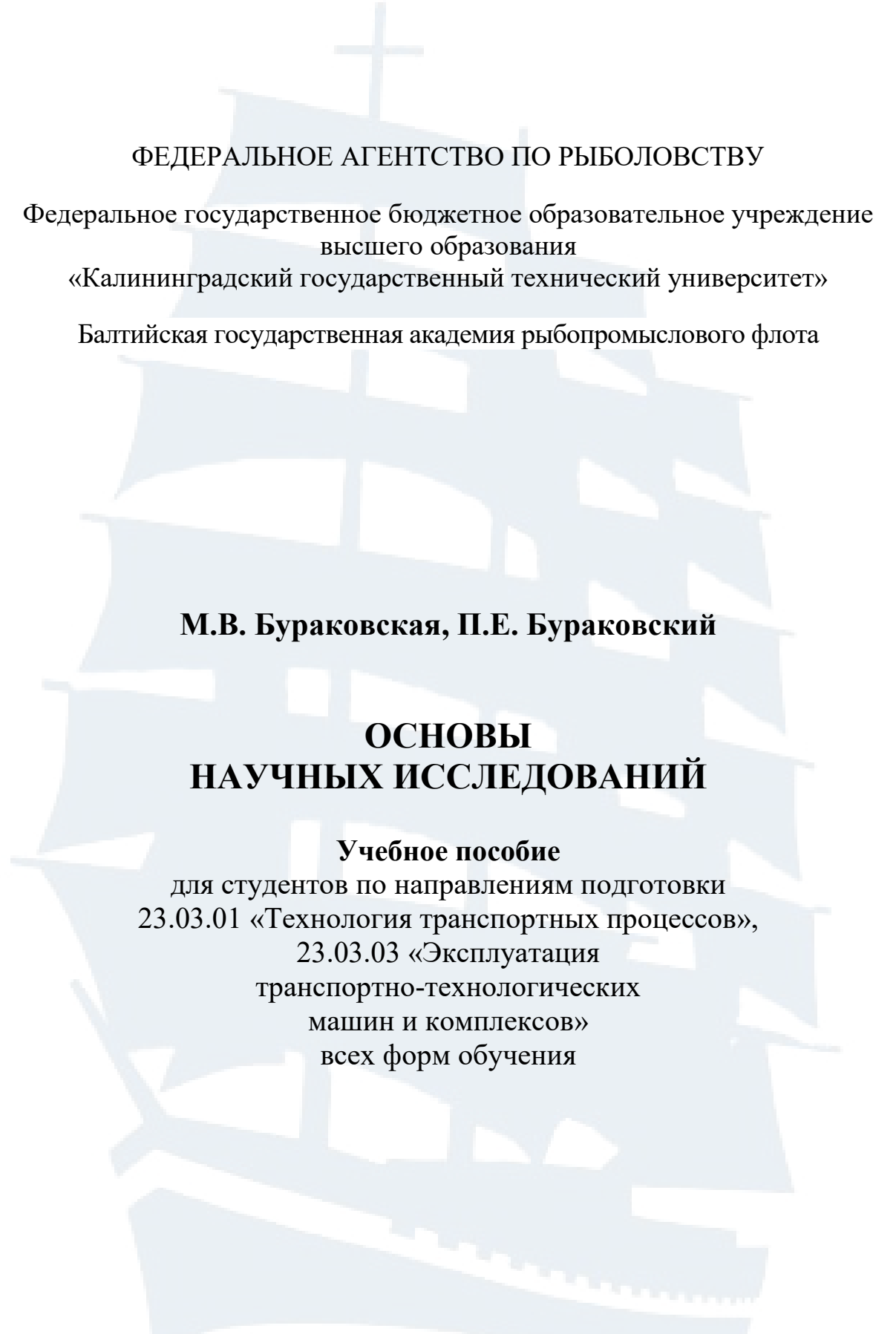




ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО РЫБОЛОВСТВУ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Калининградский государственный технический университет»

Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота

М.В. Бураковская, П.Е. Бураковский

ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Учебное пособие

для студентов по направлениям подготовки
23.03.01 «Технология транспортных процессов»,
23.03.03 «Эксплуатация
транспортно-технологических
машин и комплексов»
всех форм обучения

Калининград
Издательство БГАРФ
2020

БГАРФ

УДК 001.8 (075)

Бураковская, М.В. Основы научных исследований: учебное пособие / М.В. Бураковская, П.Е. Бураковский. – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2020. – 100 с.

В учебном пособии рассматриваются вопросы применения статистических методов при проведении научных исследований и обработке их результатов. Уделено внимание построению регрессионных моделей, в том числе с использованием матричного подхода. Рассмотрены задачи, связанные с проведением факторного эксперимента и дисперсионного анализа.

Пособие разработано в соответствии с рабочей программой дисциплины «Основы научных исследований», предназначено для студентов всех форм обучения, обучающихся по направлениям подготовки 23.03.01 «Технология транспортных процессов», 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов».

Ил. 9, табл. 49, библиогр. – 6 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Балтийской государственной академии рыбопромыслового флота.

Рецензенты: **Ковальчук Л.И.**, д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры «Автомобильный транспорт и сервис автомобилей» БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»;
Великанов Н.Л., д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой машиноведения и технических систем, БФУ им. И. Канта

ISBN 978-5-7481-0438-8

© БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ», 2020

БГАРФ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Список условных сокращений.....	4
Введение.....	5
<i>Практическая работа № 1. «Построение регрессионной модели первого порядка по результатам испытаний транспортно-технологических машин и комплексов и их элементов».....</i>	<i>6</i>
<i>Практическая работа № 2. «Применение матричного подхода при построении полиномиальных регрессионных моделей высших порядков»</i>	<i>14</i>
<i>Практическая работа № 3. «Оценка основных эксплуатационных показателей транспортно-технологических машин и комплексов и их элементов по результатам испытаний»</i>	<i>23</i>
<i>Практическая работа № 4. «Применение законов распределения случайных величин для оценки эксплуатационных показателей транспортно-технологических машин и комплексов и их элементов»</i>	<i>33</i>
<i>Практическая работа № 5. «Расчет сводных характеристик выборки и графическая интерпретация случайных величин на основе работы с выборкой из N элементов»</i>	<i>48</i>
<i>Практическая работа № 6. «Построение доверительного интервала для линии регрессии»</i>	<i>68</i>
<i>Практическая работа № 7. «Применение двухфакторного дисперсионного анализа в экспериментальных исследованиях»</i>	<i>72</i>
Список использованной литературы.....	87
<i>Приложение А. Значения функции нормированного нормального распределения</i>	<i>88</i>
<i>Приложение Б. Значения ординат плотности нормированного нормального распределения</i>	<i>91</i>
<i>Приложение В. Процентные точки F-распределения при $\alpha = 0,05$ ($F_{0,05; \nu_1; \nu_2}$)</i>	<i>93</i>
<i>Приложение Г. Процентные точки t-распределения.....</i>	<i>98</i>
<i>Приложение Д. Параметры распределения Вейбулла</i>	<i>99</i>
<i>Приложение Е. Критические точки распределения χ^2</i>	<i>100</i>



Список условных сокращений

СКО – среднеквадратичное отклонение;

ЛН – ложный нуль;

УВ – условная варианта;

ВР – вариационный ряд.



Введение

Дисциплина «Основы научных исследований» является базовой дисциплиной подготовки бакалавриата по направлениям подготовки 23.03.01 «Технология транспортных процессов» и 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов». В ходе освоения данной дисциплины студенты должны ознакомиться с методологией проведения теоретических и экспериментальных исследований, способами обработки и представления результатов исследований, а также с основами планирования эксперимента.

Настоящее пособие должно помочь студентам получить базовые знания и навыки, которые потребуются им в дальнейшем при изучении специальных дисциплин и в ходе дипломного проектирования, а также в процессе профессиональной деятельности.

В каждом разделе учебного пособия имеются задания для самостоятельного выполнения, решение которых позволит обучающимся лучше усвоить излагаемый материал. В конце книги помещены шесть приложений с табличными значениями функций распределения, которые необходимы для выполнения заданий.



ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

«Построение регрессионной модели первого порядка по результатам испытаний транспортно-технологических машин и комплексов и их элементов»

Краткие сведения

Во многих задачах встречаются две или более переменных, между которыми существует характерная связь, причем необходимо исследовать природу этой связи. Например, в химическом процессе выход продукта реакции связан с рабочей температурой, и может представлять интерес для исследователя построить модель, связывающую выход с температурой, а затем воспользоваться этой моделью для прогнозирования, оптимизации процесса или управления им.

Пусть в общем случае есть одна зависимая переменная, или отклик y , которая зависит от k независимых переменных, например, $x_1, x_2, \dots, x_k$. Связь между этими переменными характеризуется математической моделью, которая называется *уравнением регрессии* в том случае, когда y является случайной величиной [5]. Точнее, можно говорить о регрессии y по $x_1, x_2, \dots, x_k$. Регрессионная модель должна аппроксимировать совокупность экспериментальных данных. В некоторых случаях исследователю известен точный вид истинной функциональной зависимости между y и $x_1, x_2, \dots, x_k$, скажем, $y = \psi(x_1, x_2, \dots, x_k)$. Однако чаще всего истинная функциональная связь неизвестна, и экспериментатору приходится выбирать подходящую функцию для аппроксимации ψ . Для аппроксимации широко используются полиномиальные модели, что будет рассмотрено в рамках изучаемой дисциплины.

Регрессионные методы часто используются при анализе данных непланируемых экспериментов; такая ситуация может возникнуть при наблюдении неконтролируемых явлений или исторических записей.

В рамках данной практической работы будет изучаться простая линейная регрессия. Пусть мы хотим установить связь между одной независимой переменной x и зависимой переменной y . Обычно считается, что независимая переменная x непрерывна и

может контролироваться экспериментатором. Тогда, если существует план эксперимента, мы выбираем определенные значения x и наблюдаем соответствующие значения y .

Предположим, что истинная связь между y и x линейна и наблюдение y на каждом уровне x – случайная величина. Тогда математическое ожидание y для каждого значения x имеет вид:

$$E(y/x) = \beta_0 + \beta_1 \cdot x, \quad (1.1)$$

где параметры β_0 и β_1 , определяющие прямую линию, – неизвестные постоянные. Допустим, что каждое наблюдение y описывается моделью:

$$y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x + \varepsilon, \quad (1.2)$$

где ε – случайная ошибка с нулевым средним и дисперсией σ^2 . Кроме того, предположим, что $\{\varepsilon\}$ – некоррелированные случайные переменные. Модель (1.2), в которой всего одна независимая переменная x , часто называется *моделью простой линейной регрессии*.

Если у нас есть n пар данных $(y_1, x_1), (y_2, x_2), \dots, (y_n, x_n)$, то мы можем построить оценки по методу наименьших квадратов (МНК-оценки) параметров модели β_0 и β_1 . В соответствии с уравнением (1.2) можно написать, что

$$y_j = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_j + \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.3)$$

тогда сумма квадратов ошибки примет вид

$$L = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2 = \sum_{j=1}^n (y_j - \beta_0 - \beta_1 \cdot x_j)^2. \quad (1.4)$$

Минимизация этой суммы квадратов упрощается, если переписать уравнение модели (1.2) как

$$y = \beta'_0 + \beta_1 \cdot (x - \bar{x}) + \varepsilon, \quad (1.5)$$

где

$$\bar{x} = \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \sum_{j=1}^n x_j, \quad (1.6)$$

$$\beta'_0 = \beta_0 + \beta_1 \cdot \bar{x}. \quad (1.7)$$

Здесь мы просто скорректировали независимую переменную на ее среднее, что привело к изменению отрезка, отсекаемого на оси ординат. Уравнение (1.5) часто называется преобразованной

моделью простой линейной регрессии или просто преобразованной моделью. Помимо упрощения задачи оценивания применение этой модели облегчает получение и других выводов [5].

Для преобразованной модели сумма квадратов ошибки имеет вид:

$$L = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2 = \sum_{j=1}^n [y_j - \beta'_0 - \beta_1 \cdot (x_j - \bar{x})]^2. \quad (1.8)$$

МНК-оценки β'_0 и β_1 , скажем $\hat{\beta}'_0$ и $\hat{\beta}_1$, должны удовлетворять уравнениям:

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \beta'_0} \right|_{\hat{\beta}'_0, \hat{\beta}_1} = -2 \cdot \sum_{j=1}^n [y_j - \hat{\beta}'_0 - \hat{\beta}_1 \cdot (x_j - \bar{x})] = 0; \quad (1.9)$$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \beta_1} \right|_{\hat{\beta}'_0, \hat{\beta}_1} = -2 \cdot \sum_{j=1}^n [y_j - \hat{\beta}'_0 - \hat{\beta}_1 \cdot (x_j - \bar{x})] \cdot (x_j - \bar{x}) = 0; \quad (1.10)$$

или после упрощения:

$$n \cdot \hat{\beta}'_0 = \sum_{j=1}^n y_j; \quad (1.11)$$

$$\hat{\beta}_1 \cdot \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^n y_j \cdot (x_j - \bar{x}). \quad (1.12)$$

Полученные уравнения называются нормальными МНК-уравнениями, их решение имеет вид:

$$\hat{\beta}'_0 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n y_j = \bar{y}; \quad (1.13)$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{j=1}^n y_j \cdot (x_j - \bar{x})}{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2}. \quad (1.14)$$

Таким образом, $\hat{\beta}'_0$ и $\hat{\beta}_1$ – МНК-оценки величины отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат, и угла наклона этой прямой соответственно.

Подобранная модель простой линейной регрессии имеет вид:

$$\hat{y} = \hat{\beta}'_0 + \hat{\beta}_1 \cdot (x - \bar{x}), \quad (1.15)$$

или, если экспериментатор хочет представить результаты в терминах исходного отрезка β_0 , то

$$\hat{y} = \hat{\beta}'_0 + \hat{\beta}_1 \cdot (x - \bar{x}), \quad (1.16)$$

где $\hat{\beta}_0 = \hat{\beta}'_0 - \hat{\beta}_1 \cdot \bar{x}$.

Числителю и знаменателю выражения (1.14) удобно присвоить специальные обозначения, а именно:

$$S_{xx} = \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n x_j \right)^2, \quad (1.17)$$

$$S_{xy} = \sum_{j=1}^n y_j \cdot (x_j - \bar{x}) = \sum_{j=1}^n x_j \cdot y_j - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n x_j \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n y_j \right). \quad (1.18)$$

Мы назовем S_{xx} скорректированной суммой квадратов x , S_{xy} – скорректированной суммой смешанных произведений x и y . При вычислениях обычно используются выражения в правых частях соотношений (1.17) и (1.18). В новых обозначениях МНК-оценка углового коэффициента прямой имеет вид:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}. \quad (1.19)$$

Рассмотрим следующий пример построения математической модели. Пусть имеются результаты испытания судового дизеля по нагрузочным характеристикам, в процессе которых замерялись значения среднего индикаторного давления P_{mi} и расхода топлива G_m . Полученные значения параметров, представленные в безразмерном виде путем деления на нормирующие значения, соответствующие номинальному режиму работы дизеля, представлены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

**Результаты испытаний дизеля 12ДРН 23/30
при номинальном числе оборотов**

Расход топлива G_{mo} (x)	1	0,9433	0,6464	0,3738	0,1591
Среднее индикаторное давление P_{mio} (y)	1	0,9656	0,6420	0,3951	0,1746

Для аппроксимации данных была предложена линейная модель $y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x + \varepsilon$ и вычислены следующие величины:

$$n = 5; \quad \sum_{j=1}^5 x_j = 3,1226; \quad \sum_{j=1}^5 y_j = 3,1773; \quad \sum_{j=1}^5 x_j^2 = 2,4727;$$

$$\sum_{j=1}^5 y_j^2 = 2,5311; \quad \sum_{j=1}^5 x_j \cdot y_j = 2,5013; \quad \bar{x} = 0,6245; \quad \bar{y} = 0,6355.$$

По выражениям (1.17) и (1.18) находим:

$$S_{xx} = 2,4727 - \frac{1}{5} \cdot (3,1226)^2 = 0,5226;$$

$$S_{xy} = 2,5013 - \frac{1}{5} \cdot 3,1226 \cdot 3,1773 = 0,5170.$$

Таким образом,

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{0,5170}{0,5226} = 0,9894;$$

$$\hat{\beta}'_0 = \bar{y} = 0,6355.$$

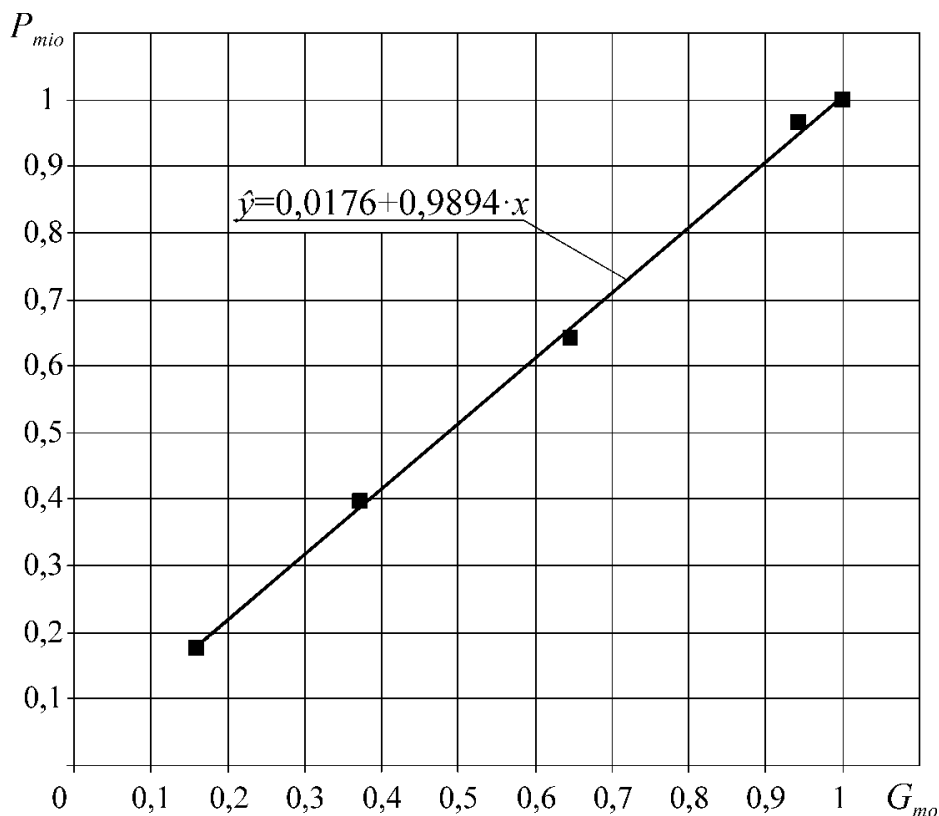


Рис. 1.1. Расчетная зависимость среднего индикаторного давления от температуры отработавших газов

Подобранная модель имеет вид:

$$\hat{y} = \hat{\beta}'_0 + \hat{\beta}_1 \cdot (x - \bar{x})$$

или

$$\hat{y} = 0,6355 + 0,9894 \cdot (x - 0,6245).$$

Если мы хотим выразить модель в терминах исходного отрезка, то

$$\hat{\beta}_0 = \hat{\beta}'_0 - \hat{\beta}_1 \cdot \bar{x} = 0,6355 - 0,9894 \cdot 0,6245 = 0,0176,$$

и, поскольку $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot x$, то получаем:

$$\hat{y} = 0,0176 + 0,9894 \cdot x.$$

На рис. 1.1 представлена графическая интерпретация полученной модели, а также экспериментальные точки, на основании которых она построена.

Задание на практическую работу

Определить параметры линейной модели $y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x + \varepsilon$, аппроксимирующей экспериментальные данные, полученные при испытаниях дизеля 12ДРН 23/30 по нагрузочным характеристикам. На координатной плоскости нанести экспериментальные точки и построить график полученной зависимости. Исходные данные представлены в табл. 1.2.

В табл. 1.3 представлены указания по выбору варианта задания в зависимости от номера зачетной книжки. По предпоследней и последней цифрам зачетной книжки студент в табл. 1.3 находит шифр задания, состоящий из трех цифр, разделенных точкой с запятой. При этом одна или несколько цифр могут быть заменены прочерком. Первая цифра означает номер нагрузочной характеристики, выбираемой из табл. 1.2. Вторая цифра означает номер точки на данной нагрузочной характеристике, которая должна быть исключена из рассмотрения. В случае прочерка во второй позиции шифра расчет должен проводиться для всех пяти точек данной нагрузочной характеристики. Третья цифра шифра означает количество знаков, которые должны быть отброшены от заданных в табл. 1.2 значений. При любом варианте задания в процессе выполнения вычислений следует сохранять четыре знака после запятой.

Таблица 1.2

Результаты испытаний дизеля 12ДРН 23/30 по нагрузочным характеристикам

Номер нагрузочной характеристики / число оборотов, мин ⁻¹	Параметр	Номер экспериментальной точки				
		1	2	3	4	5
1 / 750	Расход топлива G_{mo} (x)	1	0,9433	0,6464	0,3738	0,1591
	Среднее индикаторное давление P_{mio} (y)	1	0,9656	0,6420	0,3951	0,1746
2 / 696	Расход топлива G_{mo} (x)	0,8093	0,7307	0,5137	0,3040	0,1338
	Среднее индикаторное давление P_{mio} (y)	0,8492	0,7963	0,5564	0,3651	0,1543
3 / 633	Расход топлива G_{mo} (x)	0,5986	0,5536	0,3857	0,2398	0,1103
	Среднее индикаторное давление P_{mio} (y)	0,7381	0,6570	0,4718	0,3025	0,1481
4 / 553	Расход топлива G_{mo} (x)	0,4112	0,3692	0,2580	0,1710	0,0852
	Среднее индикаторное давление P_{mio} (y)	0,5847	0,5053	0,3713	0,2646	0,1393
5 / 438	Расход топлива G_{mo} (x)	0,2534	0,2099	0,1502	0,1057	0,0569
	Среднее индикаторное давление P_{mio} (y)	0,4753	0,3704	0,2954	0,2028	0,1217

Таблица 1.3

Схема для выбора варианта задания на практическую работу

		Последняя цифра номера зачетной книжки									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Предпоследняя цифра номера зачетной книжки	0	1; 1; –	1; 2; –	1; 3; –	1; 4; –	1; 5; –	2; –; –	2; 1; –	2; 2; –	2; 3; –	2; 4; –
	1	2; 5; –	3; –; –	3; 1; –	3; 2; –	3; 3; –	3; 4; –	3; 5; –	4; –; –	4; 1; –	4; 2; –
	2	4; 3; –	4; 4; –	4; 5; –	5; –; –	5; 1; –	5; 2; –	5; 3; –	5; 4; –	5; 5; –	1; –; 1
	3	1; 1; 1	1; 2; 1	1; 3; 1	1; 4; 1	1; 5; 1	2; –; 1	2; 1; 1	2; 2; 1	2; 3; 1	2; 4; 1
	4	2; 5; 1	3; –; 1	3; 1; 1	3; 2; 1	3; 3; 1	3; 4; 1	3; 5; 1	4; –; 1	4; 1; 1	4; 2; 1
	5	4; 3; 1	4; 4; 1	4; 5; 1	5; –; 1	5; 1; 1	5; 2; 1	5; 3; 1	5; 4; 1	5; 5; 1	1; –; 2
	6	1; 1; 2	1; 2; 2	1; 3; 2	1; 4; 2	1; 5; 2	2; –; 2	2; 1; 2	2; 2; 2	2; 3; 2	2; 4; 2
	7	2; 5; 2	3; –; 2	3; 1; 2	3; 2; 2	3; 3; 2	3; 4; 2	3; 5; 2	4; –; 2	4; 1; 2	4; 2; 2
	8	4; 3; 2	4; 4; 2	4; 5; 2	5; –; 2	5; 1; 2	5; 2; 2	5; 3; 2	5; 4; 2	5; 5; 2	1; –; 1
	9	1; 1; 1	1; 2; 1	1; 3; –	1; 4; –	1; 5; –	2; –; –	2; 1; 1	2; 2; 1	2; 3; –	2; 4; –

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

«Применение матричного подхода при построении полиномиальных регрессионных моделей высших порядков»

Краткие сведения

Применение матричного подхода дает ряд преимуществ в задачах регрессии [4]. Одним из них является общность, т. е. при решении задачи в матричной форме ее решение применимо к любой регрессионной задаче такого рода вне зависимости от числа членов в уравнении регрессии.

Рассмотрим определения параметров уравнения регрессии в матричных обозначениях, при этом будем использовать нижеследующую систему обозначений:

$\mathbf{Y}$ – вектор наблюдений y ;

$\mathbf{X}$ – матрица независимых переменных;

$\boldsymbol{\beta}$ – вектор подлежащих оцениванию параметров;

$\boldsymbol{\varepsilon}$ – вектор ошибок;

$\mathbf{1}$ – вектор, образованный из единиц.

При представлении модели в матричной форме необходимо сделать следующее. Сначала следует записать все параметры модели в виде вектор-столбца $\boldsymbol{\beta}$, и тогда можно заметить, что соответствующие столбцы матрицы $\mathbf{X}$ должны быть выбраны так, чтобы получить модель в требуемой алгебраической форме из произведения $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$. В частности, если рассматривается полиномиальная модель второго порядка вида $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_{11} x^2 + \varepsilon$, то вектор-столбец $\boldsymbol{\beta}$ состоит из последовательности элементов $\beta_0, \beta_1, \beta_{11}$, а соответствующие столбцы матрицы $\mathbf{X}$ следует составлять из 1, значений x и значений x^2 . Поэтому i -я строка матрицы $\mathbf{X}$ будет представляться в виде $(1, x_i, x_i^2)$, где x_i соответствует i -му из n наблюдений. Следует отметить, что в случае перестановки элементов вектора $\boldsymbol{\beta}$ должна быть проведена соответствующая перестановка столбцов матрицы $\mathbf{X}$.

При определении параметров регрессионной модели возникает необходимость выполнения таких операций с матрицами, как транспонирование и обращение [4]. Транспонированная мат-

рица получается из исходной в результате записи ее строк в виде столбцов с сохранением порядка их следования. Таким образом, строки и столбцы исходной матрицы $\mathbf{M}$ совпадают со столбцами и строками транспонированной матрицы, обозначаемой как $\mathbf{M}^T$:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Рассмотрим нахождение обратной матрицы. Пусть $\mathbf{M}$ представляет собой неособенную матрицу размером $p \times p$, тогда матрица $\mathbf{M}^{-1}$, обратная к $\mathbf{M}$, это такая матрица $p \times p$, что

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{I}_p, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{I}_p$ – единичная матрица порядка p , содержащая единицы на всех позициях главной диагонали и нули на всех других позициях:

$$\mathbf{I}_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Роль единичной матрицы аналогична роли единицы при перемножении чисел, т. е. при умножении на единичную матрицу любой матрицы соответствующего порядка последняя остается без изменений. Обратные матрицы второго и третьего порядка могут быть найдены по приведенным ниже формулам. Для матрицы второго порядка:

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d/D & -b/d \\ -c/D & a/D \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

где $D = a \cdot d - b \cdot c$ – детерминант матрицы второго порядка $\mathbf{M}$.

Для матрицы третьего порядка:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & K \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

где $A = (e \cdot k - f \cdot h)/Z$, $B = -(b \cdot k - c \cdot h)/Z$, $C = (b \cdot f - c \cdot e)/Z$,
 $D = -(d \cdot k - f \cdot g)/Z$, $E = (a \cdot k - c \cdot g)/Z$, $F = -(a \cdot f - c \cdot d)/Z$,
 $G = (d \cdot h - e \cdot g)/Z$, $H = -(a \cdot h - b \cdot g)/Z$, $K = (a \cdot e - b \cdot d)/Z$,
и где $Z = a \cdot (e \cdot k - f \cdot h) - b \cdot (d \cdot k - f \cdot g) + c \cdot (d \cdot h - e \cdot g) =$
 $= a \cdot e \cdot k + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - a \cdot h \cdot f - d \cdot b \cdot k - g \cdot e \cdot c -$
детерминант матрицы третьего порядка $\mathbf{Q}$.

Встречающиеся в регрессионных задачах матрицы $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ являются симметричными: в них элемент i -й строки и j -го столбца равен элементу j -й строки и i -го столбца. Транспонирование таких матриц не меняет их, а нахождение обратной матрицы несколько упрощается. Так, в случае симметричной матрицы третьего порядка $\mathbf{S}$ имеем:

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & k \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & E & F \\ C & F & K \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

где $A = (e \cdot k - f^2)/Y$, $B = -(b \cdot k - c \cdot f)/Y$, $C = (b \cdot f - c \cdot e)/Y$,
 $E = (a \cdot k - c^2)/Y$, $F = -(a \cdot f - b \cdot c)/Y$, $K = (a \cdot e - b^2)/Y$,
и где $Y = a \cdot (e \cdot k - f^2) - b \cdot (b \cdot k - c \cdot f) + c \cdot (b \cdot f - c \cdot e) =$
 $= a \cdot e \cdot k + 2 \cdot b \cdot c \cdot f - a \cdot f^2 - b^2 \cdot k - c^2 \cdot e -$ детерминант матрицы $\mathbf{S}$.

Нормальные уравнения метода наименьших квадратов можно записать в матричной форме следующим образом:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{b} = \mathbf{X}^T \mathbf{Y}, \quad (2.8)$$

где $\mathbf{b}$ – МНК-оценка вектора β .

При этом встречаются два основных случая: в первом случае уравнение (2.8) содержит p независимых уравнений относительно p неизвестных параметров, во втором – часть уравнений зависит от других, тогда независимых уравнений будет меньше, чем число подлежащих определению неизвестных величин. Во втором случае матрица $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ будет особенной и для нее не суще-

существует обратная матрица $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$. В этом случае необходимо либо уменьшить число параметров в модели, либо ввести дополнительные ограничения на параметры. С подобными задачами можно ознакомиться, например, в [6]. В первом случае матрица $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ неособенная и для нее существует обратная матрица, поэтому решение нормальных уравнений можно записать в следующей форме:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}. \quad (2.9)$$

Отметим следующие свойства решения $\mathbf{b}$.

1. Вектор $\mathbf{b}$ является оценкой вектора $\boldsymbol{\beta}$, минимизирующей сумму квадратов ошибок независимо от характера их распределения. При этом следует заметить, что предположение о нормальности распределения ε требуется в дальнейшем для использования критериев Стьюдента и Фишера, которые базируются на предположении о нормальности, а также для построения доверительных интервалов.

2. Элементы вектора $\mathbf{b}$ являются линейными функциями наблюдений $y_1, y_2, \dots, y_n$ и представляют собой несмещенные оценки элементов вектора $\boldsymbol{\beta}$ и обладают свойством наименьшей дисперсии.

3. Если ошибки являются независимыми и $\varepsilon_i = N(0, \sigma^2)$, то $\mathbf{b}$ является оценкой максимального правдоподобия величины $\boldsymbol{\beta}$. Метод максимума правдоподобия, предложенный Фишером Р. для получения наилучших оценок параметров по выборкам, закон распределения которых известен, изложен, например, в [6].

После нахождения МНК-оценки $\mathbf{b}$ вектора $\boldsymbol{\beta}$ следует перейти к следующим стадиям анализа вне зависимости от того, распределены ли ошибки нормально.

1. Предсказываемые значения отклика могут быть получены из выражения:

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\mathbf{b}. \quad (2.10)$$

2. Вектор остатков определяется из равенства:

$$\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}. \quad (2.11)$$

3. Дисперсии и ковариации оценок параметров могут быть определены из выражения:

$$V(\mathbf{b}) = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \sigma^2, \quad (2.12)$$

причем дисперсии будут представлять собой диагональные элементы, а ковариации – внедиагональные.

4. Строится таблица дисперсионного анализа (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Таблица дисперсионного анализа

Источник	Число степеней свободы	SS	MS
Регрессия	p	$\mathbf{b}^T \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$	MS_R
Остаток	$n-p$	$\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \mathbf{b}^T \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$	MS_E
Общий	n	$\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}$	

В качестве примера рассмотрим построение зависимости относительных значений температуры отработавших газов от расхода топлива на основании экспериментальных данных, представленных в табл. 2.2. Для аппроксимации совокупности исходных данных воспользуемся полиномиальной моделью второго порядка:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_{11} x^2 + \varepsilon. \quad (2.13)$$

Таблица 2.2

Результаты испытаний двигателя 12 ДРН 23/30

G_{mo}	1	0,9433	0,6464	0,3738	0,1591
t_{go}	1	0,9723	0,7972	0,5919	0,3640

На основании табл. 2.2 и модели (2.13) можно записать:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0,9433 & 0,9433^2 \\ 1 & 0,6464 & 0,6464^2 \\ 1 & 0,3738 & 0,3738^2 \\ 1 & 0,1591 & 0,1591^2 \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,9723 \\ 0,7972 \\ 0,5919 \\ 0,3640 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Для определения параметров модели воспользуемся зависимостью (2.9), в соответствии с которой имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^T \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0,9433 & 0,6464 & 0,3738 & 0,1591 \\ 1 & 0,8898 & 0,4178 & 0,1397 & 0,0253 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0,9433 & 0,9433^2 \\ 1 & 0,6464 & 0,6464^2 \\ 1 & 0,3738 & 0,3738^2 \\ 1 & 0,1591 & 0,1591^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 3,1226 & 2,4727 \\ 3,1226 & 2,4727 & 2,1657 \\ 2,4727 & 2,1657 & 1,9865 \end{bmatrix}; \\ (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} &= \begin{bmatrix} 5 & 3,1226 & 2,4727 \\ 3,1226 & 2,4727 & 2,1657 \\ 2,4727 & 2,1657 & 1,9865 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 3,4506 & -13,1950 & 10,0901 \\ -13,1950 & 59,4156 & -48,3508 \\ 10,0901 & -48,3508 & 40,6560 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{X}^T \mathbf{Y} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0,9433 & 0,6464 & 0,3738 & 0,1591 \\ 1 & 0,8898 & 0,4178 & 0,1397 & 0,0253 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,9723 \\ 0,7972 \\ 0,5919 \\ 0,3640 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3,7254 \\ 2,7116 \\ 2,2902 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 3,4506 & -13,1950 & 10,0901 \\ -13,1950 & 59,4156 & -48,3508 \\ 10,0901 & -48,3508 & 40,6560 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,7254 \\ 2,7116 \\ 2,2902 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,1829 \\ 1,2255 \\ -0,4108 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, искомая зависимость имеет вид:

$$\hat{t}_{go} = 0,1829 + 1,2255 \cdot G_{mo} - 0,4108 \cdot G_{mo}^2. \quad (2.16)$$

Задание на практическую работу

С использованием матричного подхода определить параметры полиномиальной модели второго порядка вида $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_{11} x^2 + \varepsilon$, аппроксимирующей экспериментальные данные, полученные при испытаниях дизеля 6ЧН25/34-3 по нагрузочным характеристикам. Исходные данные представлены в табл. 2.3. Построить зависимость относительного значения температуры отработавших газов t_{go} от относительного значения положения указателя нагрузки h_o .

Таблица 2.3

Результаты испытаний дизеля 6ЧН25/34-3

№ н/х	n, мин ⁻¹	h _o	t _{go} (по цилиндрам)					
			1	2	3	4	5	6
1	500	1,0000	1,0000	1,0863	0,9872	1,0513	1,0256	0,9872
	500	0,9388	0,9744	1,0561	0,9615	1,0256	1,0000	0,9744
	500	0,8776	0,9487	1,0221	0,9231	1,0000	0,9615	0,9359
	500	0,8367	0,9231	0,9972	0,8974	0,9487	0,9231	0,8974
	500	0,7143	0,8333	0,9121	0,8205	0,8974	0,8718	0,8333
	500	0,6327	0,7821	0,8468	0,7692	0,8462	0,8205	0,7821
	500	0,5510	0,6795	0,7745	0,6667	0,7692	0,7564	0,6923

№ н/х	n, мин ⁻¹	h _o	t _{go} (по цилиндрам)					
			1	2	3	4	5	6
2	450	0,9388	0,9359	1,0052	0,9231	0,9744	0,9692	0,9359
	450	0,8367	0,8850	0,9573	0,8750	0,9231	0,8974	0,8718
	450	0,7143	0,8055	0,8809	0,8000	0,8600	0,8462	0,8205
	450	0,6327	0,7436	0,8186	0,7350	0,8050	0,7949	0,7513
	450	0,5510	0,6430	0,7472	0,6538	0,7280	0,7051	0,6538
3	400	0,8980	0,8718	0,9171	0,8550	0,9010	0,8718	0,8462
	400	0,7551	0,8077	0,8686	0,8000	0,8462	0,8282	0,8000
	400	0,7347	0,7821	0,8581	0,7821	0,8333	0,8205	0,7821
	400	0,6939	0,7692	0,8344	0,7692	0,8256	0,8077	0,7692
	400	0,6531	0,7231	0,8071	0,7256	0,7949	0,7744	0,7231
	400	0,6327	0,6923	0,7921	0,7000	0,7744	0,7564	0,6974
	400	0,5918	0,6615	0,7594	0,6667	0,7487	0,7179	0,6615
	400	0,5510	0,6154	0,7232	0,6450	0,7128	0,6718	0,6128
4	350	0,7551	0,7821	0,8221	0,7692	0,8100	0,8077	0,7692
	350	0,6327	0,6800	0,7672	0,6970	0,7600	0,7692	0,7179
	350	0,5918	0,6500	0,7377	0,6650	0,7300	0,7308	0,6795
	350	0,5510	0,6080	0,7025	0,6200	0,6900	0,6667	0,6282
	350	0,4490	0,4560	0,5900	0,5000	0,5897	0,5385	0,4744

В табл. 2.4 представлены указания по выбору варианта задания в зависимости от номера зачетной книжки. По предпоследней и последней цифрам зачетной книжки студент в табл. 2.4 находит шифр задания, состоящий из трех цифр, разделенных точкой с запятой. При этом последняя цифра может быть заменена прочерком. Первая цифра означает номер нагрузочной характеристики, выбираемой из табл. 2.3. Вторая цифра означает номер цилиндра, для которого берутся экспериментальные данные. Третья цифра шифра означает порядковый номер экспериментальной

точки на данной нагрузочной характеристике, которая должна быть исключена из рассмотрения. В случае прочерка в третьей позиции шифра расчет должен проводиться для всех точек данной нагрузочной характеристики.

Таблица 2.4

Схема для выбора варианта задания на практическую работу

		Последняя цифра номера зачетной книжки									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Предпоследняя цифра номера зачетной книжки	0	1; 1; –	1; 2; –	1; 3; –	1; 4; –	1; 5; –	1; 6; –	2; 1; –	2; 2; –	2; 3; –	2; 4; –
	1	2; 5; –	2; 6; –	3; 1; –	3; 2; –	3; 3; –	3; 4; –	3; 5; –	3; 6; –	4; 1; –	4; 2; –
	2	4; 3; –	4; 4; –	4; 5; –	4; 6; –	1; 1; 1	1; 2; 1	1; 3; 1	1; 4; 1	1; 5; 1	1; 6; 1
	3	3; 1; 1	3; 2; 1	3; 3; 1	3; 4; 1	3; 5; 1	3; 6; 1	1; 1; 2	1; 2; 2	1; 3; 2	1; 4; 2
	4	1; 5; 2	1; 6; 2	3; 1; 2	3; 2; 2	3; 3; 2	3; 4; 2	3; 5; 2	3; 6; 2	1; 1; 3	1; 2; 3
	5	1; 3; 3	1; 4; 3	1; 5; 3	1; 6; 3	3; 1; 3	3; 2; 3	3; 3; 3	3; 4; 3	3; 5; 3	3; 6; 3
	6	3; 1; 4	3; 2; 4	3; 3; 4	3; 4; 4	3; 5; 4	3; 6; 4	1; 1; 4	1; 2; 4	1; 3; 4	1; 4; 4
	7	1; 5; 4	1; 6; 4	3; 1; 5	3; 2; 5	3; 3; 5	3; 4; 5	3; 5; 5	3; 6; 5	1; 1; 5	1; 2; 5
	8	1; 3; 5	1; 4; 5	1; 5; 5	1; 6; 5	3; 1; 6	3; 2; 6	3; 3; 6	3; 4; 6	3; 5; 6	3; 6; 6
	9	1; 1; 6	1; 2; 6	1; 3; 6	1; 4; 6	1; 5; 6	1; 6; 6	1; 1; 7	1; 2; 7	1; 3; 7	1; 4; 7

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

«Оценка основных эксплуатационных показателей транспортно-технологических машин и комплексов и их элементов по результатам испытаний»

Краткие сведения

Известно, что даже у одинаковых систем, работающих в аналогичных условиях, отказы происходят в различные случайные моменты времени, т. е. отказы могут быть описаны только в терминах теории вероятностей. Таким образом, основные определения надежности должны основываться, главным образом, на понятиях теории вероятности.

Вероятность безотказной работы $P(t)$ – это такая функция времени, которая определяет вероятность того, что невосстанавливаемая система будет выполнять требуемую функцию в заданный момент времени t . Ее можно записать в виде [1]:

$$P(t) = \frac{N_0 - n(t)}{N_0}, \quad (3.1)$$

где N_0 – число единиц одинакового оборудования, работающего в одинаковых условиях; $n(t)$ – число отказов в контрольной группе.

Вероятность отказа $Q(t)$ – это вероятность того, что система выйдет из строя к моменту времени t . Она связана с вероятностью безотказной работы $P(t)$ простым соотношением:

$$Q(t) + P(t) = 1, \quad (3.2)$$

тогда

$$Q(t) = 1 - P(t). \quad (3.3)$$

Таким образом, в простейшем случае при определении вероятности отказа и вероятности безотказной работы к заданному моменту времени в качестве исходных данных, необходимо знать число единиц оборудования в контрольной группе в начальный момент времени, а также количество вышедших из строя образцов [1].

Частота отказов или плотность вероятности отказов $f(t)$ представляет собой отношение числа отказавших изделий $n(t)$ к

числу первоначально эксплуатировавшихся N_0 за единицу времени Δt :

$$f(t) = \frac{n(t)}{N_0 \Delta t}. \quad (3.4)$$

Если случайная величина t (наработка до отказа) имеет плотность распределения $f(t)$, то вероятность безотказной работы:

$$P(t) = 1 - Q(t) = 1 - \int_0^t f(\tau) d\tau. \quad (3.5)$$

Вероятность отказа системы в данном промежутке времени $[t_1, t_2]$ можно выразить через вероятность отказа:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t_2} f(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{t_1} f(\tau) d\tau = Q(t_2) - Q(t_1), \quad (3.6)$$

либо через вероятность безотказной работы:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(\tau) d\tau = \int_{t_1}^{\infty} f(\tau) d\tau - \int_{t_2}^{\infty} f(\tau) d\tau = P(t_1) - P(t_2). \quad (3.7)$$

Частота появления отказов в некотором промежутке времени $[t_1, t_2]$ называется интенсивностью отказов $\lambda(t)$ в этом интервале. Она определяется вероятностью того, что в этом интервале произойдет отказ за единицу времени при условии, что отказ не произошел до момента времени t_1 , с которого начинается этот интервал. Таким образом, интенсивность отказов $\lambda(t)$ имеет вид:

$$\frac{P(t_1) - P(t_2)}{(t_2 - t_1) \cdot P(t_1)} = \frac{P(t) - P(t + \Delta t)}{\Delta t \cdot P(t)}, \quad (3.8)$$

при условии, что $[t_1, t_2] = [t, t + \Delta t]$.

Полагая, что интенсивность отказов $\lambda(t)$ выражает качественные изменения, происходящие в оборудовании во время его эксплуатации, выражение для расчета $\lambda(t)$ можно записать в иной форме:

$$\lambda(t) = \frac{n(\Delta t)}{N_{cp}(t) \cdot \Delta t}, \quad (3.9)$$

где $n(\Delta t)$ – число отказов за время Δt ; $N_{cp}(t)$ – среднее число действующих в этот период времени изделий.

Познакомимся с методикой расчета параметров надежности объектов на примере, где контрольная группа каких-либо объектов подвергается испытаниям на надежность, а количество отказов фиксируется к моменту времени t и по истечению промежутка времени Δt . Схематически изобразим работу объектов в течение заданного промежутка времени.

Вероятность безотказной работы за время t определится выражением (3.1), а вероятность безотказной работы за время $(t + \Delta t)$

$$P(t + \Delta t) = \frac{N_0 - n(t + \Delta t)}{N_0}. \quad (3.10)$$

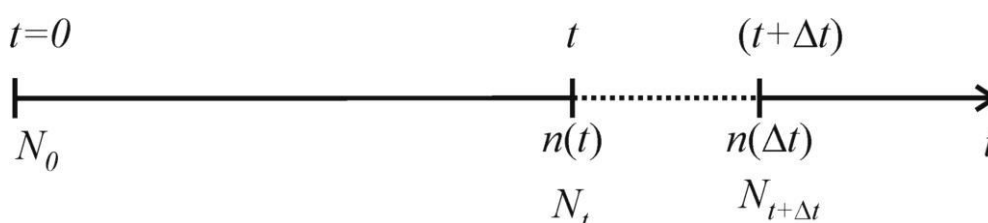


Рис. 3.1. Схема работы объектов:

N_0 – число единиц одинаковых объектов, работающих в одинаковых условиях; $n(t)$ – число отказов в контрольной группе к моменту времени t ;

N_t – число единиц исправных объектов к моменту времени t ;

$n(\Delta t)$ – число отказов в контрольной группе за промежуток времени Δt ;

$N_{(t+\Delta t)}$ – число единиц исправных объектов к моменту времени $(t + \Delta t)$

Среднее количество изделий, действующих в период времени $(t + \Delta t)$:

$$N_{cp}(t + \frac{1}{2}\Delta t) = N_0 - \left(n(t) + \frac{1}{2}n(\Delta t) \right). \quad (3.11)$$

где $n(t + \frac{1}{2}\Delta t)$ – среднее количество изделий, отказавших в период времени $(t + \Delta t)$.

$$n(t + \frac{1}{2}\Delta t) = n(t) + \frac{1}{2}n(\Delta t). \quad (3.12)$$

Вероятность безотказной работы за время $(t + \frac{1}{2} \Delta t)$:

$$P(t + \frac{1}{2} \Delta t) = \frac{N_0 - n(t + \frac{1}{2} \Delta t)}{N_0}. \quad (3.13)$$

Частота отказов, c^{-1} :

$$f(t + \frac{1}{2} \Delta t) = \frac{n(\Delta t)}{N_0 \cdot \Delta t}. \quad (3.14)$$

Интенсивность отказов, c^{-1} :

$$\lambda(t + \frac{1}{2} \Delta t) = \frac{n(\Delta t)}{N_{cp}(t + \frac{1}{2} \Delta t) \cdot \Delta t}. \quad (3.15)$$

Рассмотрим, как меняются основные характеристики надежности функционирования объекта в течение достаточно длительного промежутка времени, для чего заданное количество объектов, не подлежащих ремонту, подвергли испытанию, а отказы регистрировали через равные промежутки времени.

Вероятность безотказной работы:

$$P(t_i) = \frac{N_0 - n(t)_i}{N_0}. \quad (3.16)$$

где N_0 – общее количество образцов неремонтируемых объектов; $n(t)_i$ – количество отказов, произошедших в наблюдаемый промежуток времени; $t_i = t_{i-1} + \Delta t_i$ – текущее время испытаний, ч.

Частота отказов, $ч^{-1}$

$$f(\bar{t}_i) = \frac{n(\Delta t)_i}{N_0 \cdot \Delta t}. \quad (3.17)$$

где $\bar{t}_i = \bar{t}_{i-1} + \frac{1}{2} \Delta t_i$ – среднее время, ч.

Интенсивность отказов, $ч^{-1}$:

$$\lambda(\bar{t}_i) = \frac{n(\Delta t)_i}{\bar{N}_i \cdot \Delta t}. \quad (3.18)$$

где $\bar{N}_i = \bar{N}_{i-1} + \frac{1}{2} n(\Delta t)_i$ – среднее количество единиц исправных объектов к среднему моменту времени $\bar{t}_i$.

Среднее время безотказной работы объекта определяется как

$$T_{cp} = \int_0^{\infty} \tau \cdot f(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} P(\tau) d\tau. \quad (3.19)$$

Когда испытываемая система восстанавливается путем технического обслуживания и ремонта, то среднее время безотказной работы называется *средней наработкой до отказа или средней наработкой на отказ*. В случае, когда известно время наступления первого отказа (наработка системы на момент начала наблюдения), а также количество отказов в заданный промежуток времени, средняя наработка на отказ может быть определена в два этапа [1]. На первом этапе определяется общая наработка за период времени наблюдений, ч:

$$T_{общ} = t_k - t_n = \sum_1^n t_i, \quad (3.20)$$

где t_n, t_k – время первого отказа и время окончания наблюдений, соответственно.

На втором этапе можно определить среднюю наработку на отказ:

$$\bar{T} = \frac{\sum_1^n t_i}{n} = \frac{t_k - t_n}{n}, \quad (3.21)$$

где n – общее количество отказов к моменту времени t_k .

Задание на практическую работу

В рамках выполнения практической работы следует решить представленные ниже задачи, исходные данные к которым приведены в таблицах 3.1-3.4. В табл. 3.5 содержатся указания по выбору варианта задания в зависимости от номера зачетной книжки. По предпоследней и последней цифрам зачетной книжки студент в табл. 3.5 находит шифр задания, состоящий из четырех чисел, разделенных точкой с запятой. Каждое из чисел означает номер набора данных, который следует взять для решения конкретной задачи. При этом порядковый номер числа означает номер задачи, к которой это число относится. Так, шифр (1;12;10;5)

означает, что для задачи 3.1 студент должен взять первый набор данных, для задачи 3.2 – двенадцатый набор данных, для задачи 3.3 – десятый набор данных, для задачи 3.4 – пятый набор данных.

3.1. На испытание поставлено N_0 однотипных насосов. За время t часов отказало n насосов. Определить вероятность отказа и вероятность безотказной работы. Исходные данные для расчета представлены в таблице 3.1.

3.2. На испытание было поставлено N_0 однотипных подшипниковых узлов. За первое время t , ч, отказало $n(t)$ изделий. За время Δt , ч, отказало $n(\Delta t)$ изделий. Определить вероятность безотказной работы за время t , $(t + \Delta t)$ и $(t + \frac{1}{2} \Delta t)$, а также частоту и интенсивность отказов узлов в промежутке времени от t до $(t + \Delta t)$ часов. Исходные данные для расчета представлены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

**Исходные данные для расчета вероятности
безотказной работы**

№ набора данных	Данные к задаче 3.1		Данные к задаче 3.2				
	N_0 , шт.	n , шт.	N_0 , шт.	t , ч	$n(t)$, шт.	Δt , ч	$n(\Delta t)$, шт.
1	450	10	150	2500	32	150	10
2	362	25	125	2200	20	210	18
3	480	36	160	3000	40	250	5
4	940	158	280	3400	60	300	65
5	580	305	130	4100	16	98	35
6	800	104	420	5000	100	125	85
7	300	27	380	4800	62	324	120
8	1000	36	240	5120	58	300	50
9	840	10	190	3420	60	180	10
10	650	65	140	1560	32	82	50
11	950	600	280	2700	26	96	6
12	690	129	640	1450	182	84	10

№ набора данных	Данные к задаче 3.1		Данные к задаче 3.2				
	N_0 , шт.	n , шт.	N_0 , шт.	t , ч	$n(t)$, шт.	Δt , ч	$n(\Delta t)$, шт.
13	485	65	480	3600	114	652	100
14	654	509	500	5600	258	342	50
15	250	200	410	3580	138	240	62
16	160	100	290	4700	56	400	25
17	350	29	340	6000	96	560	100
18	230	135	200	1460	48	304	40
19	600	450	170	1230	52	85	36
20	570	100	240	2600	60	62	85

3.3. На испытании находилось N_0 образцов неремонтируемой аппаратуры. Число отказов $n(\Delta t)_i$ фиксировалось через каждые Δt часов работы. Данные об отказах приведены в таблице. Определить характеристики надежности и построить зависимость характеристик от времени: $P(t)$, $\lambda(t)$, $f(t)$. Исходные данные для расчета представлены в табл. 3.2. Графическая зависимость вероятности безотказной работы строится как функция текущего времени $P(t_i)$ частоты и интенсивности отказов – как функции среднего текущего времени $f(\bar{t}_i)$, $\lambda(\bar{t}_i)$. Результаты вычислений оформляются в виде табл. 3.3.

Таблица 3.2

Исходные данные для расчета интенсивности отказов

№ набора данных	N_0 , шт.	Δt , ч	$n(\Delta t)_i$														
1	1 000	150	90	57	37	32	29	29	27	27	26	27	26	25	30	45	70
2	1 500	200	150	90	52	44	43	43	43	44	44	45	60	83	110	140	–
3	2 400	240	250	130	103	101	100	100	99	100	100	120	141	168	200	230	260
4	3 000	160	255	146	135	135	135	134	135	134	135	134	135	138	167	230	270

№ набора данных	N_0 , шт.	Δt , ч	$n(\Delta t)_i$														
5	1 640	180	170	105	77	77	76	76	76	77	80	114	160	186	–	–	–
6	3 560	220	310	228	180	162	156	156	155	156	156	155	156	171	223	280	–
7	2 480	340	240	160	126	125	125	126	126	125	126	131	140	150	180	220	250
8	2 000	400	225	148	121	117	116	115	115	116	120	149	180	210	235	–	–
9	1 700	380	176	90	52	38	33	32	33	32	32	33	40	78	118	160	–
10	1 820	140	202	123	86	73	71	71	70	71	70	71	72	90	120	150	190
11	2 640	160	190	100	94	93	93	93	94	93	94	102	160	205	–	–	–
12	1 580	280	192	147	100	72	66	66	65	65	65	66	80	107	130	158	181
13	2 890	300	290	170	148	146	146	145	145	145	146	146	146	147	165	224	280
14	3 120	400	305	185	170	170	169	170	169	169	170	170	172	176	205	280	–
15	4 000	420	350	236	224	224	223	223	224	224	223	224	228	256	320	360	–
16	3 680	400	340	215	202	201	202	201	201	202	202	201	201	205	234	300	350
17	3 260	360	360	291	254	222	212	211	211	212	211	212	220	280	340	–	–
18	1 450	250	177	67	52	52	51	52	51	52	51	52	52	56	82	153	190
19	2 410	260	210	158	125	121	120	120	121	120	120	121	132	158	185	220	–
20	2 750	220	260	169	158	157	157	157	156	156	157	157	157	160	180	250	280

Таблица 3.3

Таблица для результатов расчета

№	Время испытаний t_i , ч	Вероятность безотказной работы $P(t_i)$	Среднее время испытаний $\bar{t}_i$, ч	Частота отказов $f(\bar{t}_i)$, ч ⁻¹	Интенсивность отказов $\lambda(\bar{t}_i)$, ч ⁻¹
1	t_1	$P(t_1)$	$\bar{t}_1$	$f(\bar{t}_1)$	$\lambda(\bar{t}_1)$
...	...	...	...	...	...
i	t_i	$P(t_i)$	$\bar{t}_i$	$f(\bar{t}_i)$	$\lambda(\bar{t}_i)$

3.4. До начала наблюдения за работой одного экземпляра устройства оно проработало t_n часов. К концу наблюдения наработка устройства составила t_k часов. Требуется определить среднюю наработку на отказ, если за период наблюдения зарегистрировано n отказов. Исходные данные для расчета представлены в табл. 3.4.

Таблица 3.4

Исходные данные для расчета средней наработки на отказ

№ набора данных	t_n , ч	t_k , ч	n , шт.	№ набора данных	t_n , ч	t_k , ч	n , шт.
1	248	1 456	23	11	254	3 080	35
2	250	2 080	15	12	169	2 580	18
3	164	1 640	12	13	150	2 000	14
4	203	2 580	32	14	124	1 890	10
5	298	3 060	21	15	105	1 560	10
6	309	3 250	41	16	287	2 450	14
7	240	2 470	20	17	236	2 900	19
8	352	1 940	16	18	300	3 450	27
9	398	1 280	65	19	364	4 000	36
10	400	2 560	48	20	254	4 200	27

Таблица 3.5

Схема для выбора варианта задания на практическую работу

		Последняя цифра номера зачетной книжки									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Предпоследняя цифра номера зачетной книжки	0	1; 1; 1; 1	2; 2; 2; 2	3; 3; 3; 3	4; 4; 4; 4	5; 5; 5; 5	6; 6; 6; 6	7; 7; 7; 7	8; 8; 8; 8	9; 9; 9; 9	10; 10; 10; 10
	1	11; 11; 11; 11	12; 12; 12; 12	13; 13; 13; 13	14; 14; 14; 14	15; 15; 15; 15	16; 16; 16; 16	17; 17; 17; 17	18; 18; 18; 18	19; 19; 19; 19	20; 20; 20; 20
	2	1; 2; 1; 1	2; 3; 2; 2	3; 4; 3; 3	4; 5; 4; 4	5; 6; 5; 5	6; 7; 6; 6	7; 8; 7; 7	8; 9; 8; 8	9; 10; 9; 9	10; 11; 10; 10
	3	11; 12; 11; 11	12; 13; 12; 12	13; 14; 13; 13	14; 15; 14; 14	15; 16; 15; 15	16; 17; 16; 16	17; 18; 17; 17	18; 19; 18; 18	19; 20; 19; 19	20; 1; 20; 20
	4	3; 1; 1; 1	4; 2; 2; 2	5; 3; 3; 3	6; 4; 4; 4	7; 5; 5; 5	8; 6; 6; 6	9; 7; 7; 7	10; 8; 8; 8	11; 9; 9; 9	12; 10; 10; 10
	5	13; 11; 11; 11	14; 12; 12; 12	15; 13; 13; 13	16; 14; 14; 14	17; 15; 15; 15	18; 16; 16; 16	19; 17; 17; 17	20; 18; 18; 18	1; 19; 19; 19	2; 20; 20; 20
	6	1; 1; 1; 5	2; 2; 2; 6	3; 3; 3; 7	4; 4; 4; 8	5; 5; 5; 9	6; 6; 6; 10	7; 7; 7; 11	8; 8; 8; 12	9; 9; 9; 13	10; 10; 10; 14
	7	11; 11; 11; 15	12; 12; 12; 16	13; 13; 13; 17	14; 14; 14; 18	15; 15; 15; 19	16; 16; 16; 20	17; 17; 17; 1	18; 18; 18; 2	19; 19; 19; 3	20; 20; 20; 4
	8	1; 1; 8; 1	2; 2; 9; 2	3; 10; 3; 3	4; 11; 4; 4	5; 12; 5; 5	6; 13; 6; 6	7; 7; 14; 7	8; 8; 15; 8	9; 9; 16; 9	10; 10; 17; 10
	9	11; 11; 18; 11	12; 12; 19; 12	13; 13; 20; 13	14; 14; 1; 14	15; 15; 2; 15	16; 16; 3; 16	17; 17; 4; 17	18; 18; 5; 18	19; 19; 6; 19	20; 20; 7; 20

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

«Применение законов распределения случайных величин для оценки эксплуатационных показателей транспортно-технологических машин и комплексов и их элементов»

Краткие сведения

Для исследования эксплуатационных показателей транспортно-технологических машин и их элементов, в частности, их надежности, широко применяются экспериментальные исследования. Для теории и практики надежности очень важно знать вид и характер функции интенсивности отказов $\lambda(t)$. К настоящему времени накоплен богатый экспериментальный материал по их виду. В результате его анализа обнаружилось, что названные кривые имеют идентичный качественный характер. Это позволило представить их в инженерных целях в обобщенном виде (рис. 4.1). Типичная функция интенсивности отказов может быть разделена на три периода [1].

Первый, сравнительно небольшой по времени, где наблюдается сильное уменьшение интенсивности отказов, назван *периодом приработки изделия*. Второй, характеризующийся постоянным значением интенсивности отказов, называется *периодом нормальной эксплуатации*. Третий период, в течение которого интенсивность отказов постоянно увеличивается, назван *периодом катастрофических износных или закономерных постепенных отказов*.



Рис. 4.1. Интенсивность отказов в течение срока службы изделия

В период нормальной эксплуатации постепенные отказы еще не проявляются, и надежность изделий характеризуется внезапными отказами. Эти отказы вызваны неблагоприятным стечением обстоятельств и поэтому имеют постоянную интенсивность, не зависящую от возраста изделия:

$$\lambda(t) = \lambda = const. \quad (4.1)$$

При этом вероятность безотказной работы (рис. 4.2) определяется выражением:

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda dt} = e^{-\lambda t}. \quad (4.2)$$

Экспоненциальным законом распределения можно аппроксимировать время безотказной работы широкого круга объектов: ответственных объектов, эксплуатируемых в период после окончания приработки и до существенного проявления постепенных; оборудования с последовательной заменой отказавших элементов; машин и аппаратов вместе с электро- и гидрооборудованием и системами управления и др.; сложных объектов, состоящих из многих элементов [1].

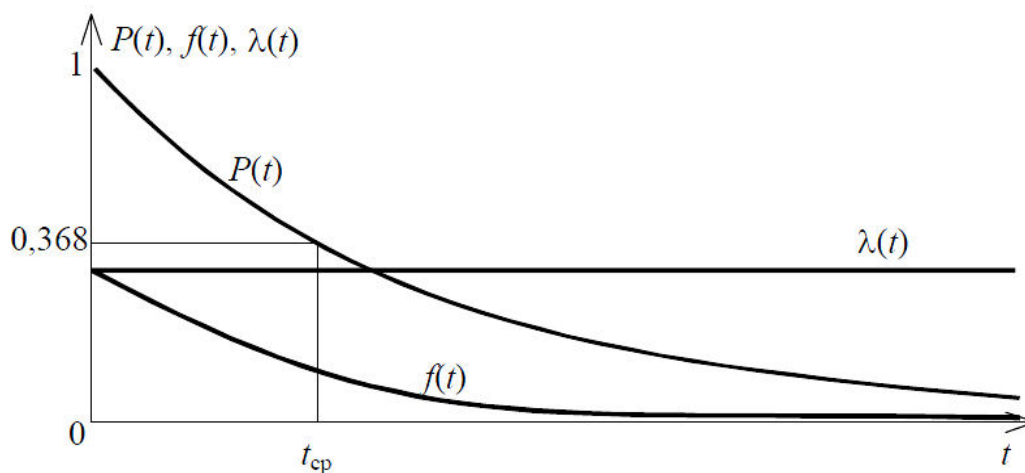


Рис. 4.2. Функция плотности вероятности $f(t)$, интенсивности отказов $\lambda(t)$ и функция вероятности безотказной работы $P(t)$ при экспоненциальном распределении

Значительным достоинством экспоненциального распределения является его простота, так как оно имеет только один параметр. В случае, когда $(\lambda t) \leq 0,1$, формула для вероятности безот-

казной работы упрощается в результате разложения в ряд и отбрасывания малых членов:

$$P(t) = 1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} - \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \dots \approx 1 - \lambda t. \quad (4.3)$$

Плотность распределения, в общем случае, для экспоненциального распределения принимает вид:

$$f(t) = -\frac{dP(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (4.4)$$

Алгоритм расчета надежности в период нормальной эксплуатации может быть построен следующим образом. Сначала определяется величина λt . В случае, если $(\lambda t) \leq 0,1$, то вероятность безотказной работы рассчитывается по приближенной зависимости. Если $(\lambda t) > 0,1$, то вероятность безотказной работы рассчитывается по точной зависимости.

Для математического описания процесса постепенных отказов нужны законы распределения времени безотказной работы, которые дают вначале низкую плотность распределения, затем максимум и далее падение (рис. 4.3), связанное с уменьшением числа работоспособных элементов.

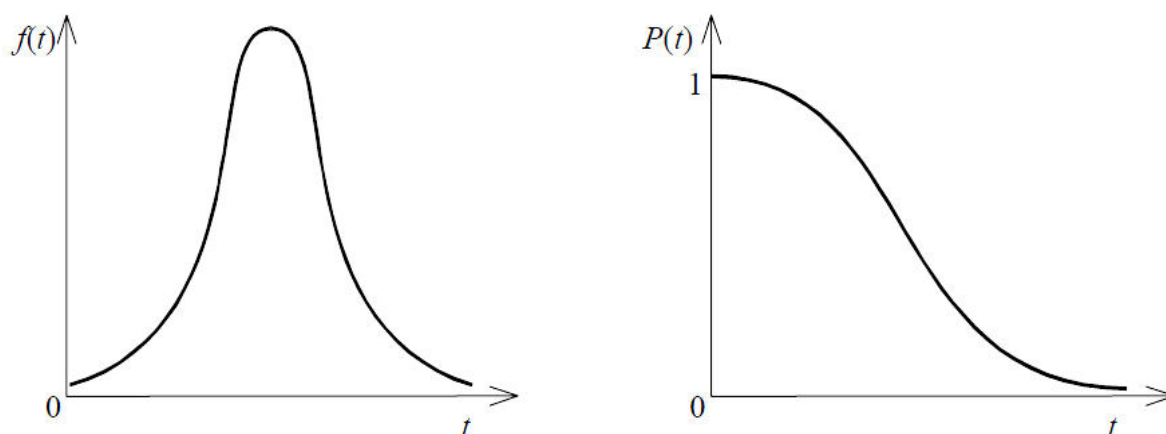


Рис. 4.3. Функция плотности вероятности и функция вероятности безотказной работы при нормальном распределении

Поскольку причины и условия возникновения отказов в этот период весьма многообразны, для описания надежности применяют несколько законов распределений, которые устанавливают путем аппроксимации результатов испытаний или наблюдений в эксплуатации. Нормальное распределение является наиболее

универсальным, удобным и широко применяемым для практических расчетов.

Распределение всегда подчиняется нормальному закону, если на изменение случайной величины оказывают влияние многие примерно равнозначные факторы. Нормальному распределению подчиняется наработка до отказа многих восстанавливаемых и невосстанавливаемых изделий, размеры и ошибки измерений деталей и т. д.

Плотность распределения оценивается по формуле:

$$f(t) = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m_t)^2}{2S^2}}. \quad (4.5)$$

Распределение имеет два независимых параметра: математическое ожидание m_t и среднее квадратическое отклонение S .

Интегральная функция распределения определяется как

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(t) dt. \quad (4.6)$$

Вероятность отказа и вероятность безотказной работы соответственно равны:

$$Q(t) = F(t); \quad (4.7)$$

$$P(t) = 1 - F(t). \quad (4.8)$$

Вычисление интегралов заменяют использованием таблиц, однако, для нормального распределения в функции $(t - m_t)$ и S таблицы были бы громоздкими, так как имели бы два независимых параметра. Поэтому на практике пользуются небольшими таблицами для нормального распределения, у которого $m_x = 0$ и $S = 1$. Для этого распределения функция плотности составит:

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (4.9)$$

и имеет одну переменную x . Величина x является центрированной, так как $m_x = 0$, и нормированной, так как $S = 1$. Функция распределения – интеграл от плотности распределения:

$$F_0(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (4.10)$$

Для использования таблиц следует применять подстановку $x = \frac{t - m_t}{S}$. Здесь x называется *квантилем нормированного нормального распределения* и обозначается u_p .

Плотность распределения, вероятность безотказной работы и вероятность отказа, соответственно, определяются как

$$f(t) = \varphi(x) / S ; \quad (4.11)$$

$$Q(t) = \Phi(x) ; \quad (4.12)$$

$$P(t) = 1 - \Phi(x) . \quad (4.13)$$

где $\Phi(x)$, $\varphi(x)$ – значения функции нормированного нормального распределения (Приложение А), и значения ординат плотности нормированного нормального распределения (Приложение Б), соответственно.

Значения вероятности безотказной работы $P(t)$ в зависимости от квантилей нормального распределения $x = u_p = (t - m_t) / S$ в употребительном диапазоне могут быть определены с использованием формулы (4.13) и Приложения А с учетом того, что значения симметричных квантилей функции стандартизованного нормального распределения равны по величине, но различаются знаком.

Задача оценки вероятности безотказной работы за данное время или за данную наработку решается следующим образом. Находим квантиль нормального распределения:

$$u_p = \frac{(t - m_t)}{S} , \quad (4.14)$$

где m_t – математическое ожидание ресурса работы оборудования, ч; t – ресурс по износу, ч; S – среднеквадратическое отклонение ресурса по износу, ч.

Далее по приложению А, зная квантиль нормального распределения, определяем вероятность отказа $Q(t)$, и вероятность безотказной работы $P(t)$ по формуле (4.13).

Кроме рассмотренной задачи оценки вероятности безотказной работы за данное время или за данную наработку, приходится решать и обратную задачу – определение времени или наработки, соответствующих заданной вероятности безотказной работы. В таком случае решение выглядит следующим образом.

Зная вероятность безотказной работы $P(t)$, вычисляем по формулам (4.12) – (4.13) соответствующую вероятность отказа, и по Приложению А определяем квантиль нормального распределения u_p . Ресурс работы оборудования рассчитывается по формуле:

$$t = m_t + u_p \cdot S. \quad (4.15)$$

Наряду с нормальным распределением применяется и усеченное нормальное распределение, которое получается из нормального при ограничении интервала изменения случайной величины. Оно, в частности, вносит уточнение в расчеты надежности по сравнению с нормальным распределением при больших значениях коэффициента вариации.

При этом функция плотности распределения записывается так же, как плотность нормального распределения, но с коэффициентом пропорциональности c :

$$f(t) = \frac{c}{S\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2S^2}} = \frac{c\varphi\left(\frac{t-t_0}{S}\right)}{S}, \quad (4.16)$$

где t_0 – значение случайной величины, соответствующей максимуму $f(t)$, и называется *модой*.

Коэффициент c для распределения, ограниченного пределами изменения времени от a до b , определяется из условия:

$$\int_a^b f(t)dt = 1 = c \cdot [F(b) - F(a)], \quad (4.17)$$

где $F(a), F(b)$ – значения функции нормального распределения для предельных значений t . Тогда

$$c = \frac{1}{F(b) - F(a)}. \quad (4.18)$$

Если пользоваться функцией Φ нормального распределения нормированной и центрированной случайной величины, то можно записать:

$$c = \frac{1}{\Phi\left(\frac{b-t_0}{S}\right) - \Phi\left(\frac{a-t_0}{S}\right)}. \quad (4.19)$$

Усеченное нормальное распределение с коэффициентом c и параметрами $a=0$ и $b=\infty$ применяется в задачах надежности, при этом отражается невозможность отказов при отрицательных значениях времени. Тогда

$$c = \frac{1}{\Phi\left(\frac{t_0}{S}\right)}. \quad (4.20)$$

В этом случае значения коэффициента c можно выбрать в зависимости от соотношения $\frac{t_0}{S}$. Вероятность безотказной работы:

$$P(t) = 1 + c \cdot \Phi\left(\frac{a-t_0}{S}\right) - c \cdot \Phi\left(\frac{t-t_0}{S}\right). \quad (4.21)$$

Алгоритм расчета параметров надежности по усеченному нормальному распределению будет следующим [1].

Определяется коэффициент пропорциональности c по формуле (4.19), где $\Phi\left(\frac{b-t_0}{S}\right)$, $\Phi\left(\frac{a-t_0}{S}\right)$ – значения функции, принимаемые по таблице из Приложения А в зависимости от значения аргумента $(b-t_0)/S$, $(a-t_0)/S$.

Вычисляется плотность распределения по формуле (4.16), где $\varphi\left(\frac{t-t_0}{S}\right)$ – нормированная функция, значение которой принимается по таблице из приложения Б в зависимости от значения аргумента $(t-t_0)/S$.

Вероятность безотказной работы вычисляется по формуле (4.21), где $\Phi\left(\frac{t-t_0}{S}\right)$ – значение нормированной функции, принимаемое по таблице из Приложения А в зависимости от значения аргумента $(t-t_0)/S$.

Интенсивность отказов определяется формулой:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}. \quad (4.22)$$

Часто при изучении надежности объектов применяется распределение Вейбулла. Это довольно универсальное распределение, охватывающее путем варьирования параметров широкий диапазон случаев изменения вероятностей. Оно удовлетворительно описывает наработку деталей и узлов технологического оборудования по усталостным разрушениям, наработку до отказа подшипников, электроламп и т. п., а также применяется также для оценки надежности по приработочным отказам.

Распределение характеризуется следующей функцией вероятности безотказной работы (рис. 4.4):

$$P(t) = e^{-\frac{t^m}{t_0}}. \quad (4.23)$$

Интенсивность отказов:

$$\lambda(t) = \frac{m}{t_0} t^{m-1}. \quad (4.24)$$

Плотность распределения Вейбулла имеет вид:

$$f(t) = \frac{m}{t_0} t^{m-1} \cdot e^{-\frac{t^m}{t_0}}. \quad (4.25)$$

Распределение Вейбулла имеет два параметра: m – параметр формы; t_0 – параметр масштаба; $m > 0$, $t_0 > 0$.

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение соответственно определяются по формулам:

$$m_t = b_m t_0^{\frac{1}{m}}; \quad (4.26)$$

$$S_t = c_m t_0^{\frac{1}{m}}. \quad (4.27)$$

где b_m, c_m – коэффициенты, определяемые по таблице из Приложения Д в зависимости от параметра формы.

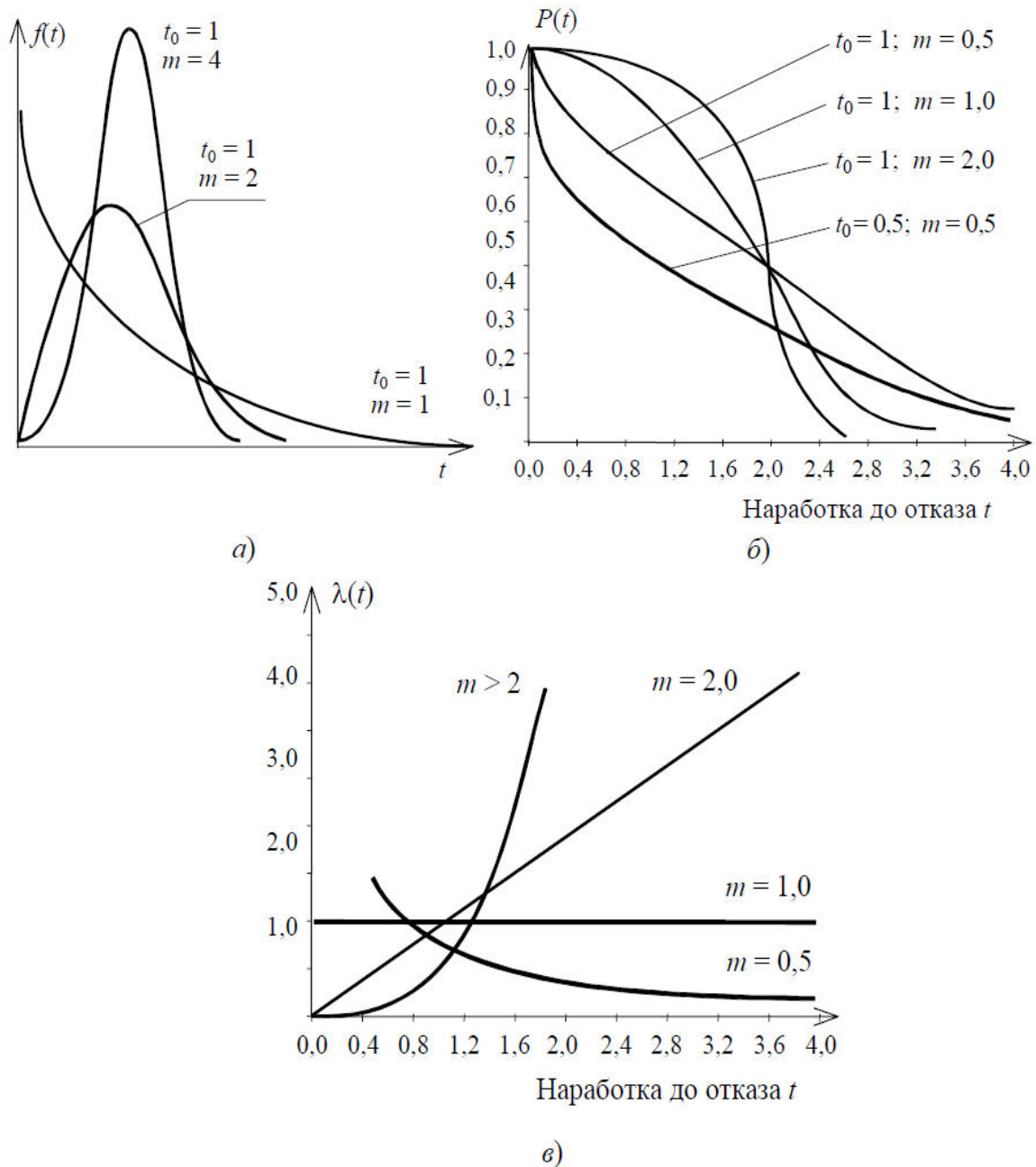


Рис. 4.4. Характеристики распределения наработки до отказа по закону Вейбулла: а) плотность распределения наработки до отказа; б) вероятность безотказной работы; в) интенсивность отказов при параметре масштаба $t_0 = 1$

Форма зависимости параметров надежности от времени в соответствии с распределением Вейбулла зависит от параметра формы.

При $m < 1$ функция $\lambda(t)$ и $f(t)$ наработки до отказа убывающие.

При $m = 1$ распределение превращается в экспоненциальное $\lambda(t) = \text{const}$ и $f(t)$ – убывающая функция.

При $m > 1$ функция $f(t)$ одновершинная, функция $\lambda(t)$ – непрерывно возрастающая при $1 < m < 2$ с выпуклостью вверх, а при $m > 2$ – с выпуклостью вниз.

При $m = 2$ функция $\lambda(t)$ является линейной и распределение Вейбулла превращается в так называемое распределение Рэлея.

При $m = 3,3$ распределение Вейбулла близко к нормальному.

Задание на практическую работу

В рамках выполнения практической работы следует решить представленные ниже задачи, исходные данные к которым приведены в табл. 4.1-4.4. В табл. 4.5 содержатся указания по выбору варианта задания в зависимости от номера зачетной книжки. По предпоследней и последней цифрам зачетной книжки студент в табл. 4.5 находит шифр задания, состоящий из пяти чисел, разделенных точкой с запятой. Каждое из чисел означает номер набора данных, который следует взять для решения конкретной задачи. При этом порядковый номер числа означает номер задачи, к которой это число относится. Так, шифр (1;12;10;5;2) означает, что для задачи 4.1 студент должен взять первый набор данных, для задачи 4.2 – двенадцатый набор данных, для задачи 4.3 – десятый набор данных, для задачи 4.4 – пятый набор данных, для задачи 4.5 – второй набор данных.

4.1. Определить вероятность отсутствия внезапных отказов технологического оборудования в течение времени t , ч, соответствующего периоду нормальной эксплуатации, если интенсивность отказов составляет λ , ч⁻¹. Исходные данные для расчета представлены в таблице 4.1.

4.2. Оценить вероятность безотказной работы $P(t)$ в течение t , ч, изнашиваемого подвижного сопряжения, если ресурс по износу подчиняется нормальному закону распределения с параметрами m_t , ч, и S , ч. Исходные данные для расчета представлены в табл. 4.2.

Таблица 4.1

**Исходные данные для расчета надежности
в период нормальной эксплуатации**

№ набора данных	$t, \text{ч}$	$\lambda, \text{ч}^{-1}$	№ набора данных	$t, \text{ч}$	$\lambda, \text{ч}^{-1}$
1	10 000	$1,00 \cdot 10^{-6}$	11	17 890	$1,11 \cdot 10^{-5}$
2	10 500	$1,92 \cdot 10^{-6}$	12	10 800	$1,95 \cdot 10^{-5}$
3	10 540	$2,88 \cdot 10^{-6}$	13	10 040	$2,22 \cdot 10^{-5}$
4	11 000	$3,71 \cdot 10^{-6}$	14	13 200	$1,78 \cdot 10^{-5}$
5	10 060	$5,09 \cdot 10^{-6}$	15	10 840	$2,29 \cdot 10^{-5}$
6	14 000	$4,41 \cdot 10^{-6}$	16	18 070	$1,44 \cdot 10^{-5}$
7	12 400	$5,85 \cdot 10^{-6}$	17	19 990	$1,37 \cdot 10^{-5}$
8	17 800	$4,68 \cdot 10^{-6}$	18	19 020	$1,51 \cdot 10^{-5}$
9	13 600	$6,93 \cdot 10^{-6}$	19	10 010	$1,00 \cdot 10^{-6}$
10	14 200	$7,41 \cdot 10^{-6}$	20	11 500	$1,75 \cdot 10^{-6}$

Таблица 4.2

Исходные данные к задачам 4.2 и 4.3

№ набора данных	Исходные данные к задаче 4.2			Исходные данные к задаче 4.3		
	$t, \text{ч}$	$m_t, \text{ч}$	$S, \text{ч}$	$P(t), \%$	$m_t, \text{ч}$	$S, \text{ч}$
1	$1,5 \cdot 10^3$	$4,0 \cdot 10^3$	$1,2 \cdot 10^3$	99,0	$1,4 \cdot 10^5$	$3,1 \cdot 10^4$
2	$2,9 \cdot 10^4$	$7,2 \cdot 10^4$	$4,3 \cdot 10^3$	54,0	$1,6 \cdot 10^6$	$3,2 \cdot 10^5$
3	$6,5 \cdot 10^2$	$1,4 \cdot 10^3$	$1,3 \cdot 10^2$	68,0	$1,0 \cdot 10^7$	$2,2 \cdot 10^6$
4	$4,0 \cdot 10^5$	$4,0 \cdot 10^3$	$2,0 \cdot 10^3$	75,5	$4,0 \cdot 10^3$	$3,2 \cdot 10^2$
5	$2,6 \cdot 10^4$	$8,9 \cdot 10^4$	$3,2 \cdot 10^4$	87,2	$7,2 \cdot 10^4$	$4,3 \cdot 10^3$
6	$1,2 \cdot 10^4$	$4,7 \cdot 10^4$	$4,3 \cdot 10^4$	90,1	$1,4 \cdot 10^3$	$1,3 \cdot 10^2$

№ набора данных	Исходные данные к задаче 4.2			Исходные данные к задаче 4.3		
	$t, \text{ч}$	$m_t, \text{ч}$	$S, \text{ч}$	$P(t), \%$	$m_t, \text{ч}$	$S, \text{ч}$
7	$9,8 \cdot 10^4$	$2,3 \cdot 10^5$	$5,3 \cdot 10^4$	88,0	$1,0 \cdot 10^6$	$1,7 \cdot 10^5$
8	$5,0 \cdot 10^6$	$1,1 \cdot 10^7$	$3,0 \cdot 10^6$	50,0	$3,8 \cdot 10^5$	$8,7 \cdot 10^4$
9	$6,0 \cdot 10^3$	$1,5 \cdot 10^4$	$4,5 \cdot 10^3$	62,0	$1,4 \cdot 10^4$	$3,4 \cdot 10^3$
10	$3,6 \cdot 10^5$	$1,0 \cdot 10^6$	$1,7 \cdot 10^5$	57,0	$2,7 \cdot 10^6$	$6,7 \cdot 10^5$
11	$7,5 \cdot 10^4$	$3,8 \cdot 10^5$	$8,7 \cdot 10^4$	64,5	$9,9 \cdot 10^6$	$5,0 \cdot 10^5$
12	$5,3 \cdot 10^3$	$1,4 \cdot 10^4$	$3,4 \cdot 10^3$	87,0	$2,6 \cdot 10^2$	$8,0 \cdot 10^1$
13	$8,1 \cdot 10^5$	$2,7 \cdot 10^6$	$6,7 \cdot 10^5$	96,5	$5,3 \cdot 10^5$	$9,1 \cdot 10^4$
14	$4,9 \cdot 10^6$	$9,9 \cdot 10^6$	$5,0 \cdot 10^5$	60,0	$5,1 \cdot 10^4$	$9,0 \cdot 10^3$
15	$1,0 \cdot 10^2$	$2,6 \cdot 10^2$	$8,0 \cdot 10^1$	99,5	$8,3 \cdot 10^4$	$1,1 \cdot 10^3$
16	$2,6 \cdot 10^5$	$5,3 \cdot 10^5$	$9,1 \cdot 10^4$	99,9	$3,4 \cdot 10^3$	$4,9 \cdot 10^2$
17	$1,5 \cdot 10^4$	$5,1 \cdot 10^4$	$9,0 \cdot 10^3$	64,0	$1,7 \cdot 10^5$	$2,0 \cdot 10^4$
18	$3,7 \cdot 10^4$	$8,3 \cdot 10^4$	$1,1 \cdot 10^4$	69,0	$4,0 \cdot 10^3$	$3,2 \cdot 10^2$
19	$9,4 \cdot 10^2$	$3,4 \cdot 10^3$	$4,9 \cdot 10^2$	72,5	$7,2 \cdot 10^4$	$4,3 \cdot 10^3$
20	$5,0 \cdot 10^4$	$1,7 \cdot 10^5$	$2,0 \cdot 10^4$	86,2	$1,4 \cdot 10^3$	$1,3 \cdot 10^2$

4.3. Оценить ресурс зубчатого колеса редуктора, соответствующий вероятности безотказной работы $P(t)$, если известно, что долговечность детали ограничена по износу, ресурс подчиняется нормальному распределению с параметрами m_t , ч, и S , ч. Исходные данные для расчета представлены в табл. 4.2.

4.4. Оценить вероятность безотказной работы изделия к моменту времени t , ч, ограниченного пределами изменения от a до b , если ресурс распределен по усеченному нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением наработки на отказ S и модой t_0 . Исходные данные для расчета представлены в табл. 4.3.

4.5. Оценить вероятность безотказной работы в течение t часов, частоту и интенсивность отказов электроламп, входящих в систему судового освещения, если ресурс электроламп подчинен распределению Вейбулла с параметрами t_0 , ч и m . Исходные данные для расчета представлены в табл. 4.4.

Таблица 4.3

Исходные данные для расчета к задаче 4.4

№ набора данных	t , ч	t_0 , ч	a , ч	b , ч	S , ч
1	17 254	10 254	10 254	18 332	3 362
2	49 560	39 251	40 560	71 961	13 084
3	44 700	32 496	34 700	61 138	11 016
4	17 470	11 300	12 470	21 822	3 897
5	56 500	32 007	36 500	63 454	11 231
6	24 700	12 472	14 700	25 392	4 455
7	87 450	47 160	57 450	98 607	17 149
8	94 140	50 934	64 140	109 416	18 465
9	77 800	44 396	57 800	98 009	16 754
10	84 000	47 542	64 000	107 886	18 286
11	47 500	19 882	23 528	74 012	11 047
12	134 100	94 100	103 185	146 016	21 632
13	72 000	60 590	68 059	95 818	14 091
14	42 100	30 657	35 129	49 411	7 213
15	49 000	39 200	46 013	64 399	9 333
16	97 400	79 716	95 467	133 501	19 209
17	65 800	40 821	50 081	69 696	9 957
18	44 120	29 717	37 201	51 731	7 338
19	21400	18 212	18 486	32 327	4 553
20	65000	54 052	56 379	97 841	13 684

Таблица 4.4

Данные для расчета распределения Вейбулла

№ набора данных	t , ч	t_0 , ч	m
1	1 247	50	0,4
2	3 650	8	0,2
3	1 470	921 150	1,8
4	5 745	$2,02 \cdot 10^9$	2,5
5	6 414	74 300	1,3
6	5 780	297	0,5
7	6 400	6	0,2
8	5 412	113	0,4
9	1 472	804	0,7
10	3 215	$6,74 \cdot 10^7$	2,1
11	6 542	$5,53 \cdot 10^9$	2,5
12	1 482	1 200 152	1,9
13	3 213	$6,98 \cdot 10^7$	2,0
14	6 541	934 590	1,4
15	3 652	2 625 630	1,8
16	1 254	32 328	1,0
17	1 000	14 500	1,1
18	1 250	11 021	1,2
19	1 300	215 839	1,3
20	4 750	3 831 433	1,4

Таблица 4.5

Схема для выбора варианта задания на практическую работу

		Последняя цифра номера зачетной книжки									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Предпоследняя цифра номера зачетной книжки	0	1; 1; 1; 1; 1	2; 2; 2; 2; 2	3; 3; 3; 3; 3	4; 4; 4; 4; 4	5; 5; 5; 5; 5	6; 6; 6; 6; 6	7; 7; 7; 7; 7	8; 8; 8; 8; 8	9; 9; 9; 9; 9	10; 10; 10; 10; 10
	1	11; 11; 11; 11; 11	12; 12; 12; 12; 12	13; 13; 13; 13; 13	14; 14; 14; 14; 14	15; 15; 15; 15; 15	16; 16; 16; 16; 16	17; 17; 17; 17; 17	18; 18; 18; 18; 18	19; 19; 19; 19; 19	20; 20; 20; 20; 20
	2	1; 2; 1; 1; 1	2; 3; 2; 2; 2	3; 4; 3; 3; 3	4; 5; 4; 4; 4	5; 6; 5; 5; 5	6; 7; 6; 6; 6	7; 8; 7; 7; 7	8; 9; 8; 8; 8	9; 10; 9; 9; 9	10; 11; 10; 10; 10
	3	11; 12; 11; 11; 11	12; 13; 12; 12; 12	13; 14; 13; 13; 13	14; 15; 14; 14; 14	15; 16; 15; 15; 15	16; 17; 16; 16; 16	17; 18; 17; 17; 17	18; 19; 18; 18; 18	19; 20; 19; 19; 19	20; 1; 20; 20; 20
	4	3; 1; 1; 1; 2	4; 2; 2; 2; 3	5; 3; 3; 3; 4	6; 4; 4; 4; 5	7; 5; 5; 5; 6	8; 6; 6; 6; 7	9; 7; 7; 7; 8	10; 8; 8; 8; 9	11; 9; 9; 9; 10	12; 10; 10; 10; 11
	5	13; 11; 11; 11; 12	14; 12; 12; 12; 13	15; 13; 13; 13; 14	16; 14; 14; 14; 15	17; 15; 15; 15; 16	18; 16; 16; 16; 17	19; 17; 17; 17; 18	20; 18; 18; 18; 19	1; 19; 19; 19; 20	2; 20; 20; 20; 1
	6	1; 1; 1; 5; 10	2; 2; 2; 6; 11	3; 3; 3; 7; 12	4; 4; 4; 8; 13	5; 5; 5; 9; 14	6; 6; 6; 10; 15	7; 7; 7; 11; 16	8; 8; 8; 12; 17	9; 9; 9; 13; 18	10; 10; 10; 14; 19
	7	11; 11; 11; 15; 20	12; 12; 12; 16; 1	13; 13; 13; 17; 2	14; 14; 14; 18; 3	15; 15; 15; 19; 4	16; 16; 16; 20; 5	17; 17; 17; 1; 6	18; 18; 18; 2; 7	19; 19; 19; 3; 8	20; 20; 20; 4; 9
	8	1; 1; 8; 1; 4	2; 2; 9; 2; 5	3; 10; 3; 3; 6	4; 11; 4; 4; 7	5; 12; 5; 5; 8	6; 13; 6; 6; 9	7; 7; 14; 7; 10	8; 8; 15; 8; 11	9; 9; 16; 9; 12	10; 10; 17; 10; 13
	9	11; 11; 18; 11; 14	12; 12; 19; 12; 15	13; 13; 20; 13; 16	14; 14; 1; 14; 17	15; 15; 2; 15; 18	16; 16; 3; 16; 19	17; 17; 4; 17; 20	18; 18; 5; 18; 1	19; 19; 6; 19; 2	20; 20; 7; 20; 3

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

«Расчет сводных характеристик выборки и графическая интерпретация случайных величин на основе работы с выборкой из N элементов»

Краткие сведения

Пусть варианты выборки располагаются в порядке возрастания, т. е. представляют собой *вариационный ряд (ВР)*. Если варианты образуют арифметическую прогрессию, разность которой g , то они будут называться *равноотстоящими* [2]. Также вводится понятие *условных вариантов (УВ)*, которые вычисляются с использованием равенства:

$$u_i = (x_i - C) / g, \quad (5.1)$$

где C – ложный нуль (ЛН), являющийся новым началом отсчета; g – шаг, представляющий собой разность между любыми двумя соседними первоначальными вариантами.

С целью упрощения расчета сводных характеристик выборки, вместо первоначальных вариантов в расчетах используют УВ.

Следует заметить, что если ВР представлен равноотстоящими вариантами с шагом g то УВ будут представлять собой целые числа. Пусть в качестве ЛН принята произвольная варианта x_m , в этом случае:

$$u_i = \frac{x_i - x_m}{g} = \frac{x_1 + (i-1) \cdot g - [x_1 + (m-1) \cdot h]}{g} = i - m. \quad (5.2)$$

Учитывая, что i и m являются целыми числами, их разность $i - m = u_i$ тоже будет целым числом.

При этом в качестве ЛН рекомендуется принимать варианту, находящуюся приблизительно в центре ВР, что позволяет максимально упростить вычисления. Однако за ЛН может быть выбрана и любая другая варианта. В любом случае, соответствующая УВ будет равна нулю [2].

В качестве примера рассчитаем УВ для представленного ниже распределения.

Пусть ЛН будет варианта 33,7, находящаяся в середине ВР.

Определим шаг:

$$g = 28,7 - 23,7 = 5.$$

Вычислим теперь УВ:

$$u_1 = (x_1 - C) / g = (23,7 - 33,7) / 5 = -2.$$

Таблица 5.1

Исходные данные для расчета

Варианты	23,7	28,7	33,7	38,7	43,7
Частоты	5	20	50	15	10

Далее аналогично найдем: $u_2 = -1$, $u_3 = 0$, $u_4 = 1$, $u_5 = 2$. Полученные УВ представляют собой целые числа, с которыми значительно проще проводить дальнейшие действия, чем с исходными данными.

Для вычисления сводных характеристик выборки удобно пользоваться эмпирическими моментами, определения которых аналогичны определениям соответствующих теоретических моментов. В отличие от теоретических, эмпирические моменты вычисляют по данным наблюдений [2].

Обычным эмпирическим моментом порядка k называют среднее значение k -х степеней разностей $x_i - C$:

$$M'_k = \left(\sum n_i (x_i - C)^k \right) / n, \quad (5.3)$$

где x_i – наблюдаемая варианта, n_i – частота варианты, $n = \sum n_i$ – объем выборки, C – произвольное постоянное число (ложный нуль).

Начальным эмпирическим моментом порядка k называют *обычный* момент порядка k при $C = 0$:

$$M_k = \left(\sum n_i x_i^k \right) / n. \quad (5.4)$$

В частности,

$$M_1 = \left(\sum n_i x_i \right) / n = \bar{x}_B, \quad (5.5)$$

т. е. начальный эмпирический момент первого порядка равен выборочной средней.

Центральным эмпирическим моментом порядка k называют *обычный* момент порядка k при $C = \bar{x}_B$

$$m_k = \left(\sum n_i (x_i - \bar{x}_B)^k \right) / n. \quad (5.6)$$

В частности,

$$m_2 = \left(\sum n_i (x_i - \bar{x}_B)^2 \right) / n = D_B, \quad (5.7)$$

т. е. центральный эмпирический момент второго порядка равен выборочной дисперсии.

Легко выразить центральные моменты через обычные:

$$m_2 = M'_2 - (M'_1)^2, \quad (5.8)$$

$$m_3 = M'_3 - 3M'_2M'_1 + 2(M'_1)^3, \quad (5.9)$$

$$m_4 = M'_4 - 4M'_3M'_1 + 6M'_2(M'_1)^2 - 3(M'_1)^4. \quad (5.10)$$

Вычисление центральных моментов требует довольно громоздких вычислений. Чтобы упростить расчеты, заменяют первоначальные варианты условными.

Условным эмпирическим моментом порядка k называют начальный момент порядка k , вычисленный для условных вариантов:

$$M_k^* = \frac{\sum n_i u_i^k}{n} = \frac{\sum n_i \left(\frac{x_i - C}{g} \right)^k}{n}. \quad (5.11)$$

В частности,

$$M_1^* = \frac{\sum n_i \left(\frac{x_i - C}{g} \right)}{n} = \frac{1}{g} \left[\frac{\sum n_i x_i}{n} - C \frac{\sum n_i}{n} \right] = \frac{1}{g} (\bar{x}_B - C). \quad (5.12)$$

Отсюда

$$\bar{x}_B = M_1^* \cdot g + C. \quad (5.13)$$

Таким образом, для того чтобы найти выборочную среднюю, достаточно вычислить условный момент первого порядка, умножить его на g и к результату прибавить ложный нуль C .

Выразим обычные моменты через условные:

$$M_k^* = \frac{1}{g^k} \frac{\sum n_i (x_i - C)^k}{n} = \frac{M'_k}{g^k}. \quad (5.14)$$

Отсюда

$$M'_k = M_k^* \cdot g^k. \quad (5.15)$$

Таким образом, для того чтобы найти обычный момент порядка k , достаточно условный момент того же порядка умножить на g^k .

Найдя же обычные моменты, легко найти центральные моменты по равенствам (5.8) – (5.10). В итоге получим удобные для вычислений формулы, выражающие центральные моменты через условные:

$$m_2 = \left[M_2^* - (M_1^*)^2 \right] g^2, \quad (5.16)$$

$$m_3 = \left[M_3^* - 3M_2^*M_1^* + 2(M_1^*)^3 \right] g^3, \quad (5.17)$$

$$m_4 = \left[M_4^* - 4M_3^*M_1^* + 6M_2^*(M_1^*)^2 - 3(M_1^*)^4 \right] g^4. \quad (5.18)$$

В частности, в силу (5.8) и соотношения (5.7) получим формулу для вычисления выборочной дисперсии по условным моментам первого и второго порядков:

$$D_{\text{в}} = \left[M_2^* - (M_1^*)^2 \right] g^2. \quad (5.19)$$

Техника вычислений центральных моментов по условным описана далее.

Метод произведений дает удобный способ вычисления условных моментов различных порядков вариационного ряда с равноотстоящими вариантами. Зная же условные моменты, нетрудно найти интересующие нас начальные и центральные эмпирические моменты. В частности, методом произведений удобно вычислять выборочную среднюю и выборочную дисперсию. Целесообразно пользоваться расчетной таблицей, которая составляется так:

1) в первый столбец таблицы записывают выборочные (первоначальные) варианты, располагая их в возрастающем порядке;

2) во второй столбец записывают частоты вариантов; складывают все частоты и их сумму (объем выборки n) помещают в нижнюю клетку столбца;

3) в третий столбец записывают условные варианты $u_1 = (x_1 - C)/g$, причем в качестве ложного нуля C выбирают варианту, которая расположена примерно в середине вариационного ряда, и полагают g равным разности между любыми двумя соседними вариантами; практически же третий столбец заполняется так: в клетке строки, содержащей выбранный ложный нуль, пи-

шут 0; в клетках над нулем пишут последовательно $-1, -2, -3$ и т. д., а под нулем $-1, 2, 3$ и т. д.;

4) умножают частоты на условные варианты и записывают их произведения $n_i u_i$ в четвертый столбец; сложив все полученные числа, их сумму $\sum n_i u_i$ помещают в нижнюю клетку столбца;

5) умножают частоты на квадраты условных вариантов и записывают их произведения $n_i u_i^2$ в пятый столбец; сложив все полученные числа, их сумму $\sum n_i u_i^2$ помещают в нижнюю клетку столбца;

6) умножают частоты на квадраты условных вариантов, увеличенных каждая на единицу, и записывают произведения $n_i (u_i + 1)^2$ в шестой контрольный столбец; сложив все полученные числа, их сумму $\sum n_i (u_i + 1)^2$ помещают в нижнюю клетку столбца.

Шестой столбец служит для контроля вычислений: если сумма $\sum n_i (u_i + 1)^2$ окажется равной сумме $\sum n_i u_i^2 + 2 \sum n_i u_i + n$, как и должно быть в соответствии с тождеством:

$$\sum n_i (u_i + 1)^2 = \sum n_i u_i^2 + 2 \sum n_i u_i + n, \quad (5.20)$$

то вычисления проведены правильно.

После того как расчетная таблица заполнена и проверена правильность вычислений, вычисляют условные моменты:

$$M_1^* = (\sum n_i u_i) / n, \quad M_2^* = (\sum n_i u_i^2) / n. \quad (5.21)$$

Наконец, вычисляют выборочные среднюю и дисперсию по формулам (5.13) и (5.19).

В качестве примера найдем методом произведений выборочные среднюю и дисперсию следующего статистического распределения, представленного в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Исходные данные для расчета

Варианты	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0
Частоты	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1

Составим расчетную таблицу, для чего:

1) запишем варианты в первый столбец;

2) запишем частоты во второй столбец; сумму частот (100) поместим в нижнюю клетку столбца;

3) в качестве ложного нуля выберем варианту 11,0 (эта варианта расположена примерно в середине вариационного ряда); в клетке третьего столбца, которая принадлежит строке, содержащей выбранный ложный нуль, пишем 0; над нулем записываем последовательно $-1, -2, -3, -4$, а под нулем $-1, 2, 3, 4, 5$;

4) произведения частот на условные варианты записываем в четвертый столбец; отдельно находим сумму (-46) отрицательных и отдельно сумму (103) положительных чисел; сложив эти числа, их сумму (57) помещаем в нижнюю клетку столбца;

5) произведения частот на квадраты условных вариантов запишем в пятый столбец; сумму чисел столбца (383) помещаем в нижнюю клетку столбца;

6) произведения частот на квадраты условных вариантов, увеличенных на единицу, запишем в шестой контрольный столбец; сумму (597) чисел столбца помещаем в нижнюю клетку столбца.

В итоге получим расчетную табл. 5.3.

Контроль:

$$\sum n_i u_i^2 + 2 \sum n_i u_i + n = 383 + 2 \cdot 57 + 100 = 597.$$

$$\sum n_i (u_i + 1)^2 = 597.$$

Вычисления произведены правильно.

Таблица 5.3

Расчет выборочного среднего и дисперсии

1	2	3	4	5	6
x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i (u_i + 1)^2$
10,2	2	-4	-8	32	18
10,4	3	-3	-9	27	12
10,6	8	-2	-16	32	8
10,8	13	-1	-13	13	0
11,0	25	0	$A_1 = -46$		25
11,2	20	1	20	20	80
11,4	12	2	24	48	108

1	2	3	4	5	6
11,6	10	3	30	90	160
11,8	6	4	24	96	150
12,0	1	5	5	25	36
			$A_2=103$		
	$n=100$		$\sum n_i u_i = 57$	$\sum n_i u_i^2 = 383$	$\sum n_i (u_i + 1)^2 = 597$

Вычислим условные моменты первого и второго порядков:

$$M_1^* = (\sum n_i u_i) / n = 57 / 100 = 0,57,$$

$$M_2^* = (\sum n_i u_i^2) / n = 383 / 100 = 3,83.$$

Найдем шаг: $g = 10,4 - 10,2 = 0,2$.

Вычислим искомые выборочные среднюю и дисперсию:

$$\bar{x}_B = M_1^* \cdot g + C = 0,57 \cdot 0,2 + 11,0 = 11,1;$$

$$D_B = [M_2^* - (M_1^*)^2] g^2 = [3,83 - (0,57)^2] \cdot 0,2^2 = 0,14.$$

Выше изложена методика расчета выборочных характеристик для равноотстоящих вариантов. На практике, как правило, данные наблюдений не являются равноотстоящими числами. При этом за счет соответствующей обработки наблюдаемых значений вычисления могут быть сведены к рассмотренному выше случаю равноотстоящих ординат. С этой целью интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака (первоначальные варианты), делят на несколько равных частичных интервалов. При этом в каждый частичный интервал должно попасть не менее 8-10 первоначальных вариантов. Затем находят середины частичных интервалов, которые и образуют последовательность равноотстоящих вариантов.

В качестве частоты каждой «новой» варианты (середины частичного интервала) принимают общее число первоначальных вариантов, попавших в соответствующий частичный интервал.

Ясно, что замена первоначальных вариантов серединами частичных интервалов сопровождается ошибками (первоначальные варианты левой половины частичного интервала будут увеличены, а варианты правой половины уменьшены), однако, эти ошиб-

ки будут в основном погашаться, поскольку они имеют разные знаки.

Рассмотрим следующий пример. Пусть имеется выборочная совокупность объема $n = 100$, которая задана табл. 5.4, и требуется составить распределение равноотстоящих вариантов.

Разобьем интервал 1,00–1,50, например, на следующие 5 частичных интервалов:

1,00–1,10; 1,10–1,20; 1,20–1,30; 1,30–1,40; 1,40–1,50.

Приняв середины частичных интервалов, в качестве новых вариантов y_i , получим равноотстоящие варианты: $y_1 = 1,05$; $y_2 = 1,15$; $y_3 = 1,25$; $y_4 = 1,35$; $y_5 = 1,45$.

Найдем частоту варианты y_1 :

$$n_1 = 1 + 3 + 6 + 4 + 2 + 4/2 = 18.$$

Здесь учтено то обстоятельство, что первоначальная варианта 1,10 одновременно является концом первого частичного интервала и началом второго, поэтому частота 4 этой варианты поровну распределена между обоими частичными интервалами.

Найдем частоту варианты y_2 :

$$n_2 = 4/2 + 3 + 6 + 5 + 2 + 4/2 = 20.$$

Таблица 5.4

Выборочная совокупность

x_i	n_i	x_i	n_i	x_i	n_i
1,00	1	1,19	2	1,37	6
1,03	3	1,20	4	1,38	2
1,05	6	1,23	4	1,39	1
1,06	4	1,25	8	1,40	2
1,08	2	1,26	4	1,44	3
1,10	4	1,29	4	1,45	3
1,12	3	1,30	6	1,46	2
1,15	6	1,32	4	1,49	4
1,16	5	1,33	5	1,50	2

Аналогично вычислим частоты остальных вариантов: $n_3 = 25$; $n_4 = 22$; $n_5 = 15$.

В итоге получим следующее распределение равноотстоящих вариантов, представленное в табл. 5.5

Таблица 5.5

Распределение равноотстоящих вариантов

y_i	1,05	1,15	1,25	1,35	1,45
n_i	18	20	25	22	15

Легко убедиться, что выборочные средние и дисперсии, вычисленные по первоначальным и равноотстоящим вариантам, окажутся соответственно равными:

$$\bar{x}_B = 1,250; \bar{y}_B = 1,246; D_x = 0,018; D_y = 0,017.$$

Видно, что замена первоначальных вариантов равноотстоящими не привела к существенным ошибкам; при этом объем вычислительной работы значительно уменьшается.

Перейдем теперь к рассмотрению эмпирических и выравнивающих (теоретических) частот.

Рассмотрим дискретную случайную величину X , закон распределения которой неизвестен. Пусть произведено n испытаний, в которых величина X приняла n_1 раз значение x_1 , n_2 раз значение x_2 , ..., n_k раз значение x_k , причем $\sum n_i = n$.

Эмпирическими частотами называют фактически наблюдаемые частоты n_i .

Пусть имеются основания предположить, что изучаемая величина X распределена по некоторому определенному закону. Чтобы проверить, согласуется ли это предположение с данными наблюдений, вычисляют частоты наблюдаемых значений, т. е. находят теоретически частоту n'_i каждого из наблюдаемых значений в предположении, что величина X распределена по предполагаемому закону. *Выравнивающими (теоретическими)* в отличие от фактически наблюдаемых *эмпирических* частот называют частоты n'_i , найденные теоретически (вычислением). Выравнивающие частоты находят с помощью равенства:

$$n'_i = n \cdot P_i, \quad (5.22)$$

где n – число испытаний; P_i – вероятность наблюдаемого значения x_i , вычисленная при допущении, что X имеет предполагаемое распределение.

Итак, выравнивающая частота наблюдаемого значения x_i дискретного распределения равна произведению числа испытаний на вероятность этого наблюдаемого значения.

Рассмотрим следующий пример. В результате эксперимента, состоящего из $n = 520$ испытаний, в каждом из которых регистрировалось число x_i появлений некоторого события, получено эмпирическое распределение, представленное в табл. 5.6.

Таблица 5.6

Исходные данные для расчета

Наблюдаемые значения x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Эмпирическая частота n_i	120	167	130	69	27	5	1	1

Требуется найти выравнивающие частоты n'_i в предположении, что случайная величина X (генеральная совокупность) распределена по закону Пуассона.

Известно, что параметр λ , которым определяется распределение Пуассона, равен математическому ожиданию этого распределения. Поскольку в качестве оценки математического ожидания принимают выборочную среднюю, то и в качестве оценки X можно принять выборочную среднюю $\bar{x}_g$. Легко найти по условию, что выборочная средняя равна 1,5, следовательно, можно принять $\lambda = 1,5$.

Таким образом, формула Пуассона

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} \quad (5.23)$$

принимает вид:

$$P_{520}(k) = \frac{1,5^k \cdot e^{-1,5}}{k!}. \quad (5.24)$$

Пользуясь этой формулой, найдем вероятности $P_{520}(k)$ при $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ (для простоты записи индекс 520 далее

опущен): $P(0) = 0,22313$, $P(1) = 0,33469$, $P(2) = 0,251021$, $P(3) = 0,125511$, $P(4) = 0,047066$, $P(5) = 0,014120$, $P(6) = 0,003530$, $P(7) = 0,000755$. Найдем выравнивающие частоты (результаты умножения округлены до единицы):

$$n'_1 = n \cdot P(0) = 520 \cdot 0,22313 = 116,$$

$$n'_2 = n \cdot P(1) = 520 \cdot 0,33469 = 174.$$

Аналогично находят и остальные выравнивающие частоты (табл. 5.7).

Таблица 5.7

Эмпирические и выравнивающие частоты

Эмпирическая частота n_i	120	167	130	69	27	5	1	1
Выравнивающая частота n'_i	116	174	131	65	25	7	2	0

Сравнительно небольшое расхождение эмпирических и выравнивающих частот подтверждает предположение, что рассматриваемое распределение подчинено закону Пуассона.

Заметим, что если подсчитать выборочную дисперсию по данному распределению, то окажется, что она равна выборочной средней, т. е. 1,5. Это служит еще одним подтверждением сделанного предположения, поскольку для распределения Пуассона $\lambda = M(X) = D(X)$.

Сравнения эмпирических и теоретических частот «на глаз», конечно, недостаточно. Чтобы сделать это более обоснованно, надо использовать, например, критерий Пирсона. Проверка гипотезы о распределении случайной величины по закону Пуассона изложена в учебном пособии.

В случае непрерывного распределения, вероятности отдельных возможных значений равны нулю. Поэтому весь интервал возможных значений делят на k непересекающихся интервалов и вычисляют вероятности P_i попадания X в i -й частичный интервал, а затем, как и для дискретного распределения, умножают число испытаний на эти вероятности.

Итак, выравнивающие частоты непрерывного распределения находят по равенству (5.22), в котором полагают n — число испы-

таний; P_i – вероятность попадания X в i -й частичный интервал, вычисленная при допущении, что X имеет предполагаемое распределение.

В частности, если имеются основания предположить, что случайная величина X (генеральная совокупность) распределена нормально, то выравнивающие частоты могут быть найдены по формуле:

$$n'_i = \frac{n \cdot g}{\sigma_g} \cdot \varphi(u_i), \quad (5.25)$$

где n – число испытаний (объем выборки); g – длина частичного интервала; σ_g – выборочное СКО; $u_i = (x_i - \bar{x}_g) / \sigma_g$ (x_i – середина i -го частичного интервала),

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}. \quad (5.26)$$

Построение нормальной кривой по результатам наблюдений осуществляется следующим образом.

1. Вычисляют $\bar{x}_g$ и σ_g , для чего может быть использован, в частности, метод произведений.

2. Определяют ординаты y_i теоретической кривой с использованием зависимости :

$$y_i = \frac{n \cdot g}{\sigma_g} \cdot \varphi(u_i), \quad (5.27)$$

где все обозначения соответствуют введенным выше.

3. Изображают на плоскости точки (x_i, y_i) , соединяя их затем с использованием плавной кривой.

Для оценки соответствия теоретической кривой данным наблюдений строят графические зависимости эмпирических и выравнивающих частот и сравнивают полученные кривые. Для более обоснованного суждения о том, что данные наблюдений свидетельствуют о нормальном распределении признака, применяются критерии согласия.

Вообще, для проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения существует ряд критериев согласия: χ^2 («хи квадрат») Пирсона К., Колмогорова, Смирнова и т. д.

Рассмотрим применение критерия Пирсона для проверки гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности.

Как видно из рассмотренного выше примера, эмпирические и теоретические (выравнивающие) частоты являются различными. Данное расхождение может быть случайным (незначимым) и объясняться такими причинами, как небольшой объем наблюдений, способ группировки и т. д. Но расхождение может быть и неслучайным (значимым), и возникать вследствие того, что гипотеза о нормальном распределении совокупности, на основании которой рассчитаны теоретические частоты, неверна.

Критерий Пирсона позволяет установить на принятом уровне значимости согласие или несогласие гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности с данными наблюдений.

Допустим, что имеется выборка объема n и для нее получено эмпирическое распределение, представленное в табл. 5.8.

Таблица 5.8

Эмпирическое распределение выборки

Варианты x_i	x_1	x_2	...	x_s
Эмпирические частоты n_i	n_1	n_2	...	n_s

Пусть определены теоретические частоты n'_i исходя из предположения о нормальности распределения генеральной совокупности. Рассмотрим проверку при уровне значимости α нулевой гипотезы (НГ) о том, что генеральная совокупность распределена нормально.

Для проверки гипотезы используется случайная величина:

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}. \quad (5.28)$$

В рамках специальных дисциплин доказано, что при $n \rightarrow \infty$ закон распределения случайной величины (5.28) стремится к закону распределения χ^2 с k степенями свободы. Это имеет место независимо от того, какому закону распределения подчинена генеральная совокупность.

Число степеней свободы определяется из условия:

$$k = s - 1 - r, \quad (5.29)$$

где s – число групп (частичных интервалов) выборки; r – число параметров предполагаемого распределения, которые определены на основании выборки.

Так как в случае нормального распределения, оценке подлежат два параметра, то $r = 2$ и в этом случае $k = s - 3$.

Так как односторонний критерий более жестко отвергает НГ, чем двусторонний, построим правостороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости α :

$$P[\chi^2 > \chi_{кр}^2(\alpha; k)] = \alpha. \quad (5.30)$$

Таким образом правосторонняя критическая область определяется из неравенства $\chi^2 > \chi_{кр}^2(\alpha; k)$, а область принятия НГ из неравенства $\chi^2 < \chi_{кр}^2(\alpha; k)$. На основании вышеизложенного, правило проверки НГ можно сформулировать следующим образом.

1. Вычисляются теоретические частоты и наблюдаемое значение критерия:

$$\chi_{набл}^2 = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}. \quad (5.31)$$

2. По таблице критических точек распределения χ^2 для заданного уровня значимости α с учетом числа степеней свободы $k = s - 3$ определяется критическая точка $\chi_{кр}^2(\alpha; k)$.

3. Если $\chi_{набл}^2 < \chi_{кр}^2(\alpha; k)$, то нет оснований для того, чтобы отклонить НГ; если $\chi_{набл}^2 > \chi_{кр}^2(\alpha; k)$, то НГ отклоняется.

Для контроля правильности вычислений формула (5.31) может быть преобразована к виду:

$$\chi_{набл}^2 = \left[\sum \frac{n_i^2}{n'_i} \right] - n. \quad (5.32)$$

В качестве примера рассмотрим проверку гипотезы о нормальности распределения генеральной совокупности при уровне значимости $\alpha=0,05$, если эмпирические и теоретические частоты представлены в столбцах 2 и 3 табл. 5.9.

Вычисления представим в других столбцах табл. 5.9, $\chi^2_{набл}$ представлено в столбце 6. Для контроля вычислим с использованием столбца 8:

$$\left[\sum \frac{n_i^2}{n'_i} \right] - n = 372,75 - 366 = 6,75. \quad (5.33)$$

Число степеней свободы определим с учетом того, что число групп выборки (число различных вариантов) равно 8, т. е. $k = 8 - 3 = 5$.

По таблице критических точек распределения χ^2 (Приложение Е) для уровня значимости $\alpha=0,05$ и числа степеней свободы $k=5$ получаем, что $\chi^2_{кр}(0,05;5)=11,1$. Так как $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$, то нет оснований для отклонения нулевой гипотезы, т. е. расхождение эмпирических и теоретических частот не является значимым. Таким образом, данные наблюдений согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

Таблица 5.9

Исходные данные и расчет критерия

1	2	3	4	5	6	7	8
i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$	n_i^2	n_i^2 / n'_i
1	5	4	1	1	0,25	25	6,25
2	14	15	-1	1	0,067	196	13,07
3	37	40	-3	9	0,23	1369	34,23
4	76	81	-5	25	0,31	5776	71,31
5	104	100	4	16	0,16	10816	108,16
6	86	74	12	144	1,95	7396	99,95
7	28	39	-11	121	3,10	784	20,10
8	16	13	3	9	0,69	256	19,69
Σ	366	366			$\chi^2_{набл} = 6,75$		372,75

Для вычисления теоретических частот, наряду с представленным выше, может быть использован следующий способ.

1. Весь интервал наблюдаемых значений X делят на s частичных интервалов (x_i, x_{i+1}) равной длины. После этого определяют середины частичных интервалов $x_i^* = (x_i + x_{i+1})/2$; в качестве частоты n_i варианты x_i^* принимают число вариантов, которые попали в i -й интервал. Таким образом, получается последовательность равноотстоящих вариантов и соответствующих частот, представленная в табл. 5.10.

Таблица 5.10

Последовательность равноотстоящих вариантов

x_1^*	x_2^*	...	x_s^*
n_1	n_2	...	n_s

2. Вычисляется, например, с помощью метода произведений, выборочная средняя $\bar{x}^*$ и выборочное СКО σ^* .

3. Осуществляется нормирование случайной величины X путем перехода к величине $Z = (X - \bar{x}^*)/\sigma^*$ и вычисляются концы интервалов (z_i, z_{i+1}) :

$$z_i = (x_i - \bar{x}^*)/\sigma^*, \quad z_{i+1} = (x_{i+1} - \bar{x}^*)/\sigma^*, \quad (5.34)$$

при этом наименьшее значение Z (z_1) принимают равным $-\infty$, а наибольшее (z_s) принимают за $+\infty$.

4. Рассчитываются теоретические вероятности p_i попадания X в интервалы (x_i, x_{i+1}) на основании зависимости:

$$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i), \quad (5.35)$$

где $\Phi(z)$ – функция Лапласа (также можно воспользоваться функцией нормированного нормального распределения, см. Приложение А), а затем определяют теоретические частоты:

$$n'_i = n \cdot p_i. \quad (5.36)$$

В качестве примера рассмотрим нахождение теоретических частот по заданному интервальному распределению выборки объема $n = 200$, исходя из предположения о нормальном распределении совокупности.

Сначала определим середины интервалов по формуле $x_i^* = (x_i + x_{i+1})/2$. В частности, $x_1^* = (4 + 6)/2 = 5$. Таким образом, получим последовательность равноотстоящих вариантов x_i^* и соответствующих им частот n_i . Затем, на основании метода произведений, определим выборочное среднее и СКО:

$$\bar{x}^* = 12,63, \quad \sigma^* = 4,695, \quad (5.37)$$

после чего определим интервалы (z_i, z_{i+1}) .

Таблица 5.11

Средины интервалов

x_i^*	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

Расчет сведен в табл. 5.12. Полученные теоретические частоты представлены в последнем столбце указанной таблицы.

Таблица 5.12

Пример расчета теоретических частот

Номер интервала	Границы интервала		Частота	$x_i - \bar{x}^*$	$x_{i+1} - \bar{x}^*$	Границы интервала		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$	$n'_i = n \cdot p_i$
	x_i	x_{i+1}				$z_i = (x_i - \bar{x}^*) / \sigma^*$	$z_{i+1} = (x_{i+1} - \bar{x}^*) / \sigma^*$				
1	=	6	15	—	-6,63	$-\infty$	-1,41	-0,5	-0,4207	0,0793	15,86
2	6	8	26	-6,63	-4,63	-1,41	-0,99	-0,4207	-0,3389	0,0818	16,36
3	8	10	25	-4,63	-2,63	-0,99	-0,56	-0,3389	-0,2123	0,1266	25,32
4	10	12	30	-2,63	-0,63	-0,156	-0,13	-0,2123	-0,0517	0,1606	32,12
5	12	14	26	-0,63	1,37	-0,13	0,29	-0,0517	0,1141	0,1658	33,16
6	14	16	21	1,37	3,37	0,29	0,72	0,1141	0,2642	0,1501	30,02
7	16	18	24	3,37	5,37	0,72	1,14	0,2642	0,3729	0,1087	21,74
8	18	20	20	5,37	7,37	1,14	1,57	0,3729	0,4418	0,0689	13,78
9	20	20	13	7,37	—	1,57	$+\infty$	0,4418	0,5	0,0582	11,64

Задание на практическую работу

Выполнить статистическую оценку результатов испытаний дизеля 6ЧН18/22, представленных в табл. 5.13:

1. Осуществить переход к условным вариантам.
2. По методу произведений с использованием условных вариантов вычислить выборочную среднюю и выборочную дисперсию.
3. Построить кривые эмпирических и теоретических частот, считая, что исследуемая величина подчиняется нормальному закону, с использованием формул (5.25) и (5.36).
4. С помощью критерия Пирсона проверить гипотезу о нормальности распределения.

Таблица 5.13

Результаты замеров выбросов оксидов азота NO_x в отработавших газах двигателя для различных значений мощности

Номер экспериментальной точки	Серия испытаний			
	1	2	3	4
	Индикаторная мощность, КВт			
	69,1	110,6	152	193
	Выбросы NO_x			
1	11,7	13,4	14,9	18,3
2	11,9	13,2	14,8	18,2
3	12,0	13,4	14,9	18,4
4	11,8	13,5	14,7	18,6
5	11,9	13,4	14,8	18,4
6	12,0	13,6	14,7	18,6
7	11,7	13,3	14,8	18,3
8	11,9	13,5	15,0	18,2
9	12,1	13,4	14,6	18,2
10	11,7	13,3	14,8	18,4
11	12,0	13,5	14,6	18,3
12	11,9	13,4	14,7	18,3
13	11,8	13,2	14,8	18,4
14	11,9	13,5	14,6	18,6
15	12,1	13,3	15,0	18,5

В табл. 5.14 представлены указания по выбору варианта задания в зависимости от номера зачетной книжки. По предпоследней и последней цифрам зачетной книжки студент в табл. 5.14 находит шифр задания, состоящий из трех цифр, разделенных точкой с запятой. При этом одна или несколько цифр могут быть заменены прочерком. Первая цифра означает номер серии испытаний в табл. 5.13, для которой должен быть произведен расчет. Вторая цифра означает порядковый номер экспериментальной точки, начиная с которой несколько точек следует исключить из рассмотрения. Третья цифра означает количество точек, которые должны быть исключены из рассмотрения, начиная с точки, определенной по второй цифре шифра. В случае прочерков расчет должен проводиться для всех точек данной серии испытаний. Так, если шифр имеет вид 3; 4; 2, то расчет следует проводить для третьей серии испытаний, исключив из рассмотрения точки с номерами 4 и 5.

Таблица 5.14

Схема для выбора варианта задания на практическую работу

		Последняя цифра номера зачетной книжки									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Предпоследняя цифра номера зачетной книжки	0	1;-;-	2;-;-	3;-;-	4;-;-	1;1;1	2;1;1	3;1;1	4;1;1	1;2;1	2;2;1
	1	3;2;1	4;2;1	1;3;1	2;3;1	3;3;1	4;3;1	1;4;1	2;4;1	3;4;1	4;4;1
	2	1;5;1	2;5;1	3;5;1	4;5;1	1;6;1	2;6;1	3;6;1	4;6;1	1;7;1	2;7;1
	3	3;7;1	4;7;1	1;8;1	2;8;1	3;8;1	4;8;1	1;9;1	2;9;1	3;9;1	4;9;1
	4	1;4;3	2;4;3	3;4;3	4;4;3	1;1;2	2;1;2	3;1;2	4;1;2	1;2;2	2;2;2
	5	3;2;2	4;2;2	1;3;2	2;3;2	3;3;2	4;3;2	1;4;2	2;4;2	3;4;2	4;4;2
	6	1;5;2	2;5;2	3;5;2	4;5;2	1;6;2	2;6;2	3;6;2	4;6;2	1;7;2	2;7;2
	7	3;7;2	4;7;2	1;8;2	2;8;2	3;8;2	4;8;2	1;9;2	2;9;2	3;9;2	4;9;2
	8	1;5;3	2;5;3	3;5;3	4;5;3	1;6;3	2;6;3	3;6;3	4;6;3	1;7;3	2;7;3
	9	3;7;3	4;7;3	1;8;3	2;8;3	3;8;3	4;8;3	1;9;3	2;9;3	3;9;3	4;9;3

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

«Построение доверительного интервала для линии регрессии»

Краткие сведения

При построении доверительного интервала для линии регрессии обычно бывает необходимо получить оценку σ^2 . Разность между результатом наблюдения y_j и предсказанным по уравнению регрессии значением $\hat{y}_j$, $e_j = y_j - \hat{y}_j$, называется остатком. Сумма квадратов остатков или сумма квадратов ошибки должна иметь вид:

$$SS_{ош} = \sum_{j=1}^n e_j^2 = \sum_{j=1}^n [y_j - \hat{y}_j]^2. \quad (6.1)$$

Более удобную расчетную формулу для $SS_{ош}$ можно найти в [5], подставив в уравнение (6.1) оценку модели $\hat{y}_j = \bar{y} + \hat{\beta}_1(x_j - \bar{x})$ и упростив его:

$$SS_{ош} = \sum_{j=1}^n y_j^2 - n \cdot \bar{y}^2 - \hat{\beta}_1 \cdot S_{xy}. \quad (6.2)$$

Но $\sum_{j=1}^n y_j^2 - n \cdot \bar{y}^2 = \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2 \equiv S_{yy}$, и мы можем записать $SS_{ош}$ как

$$SS_{ош} = S_{yy} - \hat{\beta}_1 \cdot S_{xy}. \quad (6.3)$$

Можно показать, что математическое ожидание $SS_{ош}$ имеет вид $E(SS_{ош}) = (n - 2) \cdot \sigma^2$. Поэтому

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_{ош}}{n - 2} \equiv MS_{ош} \quad (6.4)$$

является несмещенной оценкой σ^2 .

С учетом вышеизложенного можно построить точечные и интервальные оценки углового коэффициента и отрезка на оси ординат. Если ε_j независимы и распределены нормально, то обе переменные

$$(\hat{\beta}_1 - \beta_1) / \sqrt{MS_{ош} / S_{xx}} \quad (6.5)$$

и

$$(\hat{\beta}_0 - \beta_0) / \sqrt{MS_{ou} \left(\frac{1}{n} + \frac{x^2}{S_{xx}} \right)} \quad (6.6)$$

подчиняются t -распределению с $n - 2$ степенями свободы (Приложение Г). Следовательно, $100(1-\alpha)$ -процентный доверительный интервал для β_1 имеет вид:

$$\hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2; n-2} \sqrt{\frac{MS_{ou}}{S_{xx}}}, \quad (6.7)$$

а для β_0 :

$$(\hat{\beta}_0 - \beta_0) / \sqrt{MS_{ou} \left(\frac{1}{n} + \frac{x^2}{S_{xx}} \right)}. \quad (6.8)$$

В качестве иллюстрации построим 99-процентный доверительный интервал для β_1 по данным примера из Практической работы № 1. В соответствии с выражением (6.7) это $0,9894 \pm 5,841 \sqrt{\frac{0,000184}{0,522561}}$ или $0,9894 \pm 0,1096$. Таким образом, 99-процентный доверительный интервал для β_1 : $0,8798 \leq \beta_1 \leq 1,0990$.

Доверительный интервал можно построить и для среднего отклика при заданном x , скажем, x_0 ; его часто называют доверительным интервалом для линии регрессии. Поскольку $E(y|x) = \beta'_0 + \beta_1(x_0 - \bar{x})$, то с помощью подобранной модели можно получить точечную оценку $E(y|x_0)$ в виде:

$$E(y|x_0) \equiv \hat{y}_0 = \beta'_0 + \beta_1(x_0 - \bar{x}). \quad (6.9)$$

Ясно, что $E(\hat{y}_0) = \beta'_0 + \beta_1(x_0 - \bar{x})$, так как $\hat{\beta}'_0$ и $\hat{\beta}_1$ несмещены, и

$$V(\hat{y}_0) = \sigma^2 \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right), \quad (6.10)$$

поскольку $Cov(\hat{\beta}'_0, \hat{\beta}_1)$. Далее $\hat{y}_0$ распределено нормально в силу нормальности распределения $\hat{\beta}'_0$ и $\hat{\beta}_1$. Следовательно, $100(1-\alpha)$ -процентный доверительный интервал для истинной линии регрессии при $x = x_0$ определяется выражением [5]:

$$\hat{y}_0 \pm t_{\alpha/2; n-2} \sqrt{MS_{ou} \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right)}. \quad (6.11)$$

Отметим, что ширина доверительного интервала для $E(y|x_0)$ зависит от x_0 , она минимальна при $x_0 = \bar{x}$ и увеличивается с ростом $|x_0 - \bar{x}|$.

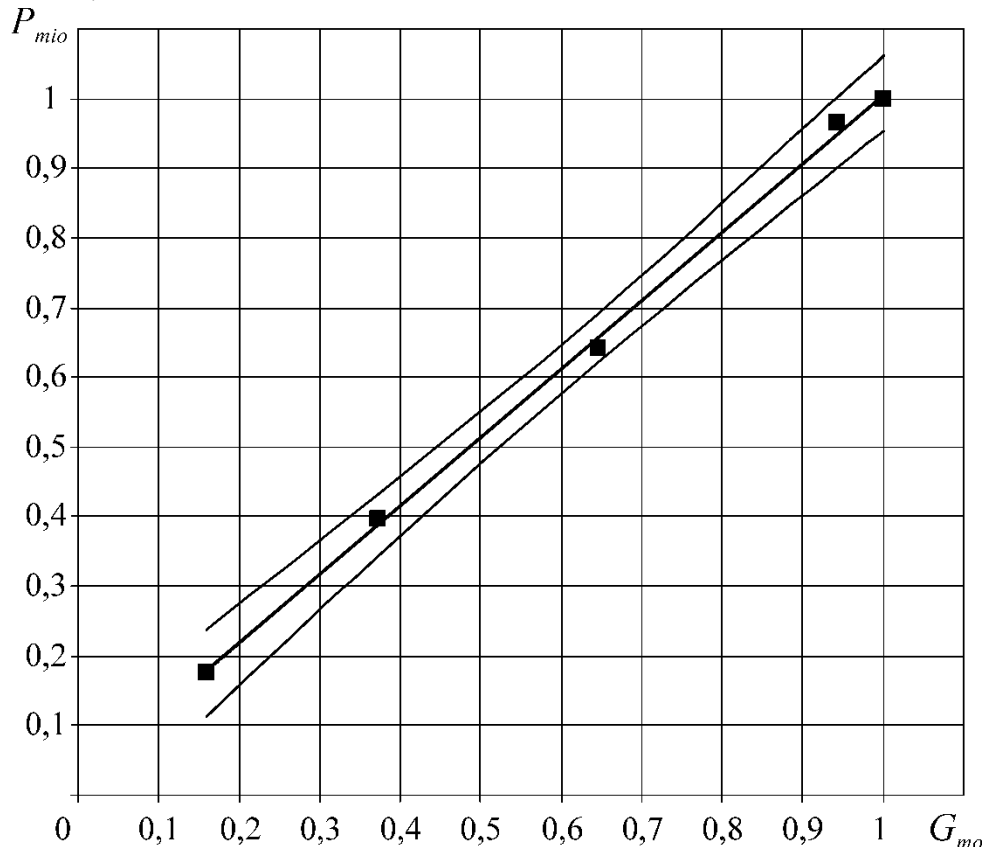


Рис. 6.1. Подобранная модель и 99-процентный доверительный интервал

В качестве примера рассмотрим построение 99-процентного доверительного интервала для линии регрессии по данным примера из Практической работы № 1. Поскольку $\hat{y}_0 = 0,0176 + 0,9894 \cdot x_0$, а $t_{0,005;3} = 5,841$ (см. Приложение Г), то этот интервал определяется выражением:

$$\hat{y}_0 \pm 5,841 \sqrt{0,000184 \left(\frac{1}{5} + \frac{(x_0 - 0,62452)^2}{0,52256} \right)}.$$

Прогнозируемые значения и 99-процентные доверительные границы при $x_0 = x_i, i = 1, 2, \dots, 5$ приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Доверительные границы для расчетного примера

x_0	1	0,9433	0,6464	0,3738	0,1591
$\hat{y}_0$	1,0070	0,9509	0,6571	0,3874	0,1750
99-процентные доверительные границы	$\pm 0,0544$	$\pm 0,0498$	$\pm 0,0356$	$\pm 0,0449$	$\pm 0,0622$

В качестве примера найдем с использованием этой таблицы 99-процентный доверительный интервал для истинной линии регрессии, скажем, при $x_0 = 0,9433$:

$$0,9509 - 0,0498 \leq E(y|x_0 = 0,9433) \leq 0,9509 + 0,0498 ,$$

или

$$0,9011 \leq E(y|x_0 = 0,9433) \leq 1,0007 .$$

Подобранная модель и 99-процентный доверительный интервал для истинной линии регрессии приведены на рис. 6.1.

Задание на практическую работу

Построить 99-процентный доверительный интервал для линии регрессии, параметры которой были определены в рамках Практической работы № 1. Вариант задания выбирается в соответствии с двумя последними цифрами номера зачетной книжки, как изложено в работе № 1.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7

«Применение двухфакторного дисперсионного анализа в экспериментальных исследованиях»

Краткие сведения

Во многих задачах осуществляется исследование эффектов двух и более факторов. В такой ситуации наиболее эффективными являются *факторные эксперименты*. *Факторным* называют такой эксперимент, при проведении которого в каждом полном опыте (реплике) которого исследуются все возможные комбинации уровней факторов. Так, если имеется a уровней фактора A и b уровней фактора B , то каждая реплика будет содержать все комбинации обработок, количеством $a \cdot b$. Факторы, которые исследуются в факторных экспериментах, часто называют *пересекающимися* [5].

Для оценки эффекта фактора находят изменение отклика, которое обусловлено изменением уровня фактора. Этот эффект называется *главным*, так как он связан с факторами, которые исследуются в процессе экспериментальных исследований и представляют наибольший интерес. В качестве примера рассмотрим факторный эксперимент, результаты которого представлены в табл. 7.1. Главный эффект фактора A можно вычислить как разность средних откликов на двух различных уровнях фактора A :

$$A = \frac{40 + 52}{2} - \frac{20 + 30}{2} = 21. \quad (7.1)$$

Таким образом, увеличение фактора A с первого уровня до второго приводит к возрастанию среднего отклика на 21 единицу. Так же может быть определен главный эффект фактора B :

$$B = \frac{30 + 52}{2} - \frac{20 + 40}{2} = 11. \quad (7.2)$$

Если рассматривается более двух уровней факторов, то данная схема изменяется, так как разности средних откликов могут вычисляться многими способами.

Во многих экспериментах оказывается, что разности откликов на определенных уровнях одного фактора различны для неодинаковых уровней других факторов. В этом случае считают, что имеет место взаимодействие между факторами. Рассмотрим

пример факторного эксперимента из табл. 7.2. Если фактор B находится на первом уровне, то эффект от фактора A определяется из выражения:

$$A = 50 - 20 = 30, \quad (7.3)$$

для второго уровня фактора B :

$$A = 12 - 40 = -28. \quad (7.4)$$

В рассмотренном случае на эффект фактора A оказывается влияние со стороны фактора B , поэтому можно сделать вывод о наличии взаимодействия между факторами A и B [5].

Графическая иллюстрация указанных двух случаев представлена на рис. 7.1. На рис. 7.1, а – представлена зависимость отклика от уровня фактора A для двух уровней фактора B на основании табл. 7.1. Видно, что линии для B_1 и B_2 проходят практически параллельно. Это показывает, что взаимодействия между факторами A и B нет. Аналогичная зависимость, построенная по данным табл. 7.2, представлена на рис. 7.1, б. Рисунок показывает, что линии для B_1 и B_2 не являются параллельными, что свидетельствует о наличии взаимодействия между факторами A и B .

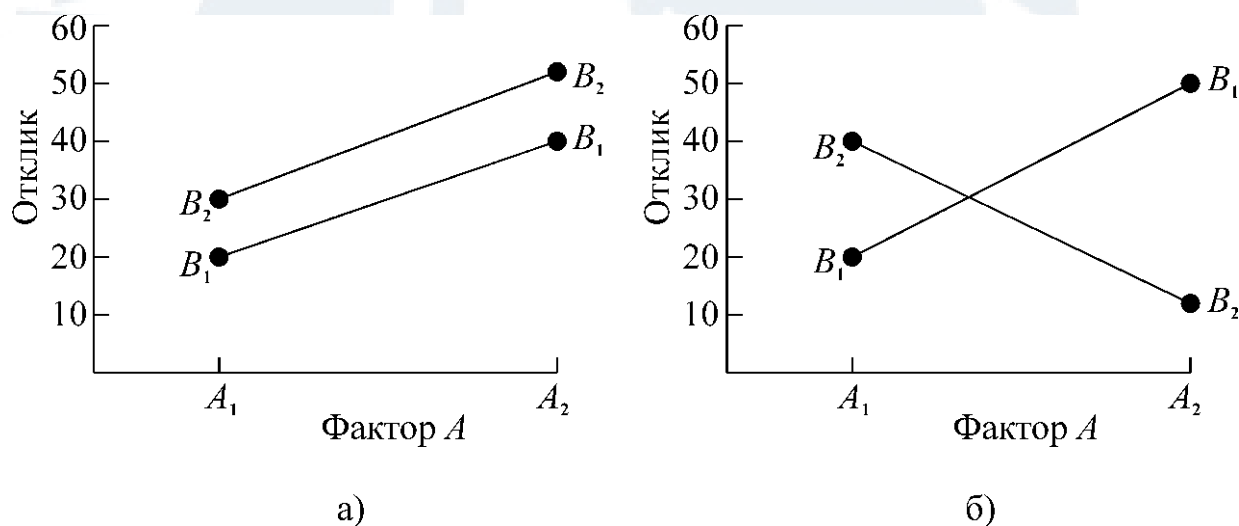


Рис. 7.1. Факторный эксперимент:
а) без взаимодействия; б) с взаимодействием

Такие графические зависимости часто оказываются весьма полезными при решении вопроса о наличии значимых взаимодействий между факторами. Однако в процессе анализа данных

нельзя ограничиваться только графиками, так как их интерпретация является субъективной.

Таблица 7.1

Факторный эксперимент

		Фактор <i>B</i>	
		<i>B</i> ₁	<i>B</i> ₂
Фактор <i>A</i>	<i>A</i> ₁	20	30
	<i>A</i> ₂	40	52

Таблица 7.2

Факторный эксперимент с взаимодействием

		Фактор <i>B</i>	
		<i>B</i> ₁	<i>B</i> ₂
Фактор <i>A</i>	<i>A</i> ₁	20	40
	<i>A</i> ₂	50	12

Следует заметить, что если имеется существенное взаимодействие между факторами, то практическое значение соответствующих главных эффектов весьма мало. Так, оценивая главный эффект фактора *A* по данным табл. 7.2, приходим к заключению, что он весьма мал:

$$A = \frac{50 + 12}{2} - \frac{20 + 40}{2} = 1. \quad (7.5)$$

Исходя из (7.5) можно сделать вывод об отсутствии эффекта, однако, рассмотрение эффекта фактора *A* на различных уровнях фактора *B* показывает несостоятельность данного предположения. На самом деле эффект от фактора *A* существует, однако, он зависит от уровня фактора *B*. Таким образом, определение взаимодействия *AB* более важно, чем нахождение главного эффекта. При наличии значимого взаимодействия оно может маскировать значимость главных эффектов, что следует непосредственно из анализа данных, представленных в табл. 7.2. Если существует значимое взаимодействие, то экспериментатор может проводить исследование уровней одного фактора, например, *A*,

принимая уровни других факторов постоянными, таким образом, можно сделать выводы о главном эффекте фактора A .

Факторные эксперименты обладают рядом преимуществ [5]. Пусть рассматриваются два фактора A и B , причем каждый из них имеет два уровня. Уровни факторов будем обозначать как A_1 , A_2 , B_1 и B_2 . Для получения информации об этих факторах их можно проварьировать последовательно по одному, что представлено в табл. 7.3. Эффект изменения фактора A можно определить как $A_2B_1 - A_1B_1$. Так как получение опытных данных сопряжено с ошибкой эксперимента, то следует взять несколько наблюдений для каждой комбинации обработок, вычислить средние отклики и на их основании выполнить оценку эффектов факторов. В частности, если принять число наблюдений для каждой комбинации равным двум, то общее число наблюдений будет равно шести.

Таблица 7.3

Метод варьирования факторов по одному

		Фактор B	
		B_1	B_2
Фактор A	A_1	A_1B_1	A_1B_2
	A_2	A_2B_1	

В случае проведения факторного эксперимента должна быть исследована также комбинация обработок A_2B_2 . Тогда на основании лишь четырех наблюдений могут быть получены две оценки эффекта фактора A : $A_2B_1 - A_1B_1$ и $A_2B_2 - A_1B_2$. Подобным образом могут быть найдены две оценки эффекта фактора B .

При этом точность средних значений эффектов будет такой же, как и при проведении эксперимента с изменением факторов по одному, однако, в случае факторного эксперимента, потребуется только четыре наблюдения, а не шесть.

Теперь рассмотрим случай, когда между факторами A и B имеется взаимодействие. Если при проведении эксперимента с изменением факторов по одному было получено, что отклик при комбинациях обработок A_1B_2 и A_2B_1 больше, чем при комбинации

A_1B_1 , то напрашивается вывод о том, что при A_2B_2 отклик будет иметь еще большую величину. Однако при наличии взаимодействия между факторами такой вывод может оказаться абсолютно неверным, о чем свидетельствует рассмотрение примера, представленного в табл. 7.2.

На основании вышеизложенного можно сформулировать основные преимущества факторных экспериментов:

- факторные эксперименты более эффективны, чем эксперименты, в которых факторы изменяются по одному;
- при наличии взаимодействия между факторами применение факторного эксперимента необходимо для предотвращения получения ошибочных выводов;
- факторные эксперименты дают возможность оценки эффектов фактора на ряде уровней других факторов, таким образом, могут быть получены выводы для целого диапазона условий, при которых проводится эксперимент.

Перейдем теперь к рассмотрению одного из простейших типов факторных экспериментов, когда исследуются только два фактора или набора обработок. Пусть в факторном эксперименте осуществляется исследование a уровней фактора A и b уровней фактора B , таким образом, каждая реплика эксперимента содержит все комбинации обработок в количестве ab . Пусть количество реплик эксперимента равно n , а y_{ijk} – наблюдение для i -го уровня фактора A и j -го уровня фактора B в реплике эксперимента с номером k . Экспериментальные данные внесем в табл. 7.4, при этом будем выбирать порядок проведения каждого из abn наблюдений случайным образом, таким образом, план будет полностью рандомизированным.

Наблюдения могут быть описаны при помощи линейной статистической модели, которая имеет вид:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk},$$
$$i = 1, 2, \dots, a; \quad j = 1, 2, \dots, b; \quad k = 1, 2, \dots, n,$$
(7.6)

где μ – математическое ожидание общего среднего эффекта; τ_i – истинный эффект i -го уровня фактора A ; β_j – истинный эффект j -го уровня фактора B ; $(\tau\beta)_{ij}$ – эффект взаимодействия между τ_i и β_j ; ε_{ijk} – случайная ошибка.

Будем считать, что оба фактора являются фиксированными, а эффекты обработок будем вычислять как отклонения от математического ожидания общего среднего, т. е. установим следующие ограничения:

$$\sum_{i=1}^a \tau_i = 0, \quad \sum_{j=1}^b \beta_j = 0. \quad (7.7)$$

Если имеется n реплик эксперимента, то общее число наблюдений будет равно abn .

Таблица 7.4

**Расположение данных в факторном эксперименте
с двумя факторами**

		Фактор B			
		1	2	...	b
Фактор A	1	$y_{111}, y_{112}, \dots, y_{11n}$	$y_{121}, y_{122}, \dots, y_{12n}$	...	$y_{1b1}, y_{1b2}, \dots, y_{1bn}$
	2	$y_{211}, y_{212}, \dots, y_{21n}$	$y_{221}, y_{222}, \dots, y_{22n}$	...	$y_{2b1}, y_{2b2}, \dots, y_{2bn}$
	...	...	...	...	
	a	$y_{a11}, y_{a12}, \dots, y_{a1n}$	$y_{a21}, y_{a22}, \dots, y_{a2n}$	...	$y_{ab1}, y_{ab2}, \dots, y_{abn}$

Практическое значение имеет нахождение оценок параметров модели (7.6) и проверка гипотез применительно к этим параметрам. При этом используется дисперсионный анализ, причем из-за рассмотрения двух контролируемых источников изменения A и B , процедура называется *двухфакторным дисперсионным анализом* или *классификацией по двум признакам*.

Обозначим сумму всех наблюдений для i -го уровня фактора A как $Y_{i..}$, а аналогичную сумму для j -го уровня фактора B — $Y_{.j.}$. Сумму всех наблюдений для i -го уровня фактора A и j -го уровня фактора B будем обозначать как $Y_{ij.}$, а общую сумму

всех наблюдений как $y_{...}$. Введем обозначения средних, соответствующих обработкам и ячейкам $\bar{y}_{i..}$, $\bar{y}_{.j.}$ и $\bar{y}_{ij.}$, а также общего среднего $\bar{y}_{...}$. Соответствующие формулы можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} y_{i..} &= \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk}; \quad \bar{y}_{i..} = \frac{1}{bn} y_{i..}, \quad i = 1, 2, \dots, a; \\ y_{.j.} &= \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n y_{ijk}; \quad \bar{y}_{.j.} = \frac{1}{an} y_{.j.}, \quad j = 1, 2, \dots, b; \\ y_{ij.} &= \sum_{k=1}^n y_{ijk}; \quad \bar{y}_{ij.} = \frac{1}{n} y_{ij.}, \quad i = 1, 2, \dots, a; \quad j = 1, 2, \dots, b; \\ y_{...} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk}; \quad \bar{y}_{...} = \frac{1}{abn} y_{...} \end{aligned} \right\}. \quad (7.8)$$

Общую скорректированную сумму квадратов можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n [(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}) + \\ &+ (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}) + (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})]^2 = \\ &= bn \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 + an \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 + \\ &+ n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2, \end{aligned} \quad (7.9)$$

где учтено равенство нулю шести смешанных произведений в правой части выражения.

Следует заметить, что общая скорректированная сумма квадратов может быть разбита следующим образом:

$$SS_{\text{общ}} = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_{\text{ош}}, \quad (7.10)$$

т. е. осуществляется разбиение на сумму квадратов, которая обусловлена «строками» или фактором A (SS_A), которая обусловлена «столбцами» или фактором B (SS_B), сумму квадратов, обусловленную взаимодействием факторов A и B (SS_{AB}), а также сумму квадратов, обусловленную ошибкой $SS_{\text{ош}}$. Рассматривая

последнее слагаемое в выражении (7.9) можно сделать вывод, что для того, чтобы обусловленная ошибкой сумма квадратов не смешивалась с взаимодействием, следует иметь хотя бы две реплики эксперимента ($n \geq 2$). Число степеней свободы каждой из сумм квадратов представлено в табл. 7.5.

Таблица 7.5

Степени свободы сумм квадратов

Эффект	Степени свободы
A	$a - 1$
B	$b - 1$
Взаимодействие AB	$(a - 1)(b - 1)$
Ошибка	$ab(n - 1)$
Сумма	$abn - 1$

Представленное в таблице расщепление общего числа степеней свободы по суммам квадратов обосновывается ниже. Так как главные эффекты A и B имеют a и b уровней соответственно, а потому их число степеней свободы $a - 1$ и $b - 1$ соответственно. Для определения числа степеней свободы взаимодействия необходимо найти разность числа степеней свободы для ячейки и для обоих главных эффектов, т.е.

$$ab - 1 - (a - 1) - (b - 1) = (a - 1)(b - 1). \quad (7.11)$$

Если имеется n реплик эксперимента, то каждой из ab ячеек соответствует $n - 1$ степеней свободы, поэтому число степеней свободы ошибки $ab(n - 1)$. Следует заметить, что сумма чисел степеней свободы в правой части уравнения (7.10) равна общему числу степеней свободы. Предполагая, что $\varepsilon_{ijk} \sim NID(0, \sigma^2)$, по теореме Кокрена можно получить, что отнесенные к σ^2 суммы из правой части (7.10) будут являться случайными величинами, подчиняющимися распределению χ^2 с приведенным выше числом степеней свободы.

В случае фиксированных факторов A и B математические ожидания средних квадратов определяются из следующих выражений:

$$E(MS_A) = E\left(\frac{1}{a-1} SS_A\right) = \sigma^2 + \frac{bn}{a-1} \sum_{i=1}^a \tau_i^2; \quad (7.12)$$

$$E(MS_B) = E\left(\frac{1}{b-1} SS_B\right) = \sigma^2 + \frac{an}{b-1} \sum_{j=1}^b \beta_j^2; \quad (7.13)$$

$$E(MS_{AB}) = E\left(\frac{n}{(a-1)(b-1)} SS_{AB}\right) = \sigma^2 + \frac{n}{(a-1)(b-1)} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\tau\beta)_{ij}^2; \quad (7.14)$$

$$E(MS_{ou}) = E\left(\frac{1}{ab(n-1)} SS_{ou}\right) = \sigma^2. \quad (7.15)$$

Таким образом, если требуется проверить гипотезы относительно отсутствия эффекта фактора-строки ($H_0 : \tau_i = 0$) и фактора-столбца ($H_0 : \beta_j = 0$), а также относительно отсутствия эффектов взаимодействия – $H_0 : (\tau\beta)_{ij} = 0$, то нужно найти отношения соответствующих средних квадратов к среднему квадрату ошибки. Такие отношения подчиняются распределению Фишера, число степеней свободы знаменателя которого составляет $ab(n-1)$, а число степеней свободы числителя равно числу степеней свободы соответствующей суммы квадратов и представлено выше. В качестве критической области при проверке гипотез будет выступать верхний шлейф распределения Фишера (Приложение В). Процедура проверки может быть записана в форме таблицы дисперсионного анализа (табл. 7.6)

Запишем формулы для расчета сумм квадратов в выражении (7.10). Общая сумма квадратов определяется из выражения:

$$SS_{общ} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk}^2 - \frac{1}{abn} y_{...}^2. \quad (7.16)$$

Суммы квадратов для главных эффектов можно определить по следующим выражениям:

$$SS_A = \frac{1}{bn} \sum_{i=1}^a y_{i..}^2 - \frac{1}{abn} y_{...}^2, \quad (7.17)$$

$$SS_B = \frac{1}{an} \sum_{j=1}^b y_{.j.}^2 - \frac{1}{abn} y_{...}^2. \quad (7.18)$$

Для того, чтобы определить сумму квадратов, обусловленную взаимодействием факторов SS_{AB} , рекомендуется сначала найти сумму квадратов сумм по ab ячейкам:

$$SS_{\text{ячейки}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{ij}^2 - \frac{1}{abn} y_{...}^2. \quad (7.19)$$

Так как в эту сумму входят также SS_A и SS_B , то для нахождения SS_{AB} их надо вычесть из $SS_{\text{ячейки}}$, т. е.

$$SS_{AB} = SS_{\text{ячейки}} - SS_A - SS_B. \quad (7.20)$$

Таблица 7.6

**Таблица двухфакторного дисперсионного анализа
для модели постоянных эффектов**

Источник изменчивости	Сумма квадратов	Степени свободы	Средний квадрат	F_0
Обработки A	SS_A	$a - 1$	$MS_A = \frac{SS_A}{a - 1}$	$\frac{MS_A}{MS_{ош}}$
Обработки B	SS_B	$b - 1$	$MS_B = \frac{SS_B}{b - 1}$	$\frac{MS_B}{MS_{ош}}$
Взаимодействие	SS_{AB}	$(a - 1) \times (b - 1)$	$MS_{AB} = \frac{SS_{AB}}{(a - 1)(b - 1)}$	$\frac{MS_{AB}}{MS_{ош}}$
Ошибка	$SS_{ош}$	$ab(n - 1)$	$MS_{ош} = \frac{SS_{ош}}{ab(n - 1)}$	
Сумма	$SS_{общ}$	$abn - 1$	—	—

Сумма квадратов ошибки $SS_{ош}$ также находится при помощи вычитания:

$$SS_{ош} = SS_{общ} - SS_A - SS_B - SS_{AB}, \quad (7.21)$$

или

$$SS_{ош} = SS_{общ} - SS_{\text{ячейки}}. \quad (7.22)$$

В качестве примера рассмотрим анализ результатов эксперимента [5], которые представлены в табл. 7.7. В эксперименте проводилось исследование типа материала пластин и температуры на максимальное выходное напряжение аккумуляторных ба-

тарей. Для трех видов материала и такого же числа значений температуры было проведено четыре реплики факторного эксперимента, при этом порядок проведения 36 наблюдений был определен случайным образом.

Рассчитаем численные значения сумм квадратов:

$$\begin{aligned}
 SS_{общ} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk}^2 - \frac{1}{abn} y_{...}^2 = \\
 &= 130^2 + 155^2 + 74^2 + \dots + 60^2 - \frac{1}{36} 3799^2 = 77646,96; \\
 SS_{матер} &= \frac{1}{bn} \sum_{i=1}^a y_{i..}^2 - \frac{1}{abn} y_{...}^2 = \\
 &= \frac{1}{3 \cdot 4} (998^2 + 1300^2 + 1501^2) - \frac{1}{36} 3799^2 = 10683,72; \\
 SS_{темпер} &= \frac{1}{an} \sum_{j=1}^b y_{.j.}^2 - \frac{1}{abn} y_{...}^2 = \\
 &= \frac{1}{3 \cdot 4} (1738^2 + 1291^2 + 770^2) - \frac{1}{36} 3799^2 = 39118,72; \\
 SS_{взаим} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{ij.}^2 - \frac{1}{abn} y_{...}^2 - SS_{матер} - SS_{темпер} = \\
 &= \frac{1}{4} (539^2 + 229^2 + \dots + 342^2) - \frac{1}{36} 3799^2 - 10683,72 - 39118,72 = 9613,77; \\
 SS_{ош} &= SS_{общ} - SS_{матер} - SS_{темпер} - SS_{взаим} = \\
 &= 77646,96 - 10683,72 - 39118,72 - 9613,7 = 18230,75.
 \end{aligned}$$

Таблица 7.7

Максимальное выходное напряжение по результатам испытаний аккумуляторных батарей

Тип материала	Температура, °C			$y_{i..}$
	10	18	26	
1	130; 155; 74; 180; $y_{ij.} = 539$	34; 40; 80; 75; $y_{ij.} = 229$	20; 70; 82; 58; $y_{ij.} = 230$	998

Тип материала	Температура, °С			$y_{i..}$
	10	18	26	
2	150; 188; 159; 126; $y_{ij.} = 623$	136; 122; 106; 115; $y_{ij.} = 479$	25; 70; 58; 45; $y_{ij.} = 198$	1300
3	138; 110; 168; 160; $y_{ij.} = 576$	174; 120; 150; 139; $y_{ij.} = 573$	96; 104; 82; 60; $y_{ij.} = 342$	1501
$y_{.j.}$	1738	1291	770	$y_{...} = 3799$

Результаты дисперсионного анализа представлены в табл. 7.8. Так как $F_{0,05; 4; 27} = 2,73$ (Приложение В) и $F_{0,05; 4; 27} < 3,56$, то можно сделать вывод о наличии значимого взаимодействия между материалом и температурой. Кроме того, можем сделать вывод, что главные эффекты (материал и температура) также являются значимыми, так как $F_{0,05; 2; 27} = 3,35$, и, соответственно, $F_{0,05; 2; 27} < 7,91$, $F_{0,05; 2; 27} < 28,97$.

Таблица 7.8

Дисперсионный анализ данных по напряжению батарей

Источник изменчивости	Сумма квадратов	Степени свободы	Средний квадрат	F_0
Тип материала	10683,72	2	5341,86	7,91
Температура	39118,72	2	19558,36	28,97
Взаимодействие	9613,77	4	2403,44	3,56
Ошибка	18230,75	27	675,21	
Сумма	77646,96	35		

Интерпретировать результаты эксперимента позволяет построение графических зависимостей средних откликов для всех комбинаций обработок (рис. 7.2).

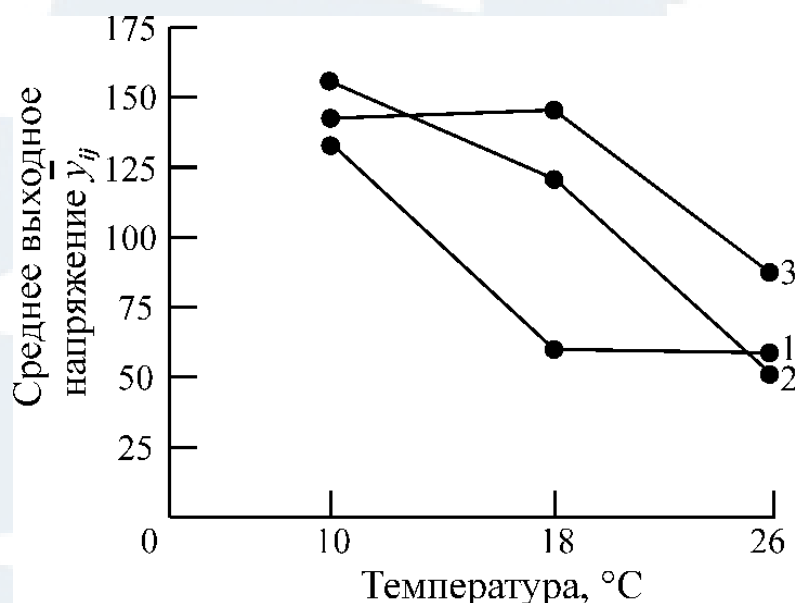


Рис. 7.2. Зависимости среднего выходного напряжения от температуры для нескольких видов материала

Признаком статистически значимого взаимодействия является то, что графики не параллельны. Из рис. 7.2 следует, что более высокое напряжение достигается при низкой температуре для всех видов материала. При переходе от низкой температуры к средней, наблюдается некоторый рост напряжения для третьего материала и снижение для двух других материалов. При переходе от промежуточной температуры к высокой, выходное напряжение практически неизменно для первого материала и снижается для второго и третьего материала.

Задание на практическую работу

В табл. 7.9 представлены результаты исследования накопления остаточных прогибов в образцах, изготовленных из жести различной толщины. Было проведено пять реплик факторного эксперимента, при этом испытания проводились в двух режимах. Выполнить анализ полученных данных и сделать вывод о наличии влияния режима нагружения и толщины образцов на накоп-

ление остаточных прогибов. Построить графическую зависимость среднего значения накопленного прогиба от толщины образцов для обоих режимов нагружения. Охарактеризовать полученную зависимость.

Таблица 7.9

**Накопленный остаточный прогиб в образцах (мм)
по результатам испытаний**

Режим нагружения	Толщина образца, мм		
	1,0	1,2	1,4
1	7,45; 8,41; 8,67; 9,80; 10,52	10,11; 9,37; 10,54; 9,34; 8,58	8,36; 9,42; 9,54; 9,15; 10,05
2	8,29; 8,84; 9,50; 8,09; 10,48	10,33; 9,37; 8,79; 9,25; 9,14	10,31; 9,33; 8,95; 9,87; 10,15

В табл. 7.10 представлены указания по выбору варианта задания в зависимости от номера зачетной книжки. По предпоследней и последней цифрам зачетной книжки студент в табл. 7.10 находит шифр задания, состоящий из трех цифр, разделенных точкой с запятой. При этом одна или несколько цифр могут быть заменены прочерком. Первая цифра означает порядковый номер числа в таблице исходных данных, которое следует исключить из рассмотрения. При этом данное число должно быть исключено для всех комбинаций обработок, т. е. рассмотрению подлежат результаты, полученные в четырех репликах эксперимента. Вторая цифра означает номер числа в таблице исходных данных (табл. 7.9), которое следует увеличить или уменьшить на определенную величину, при этом число с данным порядковым номером следует откорректировать для всех комбинаций обработок. По третьей цифре шифра при помощи табл. 7.11 определяется, на сколько процентов следует изменить соответствующие значения из табл. 7.9 перед выполнением расчетов.

Таблица 7.10

**Схема для выбора варианта задания
на практическую работу**

		Последняя цифра номера зачетной книжки									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Предпоследняя цифра номера зачетной книжки	0	–; –; –	1; –; –	2; –; –	3; –; –	4; –; –	5; –; –	–; 1; 1	–; 1; 2	–; 1; 3	–; 1; 4
	1	–; 1; 5	2; 1; 1	2; 1; 2	2; 1; 3	2; 1; 4	2; 1; 5	2; 5; 1	2; 5; 2	2; 5; 3	2; 5; 4
	2	–; 2; 1	–; 2; 2	–; 2; 3	–; 2; 4	–; 2; 5	1; 2; 1	1; 2; 2	1; 2; 3	1; 2; 4	1; 2; 5
	3	–; 3; 1	–; 3; 2	–; 3; 3	–; 3; 4	–; 3; 5	1; 3; 1	1; 3; 2	1; 3; 3	1; 3; 4	1; 3; 5
	4	–; 4; 1	–; 4; 2	–; 4; 3	–; 4; 4	–; 4; 5	1; 4; 1	1; 4; 2	1; 4; 3	1; 4; 4	1; 4; 5
	5	–; 5; 1	–; 5; 2	–; 5; 3	–; 5; 4	–; 5; 5	1; 5; 1	1; 5; 2	1; 5; 3	1; 5; 4	1; 5; 5
	6	2; 3; 1	2; 3; 2	2; 3; 3	2; 3; 4	2; 3; 5	4; 3; 1	4; 3; 2	4; 3; 3	4; 3; 4	4; 3; 5
	7	5; 3; 1	5; 3; 2	5; 3; 3	5; 3; 4	5; 3; 5	5; 4; 1	5; 4; 2	5; 4; 3	5; 4; 4	5; 4; 5
	8	5; 2; 1	5; 2; 2	5; 2; 3	5; 2; 4	5; 2; 5	5; 1; 1	5; 1; 2	5; 1; 3	5; 1; 4	5; 1; 5
	9	4; 2; 1	4; 2; 2	4; 2; 3	4; 2; 4	4; 2; 5	4; 1; 1	4; 1; 2	4; 1; 3	4; 1; 4	4; 1; 5

Таблица 7.11

Процентные значения для корректировки

Третья цифра шифра	1	2	3	4	5
Процент для корректировки	5	10	15	-5	-10



СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брянкин К.В., Климов А.М. Надежность технологического оборудования: учеб. пособие. – Тамбов: Изд. ТГТУ, 2008. – 104 с.

2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов. – 9-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.

3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие. – 11-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во Юрайт, 2011. – 404 с.

4. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ: в 2-х кн. Кн. 1 / пер. с англ. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 366 с.

5. Монтгомери Д.К. Планирование эксперимента и анализ данных. – Л.: Судостроение, 1980. – 384 с.

6. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами / пер. с англ.; под. ред. В.Г. Горского. – М.: Мир, 1973. – 959 с.



Приложение А

Значения функции нормированного нормального распределения

Таблица А1

x	$\Phi(x)$	$\Phi(0,5 + x)$	$\Phi(1,0 + x)$	$\Phi(1,5 + x)$	$\Phi(2,0 + x)$	$\Phi(2,5 + x)$	$\Phi(3,0 + x)$
0,00	0,50000	0,69146	0,84134	0,93319	0,97725	0,99379	0,99865
0,01	0,50399	0,69497	0,84375	0,93448	0,97778	0,99396	0,99869
0,02	0,50798	0,69847	0,84614	0,93574	0,97831	0,99413	0,99874
0,03	0,51197	0,70194	0,84850	0,93699	0,97882	0,99430	0,99878
0,04	0,51595	0,70540	0,85083	0,93822	0,97932	0,99446	0,99882
0,05	0,51994	0,70884	0,85314	0,93943	0,97982	0,99461	0,99886
0,06	0,52392	0,71226	0,85543	0,94062	0,98030	0,99477	0,99889
0,07	0,52790	0,71566	0,85769	0,94179	0,98077	0,99492	0,99893
0,08	0,53188	0,71904	0,85993	0,94295	0,98124	0,99506	0,99896
0,09	0,53586	0,72240	0,86214	0,94408	0,98169	0,99520	0,99900
0,10	0,53983	0,72575	0,86433	0,94520	0,98214	0,99534	0,99903
0,11	0,54380	0,72907	0,86650	0,94630	0,98257	0,99547	0,99906
0,12	0,54776	0,73237	0,86864	0,94738	0,98300	0,99560	0,99910
0,13	0,55172	0,73565	0,87076	0,94845	0,98341	0,99573	0,99913
0,14	0,55567	0,73891	0,87286	0,94950	0,98382	0,99585	0,99916
0,15	0,55962	0,74215	0,87493	0,95053	0,98422	0,99598	0,99918
0,16	0,56356	0,74537	0,87698	0,95154	0,98461	0,99609	0,99921

Продолжение табл. А1

x	$\Phi(x)$	$\Phi(0,5 + x)$	$\Phi(1,0 + x)$	$\Phi(1,5 + x)$	$\Phi(2,0 + x)$	$\Phi(2,5 + x)$	$\Phi(3,0 + x)$
0,17	0,56750	0,74857	0,87900	0,95254	0,98500	0,99621	0,99924
0,18	0,57142	0,75175	0,88100	0,95352	0,98537	0,99632	0,99926
0,19	0,57535	0,75490	0,88298	0,95449	0,98574	0,99643	0,99929
0,20	0,57926	0,75804	0,88493	0,95543	0,98610	0,99653	0,99931
0,21	0,58317	0,76115	0,88686	0,95637	0,98645	0,99664	0,99934
0,22	0,58706	0,76424	0,88877	0,95728	0,98679	0,99674	0,99936
0,23	0,59095	0,76731	0,89065	0,95818	0,98713	0,99683	0,99938
0,24	0,59483	0,77035	0,89251	0,95907	0,98745	0,99693	0,99940
0,25	0,59871	0,77337	0,89435	0,95994	0,98778	0,99702	0,99942
0,26	0,60257	0,77637	0,89617	0,96080	0,98809	0,99711	0,99944
0,27	0,60642	0,77935	0,89796	0,96164	0,98840	0,99720	0,99946
0,28	0,61026	0,78230	0,89973	0,96246	0,98870	0,99728	0,99948
0,29	0,61409	0,78524	0,90147	0,96327	0,98899	0,99736	0,99950
0,30	0,61791	0,78814	0,90320	0,96407	0,98928	0,99744	0,99952
0,31	0,62172	0,79103	0,90490	0,96485	0,98956	0,99752	0,99953
0,32	0,62552	0,79389	0,90658	0,96562	0,98983	0,99760	0,99955
0,33	0,62930	0,79673	0,90824	0,96638	0,99010	0,99767	0,99957
0,34	0,63307	0,79955	0,90988	0,96712	0,99036	0,99774	0,99958
0,35	0,63683	0,80234	0,91149	0,96784	0,99061	0,99781	0,99960

Окончание табл. А1

x	$\Phi(x)$	$\Phi(0,5 + x)$	$\Phi(1,0 + x)$	$\Phi(1,5 + x)$	$\Phi(2,0 + x)$	$\Phi(2,5 + x)$	$\Phi(3,0 + x)$
0,36	0,64058	0,80511	0,91308	0,96856	0,99086	0,99788	0,99961
0,37	0,64431	0,80785	0,91466	0,96926	0,99111	0,99795	0,99962
0,38	0,64803	0,81057	0,91621	0,96995	0,99134	0,99801	0,99964
0,39	0,65173	0,81327	0,91774	0,97062	0,99158	0,99807	0,99965
0,40	0,65542	0,81594	0,91924	0,97128	0,99180	0,99813	0,99966
0,41	0,65910	0,81859	0,92073	0,97193	0,99202	0,99819	0,99968
0,42	0,66276	0,82121	0,92220	0,97257	0,99224	0,99825	0,99969
0,43	0,66640	0,82381	0,92364	0,97320	0,99245	0,99831	0,99970
0,44	0,67003	0,82639	0,92507	0,97381	0,99266	0,99836	0,99971
0,45	0,67364	0,82894	0,92647	0,97441	0,99286	0,99841	0,99972
0,46	0,67724	0,83147	0,92785	0,97500	0,99305	0,99846	0,99973
0,47	0,68082	0,83398	0,92922	0,97558	0,99324	0,99851	0,99974
0,48	0,68439	0,83646	0,93056	0,97615	0,99343	0,99856	0,99975
0,49	0,68793	0,83891	0,93189	0,97670	0,99361	0,99861	0,99976
Примечание: x – значение аргумента от 0,00 до 0,49. Значение аргумента от 0,50 и выше находят как сумму x и величин 0,5; 1,0; 1,5 и т. д. (см. заголовки колонок таблицы)							



Приложение Б

Значения ординат плотности нормированного нормального распределения

Таблица Б1

x	$\varphi(x)$	$\varphi(x+0,01)$	$\varphi(x+0,02)$	$\varphi(x+0,03)$	$\varphi(x+0,04)$	$\varphi(x+0,05)$	$\varphi(x+0,06)$	$\varphi(x+0,07)$	$\varphi(x+0,08)$	$\varphi(x+0,09)$
0,0	0,39894	0,39892	0,39886	0,39876	0,39862	0,39844	0,39822	0,39797	0,39767	0,39733
0,1	0,39695	0,39654	0,39608	0,39559	0,39505	0,39448	0,39387	0,39322	0,39253	0,39181
0,2	0,39104	0,39024	0,38940	0,38853	0,38762	0,38667	0,38568	0,38466	0,38361	0,38251
0,3	0,38139	0,38023	0,37903	0,37780	0,37654	0,37524	0,37391	0,37255	0,37115	0,36973
0,4	0,36827	0,36678	0,36526	0,36371	0,36213	0,36053	0,35889	0,35723	0,35553	0,35381
0,5	0,35207	0,35029	0,34849	0,34667	0,34482	0,34294	0,34105	0,33912	0,33718	0,33521
0,6	0,33322	0,33121	0,32918	0,32713	0,32506	0,32297	0,32086	0,31874	0,31659	0,31443
0,7	0,31225	0,31006	0,30785	0,30563	0,30339	0,30114	0,29887	0,29658	0,29430	0,29200
0,8	0,28960	0,28737	0,28504	0,28269	0,28034	0,27798	0,27562	0,27324	0,27086	0,26848
0,9	0,26609	0,26369	0,26129	0,25888	0,25647	0,25406	0,25164	0,24923	0,24681	0,24439
1,0	0,24197	0,23955	0,23713	0,23471	0,23230	0,22988	0,22747	0,22506	0,22265	0,22025
1,1	0,21785	0,21546	0,21307	0,21069	0,20831	0,20594	0,20357	0,20121	0,19886	0,19652
1,2	0,19419	0,19186	0,18954	0,18724	0,18494	0,18265	0,18037	0,17810	0,17585	0,17360
1,3	0,17137	0,16915	0,16694	0,16474	0,16256	0,16038	0,15822	0,15608	0,15395	0,15183
1,4	0,14973	0,14764	0,14556	0,14350	0,14146	0,13943	0,13742	0,13542	0,13344	0,13147
1,5	0,12952	0,12758	0,12566	0,12376	0,12188	0,12001	0,11816	0,11632	0,11450	0,11270
1,6	0,11092	0,10915	0,10741	0,10567	0,10396	0,10226	0,10059	0,09893	0,09728	0,09566
1,7	0,09405	0,09246	0,09089	0,08933	0,08780	0,08628	0,08478	0,08329	0,08183	0,08038

Окончание табл. Б1

x	$\varphi(x)$	$\varphi(x+0,01)$	$\varphi(x+0,02)$	$\varphi(x+0,03)$	$\varphi(x+0,04)$	$\varphi(x+0,05)$	$\varphi(x+0,06)$	$\varphi(x+0,07)$	$\varphi(x+0,08)$	$\varphi(x+0,09)$
1,8	0,07895	0,07754	0,07614	0,07477	0,07341	0,07206	0,07074	0,06943	0,06814	0,06687
1,9	0,06562	0,06438	0,06316	0,06195	0,06077	0,05959	0,05844	0,05730	0,05618	0,05508
2,0	0,05399	0,05292	0,05186	0,05082	0,04980	0,04879	0,04780	0,04682	0,04586	0,04491
2,1	0,04398	0,04307	0,04217	0,04128	0,04041	0,03955	0,03871	0,03788	0,03706	0,03626
2,2	0,03547	0,03470	0,03394	0,03319	0,03246	0,03174	0,03103	0,03034	0,02965	0,02898
2,3	0,02833	0,02768	0,02705	0,02643	0,02582	0,02522	0,02463	0,02406	0,02349	0,02294
2,4	0,02239	0,02186	0,02134	0,02083	0,02033	0,01984	0,01936	0,01888	0,01842	0,01797
2,5	0,01753	0,01709	0,01667	0,01625	0,01585	0,01545	0,01506	0,01468	0,01431	0,01394
2,6	0,01358	0,01323	0,01289	0,01256	0,01223	0,01191	0,00160	0,01130	0,01100	0,01071
2,7	0,01042	0,01014	0,00987	0,00961	0,00935	0,00909	0,00885	0,00861	0,00837	0,00814
2,8	0,00792	0,00770	0,00748	0,00727	0,00707	0,00687	0,00668	0,00649	0,00631	0,00613
2,9	0,00595	0,00578	0,00562	0,00545	0,00530	0,00514	0,00499	0,00485	0,00470	0,00457

Приложение В

Процентные точки F -распределения при $\alpha = 0,05$ ($F_{0,05; \nu_1; \nu_2}$)

Таблица В1

Степени свободы знаменателя ν_2	Степени свободы числителя ν_1																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161,4	18,51	10,13	7,71	6,61	5,99													
2	199,5	19,00	9,55	6,94	5,79	5,14													
3	215,7	19,16	9,28	6,59	5,41	4,76													
4	224,6	19,35	9,12	6,39	5,19	4,53													
5	230,2	19,30	9,01	6,26	5,05	4,39													
6	234,0	19,33	8,94	6,16	4,95	4,28													
7	236,8	19,35	8,89	6,09	4,88	4,21													
8	238,9	19,37	8,85	6,04	4,82	4,15													
9	240,5	19,38	8,81	6,00	4,77	4,10													
10	241,9	19,40	8,79	5,96	4,74	4,06													
12	243,9	19,41	8,74	5,91	4,68	4,00													
15	245,9	19,43	8,70	5,86	4,62	3,94													
20	248,0	19,45	8,66	5,80	4,56	3,87													
24	249,1	18,45	8,64	5,77	4,53	3,84													
30	250,1	19,46	8,62	5,75	4,50	3,81													
40	251,1	19,47	8,59	5,72	4,46	3,77													
60	252,2	19,48	8,57	5,69	4,43	3,74													
120	253,3	19,49	8,55	5,66	4,40	3,70													
∞	254,3	19,50	8,53	5,63	4,36	3,67													

Продолжение табл. В1

v ₂	Степени свободы числителя v ₁																		
	8	120	60	40	30	24	20	15	12	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
7	3,23	3,27	3,30	3,34	3,38	3,41	3,44	3,51	3,57	3,64	3,68	3,73	3,79	3,87	3,97	4,12	4,35	4,74	5,59
8	2,93	2,97	3,01	3,04	3,08	3,12	3,15	3,22	3,28	3,35	3,39	3,44	3,50	3,58	3,69	3,84	4,07	4,46	5,32
6	2,71	2,75	2,79	2,83	2,86	2,90	2,94	3,01	3,07	3,14	3,18	3,23	3,29	3,37	3,48	3,63	3,86	4,26	5,12
10	2,54	2,58	2,62	2,66	2,70	2,74	2,77	2,85	2,91	2,98	3,02	3,07	3,14	3,22	3,33	3,48	3,71	4,10	4,96
11	2,40	2,45	2,49	2,53	2,57	2,61	2,65	2,72	2,79	2,85	2,90	2,95	3,01	3,09	3,20	3,36	3,59	3,98	4,84
12	2,30	2,34	2,38	2,43	2,47	2,51	2,54	2,62	2,69	2,75	2,80	2,85	2,91	3,00	3,11	3,26	3,49	3,89	4,75
13	2,21	2,25	2,30	2,34	2,38	2,42	2,46	2,53	2,60	2,67	2,71	2,77	2,83	2,92	3,03	3,18	3,41	3,81	4,67
14	2,13	2,18	2,22	2,27	2,31	2,35	2,39	2,46	2,53	2,60	2,65	2,70	2,76	2,85	2,96	3,11	3,34	3,74	4,60

Продолжение табл. В1

v ₂	Степени свободы числителя v ₁																		
	8	120	60	40	30	24	20	15	12	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
15	2,07	2,11	2,16	2,20	2,25	2,29	2,33	2,40	2,48	2,54	2,59	2,64	2,71	2,79	2,90	3,06	3,29	3,68	4,54
16	2,01	2,06	2,11	2,15	2,19	2,24	2,28	2,35	2,42	2,49	2,54	2,59	2,66	2,74	2,85	3,01	3,24	3,63	4,49
17	1,96	2,01	2,06	2,10	2,15	2,19	2,23	2,31	2,38	2,45	2,49	2,55	2,61	2,70	2,81	2,96	3,20	3,59	4,45
18	1,92	1,97	2,02	2,06	2,11	2,15	2,19	2,27	2,34	2,41	2,46	2,51	2,58	2,66	2,77	2,93	3,16	3,55	4,41
19	1,88	1,93	1,98	2,03	2,07	2,11	2,16	2,23	2,31	2,38	2,42	2,48	2,54	2,63	2,74	2,90	3,13	3,52	4,38
20	1,84	1,90	1,95	1,99	2,04	2,08	2,12	2,20	2,28	2,35	2,39	2,45	2,51	2,60	2,71	2,87	3,10	3,49	4,35
21	1,81	1,87	1,92	1,96	2,01	2,05	2,10	2,18	2,25	2,32	2,37	2,42	2,49	2,57	2,68	2,84	3,07	3,47	4,32

Продолжение табл. В1

ν_2	Степени свободы числителя ν_1																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	8
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,82	2,51	2,42	2,38	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	3,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62

Окончание табл. В1

ν_2	Степени свободы числителя ν_1																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	8
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,49	1,43	1,35	1,25
8	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

Процентные точки t -распределения

Приложение Г

Таблица Г1

v	α										
	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,125	0,05	0,025	0,0125	0,005	0,0025
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	2,414	6,314	12,71	25,45	63,66	127,3
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,817	1,604	2,920	4,303	6,205	9,925	14,09
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	1,423	2,353	3,183	4,177	5,841	7,453
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	1,344	2,132	2,776	3,495	4,604	5,598
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	1,301	2,015	2,571	3,163	4,032	4,773
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	1,273	1,943	2,447	2,969	3,707	4,317
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	1,254	1,895	2,365	2,841	3,500	4,029
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	1,240	1,860	2,306	2,752	3,355	3,833
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	1,230	1,833	2,262	2,685	3,250	3,690
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	1,221	1,813	2,228	2,634	3,169	3,581
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	1,215	1,796	2,201	2,593	3,106	3,500
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	1,209	1,782	2,179	2,560	3,055	3,428
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	1,204	1,771	2,160	2,533	3,012	3,373
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	1,200	1,761	2,145	2,510	2,977	3,326
15	0,128	0,258	0,392	0,536	0,691	1,197	1,753	2,132	2,490	2,947	3,286
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	1,185	1,725	2,086	2,423	2,845	3,153
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	1,178	1,708	2,060	2,385	2,787	3,078
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	1,173	1,697	2,042	2,360	2,750	3,030
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	1,167	1,684	2,021	2,329	2,705	2,971
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	1,162	1,671	2,000	2,299	2,660	2,915
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	1,156	1,658	1,980	2,270	2,617	2,860
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	1,150	1,645	1,960	2,241	2,576	2,807

Приложение Д

Параметры распределения Вейбулла

Таблица Д1

Параметр формы m	$\frac{1}{m}$	b_m	c_m	Коэффициент вариации $v = c_m / b_m$
0,400	2,5	3,32	10,4	3,14
0,417	2,4	2,98	8,74	2,93
0,435	2,3	2,68	7,38	2,75
0,455	2,2	2,42	6,22	2,57
0,476	2,1	2,20	5,27	2,40
0,500	2,0	2,00	4,47	2,24
0,526	1,9	1,83	3,81	2,08
0,556	1,8	1,68	3,26	1,94
0,588	1,7	1,54	2,78	1,80
0,625	1,6	1,43	2,39	1,67
0,667	1,5	1,33	2,06	1,55
0,714	1,4	1,24	1,78	1,43
0,769	1,3	1,17	1,54	1,32
0,833	1,2	1,10	1,33	1,21
0,909	1,1	1,05	1,15	1,10
1,0	1,0	1,00	1,00	1,00
1,1	0,909	0,965	0,878	0,910
1,2	0,833	0,941	0,787	0,837
1,3	0,769	0,924	0,716	0,775
1,4	0,714	0,911	0,659	0,723
1,5	0,667	0,903	0,615	0,681
1,6	0,625	0,897	0,574	0,640
1,7	0,588	0,892	0,540	0,605
1,8	0,556	0,889	0,512	0,575
1,9	0,526	0,887	0,485	0,547
2,0	0,500	0,886	0,463	0,523
2,1	0,476	0,886	0,439	0,496
2,2	0,455	0,886	0,425	0,480
2,3	0,435	0,886	0,409	0,461
2,4	0,417	0,887	0,394	0,444
2,5	0,400	0,887	0,380	0,428

Приложение Е

Критические точки распределения χ^2

Таблица Е1

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0



978980002267

**Марина Васильевна Бураковская
Павел Евгеньевич Бураковский**

**ОСНОВЫ
НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ**

Учебное пособие

для студентов по направлениям подготовки
23.03.01 «Технология транспортных процессов»,
23.03.03 «Эксплуатация
транспортно-технологических
машин и комплексов»
всех форм обучения

*Ведущий редактор Н.В. Желтухина
Младший редактор Г.В. Деркач*

*Компьютерное редактирование
О.В. Савина*

*Подписано в печать 13.08.2020 г.
Усл. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 6,3.*

Лицензия № 021350 от 28.06.99.

Печать офсетная.

Формат 60 x 90 1/16.

*Заказ № 1587. Тираж 65 экз.
1-й зап. 45*

Доступ к архиву публикации и условия доступа к нему:
<http://lib.bgarf.ru/>

БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»

**Издательство БГАРФ,
член Издательско-полиграфической ассоциации высших учебных заведений
236029, Калининград, ул. Молодежная, 6.**

БГАРФ