Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

С. Н. Мухина

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины
для студентов специальности
10.05.03 – Информационная безопасность автоматизированных систем

Калининград
Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ»
2023

Рецензент:
кандидат физико-математических наук, исполняющий обязанности заведующего кафедрой прикладной математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет»
Алексей Иванович Руденко

Мухина, С. Н.

Математический анализ : учебно-методическое пособие по изучению дисциплины для студентов специальности 10.05.03 – Информационная безопасность автоматизированных систем / С. Н. Мухина. – Калининград : Изд-во ФГБОУ ВО «КГТУ», 2023. – 32 с.

Учебно-методическое пособие является руководством по изучению дисциплины «Математический анализ» для студентов специальности 10.05.03 – Информационная безопасность автоматизированных систем, специализации «Безопасность открытых информационных систем». Содержит характеристику дисциплины (цель и планируемые результаты изучения дисциплины, место дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы), тематический план с описанием для каждой темы форм проведения занятия, вопросов для изучения, методических материалов к занятию.

Табл. 2, список лит. – 4 наименования

Учебно-методическое пособие рассмотрено и одобрено в качестве локального электронного методического материала на заседании кафедры прикладной математики и информационных технологий Института цифровых технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» 22.02.2023, протокол № 2.

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины рекомендовано к использованию в учебном процессе в качестве локального электронного методического материала методической комиссией ИЦТ 17.03.2023, протокол № 2.

Оглавление

Введение

Учебно-методическое пособие по учебной дисциплине «Математический анализ» представляет комплекс систематизированных учебных методических материалов и предназначено для научно-методического обеспечения профессиональной подготовки студентов специальности 10.05.03 – Информационная безопасность автоматизированных систем, по специализации «Безопасность открытых информационных систем», изучающих дисциплину в первом и во втором семестрах.

Цель создания пособия – обеспечить качественное методическое оснащение учебного процесса изучения дисциплины. Учебно-методическое пособие способствует успешному осуществлению учебной деятельности, эффективному усвоению учебного материала, позволяет организовать систему управления самостоятельной работой студентов, мотивирует к более глубокому изучению алгебры и геометрии.

Цель освоения дисциплины: изложить классические основы математического анализа и методы решения задач в указанной области, подготовить студентов к чтению математической и прикладной научной литературы, где широко применяется язык математического анализа, выработать у студентов умение использовать методы математического анализа в других естественнонаучных дисциплинах, будущей исследовательской деятельности; овладеть современным математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях.

Задачами преподавания дисциплины, отражающимися в ее содержании, являются: развитие интеллектуальных и творческих способностей, познавательных процессов; формирование элементов соответствующих компетенций; формирование у студента личностного знания о роли математики как части общечеловеческой культуры, как универсального языка науки.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные понятия теории пределов и непрерывности функций одной и нескольких действительных переменных, методы исследования числовых и функциональных рядов, методы дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких действительных переменных, типы обыкновенных дифференциальных уравнений и методы их решения, типовые модели и методы математического анализа для решения стандартных прикладных задач.

Знать: основные элементарные функции, их свойства, графики; основные положения теории пределов функций; основные теоремы дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких переменных; знать стандартные алгоритмы нахождения решения типовых дифференциальных уравнений; основные положения теории рядов, основные понятия курса высшей математики технического вуза: предел последовательности и функции; производная и частные производные, дифференциал функции одной и нескольких переменных; аппроксимация функций методом наименьших квадратов; интеграл Римана от функции одной переменной, несобственные интегралы и кратные интегралы; обыкновенные дифференциальные уравнения; числовой ряд, степенной ряд.

Уметь: определять возможности применения методов математического анализа; решать основные задачи теории пределов функций, дифференцирования, интегрирования и разложения функций в ряды; использовать аппарат дифференциальных уравнений для решения физических и геометрических задач, строить графики функций в декартовой и полярной системах координат, вычислять пределы последовательностей и функций, сравнивать бесконечно малые и бесконечно большие функции; дифференцировать функции одной и нескольких переменных, заданные явно, параметрически и неявно; проводить полное исследование функций с использованием методов дифференциального исчисления; вычислять неопределенные и определенные интегралы (в том числе несобственные) с помощью основных методов интегрирования и таблиц, определять сходимость несобственных интегралов, оценивать интегралы, вычислять двойные, тройные и криволинейные интегралы; решать основные задачи на разложение функций в ряды; определять возможности применения теоретических положений и методов математических дисциплин для постановки и решения конкретных прикладных задач.

Владеть: навыками использования стандартных методов и моделей математического анализа и их применения к решению прикладных задач; навыками работы с учебной и научной литературой; навыками работы с компьютерными математическими прикладными пакетами (Mathcad); использовать интегральное исчисление при решении задач геометрии и физики; находить общие решения и решения задач Коши и некоторых краевых задач для основных классов обыкновенных дифференциальных уравнений первого и высших порядков, решать простейшие системы обыкновенных дифференциальных уравнений; определять сходимость числовых и функциональных рядов, представлять функции рядами Тейлора; переводить информацию с языка конкретной задачи на язык математических символов и строить математические модели простейших систем и процессов в естествознании и технике.

Место дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы

Дисциплина «Математический анализ» относится к модулю «Математические науки» основной профессиональной образовательной программы высшего образования по специальности 10.05.03 – Информационная безопасность автоматизированных систем специализации Безопасность открытых информационных систем.

При изучении дисциплины используются знания, умения и навыки довузовской подготовки по математике. Выпускник школы должен владеть системой знаний, умений и навыков по элементарной математике, основам анализа и геометрии в объеме средней школы (уровень знаний не менее 60 %).

Дисциплина является базой при изучении дисциплин математического и естественнонаучного модуля, инженерно-технического модуля.

Основными видами аудиторных учебных занятий по дисциплине являются лекции и практические занятия.

Формирование знаний, обучающихся обеспечивается проведением лекционных занятий.

Изучение разделов тематического плана сопровождается практическими занятиями, в ходе которых происходит закрепление теоретических знаний, формирование и совершенствование умений, навыков и компетенций.

Контроль знаний в ходе изучения дисциплины осуществляется в виде текущего контроля, а также промежуточной аттестации в форме дифференцированного зачета в первом учебном семестре и экзамена во втором учебном семестре в соответствии с рабочим планом.

1 Тематический план

1.1 Тематический план для студентов очной формы обучения

Таблица 1 – Тематический план первого семестра

№ п/п	Раздел (модуль) дисциплины	Контактная работа с преподавателем					СРС	Подготовка и аттестация в период сессии
		ЛК	ЛР	ПР	РЭ	КА		
1	Ведение в математический анализ	8		5			10	
2	Дифференциальное исчисление функции одной переменной	10		11	0,5		20	
3	Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных	6		6	0,5		15	
4	Неопределенный интеграл	6		8	0,5		18	
5	Определенный интеграл. Несобственные интегралы	4		4	0,5		10,85	
ИТОГО:		**34**		**34**	**2**	**0,15**	**73,85**	**-**
Всего за семестр								**144**

Таблица 2 – Тематический план второго семестра

№ п/п	Раздел (модуль) дисциплины	Контактная работа с преподавателем					СРС	Подготовка и аттестация в период сессии
		ЛК	ЛР	ПР	РЭ	КА		
1	Дифференциальные уравнения	14		16	0,5	1	20	
2	Кратные интегралы	8		6	0,5		16	
3	Числовые и функциональные ряды	8		6	0,5	1	20	
4	Элементы теории поля	4		6	0,5	0,25	18	
ИТОГО:		**34**		**34**	**2**	**2,25**	**74**	**33,75**
Всего за семестр								**180**

1.2 Тематический план для студентов заочной формы обучения

Заочная форма обучения не предусмотрена.

2 Содержание и методические указания по изучению дисциплины

Структура дисциплины представлена девятью тематическими разделами.

2.1 Раздел 1. Введение в математический анализ

Перечень изучаемых вопросов

1. Переменная величина. Функция, основные понятия (аргумент, значение функции, область определения, множество значений, нули функции, возрастание, убывание, четность, нечетность, периодичность). Обратная функция. Способы задания функции.
2. Числовая последовательность, способы задания; ограниченная, монотонная последовательности. Понятие предела последовательности, его свойства.
3. Предел функции в точке: определения по Гейне и по Коши, геометрический смысл.
4. Односторонние пределы функции в точке.
5. Бесконечно большая функция и бесконечно малая функция, свойства и связь.
6. Основные теоремы о пределах.
7. Первый и второй замечательные пределы.
8. Вычисление пределов: виды неопределенностей и методы раскрытия основных неопределенностей.
9. Эквивалентные бесконечно малые функции.
10. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация.

Методические указания

При изучении раздела 1 и всех последующих разделов дисциплины «Математический анализ» обязательно используются знания, умения и навыки довузовской подготовки по математике. А именно, умение проводить алгебраические преобразования, решать уравнения и неравенства, знание основных тригонометрических формул, умение проводить тригонометрические преобразования и решать тригонометрические уравнения и неравенства, понимание функции, графика функции и основных ее свойств, знание графиков и свойств основных элементарных функций. Перед началом изучения данного раздела повторите понятие модуля, его свойства и решение неравенств с модулем.

В математических предложениях (формулировках определений, теорем и т. д.) часто повторяются отдельные слова и целые выражения. Поэтому при их записи удобно использовать логические символы. Запомните наиболее простые и часто употребляемые логические символы (кванторы): $\exists$ – «существует», $\nexists$ – не существует, $\forall$ – «любой».

Понятие функции является одним из основных математических понятий, при помощи которых моделируются многие естественные процессы и явления.

Важнейшим является понятие предела функции, на нем основаны понятия непрерывности функции, производной, интеграла, сходимости ряда и т. д.

Особое внимание уделите теме «Числовая последовательность. Предел последовательности». Эта тема является основой для понимания и изучения темы данной дисциплины «Предел и непрерывность функции».

Самостоятельная работа студента при изучении раздела 1 включает: освоение теоретического учебного материала, подготовку к выполнению практических заданий, выполнение домашних заданий.

Изучение темы предел и непрерывность целесообразно начать с понятия окрестности точки. Затем перейдите к определению предела функции в точке. Вводится два эквивалентных между собой определения предела функции в точке: 1) определение «на языке последовательностей» или по Гейне; 2) определение «на языке $\varepsilon - \delta$» или по Коши.

Разберите геометрический смысл предела функции в точке. Перейдите к понятию односторонних пределов, когда x стремится к x_0, оставаясь меньше (больше), чем x_0. Затем перейдите к понятию предела функции на бесконечности.

При исследовании поведения функций и при вычислении их пределов огромную роль играют понятия бесконечно большой функции и бесконечно малой функции, их свойства и связь друг с другом. Выясните как связаны функция, ее предел и бесконечно малая функция. Изучите основные теоремы о пределах, которые облегчают их вычисление, а также первый и второй замечательные пределы. При подготовке к практическим занятиям выясните методы раскрытия основных видов неопределенностей, возникающих при вычислении пределов.

Изучите понятие непрерывности функции, точек разрыва и основные теоремы о непрерывных функциях.

Контрольные вопросы

1. Из каких чисел состоят множества натуральных, целых, рациональных, иррациональных и действительных чисел? Как эти множества связаны между собой?
2. Что такое функция? Какие способы задания функции вы знаете?
3. Что такое числовая последовательность?
4. Сформулируйте определения ограниченной, возрастающей, убывающей последовательности.
5. Что такое бесконечно большая, бесконечно малая последовательности?
6. Сформулируйте определение предела последовательности, дайте геометрическое истолкование. Что такое сходящаяся последовательность?
7. Перечислите свойства пределов.
8. Сформулируйте определение предела функции в точке (по Гейне и по Коши), дайте геометрическую интерпретацию.
9. Что такое односторонние пределы?
10. Сформулируйте определение предела функции на бесконечности.
11. Что такое ограниченная, бесконечно большая, бесконечно малая функции?
12. Перечислите основные свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.
13. Первый и второй замечательные пределы.
14. Что такое эквивалентные бесконечно малые функции? Запишите важнейшие эквивалентности, используемые при вычислении пределов.
15. Сформулируйте понятие непрерывной функции и основные теоремы о непрерывных функциях.
16. Запишите формулы приращения аргумента и приращения функции.
17. Дайте определение точек разрыва первого и второго рода.

Рекомендуемая литература по разделу

В предлагаемой литературе [1, 2, 3] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

2.2 Раздел 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Перечень изучаемых вопросов

1. Производная функции одной переменной: понятие, геометрический и физический смысл. Уравнения касательной и нормали к графику функции.
2. Правила дифференцирования.
3. Производная сложной функции.
4. Таблица производных основных элементарных функций.
5. Связь дифференцируемости и непрерывности функции.
6. Дифференцирование обратных, неявных и параметрически заданных функций.
7. Дифференциал: определение, свойства, геометрический смысл.
8. Правило Лопиталя (раскрытие неопределенности вида 0/0).
9. Правило Лопиталя (раскрытие неопределенности вида ∞/∞).
10. Монотонность функции на данном промежутке.
11. Экстремум функции.
12. Необходимое условие экстремума дифференцируемых функций.
13. Достаточные условия экстремума.
14. Наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке.
15. Выпуклость и вогнутость графика функции на заданном промежутке; точка перегиба.
16. Исследование функции на экстремум с помощью второй производной.
17. Асимптоты графика функции.
18. Общий план исследования функции и построения графика.

Методические указания

Понятие производной является одним из фундаментальных понятий математического анализа. Производная широко используется при решении целого ряда задач математики, физики, экономики, других наук, в особенности при изучении скорости изменения функции, скорости протекания различных процессов. Так, например, скорость v прямолинейного движения есть производная пути s по времени t; скорость v химической реакции есть производная количества вещества m по времени t; скорость роста популяции есть производная размера популяции p по времени t; сила переменного тока I есть производная количества электричества q по времени t и т.д.

При решении перечисленных задач возникала необходимость рассмотрения предела отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Такой предел и был назван производной данной функции в данной точке.

Производная функции и некоторые ее приложения известны по школьному курсу математики. Теперь, ввиду огромной важности производной при изучении различных дисциплин, необходимо повторить и углубить имеющиеся знания, а также дополнить их новыми. Необходимо научиться вычислять производные сложной функции, обратной, неявно заданной функции, параметрической функции, применять логарифмическое дифференцирование, находить производные высших порядков (в том числе n-ю производную).

Особое место в данной теме занимает понятие дифференциала функции, тесно связанное с понятием производной, а также его применение при приближенных вычислениях значений функции.

Также необходимо научиться применять производную для вычисления пределов функций (правила Лопиталя) и для исследования поведения функций (монотонность, экстремумы, выпуклость, точки перегиба, наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке).

При изучении раздела 2 обязательно используются знания, умения и навыки, полученные при изучении предыдущего раздела дисциплины и довузовской подготовке по математике.

Самостоятельная работа студента при изучении раздела 2 включает: освоение теоретического учебного материала, подготовку к выполнению практических заданий, выполнение домашних заданий.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение производной функции. Какие задачи приводят к понятию производной? Что такое дифференцирование?

2. В чем состоит геометрический и физический смысл производной? Напишите уравнения касательной и нормали к кривой в заданной точке.

3. Напишите по памяти правила дифференцирования и таблицу производных.

4. По какому правилу найти производную сложной и обратной функции?

5. Сформулируйте правило дифференцирования неявных и параметрически заданных функций.

6. Что такое логарифмическое дифференцирование?

7. Что такое производные высших порядков? Сформулируйте механический смысл второй производной.

8. Дайте понятие дифференциала. Что такое главная часть приращения функции? В чем состоит геометрический смысл дифференциала функции?

9. Напишите правила вычисления дифференциала. В чем состоит инвариантность формы первого дифференциала?

10. Как применяется дифференциал к приближенным вычислениям? Сформулируйте понятие дифференциалов высших порядков.

11. Сформулируйте теоремы о дифференцируемых функциях.

12. В чем состоят правила Лопиталя раскрытия неопределенностей?

13. Сформулируйте определение возрастающей (убывающей) функции. Как определить промежутки возрастания (убывания) функции?

14. Что такое экстремум функции? Сформулируйте необходимое, достаточное условия экстремума. Сформулируйте правило нахождения экстремумов функции.

15. Что такое наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке? Сформулируйте правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

16. Что такое точки перегиба? Сформулируйте правило нахождения промежутков выпуклости и точек перегиба функции.

17. Дайте понятие асимптоты графика функции. Как найти асимптоты?

Рекомендуемая литература по разделу

В предлагаемой литературе [1, 2, 3] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

2.3 Раздел 3. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

Перечень изучаемых вопросов

1. Функция нескольких переменных: понятие, область определения, множество значений, линии и поверхности уровня.
2. Предел и непрерывность функции двух переменных.
3. Частные и полное приращения функции двух переменных. Частные производные функции двух переменных, геометрический смысл.
4. Частные и полный дифференциалы. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях.
5. Экстремум функции двух переменных.
6. Наибольшее и наименьшее значения функции в данной области.
7. Метод наименьших квадратов.

Методические указания

До сих пор мы рассматривали функции одной переменной. Но это понятие на охватывает все зависимости, существующие в природе. Даже в самых простых задачах встречаются величины, значения которых определяются совокупностью значений нескольких величин. Так, например, температура тела T в данный момент времени t может меняться от точки к точке. Каждая точка тела определяется тремя координатами x, y, z, поэтому температура тела зависит от трех переменных x, y, z. Если еще учесть, что температура тела T изменяется в разные моменты времени t, то ее значения будут определяться уже четырьмя переменными, то есть $T = T(t, x, y, z)$.

Другой пример. Площадь прямоугольника со сторонами x и y определяется значениями двух переменных x, y. Объем прямоугольного параллелепипеда с измерениями x, y, z определяется значениями переменных x, y и z. Таких примеров можно привести много.

Данный раздел посвящен изучению такого рода зависимостей. Здесь будет введено понятие функции нескольких переменных и дан аппарат для изучения поведения таких функций: линии и поверхности уровня, предел и непрерывность функции двух переменных, частные и полное приращения функции двух переменных, частные производные функции двух переменных, частные и полный дифференциалы, экстремум функции двух переменных, наибольшее и наименьшее значения функции в данной области.

При изучении данного раздела обязательно используются знания, умения и навыки, приобретенные при изучении предыдущих разделов, а именно, предел, непрерывность, производная функции одной действительной переменной.

Самостоятельная работа студента при изучении раздела 3 включает: освоение теоретического учебного материала, подготовку к выполнению практических заданий, выполнение домашних заданий.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определения: функция двух переменных, область определения функции двух переменных, область изменения функции двух переменных, график функции двух переменных.
2. Сформулируйте определения: предел и непрерывность функции двух переменных.
3. Запишите следующие формулы: приращение аргументов x, y; полное приращение функции двух переменных; частные приращения функции двух переменных.
4. Что такое частные производные функции двух переменных? В чем состоит их геометрический смысл?
5. Частные производные второго порядка (дайте понятие и запишите формулы).
6. Сформулируйте определения: полный дифференциал, частные дифференциалы функции двух переменных.
7. По какому правилу вычисляется производная сложной и неявной функции двух переменных.
8. Что такое экстремум функции двух переменных? Сформулируйте необходимое условие, достаточное условие.

9. Как определить наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области?

10. Суть метода наименьших квадратов.

Рекомендуемая литература по разделу

В предлагаемой литературе [1, 2, 3] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

2.4 Раздел 4. Неопределенный интеграл

Перечень изучаемых вопросов

1. Первообразная и неопределенный интеграл: понятие, свойства.
2. Таблица неопределенных интегралов.
3. Метод непосредственного интегрирования. Подведение переменной под знак дифференциала.
4. Замена переменной в неопределенном интеграле.
5. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
6. Интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен.
7. Интегрирование дробно-рациональных функций.
8. Интегрирование тригонометрических функций.
9. Интегрирование простейших иррациональных функций.

Методические указания

В данном разделе будет рассматриваться задача, обратная к задаче нахождения производной функции одной действительной переменной.

Задача состоит в следующем: дана функция $f(x)$, являющаяся производной некоторой функции $F(x)$, требуется найти функцию $F(x)$.

К такой математической задаче приводят многие физические, химические и другие задачи. Например, нахождение закона движения точки, если известна скорость прямолинейного движения точки $v = v(t)$. В этом случае искомой функцией $s = s(t)$ будет такая, для которой $s'(t) = v(t)$.

Нахождение функции по ее производной называется интегрированием. Интегрирование – это действие, обратное дифференцированию.

При изучении данного раздела используются знания, умения и навыки, приобретенные при изучении разделов 1–2, а именно, предел и производная функции одной переменной, а также школьные знания по математике.

Изучение данного раздела следует начать с понятия первообразной функции. Затем изучите понятия: неопределенный интеграл, интегрирование. Перейдите к свойствам неопределенного интеграла, которые непосредственно вытекают из его определения.

Так как интегрирование – это действие, обратное дифференцированию, то можно получить таблицу основных интегралов, используя таблицу производных (или дифференциалов). Эти интегралы называются табличными, их следует выучить наизусть.

Все методы вычисления неопределенных интегралов сводятся к указанию приемов, приводящих заданный интеграл к табличному. Поэтому табличные интегралы надо помнить и уметь их узнавать.

Докажите свойства неопределенного интеграла, они также используются при вычислении интегралов.

Изучите, в чем состоят основные методы интегрирования: метод непосредственного интегрирования; подведение переменной под знак дифференциала; метод замены переменной; интегрирование по частям; интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен; интегрирование дробно-рациональных функций; интегрирование тригонометрических функций, интегрирование простейших иррациональных функций.

Отработайте навык вычисления неопределенных интегралов на практике. Это умение будет необходимо вам для изучения следующих разделов «Определенный интеграл» и «Дифференциальные уравнения».

Самостоятельная работа студента при изучении раздела 4 включает: освоение теоретического учебного материала, подготовку к выполнению практических заданий, выполнение домашних заданий.

Контрольные вопросы

1. Что такое первообразная?

2. Сформулируйте определение неопределенного интеграла и перечислите его свойства.

3. Запишите по памяти таблицу основных интегралов.

4. В чем состоит метод занесения переменной под знак дифференциала?

5. В чем состоит метод замены переменной?

6. В чем состоит метод интегрирования по частям в неопределенном интеграле?

7. Как интегрировать рациональные функции (дроби)?

8. Расскажите основные методы интегрирования тригонометрических функций.

9. Какие есть подходы при интегрировании иррациональных функций?

Рекомендуемая литература по разделу

В предлагаемой литературе [1, 2, 3] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

2.5 Раздел 5. Определенный интеграл. Несобственные интегралы

Перечень изучаемых вопросов

1. Определенный интеграл: определение, геометрический смысл.
2. Формула Ньютона – Лейбница.
3. Свойства определенного интеграла.
4. Замена переменной в определенном интеграле.
5. Интегрирование по частям в определенном интеграле.
6. Вычисление площадей плоских фигур.
7. Вычисление длин дуг плоских кривых.
8. Вычисление объемов тел.
9. Вычисление площадей поверхностей вращения.
10. Физические приложения определенного интеграла.
11. Несобственный интеграл 1-го рода: определение, признаки сходимости.
12. Несобственный интеграл 2-го рода: определение, признаки сходимости.

Методические указания

При решении многих задач геометрии, физики и других дисциплин приходится суммировать бесконечно большое число бесконечно малых слагаемых, а затем вычислять предел этой суммы. Это приводит к одному из центральных понятий математического анализа, а именно, к понятию определенного интеграла. Сюда относятся задачи вычисления площадей, ограниченных кривыми, длин дуг, объемов тел; работы, скорости, пути, массы, моментов инерции и т. д.

Все эти задачи решаются по определенной схеме. Пусть требуется найти значение какой-либо геометрической или физической величины A (из перечисленных выше). Эта величина является непрерывной и аддитивной функцией $A = f(x)$ переменной $x \in [a; b]$. Вид этой функции определяется из условия решаемой задачи.

Точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ разбиваем отрезок $[a; b]$ на n частей. При этом интересующая нас величина A разобьется на n «элементарных слагаемых» ΔA_i $(i = 1, \dots, n)$: $A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \dots + \Delta A_n$.

Затем каждое «элементарное слагаемое» представляем в виде произведения значения функции $f(x)$ в произвольной точке соответствующего частичного отрезка на его длину: $\Delta A_i \approx f(c_i) \cdot \Delta x_i$. Получаем приближенное значение величины A в виде суммы: $A \approx f(c_1) \cdot \Delta x_1 + \dots + f(c_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$.

Искомая величина A будет равна пределу этой суммы $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i$.

Указанный метод основан на представлении искомой величины A в виде суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых. Если полученный предел существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек c_i в них, то его называют определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, то есть

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

При изучении данного раздела обязательно используются знания, умения и навыки, приобретенные при изучении предыдущих разделов, а именно, неопределенный интеграл, предел и производная функции одной переменной.

Изучение раздела 5 целесообразно начать с разбора задач, приводящих к понятию определенного интеграла.

Затем ввести определение определенного интеграла, теорему о существовании определенного интеграла, геометрический и физический смысл определенного интеграла. Доказать формулу Ньютона – Лейбница, она дает удобный способ вычисления определенных интегралов. И рассмотреть основные свойства определенного интеграла.

Далее необходимо на практике выработать навык вычисления определенных интегралов, применяя: формулу Ньютона – Лейбница, метод замены переменной в определенном интеграле, метод интегрирования по частям в определенном интеграле.

Обратите внимание на интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах.

Изучите понятия несобственных интегралов – интеграла с бесконечным промежутком интегрирования от непрерывной функции и интеграла с конечным промежутком интегрирования от функции, имеющей на нем бесконечный разрыв.

Решите задачи на геометрические приложения определенного интеграла: вычисление площадей плоских фигур, вычисление объемов тел, вычисление длин дуг, вычисление площадей поверхностей вращения.

Самостоятельная работа студентам при изучении раздела 5 включает: освоение теоретического учебного материала, подготовку к выполнению практических заданий, выполнение домашних заданий.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте понятие определенного интеграла, как предела интегральной суммы. Что такое интегральная сумма? Сформулируйте условие существования определенного интеграла.

2. В чем состоит геометрический и физический смысл определенного интеграла?

3. Запишите формулу Формула Ньютона – Лейбница.

4. Перечислите основные свойства определенного интеграла.

5. Как вычислить определенный интеграл?

6. Как выполнить замену переменной в определенном интеграле?

7. Как выполнить интегрирование по частям в определенном интеграле?

8. Что такое несобственный интеграл первого рода? Дайте геометрическую интерпретацию.

9. Что такое несобственный интеграл второго рода? Дайте геометрическую интерпретацию.

10. Как вычислить площадь плоской фигуры с помощью определенного интеграла (в декартовой системе координат и для случая параметрического задания кривой)?

11. Как вычислить длину дуги кривой (в декартовой системе координат и для случая параметрического задания кривой)?

12. Как вычислить объем тела по известной площади поперечного сечения, объем тела вращения?

13. Как вычисление площадь поверхности вращения?

Рекомендуемая литература по разделу

В предлагаемой литературе [1, 2, 3] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

2.6 Раздел 6. Дифференциальные уравнения

Перечень изучаемых вопросов

1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка: понятие, интегральные кривые, общее и частное решения, начальное условие, задача Коши.

2. Условия существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка.

3. Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными.

4. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка.

5. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Метод Бернулли.

6. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Метод Лагранжа.

7. Дифференциальные уравнения Бернулли.

8. Дифференциальные уравнения высших порядков: основные понятия.

9. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка: основные типы и методы интегрирования.

10. Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Структура общего решения.

11. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

12. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида.

13. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольных постоянных.

Методические указания

Дифференциальное уравнение – это уравнение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию y и ее производные или дифференциалы.

Дифференциальные уравнения обычно возникают, когда зависимость между переменными величинами x и y непосредственно установить не получается, но возможно найти связь между дифференциалами этих переменных.

Например, рассмотрим такую задачу. Найти кривую, проходящую через точку $M_0(0; 1)$ и обладающую тем свойством, что в каждой ее точке угловой коэффициент касательной равен удвоенной абсциссе точки касания.

Для решения этой задачи обозначим искомую функцию $y = f(x)$ и воспользуемся геометрическим смыслом производной, согласно которому производная функции в точке равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в этой точке.

Согласно условию задачи можем записать, что $y' = 2x$. Мы получили дифференциальное уравнение, где неизвестная функция y стоит под знаком производной. Чтобы ее выразить надо проинтегрировать это уравнение: $y = x^2 + C$, где C – произвольная постоянная.

Получили бесконечное множество решений дифференциального уравнения – множество парабол, полученных параллельным сдвигом параболы $y = x^2$ вдоль оси Ox на C единиц. Все эти параболы удовлетворяют условию задачи: угловой коэффициент касательной равен удвоенной абсциссе точки касания.

Выберем одну из них, которая проходит через точку $M_0(0; 1)$. Подставляя координаты точки, найдем C: $1 = 0^2 + C$, $C = 1$.

Таким образом, искомой кривой будет парабола $y = x^2 + 1$.

При рассмотрении данного примера мы сталкивались с основными понятиями теории дифференциальных уравнений: порядок дифференциального уравнения, общее решение, интегральные кривые, начальное условие, частное решение дифференциального уравнения.

После изучения этих понятий укажите их по тексту решения этого примера.

Рассмотрите основные типы дифференциальных уравнений первого и второго порядка (вопросы 3–13) и методы их решения. Выработайте навык их решения на практике.

При изучении данного раздела обязательно используются знания, умения и навыки, приобретенные при изучении предыдущих разделов, а именно, неопределенный интеграл и производная функции одной переменной.

Самостоятельная работа студента при изучении данного раздела включает: освоение теоретического учебного материала, подготовку к выполнению практических заданий, выполнение домашних заданий.

Контрольные вопросы

1. Что такое: дифференциальное уравнение, порядок дифференциального уравнения?

2. Что такое: дифференциальное уравнение 1-го порядка, общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка, интегральные кривые дифференциального уравнения 1-го порядка, частное решение дифференциального уравнения 1-го порядка, начальное условие 1-го порядка. Сформулируйте задачу существования и единственности задачи Коши.

3. Как записывается и как решается уравнение с разделяющимися переменными?

4. Запишите общий вид однородного дифференциального уравнения первого порядка. Каким методом оно решается?

5. Запишите общий вид линейного дифференциального уравнения первого порядка. В чем состоит Метод Бернулли? Запишите уравнение Бернулли.

6. В чем состоит метод вариации произвольной постоянной для решения линейного дифференциального уравнения первого порядка?

7. Запишите общий вид дифференциального уравнения второго порядка. Сформулируйте понятия общего и частного решений дифференциального уравнения второго порядка.

8. Простейшие дифференциальные уравнения второго порядка (случаи понижения порядка), способы решения.

9. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, общее решение.

10. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, частное и общее решение.

Рекомендуемая литература по разделу

В предлагаемой литературе [1, 2, 3] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

2.7 Раздел 7. Кратные интегралы

Перечень изучаемых вопросов

1. Задачи, приводящие к двойным интегралам. Двойной интеграл.
2. Свойства двойного интеграла.
3. Вычисление двойного интеграла в прямоугольных декартовых координатах.
4. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах.
5. Приложения двойного интеграла.
6. Тройной интеграл.
7. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах.
8. Приложения тройного интеграла.

Методические указания

При изучении физики, механики и при решении разнообразных инженерных задач часто возникает необходимость наряду с интегралами от действительной функции одного переменного рассматривать интегралы от функций многих переменных. Эти интегралы приходиться вычислять по двумерным, трехмерным областям.

Подобно тому, как понятие производной функции одной переменной было использовано при изучении дифференциального исчисления функции нескольких переменных, так и при изучении кратных интегралов будем основываться на понятии определенного интеграла как предела интегральной суммы.

Кратный интеграл определяется как предел интегральной суммы.

Свойства кратных интегралов аналогичны свойствам определенного интеграла.

Кратный интеграл – обобщение определенного интеграла на случай функции нескольких переменных. При вычислении кратные интегралы сводятся к повторным – двукратным и трехкратным.

Порядок интегрирования зависит от вида области интегрирования.

При вычислении повторных интегралов вначале рассчитывается внутренний, при этом переменная внешнего интеграла временно фиксируется; затем считают внешний интеграл.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение двойного и тройного интегралов.

2. Укажите геометрический и физический смысл двойного и тройного интегралов.

3. Сформулируйте теоремы о необходимых и достаточных условиях существования кратных интегралов.

4. Перечислите свойства кратных интегралов.

5. Вычисление двойного и тройного интегралов в декартовой системе координат путем сведения к повторным.

6. Теорема о замене переменных в двойном интеграле.

7. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.

8. Вычисление площадей плоских фигур и объемов тел с помощью двойного интеграла.

9. Замена переменных в тройном интеграле. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических и сферических координатах.

Рекомендуемая литература по разделу

В предлагаемой литературе [1, 2, 3] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

2.8 Раздел 8. Числовые и функциональные ряды

Перечень изучаемых вопросов

1. Числовой ряд с положительными членами (определение, частичные суммы ряда, сходящиеся и расходящиеся ряды).

2. Необходимый признак сходимости.

3. Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами: признак сравнения, предельный признак сравнения.

4. Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами: признак Даламбера, радикальный признак Коши.

5. Интегральный признак сходимости числовых рядов с положительными членами.

6. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды: определения; признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда; условная и абсолютная сходимость.

7. Степенные ряды: определение; радиус и интервал сходимости. Теорема Абеля.

8. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций.

9. Применения степенных рядов в приближенных вычислениях значений функций.

10. Применения степенных рядов в приближенных вычислениях определенных интегралов.

Методические указания

При изучении многих вопросов естествознания и техники применяется метод поэтапного исследования объекта, где на каждом этапе исследования уточняются характеристики изучаемого объекта. Одним из математических понятий, при помощи которых моделируются такие ситуации является понятие «суммы» бесконечного числа слагаемых, то есть ряд.

Теория рядов широко используется в теоретических исследованиях различных дисциплин и в приближенных вычислениях. С помощью рядов можно вычислять приближенные значения функций, значения интегралов, решать дифференциальные уравнения и т. д.

При изучении данного раздела используются знания, умения и навыки, приобретенные при изучении предыдущих разделов, а именно, предел и производная функции одной переменной, интегралы.

Ряды с действительными членами можно разделить на две основные группы: числовые ряды и функциональные.

Среди числовых рядов выделяют: ряды с положительными членами и знакопеременные ряды.

Среди функциональных рядов особый интерес представляют степенные ряды и тригонометрические ряды.

Начать изучение данного раздела следует с числовых рядов. Выясните, что такое числовой ряд, частичные суммы ряда, сходящиеся и расходящиеся ряды, сумма ряда. Изучите свойства сходящихся рядов и необходимое условие сходимости ряда. Затем изучите признаки сходимости рядов с положительными членами (вопросы 3–5).

После этого перейдите к изучению знакопеременных рядов, абсолютной и условной сходимости.

Изучив числовые ряды, переходите к изучению функциональных рядов, а именно степенных рядов. Особое внимание уделите определению области сходимости степенного ряда и разложению функций в ряды Тейлора и Маклорена.

Решите задачи на практическое применение рядов для приближенного вычисления значений функций и вычисления определенных интегралов.

Самостоятельная работа студента при изучении данного раздела включает: освоение теоретического учебного материала, подготовку к выполнению практических заданий, выполнение домашних заданий, подготовку к экзамену по дисциплине.

Контрольные вопросы

1. Что такое: числовой ряд, частичные суммы ряда, сходимость ряда?
2. Перечислите основные свойства рядов.

3. Сформулируйте необходимый признак сходимости ряда и следствие из него.

4. Сформулируйте признаки сходимости рядов с положительными членами: признаки сравнения рядов (назовите эталонные ряды), признак Даламбера, радикальный и интегральный признаки Коши.

5. Что такое знакочередующиеся и знакопеременные ряды? Сформулируйте признак Лейбница. Что такое абсолютная и условная сходимость?

6. Сформулируйте основные понятия для функциональных рядов (определение, точка сходимости, область сходимости, сумма, остаток).

7. Что такое степенной ряд? Сформулируйте теорему Абеля. Как определить интервал сходимости степенного ряда? Перечислите основные свойства степенных рядов.

8. Запишите общий вид ряда Тейлора и ряда Маклорена.

9. Запишите разложение в ряд Маклорена основных элементарных функций.

Рекомендуемая литература по разделу

В предлагаемой литературе [1, 2, 3] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

2.9 Раздел 9. Элементы теории поля

Перечень изучаемых вопросов

1. Понятие скалярного поля.
2. Производная по направлению.
3. Градиент скалярного поля и его свойства.
4. Определение векторного поля. Векторные линии.
5. Дивергенция и ротор векторного поля.
6. Дифференциальные операции второго порядка. Операторы Гамильтона и Лапласа.
7. Потенциальное поле и его свойство.
8. Соленоидальное поле и его свойство.
9. Гармоническое поле.

Методические указания

Полем называется *область,* в каждой точке которой *определено значение* некоторой *физической величины*.

Если величина скалярная, то поле называется скалярным, если величина векторная – векторным.

Присмотритесь к пространству, которое нас окружает. Нам может быть в данное время жарко или холодно. Мы – в скалярном поле температур. Но нас окружает и другое скалярное поле – поле атмосферного давления. Другие примеры скалярных и векторных полей: поле глубин моря – скалярное поле; поле линейной, поверхностной или объемной плотности электрического заряда – скалярное поле; поле скоростей текущей жидкости – векторное поле; электромагнитное поле – векторное поле; любое силовое поле – векторное поле и так далее.

Рассмотренные различные примеры полей свидетельствуют о том, что поле является формой существования материи. Поля открывались и познавались человеком на протяжении многих веков. Изучать «теорию поля» все равно, что проникать в обширные области современной науки и техники. Мы будем изучать поля средствами векторного анализа, причем такие поля, которые неизменны во времени.

Важно запомнить, что скалярное поле математически задается скалярной функцией от координат точки поля в области D. Геометрически скалярное поле изображается линиями или поверхностями уровня. Основными характеристиками скалярного поля являются производная по направлению и градиент. Они определяются по аналогии для любых n-мерных скалярных полей. Обе характеристики дифференциальные и позволяют определить скорость изменения поля.

Векторное поле задается вектором как функцией координат точки поля и геометрически изображается векторными линиями. Поток и дивергенция характеризуют наличие в поле источников (стоков) или их отсутствие. Первая – характеризует суммарное действие источников (стоков) в некотором объеме, а вторая в точке поля. Величина потока или дивергенции есть мощность источника (стока).

Скалярные и векторные поля необходимо рассматривать взаимосвязано. Дифференциальные операции I и II порядков – важнейшие характеристики полей. Произвольное векторное поле $\vec{a}$ можно рассматривать в виде суммы двух простейших полей, одно из которых будет потенциальным $-$ $\vec{a}_1$, другое соленоидальным $-$ $\vec{a}_2$, то есть $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = grad\, u + rot\, \vec{b}$. Следовательно, изучение любого векторного поля можно свести к изучению простейших полей.

Контрольные вопросы

1. Какие математические поля вы знаете?
2. Сформулируйте определение скалярного поля. Приведите примеры скалярных полей.
3. Перечислите основные характеристики скалярного поля.
4. Что называют поверхностями уровня скалярного поля? Что характеризуют эти поверхности? Какие линии называют линиями уровня скалярного поля? Приведите примеры линий уровня.

5. Что называется производной по направлению скалярного поля? Как она вычисляется в случае пространственного и плоского скалярного поля?

6. В чем заключается смысл производной по направлению скалярного поля?

7. Сформулируйте определение градиента скалярного поля. Как находится градиент в заданной точке? Как направлен градиент скалярного поля? Как изменяется производная скалярного поля по направлению градиента?

8. Какое поле называется векторным полем? Приведите примеры векторных полей.

9. Какие линии называются векторными линиями? Поясните практический смысл этих линий на конкретных примерах.

10. Сформулируйте определение и смысл дивергенции векторного поля. Запишите формулу для вычисления дивергенции векторного поля. Перечислите свойства дивергенции.

11. Что такое циркуляция векторного поля? В чем заключается смысл циркуляции для поля скоростей текущей жидкости?

12. Что называется ротором векторного поля? Как вычисляется ротор? Перечислите свойства ротора.

13. Какие простейшие векторные поля Вы знаете?

14. Какое поле является потенциальным векторным полем? Что такое потенциал векторного поля? Запишите формулу для нахождения потенциала векторного поля.

15. Какое поле называется соленоидальным векторным полем? Какое векторное поле является гармоническим полем?

Рекомендуемая литература по разделу

В предлагаемой литературе [1, 2, 3] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

3 Требования к аттестации по дисциплине

3.1 Текущая аттестация

В ходе изучения дисциплины студентам предстоит пройти следующие этапы текущей аттестации: выполнить задания по темам практических занятий.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества усвоения студентами учебного материала и стимулирования их учебной работы. Он может осуществляться в ходе всех видов занятий в форме, избранной преподавателем или предусмотренной рабочей программой дисциплины.

Текущий контроль предполагает постоянный контроль преподавателем качества усвоения учебного материала, активизацию учебной деятельности студентов на занятиях, побуждение их к самостоятельной систематической работе. Он необходим обучающимся для самоконтроля на разных этапах обучения. Их результаты учитываются выставлением преподавателем оценок в журнале учета успеваемости и в ходе ежемесячной аттестации.

При текущем контроле успеваемости учитывается: выполнение обучающимся всех работ и заданий, предусмотренных рабочей программой дисциплины, а именно выполнение заданий на практических занятиях; самостоятельную работу обучающихся; посещаемость аудиторных занятий.

Результаты текущего контроля успеваемости оцениваются по пятибалльной шкале:

- оценка **«отлично» (5)** – график самостоятельной работы и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся на 100 % и более (с опережением);
- оценка **«хорошо» (4)** – график самостоятельной работы и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся на 75 % и более;
- оценка **«удовлетворительно» (3)** – график самостоятельной работы и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся на 50 % и более;
- оценка **«неудовлетворительно» (2)** – график самостоятельной работы и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся менее чем на 50 %.

3.2 Условия получения положительной оценки

Промежуточная аттестация по дисциплине проводится в первом семестре в форме зачета с оценкой, во втором семестре – в форме экзамена.

<u>Зачет с оценкой</u>. Оценка «отлично» выставляется в случае, если для задания приведено полное теоретическое обоснование, расчеты выполнены по правильным формулам и алгоритмам и без ошибок, выводы приведены полностью и по существу, студент понимает и может пояснить ход решения и привести экспликацию любой формулы, а также может дать развернутый и полный ответ на любой из контрольных вопросов, отчет оформлен в соответствии с установленными требованиями.

Оценка «хорошо» выставляется в случае, если теоретическое обоснование приведено с пробелами, расчеты выполнены по правильным формулам и алгоритмам, но с некоторыми ошибками, отчет оформлен с некоторыми нарушениями требований, однако выводы приведены полностью и по существу, а студент понимает и может пояснить ход решения и привести экспликацию любой формулы, а также может дать ответ на любой из контрольных вопросов.

Оценка «удовлетворительно» выставляется в случае, если теоретическое обоснование приведено формально и излишне кратко, расчеты выполнены по правильным формулам и алгоритмам, но со множеством арифметических ошибок, отчет оформлен с нарушениями требований, выводы приведены не полностью, ответы на контрольные вопросы вызывают затруднения и (или) излишне лаконичны, однако студент понимает и может пояснить ход решения и привести экспликацию любой формулы, а также может дать ответ на любой из контрольных вопросов.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется в случае, если теоретическое обоснование приведено формально и излишне кратко, или не приведено вовсе, расчеты выполнены с использованием неправильных алгоритмов и формул, отчет оформлен с нарушениями требований, выводы приведены не полностью или не приведены вовсе, студент плохо понимает (или не понимает вовсе) и не может пояснить ход решения, а также не может ответить на контрольные вопросы.

К экзамену допускаются студенты, имеющие по всем текущим контролям положительные оценки.

Экзамен проводится в соответствии с перечнем вопросов к экзамену, размещенному в ЭИОС КГТУ и представленному в приложении 1.

Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса и три задачи. Выбор экзаменационных вопросов для включения в билет осуществляется из принципа равной сложности всех билетов и наибольшего охвата каждым билетом учебного материала.

Подготовка к экзамену ведется по конспекту лекций, учебникам и учебным пособиям, рекомендуемым к изучению в начале курса. В ходе подготовки к экзамену преподаватель проводит консультацию, на которой доводится порядок проведения экзамена и даются ответы на вопросы, вызвавшие затруднения у студентов в процессе подготовки.

Экзамен проводится в день, указанный в расписании занятий.

Студент, прибывший для сдачи экзамена, получает билет на бланке установленной формы и занимает указанное ему место для подготовки. После получения билета в течение 40 минут студент имеет право готовиться к ответу. На ответ по билету отводится до 15 минут.

Готовясь к ответу, обучающийся все доказательства, формулы, структурные схемы, графики и т.д. записывает и изображает на полученном листе в форме удобной для использования при устном ответе экзаменатору.

Ответ обучающегося должен быть четким, конкретным и кратким. После ответа преподаватель задает вопросы, помогающие ему выявить ход мыслей, логику рассуждений и способность применять полученные знания в практической деятельности. Если требуется уточнить оценку или степень знаний обучающегося по тому или иному вопросу, задаются дополнительные вопросы.

Студентам, пользующимся на экзамене материалами, различного рода записями, техническими средствами, не указанными в перечне разрешенных, выставляется оценка «**неудовлетворительно**», о чем докладывается заведующему кафедрой.

Знания, умения и навыки студентов определяются оценками «**отлично**», «**хорошо**», «**удовлетворительно**», «**неудовлетворительно**». Общая оценка объявляется курсанту СРАЗУ после окончания его ответа на билет экзамена.

Положительная оценка («**отлично**», «**хорошо**», «**удовлетворительно**») заносится в ведомость и зачетную книжку по окончании экзамена. Оценка «**неудовлетворительно**» выставляется только в ведомость.

Компетенции в той части, в которой они должны быть сформированы в рамках изучения дисциплины, могут считаться сформированными в случае, если студент получил на экзамене положительную оценку.

Библиографический список

Основная литература

1. Никольский, С. М. Курс математического анализа: учебник для студентов физических и механико-математических специальностей вузов / С. М. Никольский. – 6-е изд., стер. – М.: Физматлит, 2001. – 592 с.

Дополнительная литература

2. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 1: учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко; авт.: А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 7-е изд., испр. – М.: Оникс: Мир и Образование, 2009. – 368 с.

3. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 2: учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко; авт.: А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 7-е изд., испр. – М.: Оникс: Мир и Образование, 2009. – 448 с.

4. Запорожец, Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу: учебное пособие для студентов технических и технологических направлений подготовки и специальностей вузов / Г. И. Запорожец. – 8-е изд., стер. – СПб: Лань, 2014. – 464 с.

Приложение

Тестовые задания

Тестовые задания предназначены для оценки в рамках текущего контроля успеваемости знаний, приобретенных студентами на лекционных и практических занятиях и для измерения соответствующих индикаторов достижения компетенции.

Содержание теста определяется в соответствии с содержанием дисциплины пропорционально учебному времени, отведенному на изучение разделов, перечисленных в рабочей программе модуля. Тестовый вариант содержит 30 задания закрытого типа с возможностью одиночного правильного ответа. Время выполнения теста 70 минут.

Тестовые задания разработаны в программной среде Moodle (ссылка на электронный ресурс:

https://eios.klgtu.ru/course/view.php?id=9542;

https://cloud.mail.ru/public/Ep4h/8GzWA3pxp).

Типовые вопросы
к зачету с оценкой (первый семестр)

1. Понятие функции. Основные свойства функций.
2. Основные элементарные функции их графики и свойства.
3. Понятие числовой последовательности, свойства. Предел бесконечной числовой последовательности (определение и его геометрический смысл). Теорема Вейерштрасса. Число e.
4. Определение предела функции и его геометрическое истолкование. Связь функции с ее пределом с бесконечно малой величиной. Арифметические операции над пределами. Понятие неопределенности. Способы раскрытия неопределенностей.
5. Первый замечательный предел, его следствия.
6. Второй замечательный предел, его следствия.
7. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства. Связь бесконечно малых и бесконечно больших функций.
8. Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые, их использование при нахождении пределов.
9. Понятие непрерывной функции в точке. Основные теоремы о непрерывных функциях.
10. Определение точек разрыва функции и их классификация.

Определение производной. Геометрический и физический смысл производной. Уравнения касательной и нормали.

11. Основные правила дифференцирования (производная суммы, произведения, частного; производная сложной и обратной функций). Таблица производных.

12. Логарифмическая производная, производная функций, заданных неявно и параметрически.

13. Дифференциал функции, его геометрический смысл.

14. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора, ее смысл.

15. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши и их геометрическая интерпретация.

16. Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенностей $0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty},\ \infty^{0},\ 0^{\infty}$ с помощью правила Лопиталя.

17. Возрастание и убывание функции, необходимое и достаточное условия монотонности.

18. Точки экстремума. Необходимое условие экстремума. Критические точки. Достаточное условие экстремума.

19. Направление выпуклости, точки перегиба.

20. Асимптоты графика функции: вертикальные, горизонтальные, наклонные.

21. Общая схема исследования функции.

22. Неопределенный интеграл: определение, свойства, таблица основных интегралов.

23. Основные методы интегрирования: замена переменной, внесение под знак дифференциала, интегрирование по частям.

24. Интегрирование простейших дробей. Общее правило интегрирования рациональных функций.

25. Специальные методы интегрирования тригонометрических функций.

26. Специальные методы интегрирования иррациональных функций.

27. Определенный интеграл: определение, свойства.

28. Связь неопределенного интеграла с определенным. Формула Ньютона – Лейбница.

29. Основные методы вычисления определенного интеграла.

30. Геометрические приложения определенного интеграла.

31. Несобственный интеграл 1-го рода, признаки сходимости.

32. Несобственный интеграл 2-го рода, признаки сходимости.

33. Функция нескольких переменных: определение и графическое изображение, область определения, линии уровня, предел, непрерывность.

34. Частные производные первого и второго порядков: определение, правила нахождения.

35. Экстремум функции двух переменных. Исследование на экстремум функции двух переменных.

Типовые экзаменационные вопросы
(второй семестр)

1. Понятие интеграла по фигуре (интеграл Римана). Определение двойного интеграла, его свойства
2. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.
3. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.
4. Приложения кратных интегралов.
5. Дифференциальные уравнения первого порядка (основные определения).
6. Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка и способы их решения.
7. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.
8. ЛОДУ высшего порядка: определение, понятие фундаментальной системы решений, структура общего решения.
9. ЛОДУ высшего порядка с постоянными коэффициентами (характеристическое уравнение, вид общего решения в зависимости от вида корней характеристического уравнения).
10. ЛНДУ высшего порядка с постоянными коэффициентами: метод вариации произвольной постоянной.
11. ЛНДУ высшего порядка с постоянными коэффициентами: структура общего решения; виды частных решений для уравнений со специальной правой частью.
12. Понятие числового ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Необходимый признак сходимости числового ряда. Достаточный признак расходимости. Гармонический ряд.
13. Знакоположительные ряды. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.
14. Знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость. Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница.
15. Степенной ряд. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.
16. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора и ряд Маклорена. Разложение в степенной ряд основных элементарных функций.
17. Приложения рядов к приближенным вычислениям.
18. Скалярное поле: определение, скалярные и векторные дифференциальные характеристики (производная по направлению, градиент).
19. Векторное поле: определение, скалярные и векторные дифференциальные характеристики (дивергенция, ротор).
20. Простейшие классы векторных полей и их характеристики.

Локальный электронный методический материал

Светлана Николаевна Мухина

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Редактор М. А. Дмитриева

Уч.-изд. л. 1,6. Печ. л. 2,0.

Издательство федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Калининградский государственный технический университет».
236022, Калининград, Советский проспект, 1.