

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО РЫБОЛОВСТВУ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Калининградский государственный технический университет»

Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота



Б.Е. ТОПЧИЙ

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ
МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ
С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ**

*Методические указания
по дисциплине «Теоретическая механика»
для курсантов и студентов
инженерных специальностей
всех форм обучения*

БГАРФ

Калининград
Издательство БГАРФ
2019

УДК 530.1(073)

Топчий, Б.Е. Приближенные методы определения частот колебаний механических систем с одной степенью свободы: методические указания / сост.: Б.Е. Топчий. – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2019. – 62 с.

Методические указания рассмотрены и одобрены кафедрой «Инженерная механика» 31 октября 2017 г., протокол № 3.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Балтийской государственной академии рыбопромыслового флота.

Рецензент: Осняч А.А., канд. техн. наук, доцент кафедры «Инженерная механика» БГАРФ



БГАРФ

© БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ», 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ	4
1.1. Динамика колебательных систем	4
1.2. Степени свободы упругих систем	5
2. Колебания систем с одной степенью свободы	7
2 А. Свободные колебания систем с одной степенью свободы.....	7
2.1 (а). Свободные колебания консервативных систем с одной степенью свободы.....	7
2.2 (а). Свободные колебания систем с одной степенью свободы при наличии затухания	10
2 Б. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы	15
2.1 (б). Импульсная переходная функция	15
2.2 (б). Передаточная функция	17
2.3 (б). Примеры расчета систем с одной степенью свободы	20
3. Приближенные методы вычисления собственных частот колебаний	34
3.1. Энергетический метод определения частот (метод Рэлея).....	35
3.2. Метод Ритца.....	41
3.3. Метод Граммеля	44
3.4. Метод переноса масс (метод Донкерлея)	46
3.5. Метод последовательных приближений.....	51
3.6. Метод приведенной массы	55
3.7. Метод замены распределенных масс сосредоточенными	58
Список рекомендуемой литературы.....	61

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Динамика колебательных систем

Динамическими нагрузками являются такие нагрузки, которые во время действия сообщают массам сооружения ускорения, вызывая появление инерционных сил. Динамические нагрузки вызывают в элементах конструкций усилия, напряжения, деформации и перемещения, переменные во времени. Если инерционные силы, вызываемые нагрузками при их приложении или действии малы, по сравнению с самими нагрузками, то такие нагрузки считаются статическими.

Динамические нагрузки по своей природе разнообразны и в основном могут быть сведены к следующим видам:

- неподвижные периодические нагрузки;
- импульсные и ударные нагрузки;
- подвижные нагрузки;
- сейсмические нагрузки;
- ветровые нагрузки.

Периодическая нагрузка характерна тем, что зависимость её от времени многократно повторяется через определенные промежутки времени. Если периодическая нагрузка непрерывно изменяется по закону синуса или косинуса, то такая нагрузка называется гармонической. Вибрационная нагрузка часто создается механизмами, имеющими неуравновешенные массы вращающихся частей. Динамический эффект, создаваемый периодическими нагрузками, зависит не только от их величины, но и от частоты изменения. Динамический расчет конструкций состоит в определении усилий и перемещений от динамических нагрузок, в проверке системы на резонанс или при переходе через резонанс при периодически повторяющейся нагрузке определенной частоты.

Для решения динамических задач применяются два основных метода: статический и энергетический.

Статический метод основан на применении уравнений динамического равновесия, которые отличаются от уравнений статического равновесия дополнительным учетом сил инерции.

Энергетический метод основан на применении закона сохранения энергии, согласно которому сумма потенциальной и кинетической энергии упругой системы является величиной постоянной.

1.2. Степени свободы упругих систем

В динамических расчетах системы подразделяются по числу степеней свободы. Числом степеней свободы называется количество независимых геометрических параметров, определяющих положение всех масс системы в любой момент времени при ее движении.

Например:

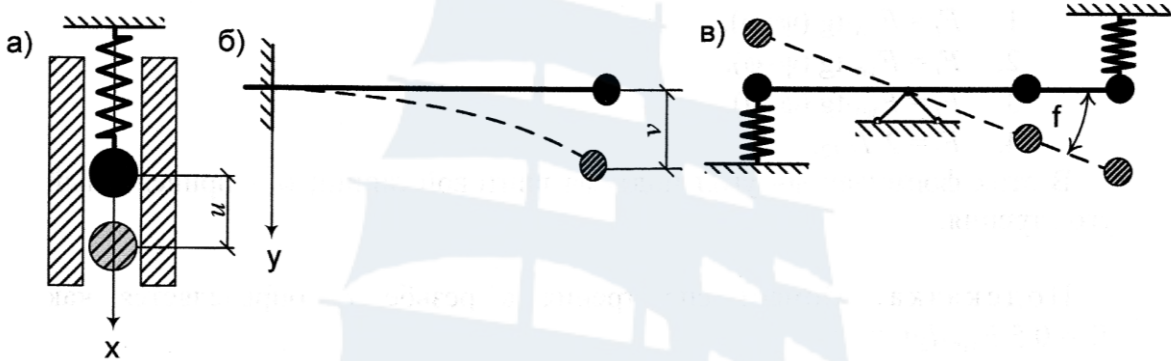


Рис. 1.1. Системы с одной степенью свободы

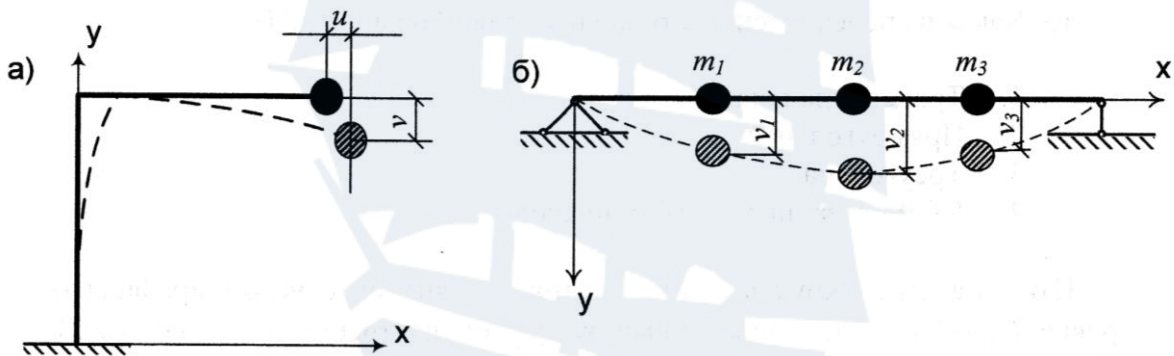


Рис. 1.2. Системы с несколькими степенями свободы ($W = n$)

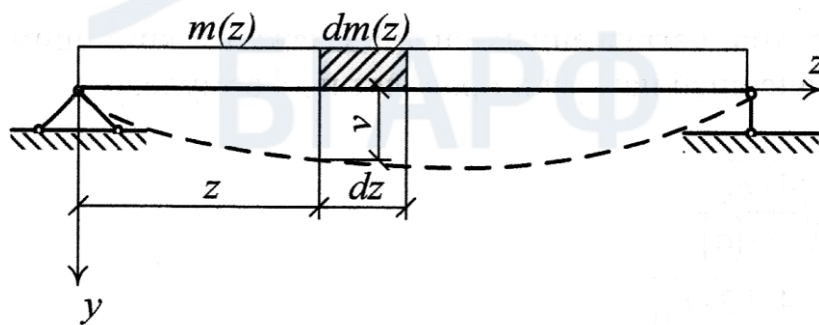


Рис. 1.3. Система с бесконечным числом степеней свободы

Число степеней свободы равно минимальному числу связей необходимых для устранения движения всех масс расчетной схемы конструкции.

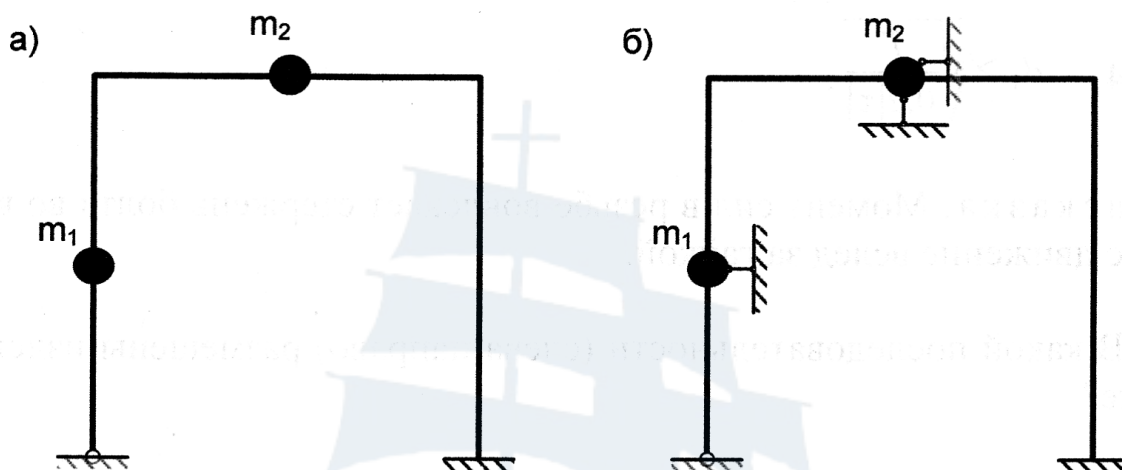


Рис. 1.4. Определение числа степеней свободы

Для невесомой рамы с двумя сосредоточенными массами, представленной на рис. 1.4, а, минимальное число связей равно трем (рис. 1.4, б). Масса m_1 может смещаться только по горизонтали (учитываются лишь изгибные деформации), поэтому для ее закрепления поставлена одна связь. Масса m_2 может смещаться как по вертикали, так и по горизонтали за счет изгиба ригеля и стоек, поэтому необходимо поставить две связи.

Таким образом, представленная на рис. 1.4, а рама с двумя сосредоточенными массами представляет систему с тремя степенями свободы. Расчетная схема, в которой учитывается собственный вес ее элементов, представляет систему с бесконечным числом степеней свободы.

2. Колебания систем с одной степенью свободы

2 А. Свободные колебания систем с одной степенью свободы

2.1(a). Свободные колебания консервативных систем с одной степенью свободы

Рассмотрим систему с одной степенью свободы в виде невесомой балки с сосредоточенной массой m (рис. 2.1). Если систему вывести из состояния равновесия, то она будет совершать свободные колебания.

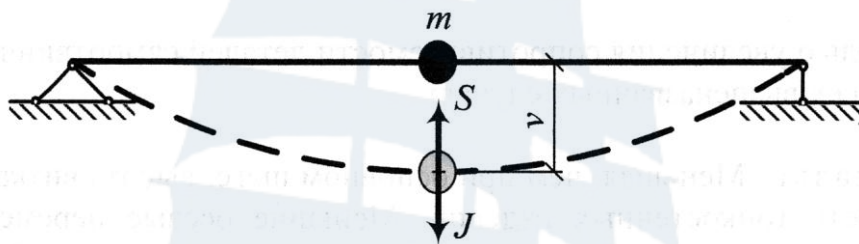


Рис. 2.1. Система с одной степенью свободы

Для составления уравнения движения массы используем принцип Даламбера. В любой момент времени на массу действует сила упругости системы и силы инерции. Силы сопротивления среды, которые приводят к затуханию свободных колебаний, в данном случае не учитываются.

Сила упругости системы S , которая пропорциональна отклонению массы от положения равновесия, определяется выражением:

$$S = r_{11}v = \frac{1}{\delta_{11}}v, \quad (2.1)$$

где r_{11} – жесткость системы;

δ_{11} – податливость системы;

$v = v(t)$ – отклонение массы от положения статического равновесия.

Жесткость системы r_{11} представляет силу, которую необходимо приложить в точке прикрепления массы, чтобы вызвать единичное перемещение этой точки. Податливость системы δ_{11} – величина обратная жесткости и представляет перемещение точки, вызванное единичной силой.

Сила инерции J направлена в сторону противоположную ускорению и определяется выражением:

$$J = -m \frac{d^2 v}{dt^2} = -m \ddot{v}. \quad (2.2)$$

Масса в процессе свободных колебаний будет находиться в равновесии под действием силы упругости и силы инерции:

$$S - J = 0. \quad (2.3)$$

Сделав подстановку величин, получим

$$\begin{aligned} r_{11} v + m \ddot{v} &= 0, \quad \text{или} \\ \ddot{v} + \frac{r_{11}}{m} v &= 0, \\ \ddot{v} + p^2 v &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\text{где } p^2 = \frac{r_{11}}{m} = \frac{1}{m \delta_{11}}. \quad (2.5)$$

Интегралом дифференциального уравнения свободных колебаний (2.4) является функция

$$v = C_1 \sin pt + C_2 \cos pt. \quad (2.6)$$

Постоянные C_1 и C_2 , входящие в уравнение, определяются при начальных условиях $t = 0$, $v = v_0$, $\dot{v} = \dot{v}_0$ и равняются:

$$C_2 = v_0, \quad C_1 = \frac{\dot{v}_0}{p}.$$

Тогда уравнение (2.6) запишется в виде:

$$v = \frac{\dot{v}_0}{p} \sin pt + v_0 \cos pt. \quad (2.7)$$

Если в начальный момент времени $t = 0$, $v_0 = 0$, то уравнение (2.7) приведет к виду:

$$v = \frac{\dot{v}_0}{p} \sin pt. \quad (2.8)$$

Уравнение (2.6) можно представить в другом виде. Для этого выразим C_1 и C_2 через новые постоянные следующим образом:

$$C_1 = A \cos \varphi_0, \quad C_2 = A \sin \varphi_0.$$

Тогда уравнение свободных гармонических колебаний системы с одной степенью свободы запишется в виде:

$$v = A \sin(pt + \varphi_0), \quad (2.9)$$

где $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{v_0^2 + \frac{\dot{v}_0^2}{p^2}}$ – амплитуда колебаний;

$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{C_2}{C_1} = \frac{v_0 p}{\dot{v}_0}$, $\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{v_0 p}{\dot{v}_0}$ – начальная фаза колебаний.

График свободных колебаний приведен на рис. 2.2.

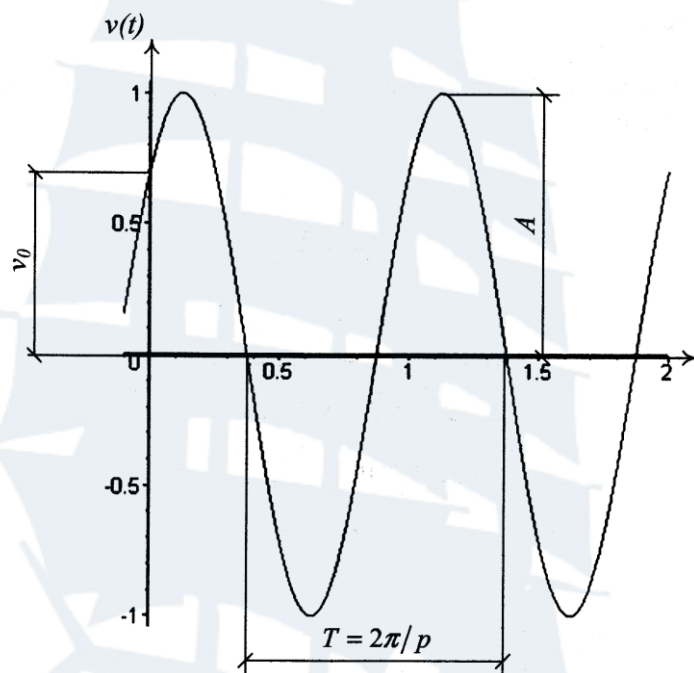


Рис. 2.2. График свободных колебаний

Из графика видно, что величина меняет знак и в определенные моменты достигает наибольших отклонений (амплитуд). Время T , за которое масса совершает один полный цикл, называется *периодом* и определяется выражением:

$$T = \frac{2\pi}{p}. \quad (2.10)$$

Величина, обратная периоду колебаний, определяет число циклов колебаний в единицу времени и называется *частотой*.

Частоту p , равную числу циклов колебаний в 2π секунд, называют круговой частотой колебаний и определяют по формуле:

$$p = \sqrt{\frac{r_{11}}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{v_{ст}}}, \quad (2.11)$$

где $v_{ст}$ – перемещение точки при статическом приложении силы $P = mg$. Единицей измерения круговой частоты p служит рад/сек, которую часто записывают сек^{-1} . Число циклов колебаний за одну секунду называют технической частотой и определяют по формуле:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{p}{2\pi}. \quad (2.12)$$

За единицу измерения технической частоты колебаний принимается Герц (Гц) – одно колебание за секунду.

Инерционная сила в произвольный момент времени определяется выражением:

$$J = -m\ddot{v} = p^2 mA \sin(pt + \varphi_0) = p^2 mv(t). \quad (2.13)$$

При гармонических колебаниях сила инерции пропорциональна отклонению массы и достигает своего максимального (амплитудного) значения:

$$J_{\max} = p^2 mA, \quad (2.14)$$

при $v(t) = v_{\max}$.

Свободные колебания характеризуются непрерывным переходом кинетической энергии движения массы в потенциальную энергию деформации системы и наоборот.

2.2 (а). Свободные колебания систем с одной степенью свободы при наличии затухания

Формулы, полученные в предыдущем разделе, относятся к случаю отсутствия поглощения (диссипации) механической энергии в процессе движения системы. В таких системах после исчезновения возмущающих нагрузок механическая энергия остается постоянной, вследствие чего колебания с течением времени не затухают. Механическая система, при движении которой механическая энергия остается постоянной называется *консервативной*,

если механическая энергия при движении уменьшается, система называется *диссипативной*.

Для учета сил, вызывающих поглощение энергии (диссипативных сил) в уравнение движения необходимо ввести дополнительное слагаемое, учитывающее силы неупругого сопротивления движению. Из-за многообразия сил сопротивления (внешнего трения сухого и вязкого, внутреннего трения в материале и т. п.), и представления их различными моделями неупругого сопротивления (линейными и нелинейными, зависящими и независящими от частоты или амплитуды и т. д.), невозможно однозначно ввести диссипативное слагаемое в уравнение движения.

В настоящее время нормативными документами рекомендуется использовать физически реализуемые, частотно-независимые модели сопротивления. К таким моделям относятся скорректированная модель Фохта (вязкого трения) и частотно-независимая модель внутреннего трения. В частности, сила сопротивления при использовании скорректированной модели Фохта:

$$R = -\gamma \sqrt{mr_{11}} \dot{v}(t), \quad (2.15)$$

где γ – нормативный коэффициент потерь, характеризующий затухание. В практических расчетах используются коэффициенты потерь, рекомендуемые значения которых приведены в табл. 2.1. Знак минус в (2.15) указывает, что силы сопротивления имеют направление, противоположное скорости.

Таблица 2.1

Рекомендуемые значения коэффициента потерь

<i>Конструкции</i>	<i>Коэффициент потерь γ при расчете</i>	
	<i>По уровню колебаний</i>	<i>На прочность и выносливость</i>
Железобетонные конструкции	0,05	0,10
Железобетонные конструкции преднапряженные	0,025	0,05
Металлические конструкции	0,01	0,025
Большепролетные металлические покрытия (облегченные)	0,007	0,02
Алюминиевые конструкции	0,007	0,025

Конструкции	Коэффициент потерь γ при расчете	
	По уровню колебаний	На прочность и выносливость
Кирпичная кладка	0,04	0,08
Деревянные конструкции	0,03	0,05
Клееные деревянные конструкции	0,02	0,04
Витрины и оконные стекла	–	0,06
Здания (одноэтажные и многоэтажные)	0,05	0,1
Металлические башни, мачты, футерованные дымовые трубы, аппараты колонного типа и т. д.	0,025	0,05
Транспортерные галереи	0,02	0,04

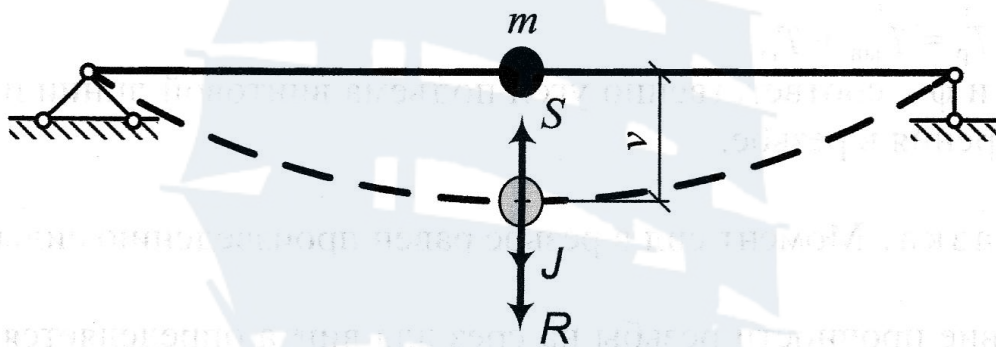


Рис. 2.3. Свободные колебания диссипативной системы

Масса в процессе колебаний (рис. 2.3) будет находиться в равновесии под действием сил упругости, инерции и сопротивления

$$S - J - R = 0.$$

$$r_{11}v - (-m\ddot{v}) - (-\gamma\sqrt{mr_{11}}\dot{v}) = 0$$

$$\text{или } \ddot{v} + \gamma\sqrt{\frac{r_{11}}{m}}\dot{v} + \frac{r_{11}}{m}v = 0. \quad (2.16)$$

Выражение (2.16) представляет дифференциальное уравнение затухающих колебаний системы с одной степенью свободы.

Обозначая

$$p^2 = \frac{r_{11}}{m} = \frac{1}{m\delta_{11}},$$

получим $\ddot{v} + \gamma p \dot{v} + p^2 v = 0$. (2.17)

Решение данного уравнения можно представить в виде:

$$v = Ae^{-\frac{\gamma}{2}pt} \sin\left(\sqrt{p^2\left(1-\frac{\gamma^2}{4}\right)}t + \varphi_0\right),$$

или $v = Ae^{-\frac{\gamma}{2}pt} \sin(p_1 t + \varphi_0)$, (2.18)

где $p_1 = p\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{4}}$ – круговая частота затухающих свободных колебаний.

Используя начальные условия, $t = 0$, $v = v_0$, $\dot{v} = \dot{v}_0$, получим начальную амплитуду свободных колебаний:

$$A = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{\dot{v}_0 + \frac{\gamma}{2}pv_0}{p_1}\right)^2}$$
 (2.19)

и начальную фазу колебаний:

$$\varphi_0 = \arctg \frac{v_0 p_1}{\dot{v}_0 + \frac{\gamma}{2}pv_0},$$
 (2.20)

где v_0 – начальное перемещение; \dot{v}_0 – начальная скорость колебаний.

Период, т. е. продолжительность полного цикла колебаний в секундах, составляет:

$$T = \frac{2\pi}{p_1}.$$
 (2.21)

График свободных затухающих колебаний показан на рис. 2.4. Колебания системы при наличии сил сопротивления затухают, убывая по закону геометрической прогрессии. Для оценки скорости затухающих колебаний используется так называемый логарифмический декремент колебаний:

$$\delta^* = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \ln \frac{Ae^{-\frac{\gamma}{2}pt}}{Ae^{-\frac{\gamma}{2}p(t+T)}} = \frac{\gamma}{2}pT = \frac{\gamma p}{2} \frac{2\pi}{p_1} =$$

$$= \frac{\gamma\pi}{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}} \approx \gamma\pi. \quad (2.22)$$

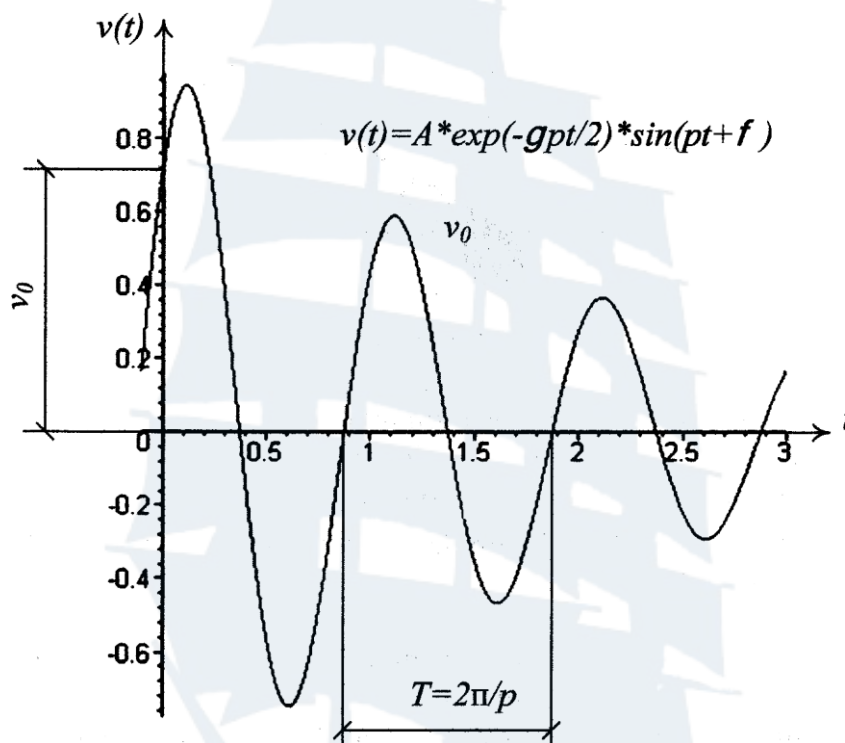


Рис. 2.4. График свободных колебаний диссипативной системы

Для реальных конструкций, как правило, $\gamma \ll 1$, поэтому при определении частоты и периода затухающих колебаний можно не учитывать сопротивление среды.

2 Б. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы

2.1 (б). Импульсная переходная функция

Рассмотрим вынужденные колебания упругой системы с одной степенью свободы на действие возмущающей нагрузки $P(t) = \delta(t)$, где $\delta(t)$ – обобщенная функция Дирака:

$$\delta(t) = 0 \text{ при } t \neq 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Уравнение движения консервативной системы:

$$m\ddot{v} + r_{11}v = \delta(t). \quad (2.23)$$

Уравнение движения диссипативной системы, подчиняющейся скорректированной модели Фохта, имеет вид:

$$m\ddot{v} + \gamma\sqrt{mr_{11}}\dot{v} + r_{11}v = \delta(t). \quad (2.24)$$

Нагрузка $\delta(t)$ есть математическая запись воздействия единичного импульса на систему в момент времени $t = 0$. Запишем закон сохранения импульса в момент времени $t = 0$: $m\dot{v}_0 = \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt = 1$.

При $t > 0$ уравнения (2.23) – (2.24) имеют вид (2.4) и (2.17):

$$\begin{aligned} \ddot{v} + p^2v &= 0, \\ \ddot{v} + \gamma p\dot{v} + p^2v &= 0, \end{aligned}$$

с начальными условиями:

$$t = 0, \quad v = v_0 = 0, \quad \dot{v} = \dot{v}_0 = \frac{1}{m}. \quad (2.25)$$

Решение уравнения (2.4) с начальными условиями (2.25) получим из (2.8):

$$v(t) = \frac{1}{mp} \sin pt. \quad (2.26)$$

Решение уравнения (2.17) с теми же начальными условиями получим из (2.18) с учетом (2.19), (2.20) и (2.25):

$$v(t) = \frac{1}{mp_1} \exp\left(-\frac{\gamma}{2} pt\right) \cdot \sin p_1 t, \quad (2.27)$$

где $p_1 = p \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}$.

Для реальных материалов $\gamma \leq 0,1$ (см. табл. 2.1) и $p_1 = p$ с большой точностью можно считать:

$$v(t) = \frac{1}{mp} \exp\left(-\frac{\gamma}{2} pt\right) \cdot \sin pt. \quad (2.28)$$

Формулы (2.26) – (2.28) называются импульсной переходной функцией (ИПФ) и обозначаются символом $k(t)$.

Таким образом, для консервативной системы с одной степенью свободы:

$$k(t) = \frac{1}{mp} \sin pt. \quad (2.29)$$

Для диссипативной системы, отвечающей скорректированной модели Фохта:

$$k(t) = \frac{1}{mp_1} \exp\left(-\frac{\gamma}{2} pt\right) \cdot \sin p_1 t, \quad p_1 = p \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad (2.30)$$

или

$$k(t) = \frac{1}{mp} \exp\left(-\frac{\gamma}{2} pt\right) \cdot \sin pt \quad \text{для } \gamma \leq 0,1. \quad (2.31)$$

Зная ИПФ системы результат расчета системы на любое воздействие $P = P(t)$ можно записать в виде свертки (интеграл Дюамеля):

$$v(t) = \int_{-\infty}^t k(t - \tau) P(\tau) d\tau. \quad (2.32)$$

Действительно, перемещение от действия на систему единичного импульса в момент времени τ равно $k(t - \tau)$, $t \geq \tau$, от действия импульса величина которого $P(\tau)d\tau$, перемещение системы

равно $k(t - \tau) P(\tau) d\tau$. Остается просуммировать элементарные перемещения при действии нагрузки во время $\tau \geq -\infty$ до $\tau = \infty$, учитывая, что $k(t) = 0$ при $t < 0$. В результате получается формула (2.32).

2.2 (б). Передаточная функция

Рассмотрим случай длительного действия единичной гармонической силы $P(t) = \exp(i\omega t)$.

Учитывая, что $\exp(i\omega t) = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$, $i = \sqrt{-1}$, и подставим это значение в (2.32), получим

$$v(t) = \int_{-\infty}^t k(t - \tau) \exp(i\omega\tau) d\tau = \exp(i\omega t) \cdot \int_0^{\infty} k(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau.$$

Введем функцию $\Phi^*(\omega) = \int_0^{\infty} k(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau$.

Учитывая, что $k(t) = 0$ при $t < 0$, $\Phi^*(\omega)$ есть обратное преобразование Фурье импульсной переходной функции $k(t)$. Но тогда справедливо, что импульсная переходная функция и функция $\Phi^*(\omega)$ связаны между собой преобразованием Фурье:

$$k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^*(\omega) \exp(i\omega t) d\omega, \quad (2.33)$$

$$\Phi^*(\omega) = \int_0^{\infty} k(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau.$$

Функция $\Phi^*(\omega)$ называется передаточной функцией (ПФ) системы. Эту функцию можно найти, если известна ИПФ системы по (2.33), но можно определить ее, учитывая, что $v(t) = \Phi^*(\omega) \exp(i\omega t)$ есть решение уравнения движения при нагрузке $P(t) = \exp(i\omega t)$, действующей при любых t .

Рассмотрим консервативную систему. Уравнение движения:
 $m\ddot{v} + r_{11}v = \exp(i\omega t)$.

Подставим в это уравнение $v(t) = \Phi^*(\omega) \exp(i\omega t)$. После сокращения на $\exp(i\omega t)$ получим

$$(-m\omega^2 + r_{11}) \cdot \Phi^*(\omega) = 1.$$

$$\text{Откуда } \Phi^*(\omega) = \frac{1}{mp^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)}. \quad (2.34)$$

Для диссипативной (скорректированная модель Фохта) системы уравнение движения $m\ddot{v} + \gamma\sqrt{mr_{11}}\dot{v} + r_{11}v = \exp(i\omega t)$.

После подстановки сюда $v(t) = \Phi^*(\omega)\exp(i\omega t)$, сокращения на $\exp(i\omega t)$, получаем

$$\Phi^*(\omega) = \frac{1}{mp^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{p^2} + i\gamma\frac{\omega}{p}\right)}. \quad (2.35)$$

Из (2.35) видно, что передаточная функция – величина комплексная:

$$\Phi^*(\omega) = A(\omega)\exp(-i\varphi(\omega)), \quad (2.36)$$

$$\text{где } A(\omega) = \frac{1}{mp^2 \left(\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \gamma\frac{\omega^2}{p^2}\right)}, \quad (2.37)$$

где $A(\omega)$ – амплитудно-частотная характеристика системы (АЧХ),

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\gamma\omega p}{p^2 - \omega^2}, \quad (2.38)$$

где $\varphi(\omega)$ – фазово-частотная характеристика системы (ФЧХ).

Из (2.34), (2.37) получается формула динамического коэффициента системы.

Для консервативной системы:

$$\mu = mp^2 A = r_{11}A = \frac{1}{|1 - \bar{\omega}^2|}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{p}. \quad (2.39)$$

Для диссипативной модели исправленного Фохта:

$$\mu = r_{11}A = \frac{1}{\sqrt{(1 - \bar{\omega}^2)^2 + \gamma^2\bar{\omega}^2}}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{p}. \quad (2.40)$$

График динамического коэффициента при $\gamma = 0,1$ приведен на рис. 2.5.

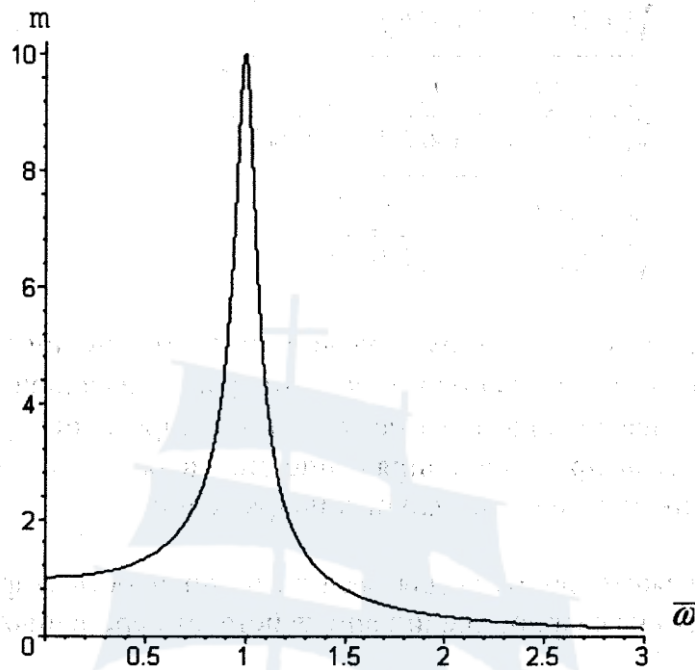


Рис. 2.5. График динамического коэффициента при $\gamma = 0,1$

Нагрузка в виде $P(t) = P_0 \sin(\omega t)$, $P(t) = P_0 \cos(\omega t)$, действующая при $-\infty \leq t \leq \infty$.

Известно, что $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$.

Используя эти формулы и результаты решения на гармоническое воздействие $P(t) = \exp(i\theta t)$, а также четность АЧХ и нечетность ФЧХ получаем

$$v(t) = P_0 A(\omega) \sin(\omega t - \varphi(\omega)) \text{ при } P(t) = P_0 \sin(\omega t)$$

и

$$v(t) = P_0 A(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega)) \text{ при } P(t) = P_0 \cos(\omega t),$$

АЧХ – $A(\omega)$ и ФЧХ – $\varphi(\omega)$ определены по прежнему формулами (2.37), (2.38).

Рассмотрим график АЧХ (динамического коэффициента рис. 2.5). Если частота возмущающей силы приближается к собственной частоте колебаний системы, амплитуда перемещений существенно возрастает и при $\omega = p$, $\mu_{\max} = \frac{1}{\gamma}$, т. е. максимум резонансной амплитуды – есть величина обратная коэффициенту

потерь. Фаза колебаний при $\omega = p$, $\varphi(p) = \frac{\pi}{2}$.

2.3 (б). Примеры расчета систем с одной степенью свободы

Пример 1. Определить круговую и техническую частоты, а также период свободных колебаний сосредоточенного груза $Q = 20$ кН, расположенного на раме (рис. 2.6, а). Рама из прокатного двутавра I № 24 с моментом инерции поперечного сечения $I = 3\,460$ см⁴, модулем упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа. Собственный вес рамы не учитывается.

Решение

Для системы с одной степенью свободы круговая частота свободных колебаний находится по формуле:

$$p = \sqrt{\frac{g}{v_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}, \quad \text{где } m = \frac{Q}{g}.$$

Для определения δ_{11} (рис. 2.6) необходимо построить эпюру изгибающих моментов от единичной силы по направлению колебаний (рис. 2.6).

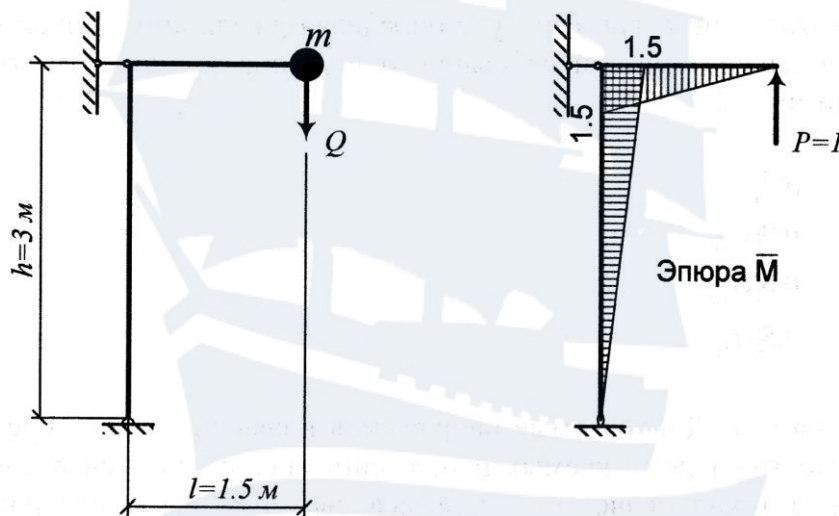


Рис. 2.6. Система с одной степенью свободы

Применяя интеграл Мора для определения перемещений, имеем:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M\bar{M}}{EI} dz = \frac{1,5}{6EI} \cdot 2 \cdot 1,5 \cdot 1,5 + \frac{1,5}{6EI} \cdot 2 \cdot 1,5 \cdot 1,5 = \frac{3,375}{EI},$$

$$EI = 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 3460 \cdot 10^{-8} = 7266 \cdot 10^3 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Круговая частота свободных колебаний равна:

$$p = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{Q\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 7266 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^3 \cdot 3,375}} = 32,5 \text{ сек}^{-1}.$$

Период свободных колебаний составляет:

$$T = \frac{2\pi}{p} = \frac{6,28}{32,5} = 0,193 \text{ сек.}$$

Техническая частота (число циклов колебаний за минуту):

$$n = \frac{60}{T} = \frac{60}{0,193} = 311 \text{ мин}^{-1}.$$

Техническая частота в герцах (число циклов колебаний за секунду):

$$n = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,193} = 5,18 \text{ Гц.}$$

Пример 2. Требуется определить наибольшие нормальные напряжения в балке (рис. 2.7, а) от груза $Q = 15 \text{ кН}$ и возмущающей нагрузки $P(t) = P \sin \omega t$, приняв $P = 3 \text{ кН}$, $\omega = 10 \text{ сек}^{-1}$. Массой балки пренебречь. Балка длиной 6 м из двутавра I № 18 ($I = 1290 \text{ см}^4$, $W = 143 \text{ см}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$).

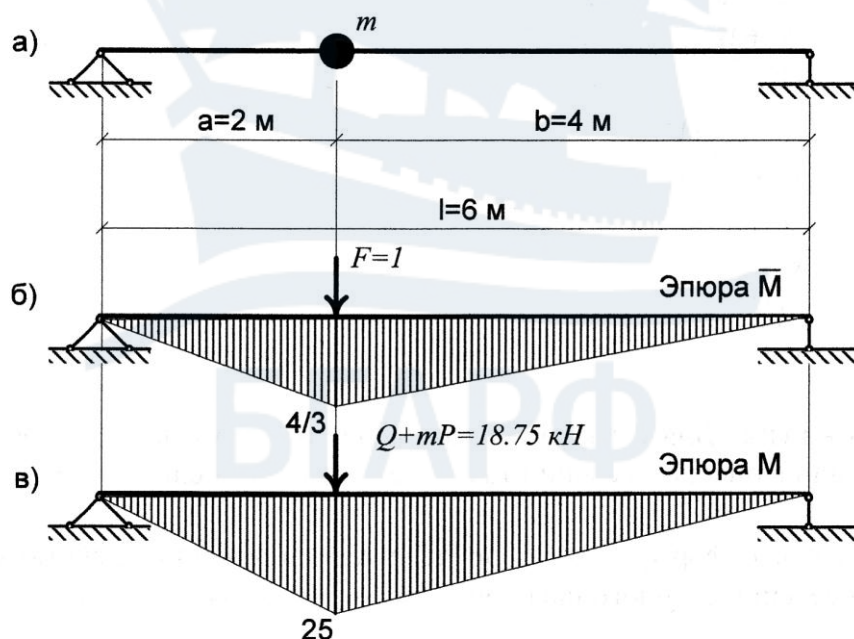


Рис. 2.7. Балка с одной степенью свободы

Решение

Наибольшие нормальные напряжения в балке определяются по формуле:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W},$$

где M_{\max} – наибольший момент в балке от статической нагрузки Q , и динамической нагрузки μP ;

W – осевой момент сопротивления сечения балки.

Динамический коэффициент μ при вынужденных колебаниях системы с одной степенью свободы (без учета затухания) определяется выражением:

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}},$$

где $p = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{Q\delta_{11}}}$ – частота собственных колебаний системы.

Для нахождения δ_{11} строим единичную эпюру (рис. 2.7, б) и, используя интеграл Мора, имеем

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M\bar{M}}{EI} dz = \frac{2}{6EI} \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} + \frac{4}{6EI} \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{3,556}{EI},$$

$$EI = 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1290 \cdot 10^{-8} = 2709 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}^2.$$

Круговая частота свободных колебаний равна:

$$p = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{Q\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 2709 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^3 \cdot 3,556}} = 22,3 \text{ сек}^{-1}.$$

Динамический коэффициент:

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} = \frac{1}{1 - \frac{10^2}{22,3^2}} = 1,25.$$

Загружая балку нагрузкой Q , и динамической силой μP , находим наибольший изгибающий момент (рис. 2.7, в):

$$M_{\max} = \frac{(Q + \mu P)ab}{l} = \frac{(15 + 1,25 \cdot 3) \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 4}{6} = 25,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Тогда наибольшие нормальные напряжения в балке равны:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{25 \cdot 10^3}{143 \cdot 10^{-6}} = 175 \text{ МПа}.$$

Пример 3. Требуется определить наибольшие, нормальные напряжения в балке (рис. 2.8) загруженной сосредоточенной массой $m = 1\,500$ кг на которую с высоты $h = 0,5$ м падает груз массой $m_0 = 200$ кг. Массой балки пренебречь. Балка длиной 6 м из двутавра I № 18 ($I = 1\,290 \text{ см}^4$ и $W = 143 \text{ см}^3$).

Решение

Перемещения системы определим по формуле (2.32):

$$v(t) = \int_{-\infty}^t k(t - \tau)P(\tau)d\tau$$

в которой $k(t)$ определяем по (2.29):

$$k(t) = \frac{1}{mp} \sin pt.$$

Нагрузка $P(t)$ представляет собой ударное воздействие, которое можно считать комбинацией мгновенного импульса $m_0\sqrt{2gh} \cdot \delta(t)$ и мгновенного приложения постоянной нагрузки m_0g :

$$P(t) = 0 \text{ при } t < 0, \quad P(t) = m_0g + m_0\sqrt{2gh} \cdot \delta(t) \text{ при } t > 0.$$

Таким образом,

$$v(t) = \frac{m_0g}{(m + m_0)p} \int_0^t \sin(p(t - \tau))d\tau + \frac{m_0\sqrt{2gh}}{(m + m_0)p} \sin pt,$$

$$v(t) = \frac{m_0g}{(m + m_0)p} (1 - \cos pt) + \frac{m_0\sqrt{2gh}}{(m + m_0)p} \sin pt.$$

Единичное перемещение:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M\bar{M}}{EI} dz = \frac{2}{6EI} \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} + \frac{4}{6EI} \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} =$$
$$= \frac{3,556}{EI},$$

$$\delta_{11} = \frac{3,556}{EI} = \frac{3,556}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 1,31 \cdot 10^{-6} \text{ м/Н.}$$

Частота свободных колебаний системы:

$$p = \sqrt{\frac{1}{(m + m_0)\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{1}{(1500 + 200) \cdot 1,31 \cdot 10^{-6}}} = 21,2 \text{ сек}^{-1}.$$

Статическая деформация системы в месте удара:

$$v_{\text{ст}} = m_0 g \delta_{11} = 200 \cdot 9,81 \cdot 1,31 \cdot 10^{-6} = 2,57 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Перемещения в месте удара:

$$v(t) = v_{\text{ст}} + A \sin(pt + \varphi_0),$$

где $A = v_{\text{ст}} \sqrt{1 + \frac{2h}{v_{\text{ст}}} \eta}$, $\eta = \frac{m_0}{m + m_0}$, $\varphi_0 = \text{arctg}\left(\frac{2h}{v_{\text{ст}}} \eta\right)$.

Наибольшие перемещения:

$$v_{\text{max}} = v_{\text{ст}} + A = v_{\text{ст}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{v_{\text{ст}}} \eta}\right) \text{ или } v_{\text{max}} = \mu v_{\text{ст}},$$

где $\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{v_{\text{ст}}} \eta}$ – динамический коэффициент, равный

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,5}{2,57 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{200}{1500 + 200}} = 7,84.$$

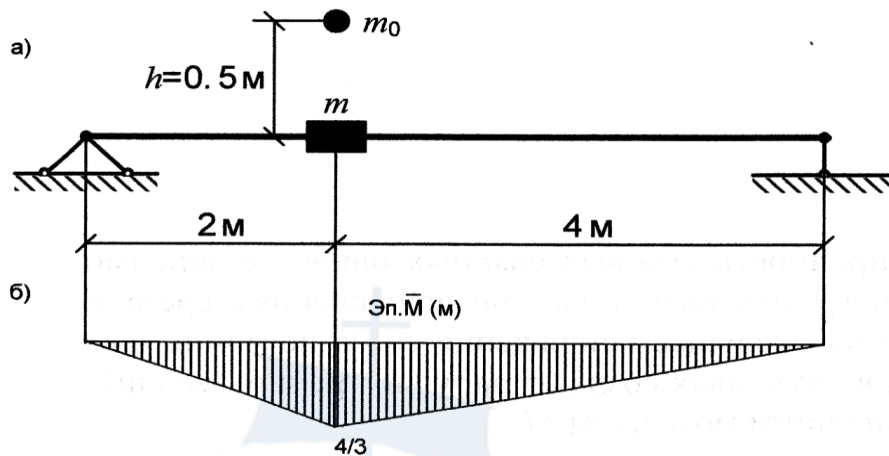


Рис. 2.8. Удар по системе с одной степенью свободы

Загружая балку нагрузкой mg и динамической силой $\mu m_0 g$, находим наибольший изгибающий момент:

$$M_{\max} = \frac{g(m + \mu m_0)ab}{l} = \frac{9,81 \cdot (1500 + 7,84 \cdot 200) \cdot 2 \cdot 4}{6} = 40\,130 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Тогда наибольшие нормальные напряжения в балке равны:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{40130}{143 \cdot 10^{-6}} = 281 \text{ МПа}.$$

Пример 4. Требуется определить наибольшие, нормальные напряжения в балке (рис. 2.9), возникающие после включения, длительной работы и после выключения двигателя массой $m = 1,5$ т, создающего динамическую нагрузку частотой 500 об/мин с амплитудой $P = 3$ кН. Массой балки пренебречь. Балка длиной 6 м из двутавра I № 18 ($I = 1290 \text{ см}^4$, $W = 143 \text{ см}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$).

Решение

Единичное перемещение:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum \int \frac{M\bar{M}}{EI} dz = \frac{2}{6EI} \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} + \frac{4}{6EI} \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \\ &= \frac{3,556}{EI}, \\ \delta_{11} &= \frac{3,556}{EI} = \frac{3,556}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 1,31 \cdot 10^{-6} \text{ м/Н}. \end{aligned}$$

Частота свободных колебаний системы:

$$p = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{1}{1500 \cdot 1,31 \cdot 10^{-6}}} = 22,6 \text{ сек}^{-1}.$$

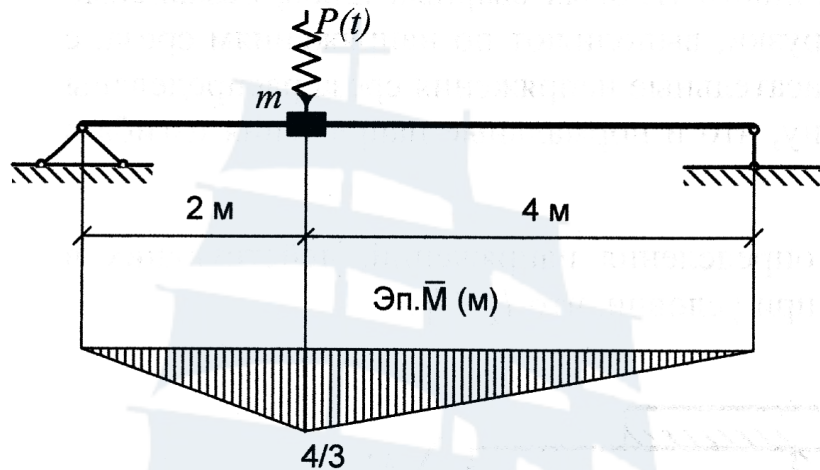


Рис. 2.9. Действие гармонической нагрузки переменной амплитуды на систему с одной степенью свободы

Частота вынужденных колебаний в рабочем режиме двигателя:

$$\omega_p = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 500}{30} = 52,3 \text{ сек}^{-1}.$$

То есть при разгоне и торможении двигателя будет иметь место переход через резонанс. Получим закон изменения нагрузки во время разгона двигателя. Пусть во время разгона (T_0), угловая скорость вращения нарастает равномерно, т. е. угловое ускорение постоянно: $\varepsilon = \frac{\omega_p}{T_0}$, а угловая скорость изменяется по линейному

закону $\omega = \frac{\omega_p t}{T_0}$. Амплитуда возмущающей силы $P = m_0 e \omega^2$, где

m_0 – неуравновешенная масса, e – эксцентриситет. В рабочем режиме $P_p = m_0 e \omega_p^2 = 3 \text{ кН}$, откуда $m_0 e = 3000/52,32 = 1,1 \text{ кг} \cdot \text{м}$.

Для определения перемещений используем (2.32):

$$v(t) = \int_{-\infty}^t k(t-\tau)P(\tau)d\tau \text{ в которой } P(t) \text{ определяем по (2.31):}$$

$$k(t) = \frac{1}{mp} \exp\left(-\frac{\gamma}{2} pt\right) \cdot \sin pt.$$

Коэффициент потерь примем по табл. 2.1 для металлических конструкций по уровню колебаний $\gamma = 0,01$, а при расчете на прочность $\gamma = 0,025$.

Закон изменения нагрузки при $0 \leq t \leq T_0$:

$$P(t) = m_0 e \omega^2 \sin(\omega t) = m_0 e \omega_p^2 (t/T_0)^2 \sin(\omega_p t^2 / T_0).$$

После подстановки $P(t)$ и $k(t)$ в (2.32) находим перемещения:

$$v(t) = \frac{m_0 e \omega_p^2}{mp T_0^2} \int_0^t \exp\left(-\frac{\gamma}{2} p(t-\tau)\right) \cdot \sin p(t-\tau) \cdot \sin(\omega_p \tau^2 / T_0) \tau^2 d\tau.$$

Полученный интеграл не выражается через элементарные функции. Решение этого интеграла проведем с помощью программного пакета EXCEL. Ниже на рис. 2.10-2.13 для различных времен разгона приведены графики функций нагрузки $P(\tau)$, ко-

эффициента $\mu(t) = \frac{v(t)}{v_{ст}}$, где $v_{ст}$ – статические перемещения от

амплитудного значения нагрузки в рабочем режиме: $v_{ст} = P_p \delta_{11} = 3000 \cdot 1,31 \cdot 10^{-6} = 0,00393 \text{ м} = 3,93 \text{ мм}$.

Из приведенных графиков видно, что максимальные значения коэффициента $\mu(t) = \mu_{max}$ при переходе через резонанс $\omega = p$ нарастают при увеличении времени разгона от $\mu_{max} = 0,18$, при $T_0 = 1 \text{ с}$ до $\mu_{max} = 0,34$ при $T_0 = 6 \text{ с}$. Динамический коэффициент для системы в рабочем режиме определяется по (2.40) при

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{p} = \frac{2\pi \cdot 500}{60 \cdot 22,6} = 2,32:$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\bar{\omega})^2 + \gamma^2 \bar{\omega}^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-2,32^2)^2 + 0,01^2 2,32^2}} = 0,228.$$

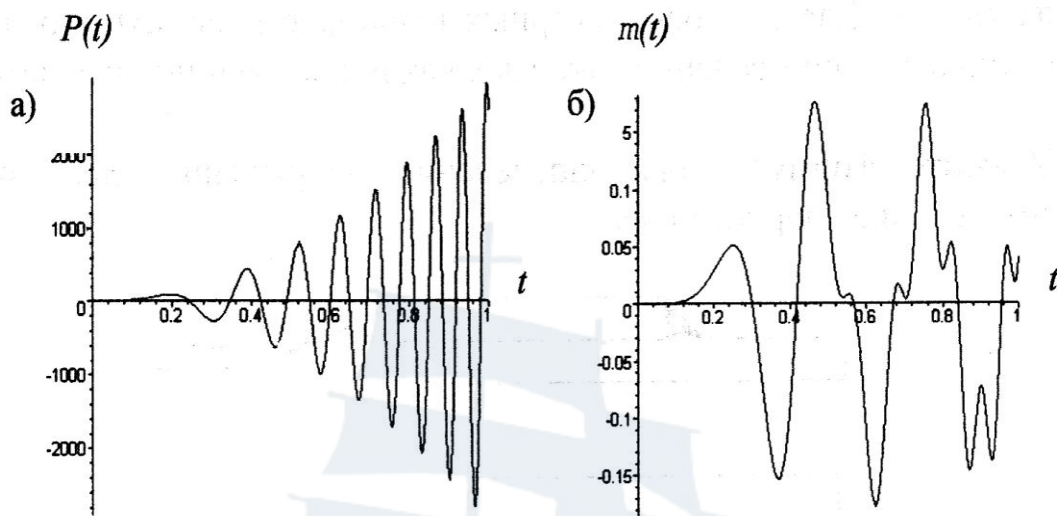


Рис. 2.10. Колебания балки при времени разгона $T_0 = 1$ с:
 а) график нарастания нагрузки $P(t)$;
 б) динамический коэффициент $\mu(t) = v(t)/v_{cm}$

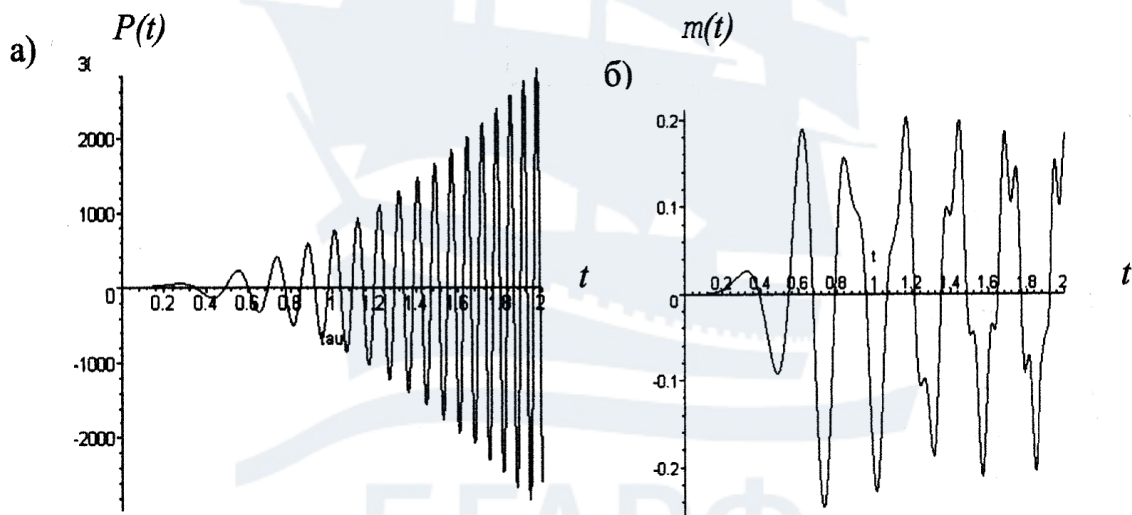


Рис. 2.11. Колебания балки при времени разгона $T_0 = 2$ с:
 а) график нарастания нагрузки $P(t)$;
 б) динамический коэффициент $\mu(t) = v(t)/v_{cm}$

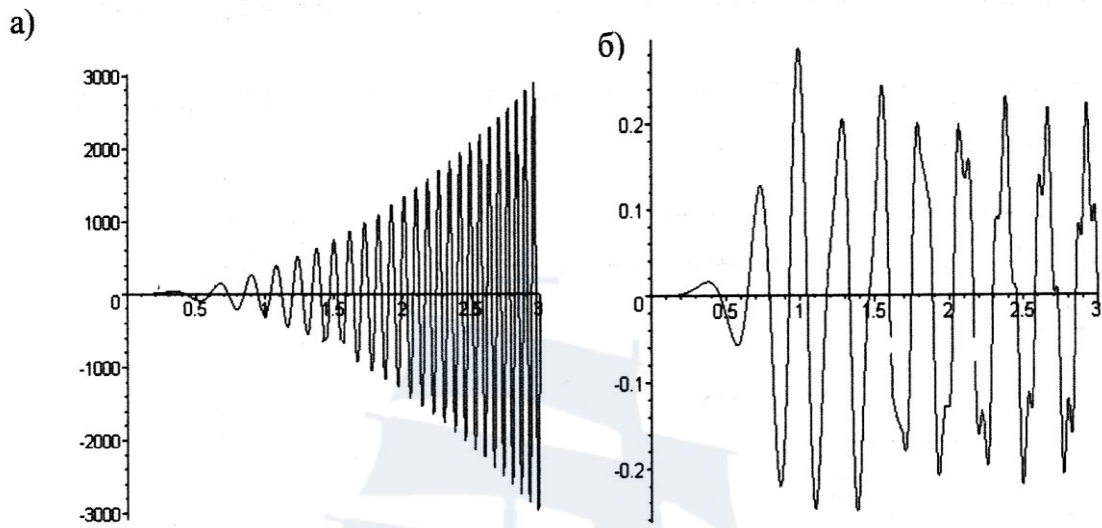


Рис. 2.12. Колебания балки при времени разгона $T_0 = 3$ с:
 а) график нарастания нагрузки $P(t)$;
 б) динамический коэффициент $\mu(t) = v(t)/v_{cm}$

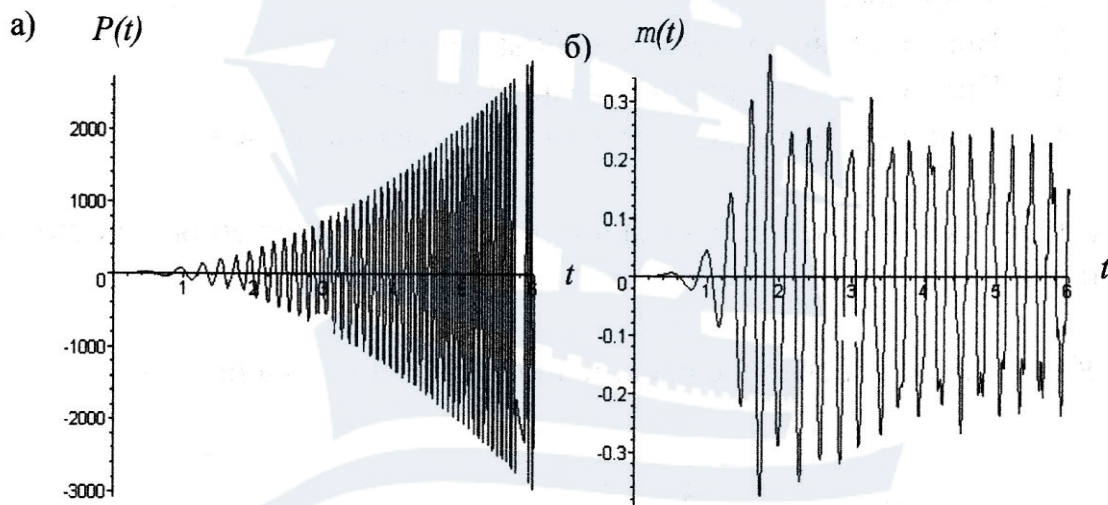


Рис. 2.13. Колебания балки при времени разгона $T_0 = 6$ с:
 а) график нарастания нагрузки $P(t)$;
 б) динамический коэффициент $\mu(t) = v(t)/v_{cm}$

Такое значение μ_{\max} достигается при $T_0 = 2$ с. Такое время разгона вполне можно обеспечить при включении электродвигателя.

Рассмотрим колебания системы после выключения двигателя. Время остановки двигателя $T_{\text{тор}}$. Примем, что угловая скорость вращения якоря двигателя уменьшается равномерно:

$$\omega = \omega_p \left(1 - \frac{t}{T_0}\right). \text{ Закон изменения нагрузки при } 0 \leq t \leq T_{\text{тор}}:$$

$$P(t) = m_0 e \omega^2 \sin(\omega t) = m_0 e \omega_p^2 (t/T_0)^2 \sin(\omega_p t (1 - t/T_0)).$$

После подстановки $P(t)$ и $k(t)$ в (2.32) находим перемещения:

$$v(t) = \frac{m_0 e \omega_p^2}{m p T_0^2} \int_0^t \exp\left(-\frac{\gamma}{2} p(t-\tau)\right) \cdot \sin p(t-\tau) \cdot \sin\left(\omega_p \tau \left(1 - \tau/T_{\text{тор}}\right)\right) \cdot \left(1 - \tau/T_{\text{тор}}\right)^2 d\tau.$$

Решение этого интеграла проведем с помощью программного пакета EXCEL. Ниже на рис. 2.14-2.17 для различных времен разгона приведены графики функций нагрузки $P(t)$, коэффициента $\mu(t) = v(t)/v_{\text{ст}}$, где статические перемещения от амплитудного значения нагрузки в рабочем режиме $v_{\text{ст}} = P_p \delta_{11} = 3000 \cdot 1,31 \cdot 10^{-6} = 0,00393 \text{ м} = 3,93 \text{ мм}$.

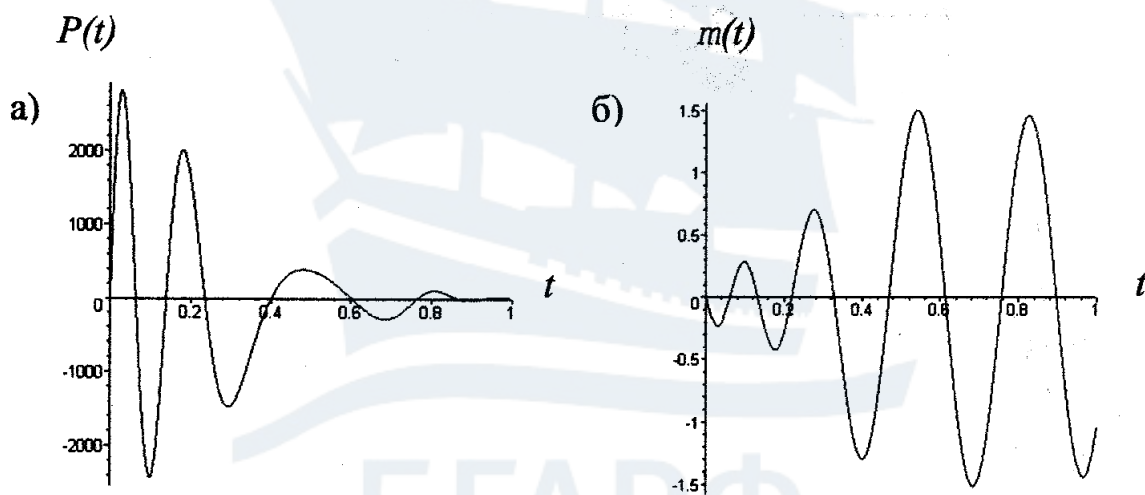


Рис. 2.14. Колебания балки при времени торможения $T_0 = 1 \text{ с}$:
 а) график убывания нагрузки $P(t)$;
 б) динамический коэффициент $\mu(t) = v(t)/v_{\text{ст}}$

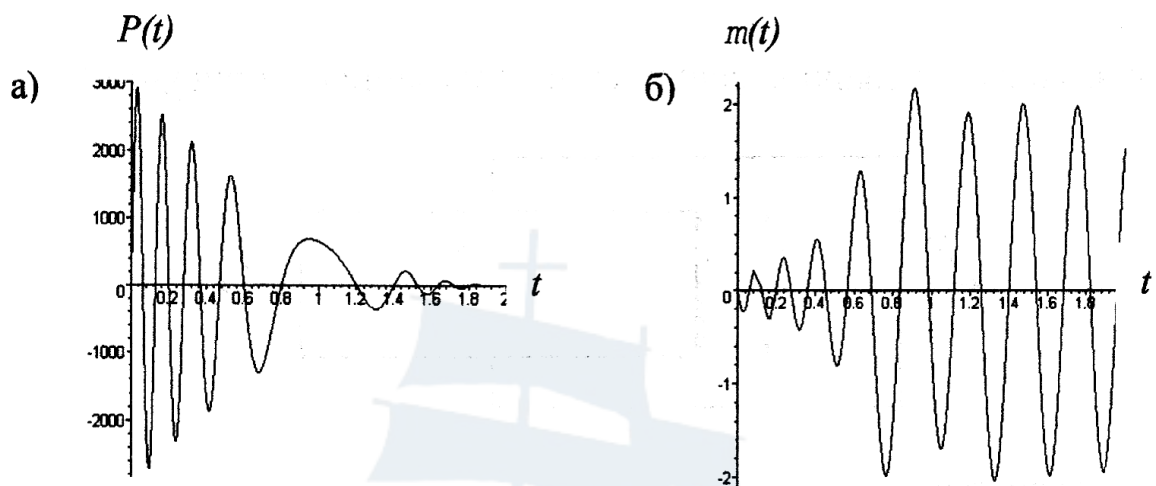


Рис. 2.15. Колебания балки при времени торможения $T_0 = 2$ с:
 а) график убывания нагрузки $P(t)$;
 б) динамический коэффициент $\mu(t) = v(t)/v_{cm}$

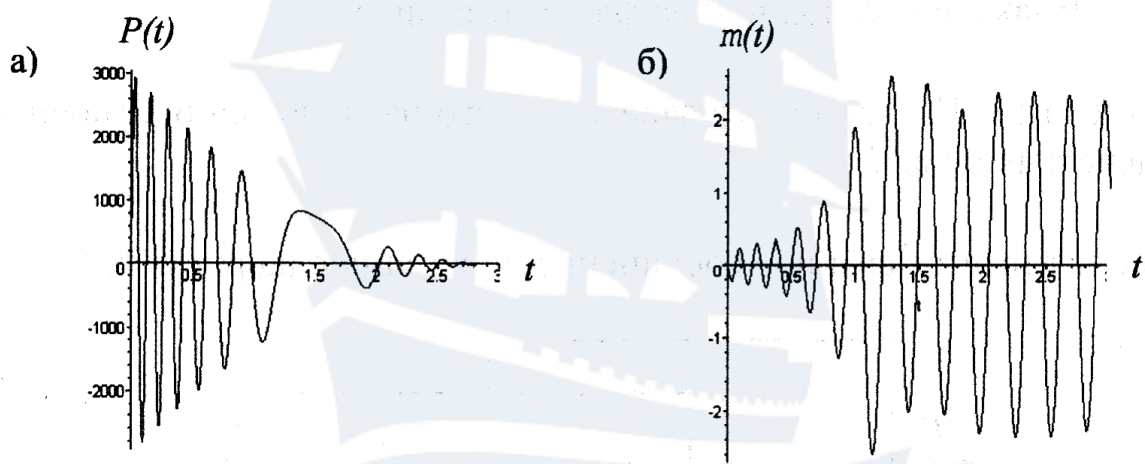


Рис.2. 16. Колебания балки при времени торможения $T_0 = 3$ с:
 а) график убывания нагрузки $P(t)$;
 б) динамический коэффициент $\mu(t) = v(t)/v_{cm}$

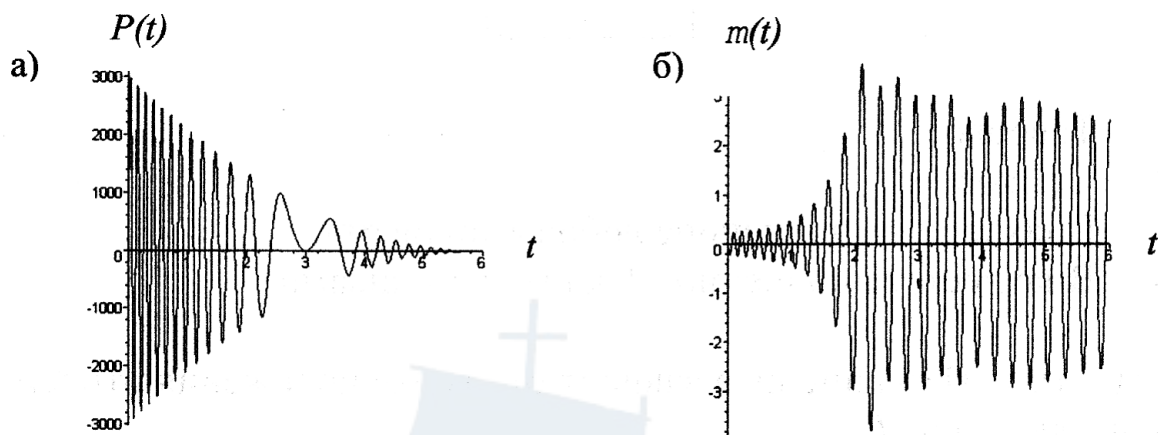


Рис. 2.17. Колебания балки при времени торможения $T_0 = 5$ с:
 а) график убывания нагрузки $P(t)$;
 б) динамический коэффициент $\mu(t) = v(t)/v_{cm}$

Из графиков на рис. 2.14-2.17 видно, что максимальные значения коэффициента $\mu(t) = \mu_{\max}$ при переходе через резонанс $\omega = p$ нарастают при увеличении времени торможения от $\mu_{\max} = 1,5$ при $T_0 = 1$ с до $\mu_{\max} = 3,4$ при $T_0 = 6$ с. Найденный выше динамический коэффициент для системы в рабочем режиме $\mu = 0,228$.

Таким образом, чтобы снизить динамическое воздействие, необходимо обеспечить очень быструю остановку двигателя, что на практике не всегда возможно сделать быстрее 1-2-х секунд. Примем $T_{\text{тор}} = 2$ с, тогда $\mu_{\max} = 2$ (см. рис. 2.15). Увеличение внутреннего трения практически не изменит величину μ_{\max} . На рис. 2.18 приведен график, из которого находим то же значение $\mu_{\max} = 2$ при коэффициенте потерь $\gamma = 0,025$, который рекомендован нормами (табл. 2.1).

Итак, наиболее опасным воздействием на систему является переходный процесс при торможении двигателя. Динамический коэффициент при этом равен $\mu = \mu_{\max} = 2$.

Загружая балку нагрузкой mg и динамической силой μP_p находим наибольший изгибающий момент:

$$M_{\max} = \frac{(mg + \mu P_p)ab}{l} = \frac{(1500 \cdot 9,81 + 2 \cdot 3000) \cdot 2 \cdot 4}{6} = 27620 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

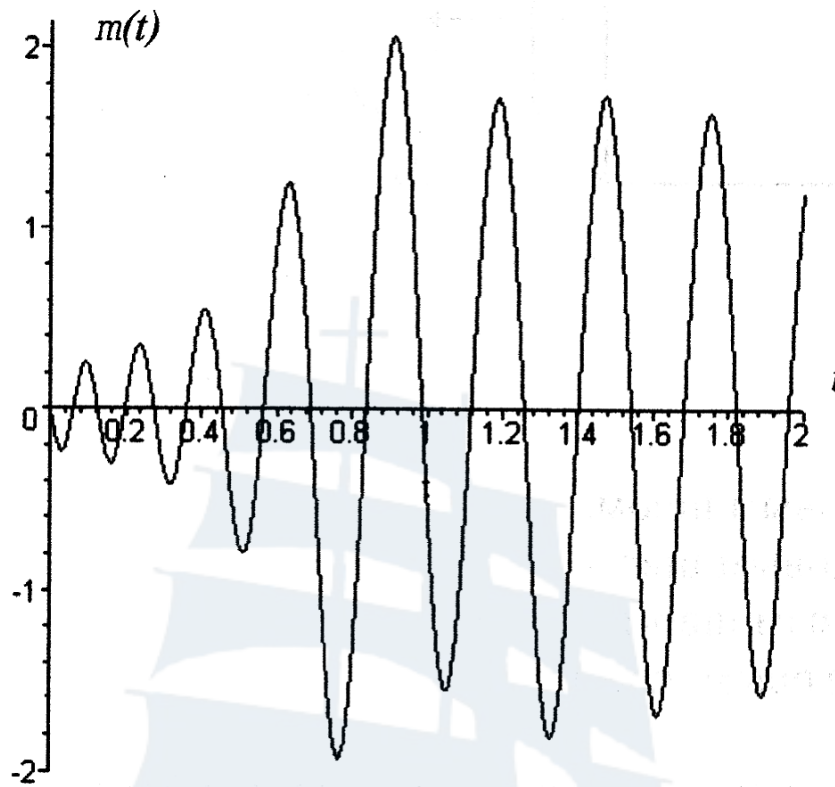


Рис. 2.18. График $\mu(t)$ при $T_{\text{тор}} = 2$ с, $\gamma = 0,025$

Наибольшие нормальные напряжения в балке равны:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W} = \frac{27620}{143 \cdot 10^{-6}} = 193 \text{ МПа.}$$

БГАРФ

3. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ

Нахождение частот свободных колебаний систем с конечным числом степеней свободы связано с составлением и решением характеристических (частотных) уравнений. При числе степеней свободы системы более трех, процесс раскрытия определителя усложняется. В ряде случаев определение всех частот свободных колебаний системы оказывается излишним и достаточно отыскать только первую частоту колебаний.

Методы расчета систем становятся тем более громоздкими, чем сложнее структура рассчитываемой системы. Поэтому возникает необходимость в способах, позволяющих достаточно просто рассчитывать и сложные системы.

Один из возможных путей состоит в применении простых приближенных формул (например, формулы Рэлея). В этом случае задают форму колебаний системы, сводя её таким образом к системе с одной степенью свободы. При удачной аппроксимации получают достаточно точное значение низшей собственной частоты системы, однако, другие её динамические характеристики остаются нераскрытыми.

Схематизация реальной системы, как имеющей несколько степеней свободы, достигается в *методе Рэлея-Ритца*, при использовании которого форма колебаний системы задаётся в виде выражения, включающего несколько параметров.

Другим приёмом, позволяющим свести реальную систему к системе с конечным числом степеней свободы, является *метод прямой дискредитации*. Чем больше число элементов, на которые разбита система при использовании этого метода, тем ближе расчётная схема к исходной системе. Вместе с тем, если элементы выбраны однотипными, то даже при большом их числе оказывается возможным реализовать расчёт колебаний, используя *матричные методы* с применением ЭВМ. Примерами таких методов являются *метод начальных параметров* в форме матриц перехода и *метод прогонки*.

При динамических расчётах конструкций сложной конфигурации также широко используется *метод конечных элементов*.

В том случае, когда сложную колебательную систему можно разделить на несколько подсистем, динамические характеристики которых определяются сравнительно просто, полезными являются методы динамических податливостей и жёсткостей. Эти методы представляют собой обобщение на динамические задачи метода сил и метода перемещений строительной механики.

В *методе последовательных приближений* задача об определении собственных частот и форм колебаний сводится к многократному расчёту деформаций системы под действием известной статической нагрузки.

Рассмотрим некоторые из используемых приближенных методов.

3.1. Энергетический метод определения частот (метод Рэля)

Энергетический метод определения частот свободных колебаний основан на законе сохранения энергии. При колебаниях системы в любой момент времени сумма кинетической и потенциальной энергии остается постоянной, т. е.

$$T + U = \text{const.} \quad (3.1)$$

В каждом цикле колебаний происходит переход энергии одного вида в другой. В момент наибольшего отклонения массы от положения равновесия потенциальная энергия достигает наибольшего значения, а кинетическая энергия убывает до нуля. В любой момент перехода массы через положение равновесия потенциальная энергия деформации системы равна нулю, а кинетическая энергия достигает наибольшего значения. Из этого следует основное равенство энергетического метода:

$$T_{\max} = U_{\max}. \quad (3.2)$$

Подстановка в уравнение (3.2) выражений энергий дает возможность найти частоты колебаний.

Рассмотрим существо энергетического метода (метод Рэля) применительно к задачам о поперечных гармонических колебаниях балок. Величина отклонения в произвольной точке балки определяется выражением:

$$v(z, t) = v(z)\sin(\omega t + \varphi_0). \quad (3.3)$$

Функция $v(z)$ представляет собой форму колебаний, т. е. описывает изогнутую ось в момент, когда прогибы достигают максимального значения. Скорости точек оси балки определяются зависимостью:

$$\dot{v}(z, t) = \frac{dv(z, t)}{dt} = \omega v(z) \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (3.4)$$

Кинетическая энергия определяется по формуле:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m(z) \dot{v}^2 dz = \frac{1}{2} \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) \int_0^l m(z) v^2(z) dz. \quad (3.5)$$

Наибольшая величина кинетической энергии будет иметь место при $\cos(\omega t + \varphi_0) = 1$, тогда

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l m(z) \dot{v}^2 dz = \frac{1}{2} \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) \int_0^l m(z) v^2(z) dz. \quad (3.6)$$

Потенциальная энергия деформации изгиба стержня равна:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2(z)}{EJ(z)} dz = \frac{1}{2} \sin^2(\omega t + \varphi_0) \int_0^l EJ(z) (v''(z))^2 dz. \quad (3.7)$$

Наибольшее значение потенциальная энергия имеет при $\sin(\omega t + \varphi_0) = 1$, тогда

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ(z) (v''(z))^2 dz. \quad (3.8)$$

Приравняв выражение (3.6) и (3.8) и решив их относительно частоты, получим:

$$p^2 = \frac{\int_0^l EJ(z) (v''(z))^2 dz}{\int_0^l m(z) v^2(z) dz}. \quad (3.9)$$

Если система кроме распределенной массы имеет и сосредоточенные массы, то формула Рэлея (3.9) приобретет вид:

$$p^2 = \frac{\int_0^l EJ(z) (v''(z))^2 dz}{\int_0^l m(z) v^2(z) dz + \sum_{i=1}^n m_i v_i^2}. \quad (3.10)$$

где v_i – значение функции $v(z)$ в точке с координатой z_i , где расположена сосредоточенная масса m_i .

Формула Рэлея дает точное значение частоты при условии, что в неё подставлена истинная форма колебаний. Но так как форма колебаний заранее неизвестна, поэтому при практических расчетах необходимо её задавать. При задании уравнения изогнутой оси, необходимо стремиться к тому, чтобы лучше отразить ожидаемую форму колебаний и обеспечить выполнение граничных условий. При расчете балок рекомендуется в качестве формы колебаний принимать упругую линию от действующих на неё нагрузок.

Рэлеем доказано, что получаемое по *энергетическому методу* приближенное значение собственной частоты всегда выше истинного значения или равно ему.

Пример 1. Определить энергетическим методом собственную частоту колебаний невесомой балки с тремя сосредоточенными массами (рис. 3.1), приняв форму стоячей волны в виде синусоиды

$$v(z) = f \sin \frac{\pi z}{l}.$$

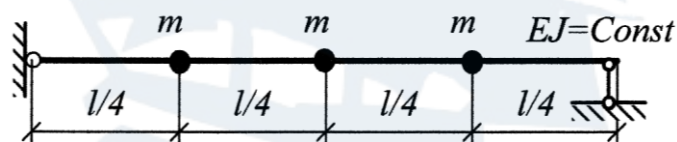


Рис. 3.1. Схема к примеру 1

Уравнение изогнутой оси балки при колебаниях в виде синусоиды удовлетворяет граничным условиям, т. е. при $z = 0$ и $z = l$ имеем $v = 0$ и $M = EJv'' = 0$. Так как на балке расположены только сосредоточенные массы, формула Рэлея принимает вид:

$$p^2 = \frac{\int_0^l EJ(z)(v''(z))^2 dz}{\sum_{i=1}^n m_i v_i^2}.$$

Находим

$$v''(z) = -f \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi z}{l}, \quad (v''(z))^2 = f^2 \frac{\pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{\pi z}{l}.$$

Числитель равен:

$$\int_0^l EJ(z)(v''(z))^2 dz = EJf^2 \frac{\pi^4}{l^4} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz = f^2 \frac{\pi^4 EJ}{2l^3}.$$

Для нахождения знаменателя вычислим прогибы под грузами:

$$v_1 = v_3 = f \sin \frac{\pi l}{l \cdot 4} = \frac{\sqrt{2}}{2} f, \quad v_2 = f \sin \frac{\pi l}{l \cdot 2} = f.$$

Знаменатель равен:

$$\sum_{i=1}^3 m_i v_i^2 = 2m \left(\frac{\sqrt{2}}{2} f \right)^2 + mf^2 = 2mf^2.$$

$$\text{Тогда } p^2 = \frac{f^2 \frac{\pi^4 EJ}{2l^3}}{2mf^2} = \frac{\pi^4 EJ}{4ml^3},$$

$$\text{откуда } p = \sqrt{\frac{\pi^4 EJ}{4ml^3}} = 4,93 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}.$$

Полученный результат совпадает с точным значением.

Пример 2. Найти частоту собственных колебаний консольной балки постоянного сечения (рис. 3.2), если m_0 – погонная масса балки. Форму колебаний принять в виде упругой линии от силы на свободном конце.

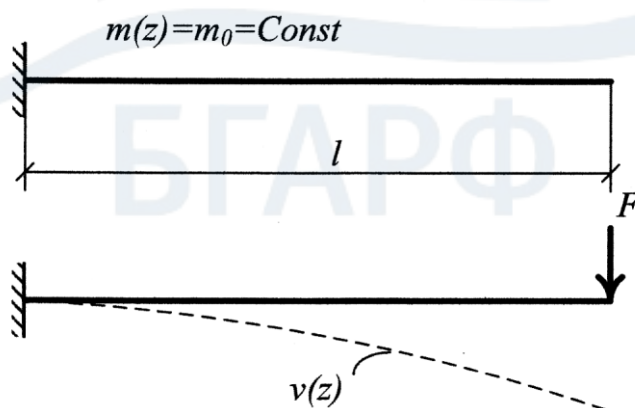


Рис. 3.2. К определению собственной частоты балки

Решение

Уравнение изогнутой оси балки от сосредоточенной силы имеет вид:

$$v(z) = \frac{F}{6EJ}(3lz^2 - z^3),$$

тогда $v''(z) = \frac{F}{EJ}(l - z)$.

Используя формулу Рэлея (3.9) для определения частоты, находим:

– числитель

$$\int_0^l EJ(z)(v''(z))^2 dz = \frac{F^2}{EJ} \int_0^l (l - z)^2 dz = \frac{F^2 l^3}{6EJ},$$

– знаменатель

$$\int_0^l m(z)v^2(z) dz = \frac{m_0 F^2}{36(EJ)^2} \int_0^l (3lz^2 - z^3) dz = \frac{11m_0 F^2 l^2}{420(EJ)^2}.$$

$$\text{Тогда } p^2 = \frac{\frac{F^2 l^3}{6EJ}}{\frac{11m_0 F^2 l^2}{420(EJ)^2}} = \frac{140}{11} \frac{EJ}{m_0 l^4},$$

откуда $p = \frac{3,57}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m_0}}$.

Точное решение $p = \frac{3,51}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m_0}}$.

Погрешность составляет 1,7 %.

Пример 3. Найти частоту собственных колебаний консольной балки постоянного сечения (рис. 3.2), если m_0 – погонная масса балки.

Решение

Примем уравнение изогнутой оси балки от сосредоточенной силы в виде:

$$v(z) = \frac{z^2}{l},$$

что удовлетворяет кинематическим граничным условиям на левом конце и одному из силовых условий на правом конце. Условие $v''(l) = \frac{2}{l} \neq 0$ здесь нарушено.

$$\text{Теперь } v''(z) = \frac{2}{l}.$$

Используя формулу Рэля (3.9) для определения частоты, находим:

– числитель

$$\int_0^l EJ(z)(v''(z))^2 dz = EJ \int_0^l \left(\frac{2}{l}\right)^2 dz = \frac{4EJ}{l},$$

– знаменатель

$$\int_0^l m(z)v^2(z) dz = m_0 \int_0^l \left(\frac{z^2}{l}\right)^2 dz = \frac{m_0 l^3}{5}.$$

$$\text{Тогда } p^2 = \frac{4EJ \cdot 5}{l \cdot m_0 l^3} = \frac{20EJ}{m_0 l^4},$$

$$\text{откуда } p = \frac{4,47}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m_0}}.$$

$$\text{Точное решение } p = \frac{3,51}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m_0}}.$$

Погрешность составляет 27,4 %.

Если задаться формой прогибов консоли в виде:

$$v(z) = \frac{z^2}{2l} - \frac{z^3}{3l^2} + \frac{z^4}{12l^3},$$

то все граничные условия будут соблюдены:

$$\begin{aligned} v(0) &= 0, & v'(0) &= 0, \\ v''(l) &= 0, & v'''(l) &= 0. \end{aligned}$$

Произведя необходимые выкладки, получим

$$p = \frac{3,64}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m_0}}.$$

Погрешность с точным решением составляет 3,4 %.

3.2. Метод Ритца

Зададимся несколькими функциями $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$, каждая из которых удовлетворяет геометрическим граничным условиям задачи, и образуем функцию $f(z)$ как сумму

$$f(z) = C_1 f_1(z) + C_2 f_2(z) + \dots + C_n f_n(z). \quad (3.11)$$

Если эту функцию подставить в формулу Рэля

$$p^2 = \frac{\int_0^l EJ (f'')^2 dz}{\int_0^l m f^2 dz}, \quad (3.12)$$

то результат будет зависеть от конкретного выбора коэффициентов C_1, C_2, \dots, C_n .

Метод Ритца основан на простой идее: коэффициенты C_1, C_2, \dots, C_n должны быть выбраны так, чтобы вычисление по (3.12) дало наименьшее значение для p^2 . Из теоремы Рэля вытекает, что такой выбор будет наилучшим (при данной системе функций f_i).

Условия минимума p^2 имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial C_i} \frac{\int_0^l EJ (f'')^2 dz}{\int_0^l mf^2 dz} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.13)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial C_i} \int_0^l EJ (f'')^2 dz \right] \left[\int_0^l mf^2 dz \right] - \left[\frac{\partial}{\partial C_i} \int_0^l mf^2 dz \right] \left[\int_0^l EJ (f'')^2 dz \right] = 0.$$

Разделив это уравнение на интеграл $\int_0^l mf^2 dz$ и учитывая (3.12), получим

$$\frac{\partial}{\partial C_i} \int_0^l \left[EJ (f'')^2 - p^2 mf^2 \right] dz = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.14)$$

Уравнения (3.14) однородны и линейны относительно C_1, C_2, \dots, C_n и их число равно числу членов выражения (3.11). Приравнявая к нулю определитель, составленный из коэффициентов при C_1, C_2, \dots, C_n , получим частотное уравнение. Это уравнение не только дает хорошее приближение для низшей частоты, но также определяет (хотя и с меньшей точностью) значения высших частот; при этом можно будет вычислить столько частот, сколько слагаемых принято в выражении (3.11).

Метод Ритца, как и метод Рэля, позволяет решить задачу в случаях разрывных функций EJ и m и когда эти функции представлены различными аналитическими выражениями на различных участках.

Иногда та же идея используется в иной форме. Например, при исследовании поперечных колебаний турбинных лопаток, они задаются функцией $f(z) = az^s$ (начало координат в закрепленном конце). Применяя затем формулу Рэля (3.12), получают частоту в виде зависимости от показателя степени s . Затем при помощи числовых расчетов определяют значение s , которому отвечает наименьшая частота. Это позволяет достаточно надежно определить как форму, так и частоту колебаний первого тона.

Пример 1. Определить методом Ритца низшую собственную частоту поперечных колебаний консоли переменного сечения, имеющей толщину, равную единице; высота изменяется по линейному закону:

$$h_z = \frac{z}{l} h, \quad J = \frac{h^3}{12l^3} z^3, \quad m = \frac{\rho h}{l} z,$$

где l – длина консоли.

Решение

Точное значение низшей частоты такой консоли вычислено Кирхгофом в виде:

$$p = \frac{2,657h}{l^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}}.$$

Для приближенного решения принимаем:

$$f(z) = C_1 f_1(z) + C_2 f_2(z) + \dots = C_1 \left(1 - \frac{z}{l}\right)^2 + C_2 \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z}{l}\right)^2 + \dots$$

Каждый член этого разложения удовлетворяет граничным условиям задачи:

$$\text{при } z = l, \quad f_i(z) = 0, \quad f'(z) = 0.$$

Если ограничиться одним членом разложения, то по методу Рэлея:

$$p = \frac{2,740h}{l^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}}.$$

При этом ошибка составляет около 3 %.

Чтобы получить лучшее приближение, возьмем два члена разложения, подставив их в (3.14):

$$\frac{h}{12l^3} \left[(C_1 - 2C_2)^2 + \frac{24}{5} C_2 (C_1 - 2C_2) + 6C_2^2 \right] - p^2 \frac{\rho h l}{E} \left[\frac{C_1^2}{30} + \frac{2C_1 C_2}{105} + \frac{C_2^2}{280} \right].$$

Дифференцируя это выражение по C_1 и C_2 поочередно, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} \left(\frac{Eh^2}{12\rho l^4} - \frac{p^2}{30} \right) C_1 + \left(\frac{Eh^2}{30\rho l^4} - \frac{p^2}{105} \right) C_2 = 0, \\ \left(\frac{Eh^2}{30\rho l^4} - \frac{p^2}{105} \right) C_1 + \left(\frac{Eh^2}{30\rho l^4} - \frac{p^2}{280} \right) C_2 = 0. \end{cases}$$

Приравнивая нулю определитель, составленный из коэффициентов этих уравнений, получим:

$$\begin{vmatrix} \frac{Eh^2}{12\rho l^4} - \frac{p^2}{30} & \frac{Eh^2}{30\rho l^4} - \frac{p^2}{105} \\ \frac{Eh^2}{30\rho l^4} - \frac{p^2}{105} & \frac{Eh^2}{30\rho l^4} - \frac{p^2}{280} \end{vmatrix} = 0$$

или
$$\left(\frac{Eh^2}{12\rho l^4} - \frac{p^2}{30} \right) \left(\frac{Eh^2}{30\rho l^4} - \frac{p^2}{280} \right) - \left(\frac{Eh^2}{30\rho l^4} - \frac{p^2}{105} \right)^2 = 0.$$

Данное уравнение представляет собой частотное уравнение, меньший корень которого

$$p = \frac{2,660h}{l^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}},$$

что отличается от точного решения на 0,11 %.

3.3. Метод Граммеля

Принимая форму колебаний подобной статическим прогибам системы от некоторой подходящей нагрузки, можно существенно увеличить точность расчёта за счёт исключения операции дифференцирования. Еще большая точность достигается в методе Граммеля, в котором дифференцирование заменяется интегрированием. Последовательность операций здесь такова:

1. Задают форму колебаний и вычисляют максимальную кинетическую энергию движения:

$$T_{\max} = \frac{1}{2} p^2 \sum_{i=1}^n m_i x_i^2.$$

2. Определяют максимальные силы инерции:

$$F_i = p^2 m_i x_i.$$

3. Определяют внутренние силы в элементах системы, вызываемые нагрузками F_i .

4. По внутренним силам вычисляют максимальную потенциальную энергию деформации Π_0 .

5. Из равенства $T_{\max} = \Pi_0$ определяют частоту колебаний.

Пример 1.

Применим метод Граммеля для вычисления частоты колебаний консольной балки. Принимая $x = (z/l)^2$ находим:

$$T_{\max} = \frac{1}{2} p^2 \int_0^l m_0 x^2 dz = \frac{1}{2} p^2 \int_0^l m_0 \left(\frac{z}{l} \right)^4 dz = \frac{p^2 m_0 l^4}{10},$$

где m_0 – масса единицы длины консоли.

Интенсивность сил инерции:

$$q = p^2 m_0 \left(\frac{z}{l} \right)^2.$$

Поперечная сила в сечении:

$$Q = - \int_z^l q dz = - \frac{p^2 m_0}{3l^2} (l^3 - z^3).$$

Изгибающий момент:

$$M = - \int_z^l Q dz = \frac{p^2 m_0}{12l^2} (3l^4 - 4l^3 z + z^4).$$

Потенциальная энергия деформации:

$$\Pi_0 = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EJ} dz = \frac{13}{1620} \frac{p^4 m_0^2 l^5}{EJ}.$$

Приравнивая $T_{\max} = \Pi_0$, находим:

$$\frac{p^2 m_0 l^4}{10} = \frac{13}{1620} \frac{p^4 m_0^2 l^5}{EJ},$$

откуда
$$p = \sqrt{\frac{1620EJ}{130m_0 l^4}} = \frac{3,530}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m_0}},$$

что отличается от точного решения на 0,42 %.

3.4. Метод переноса масс (метод Донкерлея)

Рассмотрим предварительно систему с одной степенью свободы (невесомую балку с сосредоточенной массой), представленную на рис. 3.3, *а*. Частота собственных колебаний данной системы равна:

$$p_i = \sqrt{\frac{1}{m_i \delta_{ii}}}, \quad (3.15)$$

где δ_{ii} – перемещение точки первоначального приложения массы от единичной силы, приложенной в той же точке.

Перенесем массу m_i в другую точку (рис. 3.3, *б*) с некоторым поправочным коэффициентом K_i . В этом случае частота колебаний новой системы равна:

$$p_* = \sqrt{\frac{1}{m_i \delta_* K_i}}, \quad (3.16)$$

где δ_* – перемещение точки приложения массы $m_* = m_i K_i$, от единичной силы, приложенной в этой точке. Коэффициент K_i найдем из условия равенства частот колебаний двух систем, определяемых выражениями (3.15) и (3.16):

$$\sqrt{\frac{1}{m_i \delta_{ii}}} = \sqrt{\frac{1}{m_i \delta_* K_i}},$$

откуда
$$K_i = \frac{\delta_{ii}}{\delta_*}. \quad (3.17)$$

Таким образом, частота свободных колебаний не изменится, если массу перенести в любую другую точку с поправочным коэффициентом. Отметим, что этот прием является точным при отсутствии на балке других масс, кроме переносимой.

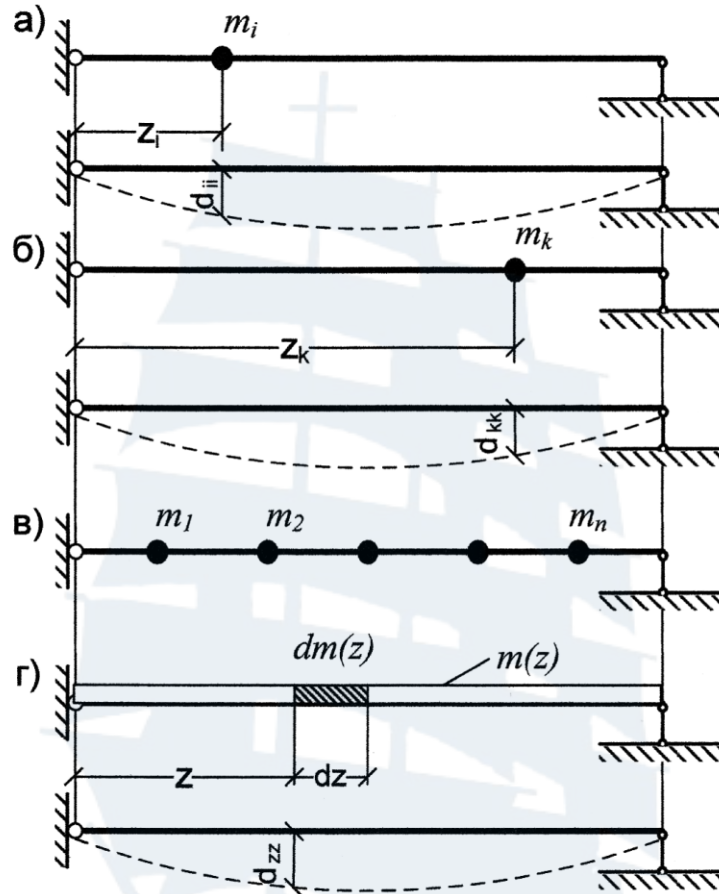


Рис. 3.3. К выводу формулы Донкерлея

Распространим этот прием на случай, когда система содержит несколько масс (рис. 3.3, в). Соберем все массы в одну точку, т. е. заменим систему с n степенями свободы (рис. 3.3, в) системой с одной степенью свободы (рис. 3.3, б). Для каждой из этих масс будем пользоваться соответствующим поправочным коэффициентом, тогда общая эквивалентная масса равна:

$$m_* = m_1 K_1 + m_2 K_2 + \dots + m_n K_n = m_1 \frac{\delta_{11}}{\delta_*} + m_2 \frac{\delta_{22}}{\delta_*} + \dots + m_n \frac{\delta_{nn}}{\delta_*}$$

или
$$m_* = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\delta_{ii}}{\delta_*}. \quad (3.18)$$

Полагая, что исходная балка с n массами и балка с одной массой имеют равные частоты, найдем приближенное значение частоты колебаний:

$$p = \sqrt{\frac{1}{m_* \delta_*}} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n m_i \delta_{ii}}} \quad (3.19)$$

$$\text{или } \frac{1}{p^2} = \sum_{i=1}^n m_i \delta_{ii} = m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22} + \dots + m_n \delta_{nn}. \quad (3.20)$$

Полученное выражение (3.20) (формула Донкерлея) служит для приближенного определения основной частоты колебаний с сосредоточенными массами.

В случае, когда имеется распределенная масса (рис. 3.3, з), формула Донкерлея принимает вид:

$$\frac{1}{p^2} = \int_0^l m(z) \delta_{zz} dz, \quad (3.21)$$

где δ_{zz} – перемещение точки положения бесконечно малой массы от единичной силы, приложенной по направлению колебаний.

Формула Донкерлея не учитывает взаимное влияние масс, однако, в большинстве случаев дает приемлемую точность, при этом не требуется выбирать и фиксировать точку приведения.

Доказано, что метод переноса масс дает всегда заниженные частоты.

Пример 1. Найти низшую частоту собственных колебаний системы (рис. 3.4, а) по формуле Донкерлея. Массой балки пренебречь.

Значение низшей частоты колебаний находим согласно формуле:

$$\frac{1}{p^2} = \sum_{i=1}^3 m_i \delta_{ii} = m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22} + m_3 \delta_{33}.$$

Определение перемещений осуществим по формуле Мора, предварительно построив эпюры от единичных сил по направлению колебаний каждой массы (рис. 3.4, б):

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EJ} dz = \frac{3l^3}{256EJ},$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2}{EJ} dz = \frac{l^3}{48EJ},$$

$$\delta_{33} = \sum \int \frac{\bar{M}_3 \bar{M}_3}{EJ} dz = \frac{3l^3}{256EJ}.$$

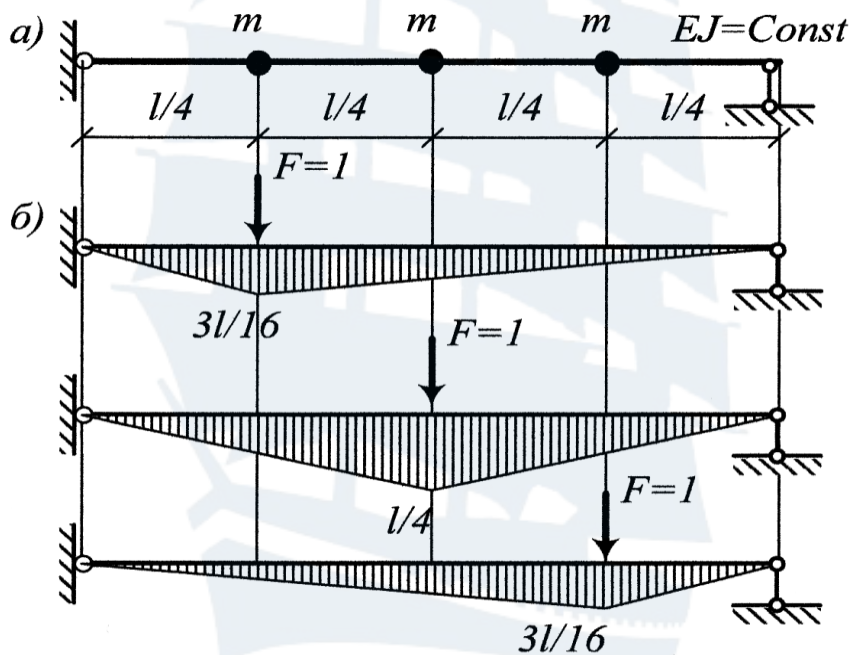


Рис. 3.4. К определению частоты основного тона

Находим

$$\frac{1}{p^2} = 2m \frac{3l^3}{256EJ} + m \frac{l^3}{48EJ} = \frac{17ml^3}{384EJ}.$$

Тогда
$$p = \sqrt{\frac{384EJ}{17ml^3}} = 4,75 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}.$$

Точное значение первой частоты собственных колебаний, полученное в разделе 3.1, равно $p = 4,93\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$ и погрешность составляет 0,43 %.

Пример 2. Определить низшую частоту собственных колебаний балки с распределенной массой и двумя сосредоточенными массами (рис. 3.5).

m_0 – погонная масса, $EJ = const$.

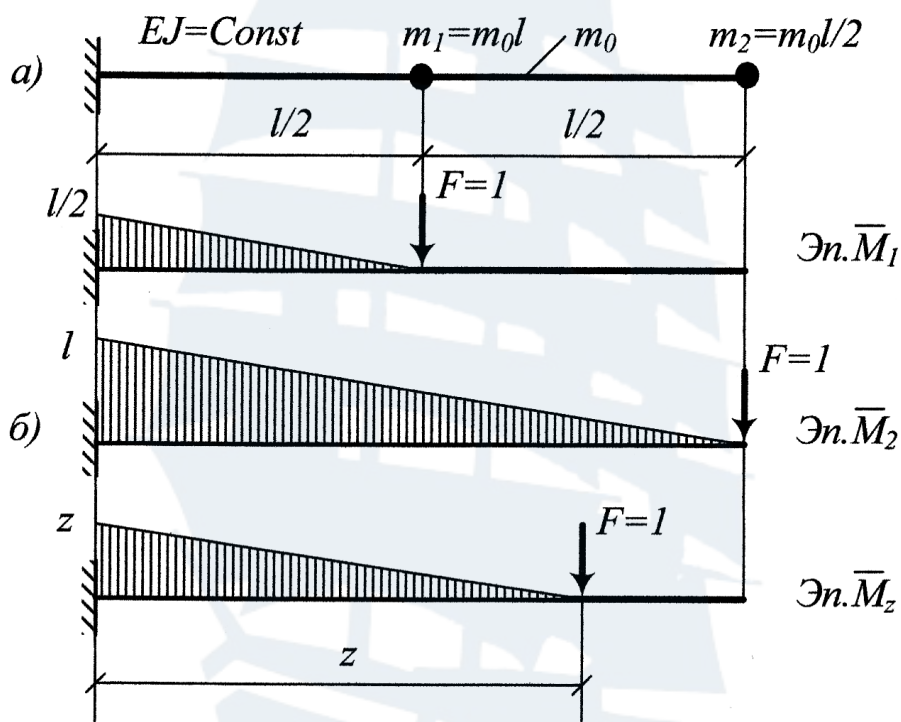


Рис. 3.5. К определению первой собственной частоты

По формуле Донкерлея низшая частота определяется:

$$\frac{1}{p^2} = \sum m_i \delta_{ii} + \int_0^l m(z) \delta_{zz} dz.$$

Находим перемещения, используя эпюры от единичных сил (рис. 3.5, б):

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EJ} dz = \frac{l^3}{24EJ},$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2}{EJ} dz = \frac{l^3}{3EJ},$$

$$\delta_{zz} = \sum \int \frac{\bar{M}_z \bar{M}_z}{EJ} dz = \frac{z^3}{3EJ}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \frac{1}{p^2} &= m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22} + m_0 \int_0^l \delta_{zz} dz = \\ &= m_0 l \frac{l^3}{24EJ} + \frac{m_0 l}{2} \frac{l^3}{3EJ} + \frac{m_0 l^4}{12EJ} = \frac{7m_0 l^4}{24EJ}. \end{aligned}$$

Значение низшей частоты собственных колебаний равно:

$$p = \sqrt{\frac{24EJ}{7m_0}} = \frac{1,85}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m_0}}.$$

3.5. Метод последовательных приближений

Рассмотрим метод последовательных приближений определения собственной частоты для случая изгибных колебаний системы с сосредоточенными массами.

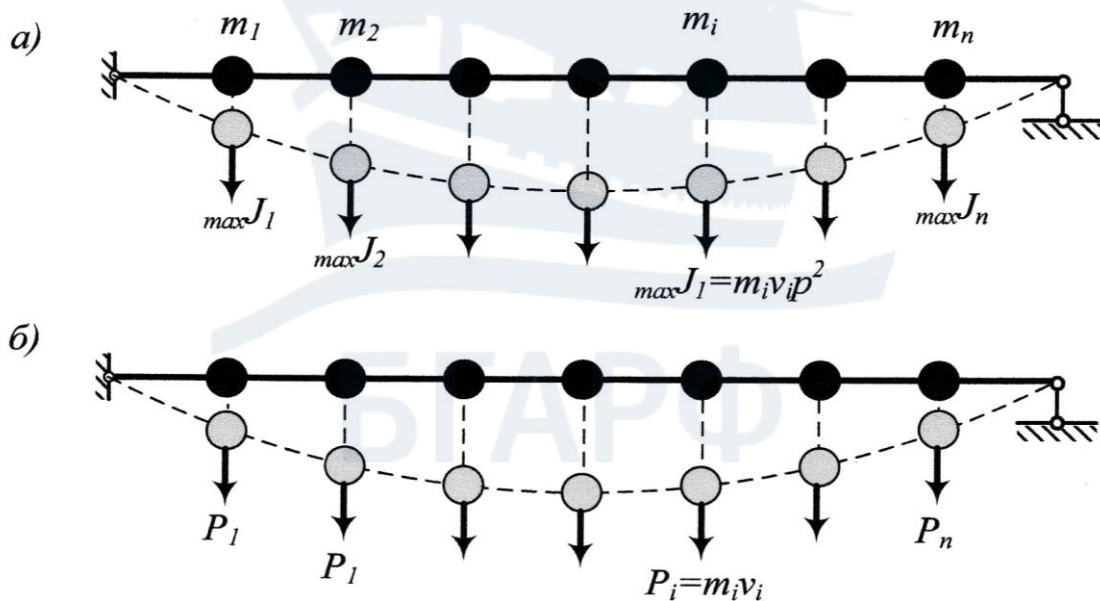


Рис. 3.5. К определению собственной частоты методом последовательных приближений

При амплитудном состоянии системы (рис. 3.5, *a*) силы инерции принимают максимальное значение $J_i = m_i v_i p^2$. Состояние крайнего отклонения, когда скорости равны нулю, можно рассматривать как результат статического действия амплитудных значений инерционных сил.

Представим эту же систему (рис. 3.5, *б*) под действием условных сил $P_i = m_i v_i$, каждая из которых в p^2 раз меньше сил инерции. Сопоставляя эти два вида загрузки одной и той же системы, получим, что перемещения i -й точки отличаются друг от друга множителем p^2 , т. е. $v_i = v_i^* p^2$. Таким образом, если известны v_i и v_i^* , тогда

$$p^2 = \frac{v_i}{v_i^*}, \quad \text{откуда} \quad p = \sqrt{\frac{v_i}{v_i^*}}. \quad (3.22)$$

По формуле (3.22) можно определять точные значения частоты при известной форме колебаний. Но так как форма колебаний неизвестна, поэтому ею приходится задаваться и искать решение, близкое к точному, путем пересчетов с последовательным приближением.

Для определения частоты колебаний методом последовательных приближений можно применить следующую схему вычислений.

1. Назначаются перемещения v_i в точках, где расположены сосредоточенные массы, примерно соответствующие форме изогнутой оси системы при колебаниях.

2. Вычисляются условные силы $P_i^{(1)} = m_i v_i^{(1)}$, которыми загружается система, и определяются перемещения $v_i^{(2)}$, т. е. v_i^* .

3. Определяется частота в первом приближении по формуле:

$$p^{(1)} = \sqrt{\frac{v_i^{(1)}}{v_i^{(2)}}}.$$

Обычно при определении частоты берется отношение перемещений i -й точки, в которой перемещения достигают наибольшего значения, т. е.

$$p^{(1)} = \sqrt{\frac{v_{i \max}^{(1)}}{v_{i \max}^{(2)}}}.$$

4. Пересчитываются силы $P_i^{(1)} = m_i v_i^{(1)}$ и от них определяются перемещения $v_i^{(3)}$. Затем находятся частоты колебаний во втором приближении:

$$p^{(2)} = \sqrt{\frac{v_{i\max}^{(2)}}{v_{i\max}^{(3)}}}.$$

Процесс пересчета продолжается до тех пор, пока вычисляемые последовательно величины частот не получаются равными или близкими друг другу.

Пример. Для балки с тремя сосредоточенными массами, представленной на рис. 3.5, а, определить частоту свободных колебаний методом последовательных приближений.

Назначим перемещения точек, где расположены массы, принимая первоначально уравнение изогнутой оси балки при колебаниях в виде:

$$v(z) = \frac{z(l-z)}{l}.$$

Тогда перемещения точек расположения масс будут иметь значения:

$$v_1^{(1)} = \frac{l}{4} \frac{l - \frac{l}{4}}{l} = \frac{3l}{16},$$

$$v_2^{(1)} = \frac{l}{2} \frac{l - \frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{4},$$

$$v_3^{(1)} = \frac{3l}{4} \frac{l - \frac{3l}{16}}{l} = \frac{3l}{16}.$$

Определим условные силы $P_i^{(1)} = m_i v_i^{(1)}$:

$$P_1^{(1)} = P_3^{(1)} = \frac{3ml}{16}, \quad P_2^{(1)} = \frac{ml}{4}.$$

Загружая балку силами $P_1^{(1)}$, $P_2^{(1)}$, $P_3^{(1)}$, определяем прогибы в точках, где сосредоточены массы:

$$y_1^{(2)} = \delta_{11}P_1^{(1)} + \delta_{12}P_2^{(1)} + \delta_{13}P_3^{(1)},$$

$$y_2^{(2)} = \delta_{21}P_1^{(1)} + \delta_{22}P_2^{(1)} + \delta_{23}P_3^{(1)},$$

$$y_3^{(2)} = \delta_{31}P_1^{(1)} + \delta_{32}P_2^{(1)} + \delta_{33}P_3^{(1)},$$

где δ_{ik} – перемещения, определяемые по формуле Мора перемножением единичных эпюр (рис. 3.5, б), соответственно равны:

$$\delta_{11} = \delta_{33} = \frac{3l^3}{256EJ}, \quad \delta_{22} = \frac{l^3}{48EJ},$$

$$\delta_{12} = \delta_{23} = \frac{11l^3}{768EJ}, \quad \delta_{13} = \delta_{31} = \frac{7l^3}{768EJ}.$$

Тогда

$$y_1^{(2)} = y_3^{(2)} = \frac{3l^3}{256EJ} \cdot \frac{3ml}{16} + \frac{11l^3}{768EJ} \cdot \frac{ml}{4} + \frac{7l^3}{768EJ} \cdot \frac{3ml}{16} = \frac{23ml^4}{3072EJ},$$

$$y_2^{(2)} = 2 \cdot \frac{11l^3}{768EJ} \cdot \frac{3ml}{16} + \frac{l^3}{48EJ} \cdot \frac{ml}{4} = \frac{65ml^4}{6144EJ}.$$

Вычислим частоту колебаний по соотношению прогибов во второй точке $p_1^{(1)} = \sqrt{\frac{y_2^{(1)}}{y_2^{(2)}}} = \sqrt{\frac{l \cdot 6144EJ}{4 \cdot 65ml^4}} = 4,861 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$.

Для последующей итерации найдем силы по формуле: $P_i^{(2)} = m_i v_i^{(2)}$:

$$P_1^{(2)} = P_3^{(2)} = \frac{23ml^4}{3172EJ},$$

$$P_2^{(2)} = \frac{65ml^4}{6144EJ}.$$

Вычисляя прогиб для второй точки, получим:

$$y_2^{(3)} = \delta_{21}P_1^{(2)} + \delta_{22}P_2^{(2)} + \delta_{23}P_3^{(2)} = \frac{11ml^3}{763EJ}.$$

Тогда частота колебаний равна:

$$p^{(2)} = \sqrt{\frac{y_2^{(2)}}{y_2^{(3)}}} = 4,930 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}.$$

Расхождение между значениями частот $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ незначительное, а после второй итерации получен практически точный результат.

3.6. Метод приведенной массы

Идея метода, заключается в замене системы с сосредоточенными массами m_i и распределенной массой $m(z)$ (рис. 3.6, а) системой с одной приведенной массой M (рис. 3.6, б).

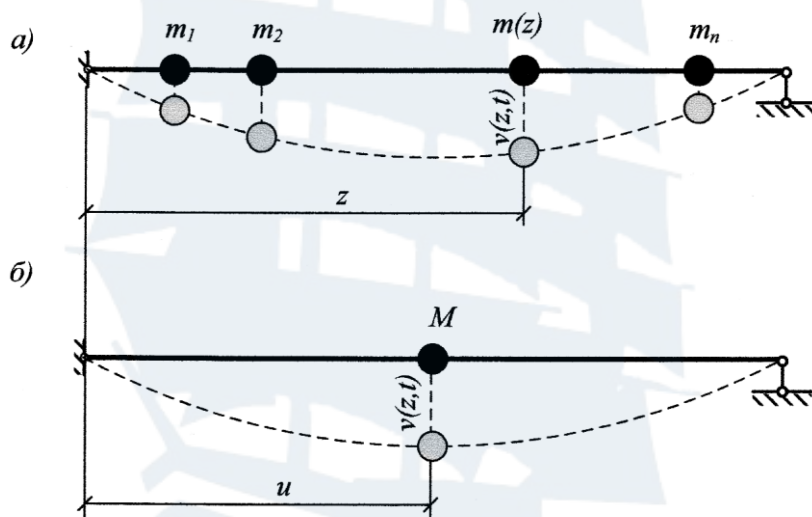


Рис. 3.6. К методу приведенной массы

Заменяющая система должна быть динамически эквивалентно заданной. Для этого необходимо найти такую сосредоточенную массу, которая создает частоту колебаний, близкую к первой частоте заданной системы. Определение приведенной массы производится из условия равенства кинетических энергий этих двух систем.

Предположим, что уравнения упругой оси при колебаниях системы со многими степенями свободы (рис. 3.6, а) имеет вид:

$$v(z, t) = v(z)F(t). \quad (3.23)$$

Взяв первую производную по времени от этого выражения, получим значение скорости:

$$\dot{v} = \dot{v}(z, t) = v(z) \frac{dF(t)}{dt}. \quad (3.24)$$

Тогда кинетическая энергия заданной системы T_1 , будет равна:

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_0^l m(z) [v(z)]^2 \left[\frac{dF(t)}{dt} \right]^2 dz + \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 \left[\frac{dF(t)}{dt} \right]^2. \quad (3.25)$$

Рассмотрим ту же систему с приведенной массой M , расположенной при $z = a$. Ординаты стоячей волны представим выражением:

$$v(z, t) = v_a F(t), \quad (3.26)$$

где a – амплитуда колебания точки приложения приведенной массы. Скорость колебания этой точки:

$$\dot{v} = \dot{v}(z, t) = v_a \frac{dF(t)}{dt}. \quad (3.27)$$

Тогда кинетическая энергия заменяющей системы T_2 определится согласно выражению:

$$T_2 = \frac{1}{2} M \dot{v}^2 = \frac{1}{2} M v_a^2 \left[\frac{dF(t)}{dt} \right]^2. \quad (3.28)$$

Из равенства кинетических энергий двух систем определяется приведенная масса:

$$M = \frac{\int_0^l m(z) v^2(z) dz + \sum m_i v_i^2}{v_a^2}. \quad (3.29)$$

Как видно из выражения (3.29), для получения приведенной массы необходимо знать уравнение изогнутой оси балки при её колебаниях. Но так как это уравнение неизвестно, то им придется задаваться. Слабой стороной этого метода является и неопределенность выбора места для приведенной массы. В балке на двух опорах обычно принято помещать приведенную массу по середине пролета.

Зная приведенную массу, находится первая частота свободных колебаний как в системе с одной степенью свободы:

$$p = \sqrt{\frac{1}{M\delta_{11}}}, \quad (3.30)$$

где δ_{11} – перемещение по направлению колебаний приведенной массы от единичной силы.

Пример. Определить первую частоту колебаний шарнирно опертой балки с равномерно распределенной массой m_0 , располагая приведенную массу в середине пролета.

Решение

Приведенную массу определяем по формуле:

$$M = \frac{\int_0^l m(z)v^2(z)dz}{v_a^2}.$$

Зададимся $v(z)$ в виде упругой линии от сосредоточенной силы в середине пролета:

$$v(z) = f \left(3\frac{z}{l} - 4\frac{z^3}{l^3} \right),$$

где $f = \frac{Pl^3}{48EJ}$.

Тогда числитель равен:

$$\int_0^l m(z)v^2(z)dz = 2m_0f^2 \int_0^l \left(\frac{4z^3}{l^3} - \frac{3z}{l} \right) dz = \frac{17}{35} f^2 m_0 l.$$

Знаменатель (при $z = l/2$) $v_a^2 = f^2$.

Приведенная масса равна $M = \frac{17}{35} m_0 l$.

Учитывая, что $\delta_{11} = \frac{l^3}{48EJ}$, получим значение низшей частоты свободных колебаний:

$$p = \sqrt{\frac{1}{M\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{35}{17m_0l} \cdot \frac{48EJ}{l^3}} = \frac{9,94}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m_0}}.$$

Точное значение частоты колебаний равно:

$$p = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m_0}} = \frac{9,87}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m_0}}.$$

Погрешность составляет 0,7 %.

3.7. Метод замены распределенных масс сосредоточенными

При использовании данного способа распределенная масса заменяется массами, сосредоточенными в отдельных точках. Таким образом, система с бесконечным числом степеней свободы приводится к системе с конечным числом степеней свободы. Замену распределенной массы сосредоточенными можно выполнить двумя способами (рис. 3.7).

По первому способу распределенные массы разбиваются на участки, и на каждом участке распределенная масса заменяется сосредоточенной в центре её тяжести (рис. 3.7, б). По второму способу массы на участках распределяются по закону рычага (рис. 3.7, в). Для некоторых систем этот метод дает удовлетворительный результат при вычислении первой частоты колебаний и может привести к существенным погрешностям при нахождении высших частот.

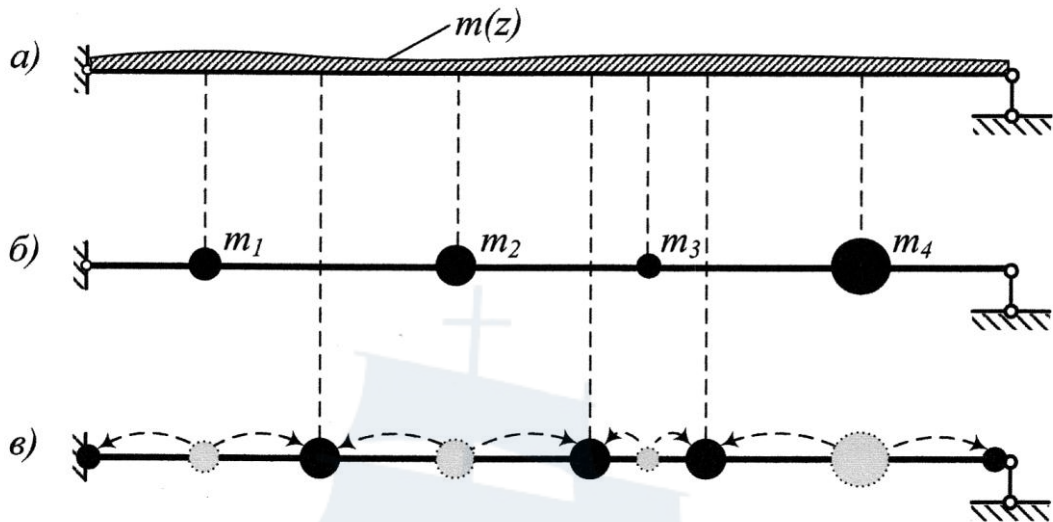


Рис. 3.7. Замена распределенной массы сосредоточенными

В системе с n степенями свободы первую частоту колебаний можно определить приближенно по неравенству, установленному Бернштейном:

$$\frac{1}{\sqrt{B_2}} < p^2 < \frac{1}{\frac{B_1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{2B_2}{B_1^2} - 1} \right)}. \quad (3.31)$$

где $B_1 = \sum m_i \delta_{ii} = m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22} + \dots + m_n \delta_{nn}$,

$$B_2 = \sum m_i^2 \delta_{ii}^2 + 2 \sum m_i m_k \delta_{ik}^2, \quad \text{при } i \neq k.$$

Здесь δ_{ii} и δ_{ik} – главные и, соответственно, побочные перемещения системы от действия единичных сил в точках приложения сосредоточенных масс. С приемлемой точностью можно считать, что частота равна:

$$p^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{B_2}} + \frac{1}{\frac{B_1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{2B_2}{B_1^2} - 1} \right)} \right]. \quad (3.32)$$

Для верхнего предела низшей частоты колебаний А.Ф. Смирновым предложена более простая формула:

$$p < \sqrt{\frac{B_1}{B_2}}. \quad (3.33)$$

Пример. Определить частоту колебаний шарнирно опертой балки с равномерно распределенной массой m_0 , заменив её тремя сосредоточенными массами $m_1 = m_2 = m_3 = m_0 l / 4$ (рис. 3.3, а).

Учитывая ранее найденные значения перемещений, найдем значения B_1 и B_2 , входящие в выражение (3.32),

$$\begin{aligned} B_1 &= m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22} + m_3 \delta_{33} = \frac{m_0 l}{4} (\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33}) = \\ &= \frac{m_0 l}{4} \frac{l^3}{EJ} \left(\frac{3}{256} \cdot 2 + \frac{1}{48} \right) = 0,011068 \frac{m_0 l^4}{EJ}, \\ B_2 &= \sum m_i m_k \delta_{ik}^2 = m_1^2 \delta_{11}^2 + m_2^2 \delta_{22}^2 + m_3^2 \delta_{33}^2 + \\ &+ 2(m_1 m_2 \delta_{12}^2 + m_1 m_3 \delta_{13}^2 + m_2 m_3 \delta_{23}^2) = \\ &= \frac{m_0^2 l^2}{16} \frac{l^6}{(EJ)^2} \left[\left(\frac{3}{256} \right)^2 \cdot 2 + \left(\frac{1}{48} \right)^2 \right] + \\ &+ 2 \cdot \frac{m_0^2 l^2}{16} \frac{l^6}{(EJ)^2} \left[\left(\frac{11}{768} \right)^2 \cdot 2 + \left(\frac{7}{768} \right)^2 \right] = 0,0001058 \frac{m_0 l^8}{(EJ)^2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$p^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{EJ}{m_0 l^2} \left[\frac{1}{\sqrt{0,0001058}} + \frac{1}{0,011068 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{2 \cdot 0,0001058}{(0,011068)^2} - 1} \right)} \right].$$

Окончательно имеем:

$$p = \frac{9,868}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m_0}}.$$

Применяя формулу (3.33), получим

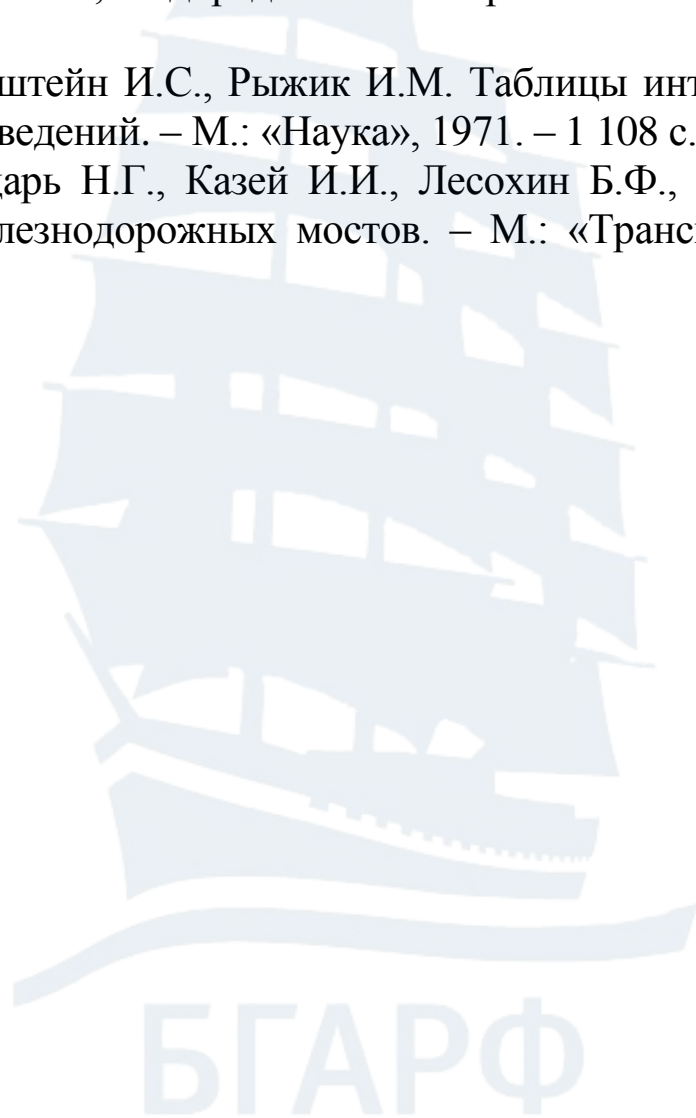
$$p < \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} = \frac{10,228}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m_0}},$$

что дает погрешность с предыдущим результатом 3,6 %.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безухов Н.И., Лужин О.В., Колкунов Н.В. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах. – М.: Стройиздат, 1969. – 424 с.
2. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1986. – 607 с.
3. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. Пер. с англ. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
4. Клейн Г.К., Рекач В.Г., Розенблат Г.И. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. – М.: Высшая школа, 1972. – 320 с.
5. Киселёв В.А. Строительная механика. Спец. курс. Динамика и устойчивость сооружений. – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.
6. Цейтлин А.И., Кусаинов А.А. Методы учета внутреннего трения в динамических расчетах конструкций. – «Наука» Казахской ССР. – Алма-Ата, 1987. – 238 с.
7. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с.
8. Прокофьев И.П., Смирнов А.Ф. Теория сооружений. – Ч.3. – М.: Трансжелдориздат, 1948. – 243 с.
9. Синицин А.П. Метод конечных элементов в динамике сооружений. – М.: Стройиздат, 1978. – 231 с.
10. Смирнов А.Ф. Устойчивость и колебания сооружений. – М.: Трансжелдориздат, 1958. – 572 с.

11. Смирнов В.А., Иванов С.А., Тихонов М.А. Строительная механика. – М.: Стройиздат, 1984. – 208 с.
12. Снитко Н.К. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1972. – 468 с.
13. Справочник по динамике сооружений / под ред. Б.Г. Корнеева, И.М. Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1972. – 511 с.
14. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лащеников, Н.Н. Шапошников; под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.
15. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. – М.: «Наука», 1971. – 1 108 с.
16. Бондарь Н.Г., Казей И.И., Лесохин Б.Ф., Козьмин Ю.Г. Динамика железнодорожных мостов. – М.: «Транспорт», 1965. – 412 с.





978210002003

Борис Евгеньевич Топчий

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ
МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ
С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ**

*Методические указания
по дисциплине «Теоретическая механика»
для курсантов и студентов
инженерных специальностей
всех форм обучения*

Ведущий редактор: Н.В. Желтухина

Младший редактор: Г.В. Деркач

Компьютерное редактирование:

О.В. Савина

Подписано в печать 29.04.2019.

Усл. печ. л. 3,9. Уч.-изд. л. 3,5.

Лицензия № 021350 от 28.06.99.

Печать офсетная.

Формат 60 x 90 1/16.

Тираж 40 экз. Заказ № 1400.

*Доступ к архиву публикации и условия доступа к нему:
<http://bgarf.ru/academy/biblioteka/elektronnyj-katalog/>*

БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»

Издательство БГАРФ,

**член Издательско-полиграфической ассоциации университетов России
236029, Калининград, ул. Молодежная, 6.**