

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Ж. Г. КОНЦЕДАЕВА

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебно-методическое пособие – локальный электронный методический
материал по изучению дисциплины для студентов, обучающихся в
бакалавриате по направлению подготовки
08.03.01 Строительство

Калининград
2023

Рецензент

кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры строительства
ФГБОУ ВО «КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ» Л. В. Узунова

Концедаева, Ж. Г.

Соппротивление материалов: учеб.-метод. пособие – локальный электронный методический материал по изучению дисциплины для студентов бакалавриата по направлению подготовки - 08.03.01 Строительство / **Ж. Г. Концедаева.** – Калининград: ФГБОУ ВО «КГТУ», 2023. – 141 с.

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины «Соппротивление материалов» предназначено для обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 Строительство и содержит рекомендации по изучению теоретического материала и подготовке к практическим занятиям при самостоятельной работе. Изложенный материал направлен на выработку умения определять напряженное состояние элементов строительных конструкций при действии внешних нагрузок, выбирать методы поверочного расчета конструкций на прочность, жесткость и устойчивость, освоить навыки конструирования типовых строительных конструкций; пользоваться справочной и иной технической литературой. Дано описание видов текущего контроля, критерии оценок и условия допуска к текущей и промежуточной аттестации.

Табл. 8, рисунков 91, список лит. – 7 наименований

Локальный электронный методический материал. Учебно-методическое пособие. Рекомендовано к использованию в учебном процессе методической комиссией института морских технологий, энергетики и строительства 25.09. 2023 г., протокол № 11

УДК 539.3/6

© Федеральное государственное
бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Калининградский государственный
технический университет», 2023 г.
©Концедаева Ж.Г., 2023 г.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	6
1. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ВЫПОЛНЕНИЮ ВНЕАУДИТОРНОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ	9
2. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ	10
Тема 1. Основная цель и задачи «Сопротивления материалов». Допущения и гипотезы. Схематизация и расчетная схема. Понятие напряжений и деформаций	10
1.1 Предмет и задачи сопротивления материалов	11
1.2 Понятие о расчетной схеме	12
1.3 Схематизация по геометрии отдельных элементов конструкции	12
1.4 Схематизация свойствам по материала	13
1.5 Схематизация по опорным устройствам	14
1.6 Схематизация по нагрузке	16
1.7 Основные принципы и гипотезы сопротивления материалов	16
1.8 Внутренние силовые факторы (ВСФ) в сечениях бруса	17
1.9 Понятие о напряжениях и деформациях. Напряженное состояние в точке	20
1.10 Компоненты напряженного состояния	21
Тема 2. Основы теории упругости. Виды напряженного состояния	22
2.1 Виды напряженного состояния	23
2.2 Напряжения на площадке, наклоненной к нагруженной главной площадке при линейном напряженном состоянии	24
2.3 Напряжения на площадках, наклоненных к главным площадкам, при плоском напряженном состоянии	26
2.4 Круговая диаграмма НС для площадок, перпендикулярных к ненагруженной главной площадке при плоском напряженном состоянии	28
2.5 Отыскание главных площадок, определение главных напряжений при ПНС	29
2.6 Круговая диаграмма напряженного состояния для площадок общего положения при ОНС (объемном напряженном состоянии)	30
Тема 3. Осевое растяжение – сжатие. Механические характеристики строительных материалов. Проверка прочности и подбор сечения при ОРС	32
3.1 Напряжения в поперечном сечении бруса при осевом растяжении-сжатии (ОРС)	32
3.2 Проверка прочности, подбор сечения при ОРС	33
3.3 Перемещения при осевом растяжении-сжатии (ОРС)	33
3.4 Механические свойства материалов. Диаграмма растяжения малоуглеродистой стали ...	37
3.5 Понятие пластичности и хрупкости	39
Тема 4. Геометрические характеристики поперечных сечений элементов строительных конструкций	41

4.1 Статические моменты площади плоского сечения или части сечения	42
4.2 Определение геометрических характеристик относительно центральных осей. Полярный момент инерции площади сечения.....	44
4.3 Осевые моменты инерции площади сечения относительно центральных осей	45
4.4 Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей.....	47
4.5 Изменение моментов инерции при повороте осей.....	48
4.6 Главные оси и главные моменты инерции	49
Тема 5. Кручение. Сдвиг	50
5.1 Напряжения в поперечных сечениях бруса кругового профиля	51
5.2 Проверка прочности, подбор сечения для брусьев кругового профиля при кручении	54
5.3 Перемещения при кручении	54
5.4 Расчеты на прочность	56
5.5 Кручение бруса некругового сечения	58
5.6 Сдвиг.....	60
Тема 6. Чистый изгиб. Поперечный изгиб. Напряжения и деформации при изгибе.....	61
6.1 Чистый изгиб. Поперечный изгиб. Напряжения и деформации при изгибе	64
6.1 Примеры построения эпюр	65
6.2 Правила согласования эпюр.....	66
6.3 Напряжения и деформации при изгибе.....	67
6.4 Поперечный изгиб.....	68
6.5 Расчеты на прочность при изгибе.....	70
6.6 Перемещения при плоском изгибе	70
6.7 Дифференциальное уравнение упругой линии балки. Метод начальных параметров	71
6.8 Теории прочности	75
Тема 7. Определение перемещений в конструкциях энергетическими способами.....	77
7.1 Обобщенные теоремы, используемые в сопротивлении материалов	77
7.2 Элементарная работа внутренних силовых факторов.....	79
7.3 Принцип возможных перемещений	81
7.4 Порядок вычисления перемещений методом Мора.....	83
7.5 Потенциальная энергия деформации стержня	85
Тема 8. Сложное сопротивление. Сложный изгиб. Внецентренное сжатие.....	87
8.1 Косой изгиб	88
8.3 Внецентренное сжатие	92
8.3 Ядро сечения	94
Тема 9. Статически неопределимые стержневые системы. Метод сил. Метод трех моментов ...	95
9.1 Статически неопределимые стержневые системы.....	96

9.2 Методы расчета статически неопределимых систем	98
9.3 Метод сил	100
9.4 Канонические уравнения метода сил	103
9.5 Вычисление коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Метод Мора. Правило Верещагина. Формула Симпсона	104
9.6 Универсальная проверка коэффициентов и свободных членов канонических уравнений	106
9.7 Построение окончательных эпюр внутренних силовых факторов	107
9.8 Проверка окончательной эпюры изгибающих моментов	108
9.9 Метод трех моментов	108
Тема 10. Устойчивость сжатых стержней	111
10.1 Понятие устойчивости. Устойчивость стержней	112
10.2 Определение критической силы. Формула Эйлера	114
10.3 Устойчивость стержней при неупругих деформациях	117
10.4 Выбор материала и рациональной формы сечения	119
10.5 Практический расчет сжатых стержней	120
10.6 Пример. Подбор сечения центрально нагруженной стойки здания	123
10.7 Продольно-поперечный изгиб	127
Тема 11. Динамическое нагружение. Удар. Коэффициент динамичности	132
11.1 Динамическое нагружение	132
11.2 Удар	133
11.3 Определение динамического коэффициента при ударе(без учета массы ударяемой системы)	134
Список литературы	140

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Сопротивление материалов» является дисциплиной инженерно-технического модуля основной профессиональной образовательной программы бакалавриата по направлению подготовки 08.03.01 Строительство.

Дисциплина опирается на профессиональные компетенции, знания, умения и навыки, полученные при изучении дисциплин математического и естественнонаучного модуля, а также дисциплины «Теоретическая механика».

Дисциплина «Сопротивление материалов» является одной из базовых при формировании у студентов знаний, умений и навыков, как в проектной, так и в производственной деятельности. Целью изучения дисциплины является формирование у обучающихся профессиональных компетенций, предусмотренных ФГОС ВО, формирование знаний, умений и навыков, необходимых для проектирования объектов промышленного и гражданского строительства, оценки их прочности и надёжности, обеспечения прочности и надёжности сооружений в сочетании с высокой экономичностью.

В результате освоения дисциплины каждый обучающийся должен:

Знать:

методы и способы оценки прочности, жёсткости и устойчивости элементов строительных конструкций, в т.ч. с использованием прикладного программного обеспечения.

Уметь:

применять знания в области сопротивления материалов при выборе исходной информации и нормативно-технических документов при оценке прочности, жёсткости и устойчивости элемента строительных конструкций.

Владеть:

навыками оценки прочности, жёсткости и устойчивости элемента строительных конструкций, в т.ч., с использованием прикладного программного обеспечения

Текущая и промежуточная аттестация студентов.

Для оценки результатов поэтапного освоения дисциплины (текущая аттестация) используются следующие оценочные средства:

- тестовые задания по отдельным темам;
- устный опрос на практических занятиях;
- проверка выполнения практических заданий;
- расчетно-графические работы.

К оценочным средствам для промежуточной аттестации по дисциплине, проводимой в форме зачета и экзамена, относятся:

- зачет проводится по результатам текущей работы в осеннем семестре: выполнение практических заданий, тестов, расчетно-графической работы;
- экзамен проводится в весеннем семестре по экзаменационным билетам, содержащих два теоретических вопроса – для очной формы обучения (может проводиться в форме тестирования в ЭИОС КГТУ);
- экзамен для очно-заочной формы обучения проводится тестированием в ЭИОС КГТУ, тесты содержат 30 вопросов.

Критерии оценивания результатов освоения дисциплины.

Тестовые задания текущего контроля используются для оценки освоения отдельных тем дисциплины студентами очной формы обучения. Тестирование проводится перед началом практических занятий по времени не более 10 минут. Тест оценивается в процентах на правильные ответы: менее 50 % - «неудовлетворительно», 51 – 60 % - «удовлетворительно», 61 – 80 % - «хорошо», свыше 81 % - «отлично».

Устный опрос проводится на практических занятиях (по очной форме обучения) с целью уточнения правильного понимания рассматриваемых вопросов, оценивается как «правильно» или «не правильно».

Проверка выполнения практических заданий и расчетно-графических работ (для всех форм обучения) осуществляется по критерию: «зачтено» или «не зачтено». Задание считается не выполненным, если в результатах расчетов допущены грубые ошибки, повлиявшие на общий результат, не правильно составлена расчетная схема или рабочий чертеж (схема). Проверка расчетно-графических работ (для всех форм обучения) проводится в форме защиты. При защите задания студент должен быть готов ответить на вопросы, которые заранее ему не были известны, но могут возникнуть в ходе защиты. Оценивая выполненное задание, преподаватель учитывает обоснованность решения, владение специальной терминологией, умение использовать актуальную научно-техническую литературу, качество оформления, самостоятельность, ответы на вопросы. Оценка «Не зачтено» выставляется в случае выполнения не своего задания, допущения грубых ошибок, повлиявших на результаты расчетов, небрежного оформления графической и текстовых частей работы, неспособности изложить алгоритм решения задач и ответить о способе определения величины, использованной в работе.

Зачет (для всех форм обучения), проводится в зачетную неделю для очной формы обучения и на последнем занятии в семестре для заочной формы обучения.

Экзамен (для очной формы обучения), проводится в конце семестра по расписанию в устной форме. Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса. Продолжительность экзамена не должна превышать более 3-х часов, из них время для ответа – не более 30 минут. Оценка за экзамен осуществляется по четырехбалльной системе.

Оценка «Не удовлетворительно» выставляется в случае незнания ответов на поставленные вопросы либо ответы на совершенно другие вопросы, допущения грубых ошибок при выполнении практической части задания, повлиявших на результаты расчетов, использование не актуальных нормативных документов.

Оценка «Удовлетворительно» выставляется в случае допущения незначительных ошибок или при не полном ответе на теоретические вопросы, затруднениях с ответами на уточняющие вопросы или при их неправильном освещении. При решении практической задачи допущены незначительные ошибки, в целом не повлиявшие на результат, либо при неполном ответе на вопросы по билету (два из трех).

Оценка «Хорошо» выставляется в случае полного ответа на вопросы по билету, но при этом допущены неточности или неполные ответы на дополнительные (уточняющие) вопросы.

Оценка «Отлично» выставляется при полном и уверенном ответе на теоретические вопросы по билету, решения задачи, а также ответов на дополнительные вопросы (1-2 вопроса) в пределах изучаемого курса.

Экзамен в виде итогового теста (для заочной формы обучения), состоящий из 30 вопросов проводится в ЭИОС с произвольным чередованием вопросов, продолжительностью в 55 минут. Попыток – одна. Перечень вопросов, выносимых на тестирование, полностью соответствует тематике изучаемого курса дисциплины.

Тест оценивается в процентах на правильные ответы: менее 60 % - «не удовлетворительно», 61 – 70 % - «удовлетворительно», 71 – 90 % - «хорошо», свыше 91 % - «отлично».

Условием допуска к экзамену (промежуточной аттестации) является:

- посещение лекционных и практических занятий согласно расписанию из расчета не менее 60% учебного времени, пропуски по не уважительным причинам не допускаются (независимо от форм обучения);
- пропущенные темы подлежат отработке в дни проведения консультаций по расписанию в виде тестирования (для очной формы обучения) и тестирования в ЭиОС (для заочной формы обучения);
- получение «зачета» по всем выполненным заданиям и расчетно-графическим работам;
- выполнение расчетно-графических работ (для заочной формы обучения).

При успешном выполнении программы изучения дисциплины и высоких индивидуальных показателях, отдельные студенты могут быть освобождены от сдачи экзамена, решение принимается преподавателем, ведущим дисциплину, а решение доводится до начала экзаменационной сессии.

Структура учебно-методического пособия представлена тематическим планом занятий, методическими указаниями для самостоятельной работы студентов по изучению отдельных тем; списком рекомендованной литературы.

1. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ВЫПОЛНЕНИЮ ВНЕАУДИТОРНОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Самостоятельная работа студентов – это планируемая работа, выполняемая по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия, является одним из основных видов деятельности обучающихся.

Самостоятельная работа студентов включает в себя изучение лекционного материала, подготовку к практическим занятиям, а также подготовку конкретных вопросов преподавателю по непонятным моментам. Целью самостоятельных занятий является более глубокое изучение студентами отдельных вопросов курса с использованием рекомендуемой дополнительной литературы и других информационных источников.

Задачами самостоятельной работы обучающихся являются: систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов; углубление и расширение теоретических знаний; формирование умения использовать нормативную и справочную литературу; развитие познавательных способностей и активности студентов, творческой инициативы, ответственности и организованности.

Основными формами внеаудиторной самостоятельной работы, при изучении дисциплины «Сопrotивление материалов» являются:

- индивидуальные задания по расчетно-графическим работам (домашние занятия);
- изучение программного материала дисциплины (работа с учебником и конспектом лекции);
- работа с электронными информационными ресурсами (ЭИОС КГТУ) и ресурсами Internet;
- выполнение тестовых заданий и решение задач;
- получение консультаций по вопросам изучаемой дисциплины (очно, в дни консультаций по расписанию; в любой доступной форме в электронной образовательной среде ЭИОС КГТУ; по видео конференции и другими доступными способами);
- подготовка к экзамену и другим формам контроля;
- подготовка к занятиям, проводимым с использованием активных форм обучения.

Университет обеспечивает учебно-методическую и материально-техническую базу для организации самостоятельной работы студентов.

Библиотека университета обеспечивает:

- учебный процесс необходимой литературой и информацией (комплекует библиотечный фонд учебной, методической, научной, периодической и справочной литературой в соответствии с учебными планами и программами, в том числе на электронных носителях);
- доступ к основным информационным образовательным ресурсам, информационной базе данных, в том числе библиографической, возможность выхода в Интернет.

Учебные программы раскрывают рекомендуемый режим и характер различных видов учебной работы (в том числе самостоятельной работы над рекомендованной литературой).

Для подготовки к занятиям, текущему контролю и промежуточной аттестации обучающиеся могут воспользоваться электронной библиотекой Университета, где имеется возможность получить доступ к учебно-методическим материалам, как библиотеки Университета, так и иных электронных библиотечных систем. Также студенты могут взять на дом необходимую литературу на абонементе в библиотеки Университета или воспользоваться читальным залом. Ответы на вопросы, выносимые для самостоятельного изучения (повторения) должны быть кратко законспектированы в тетради для лекций.

При подготовке к практическим занятиям студентам рекомендуется изучить лекционный материал, а также вопросы, выносимые для самостоятельного изучения.

При выполнении практических заданий необходимо обратить внимание на выбор системы координат, в которой создается расчетная схема, обозначения опорных устройств и прикладываемых к конструкции внешних нагрузок, применяемой размерности в расчетах, принятых требований к оформлению расчетных схем и построенных графиков - эпюр. Также необходимо знакомится с профессиональной терминологией и пользоваться ею при защите практических задач и расчетно-графических работ.

Выполненная расчетно-графическая работа или индивидуальное задание должны быть соответствующим образом оформлены в отдельной тетради или на отдельных листах формата А4 в текстовом редакторе Word с использованием графических программ и собранных в отдельную папку. На практических занятиях выделяется время для решения индивидуальных заданий (с консультацией преподавателя при необходимости), и при тщательной предварительной подготовке к теме задание может быть выполнено полностью. Если этого времени окажется недостаточно, задание выполняется дома. Конкретные указания к внеаудиторной дополнительной самостоятельной работе указаны в некоторых темах.

В начале практического занятия может проводиться тестирование продолжительностью до 10 минут по изучаемой теме.

2. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Тема 1. Основная цель и задачи «Сопротивления материалов». Допущения и гипотезы. Схематизация и расчетная схема. Понятие напряжений и деформаций

Цель: применять знания в области сопротивления материалов при выборе исходной информации и нормативно-технических документов при оценке прочности, жёсткости и устойчивости элемента строительных конструкций.

Ключевые вопросы:

- 1.1. Цель и задачи дисциплины.
- 1.2. Допущения и гипотезы, принимаемые в дисциплине.
- 1.3. Схематизация нагрузок и опорных устройств.
- 1.4. Понятие о расчетной схеме.
- 1.5. Внешние нагрузки и внутренние силовые факторы.
- 1.6. Метод сечений.
- 1.7. Понятие о напряжениях, перемещениях и деформациях.
- 1.8. Напряжения в точке.

Методические указания.

В первую очередь нужно усвоить основные термины и понятия, принятые в дисциплине «сопротивление материалов», которыми пользуются строители в своей профессиональной практике. Обратите внимание на допущения и схематизацию внешних нагрузок, опорных устройств, свойств

материалов, которые упрощают расчеты и позволяют использовать математический аппарат, не ссылаясь на практических результатах.

1.1 Предмет и задачи сопротивления материалов

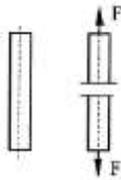
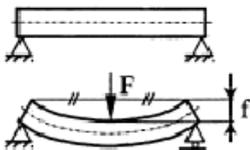
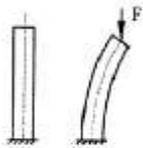
Сопротивление материалов (СМ) – наука об инженерных методах расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций и сооружений.

При проектировании строительных конструкций специалисту необходимо знать значения величин, характеризующие прочностные и деформативные свойства материалов.

- **Прочность** – способность конструкции в целом, ее отдельных элементов и деталей выдерживать определенную нагрузку не разрушаясь (сопротивление разрушению).
- **Разрушение** – разделение тела на части, образование трещин таких размеров, что дальнейшая эксплуатация невозможна.
- **Жесткость** – способность конструкции, а также ее элементов сопротивляться деформациям.
- **Устойчивость** – способность конструкции или ее элементов сохранять определенную начальную форму упругого равновесия.

Отказом является нарушение работы конструкции, делающей невозможной ее дальнейшую эксплуатацию. Схематично виды отказов в работе конструкций представлены в таблице 1.1

Таблица 1.1 Виды отказов в работе конструкций

Наименование отказа	Характер отказа
Потеря несущей способности	
Недопустимо большие деформации	
Потеря устойчивости	

1.2 Понятие о расчетной схеме

Необходимость довести решение каждой практической задачи до некоторого числового результата заставляет в сопротивлении материалов прибегать к упрощающим гипотезам – предположениям, которые оправдываются на практике. Прежде всего, следует установить, что в данном случае оказывает существенное влияние на работу конструкции, а какими факторами можно пренебречь, то есть необходимо произвести схематизацию объекта конструкции - отбросить все факторы, не влияющие на работу системы в целом. Такого рода упрощения задачи совершенно необходимы, так как решение с полным учетом всех свойств реального объекта является принципиально невозможным в силу их очевидной неисчерпаемости.

Реальный объект, освобожденный от несущественных признаков, носит название расчетной схемы.

На рисунке 1.1 представлены конструктивное исполнение реального объекта и его расчетная схема.

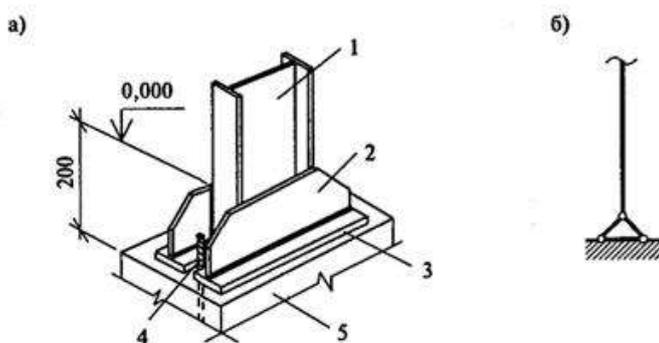


Рисунок 1.1 - Шарнирное крепление колонны к фундаменту

а) конструктивная схема;

1 - колонна; 2 - траверса; 3 - опорная плита; 4 - анкерные болты; 5 - фундамент.

б) расчетная схема.

Очевидно, что реальная конструкция сложнее расчетной схемы, но на первом этапе определения усилий, возникающих в поперечных сечениях колонны под действием нагрузки, схематизация вполне оправдана. Остановимся подробнее на отдельных этапах процесса превращения реальной конструкции в расчетную схему.

1.3 Схематизация по геометрии отдельных элементов конструкции

Основное внимание в сопротивлении материалов уделяется изучению брусев, являющихся наиболее распространенным элементом многих конструкций. На рисунке 1.2 представлены различные элементы строительных конструкций.

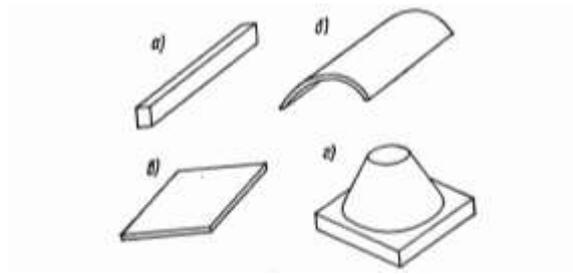


Рисунок 1.2 - Схематизация по геометрии элементов

- **Брусом (балкой, стержнем, валом)** называется элемент, длина которого значительно больше его поперечных размеров (рисунок 1.2а). **Осью бруса** называется линия, соединяющая центры тяжести его поперечных сечений. Плоская фигура, имеющая свой центр тяжести на оси и нормальная к ней, называется его **поперечным сечением**. Брусья различают прямые, криволинейные, постоянного и переменного сечения.
- Элемент конструкции, длина и ширина которого во много раз превышают его толщину, называется **оболочкой** (рисунок 1.2 б). Геометрическое место точек, равноудаленных от наружной и внутренней поверхностей оболочки, называется **срединной поверхностью**. Оболочка, срединная поверхность которой представляет собой плоскость, называется **пластинкой** (рисунок 1.2, в).
- Элемент конструкции, размеры которого во всех направлениях мало отличаются друг от друга (например, сплошная опора моста), называется **массивным телом** (рисунок 1.2, г).

Основные задачи СМ:

1. Подобрать материалы и размеры, чтобы надежно обеспечить прочность, жесткость и устойчивость конструкций (проектный, конструктивный расчет)
2. Проверить прочность, жесткость и устойчивость деталей заданных размеров из заданного материала (проверочный, поверочный расчет).

При выполнении указанных видов расчета необходимо стремиться к максимальной экономии материала, т. е. к достаточным, но не завышенным размерам элементов конструкций и сооружений. Таким образом, сопротивление материалов имеет целью *создать практически приемлемые, простые приемы расчета типичных, наиболее часто встречающихся элементов конструкций.*

1.4 Схематизация по свойствам материала

- Материал рассчитываемой конструкции считают **однородным** - его свойства не зависят от величины выделенного из тела объема.
- *Сплошность среды* означает непрерывно заполненный отведенный ей объем, поэтому к нему можно применить анализ бесконечно малых и не принимать во внимание дискретную структуру вещества даже при расчете конструкций из такого неоднородного материала, как бетон.
- Материал *изотропен*, т.е. обладает во всех направлениях одинаковыми свойствами. Это предпосылка используется при решении большинства задач сопротивления материалов, хотя для некоторых материалов (дерево, железобетон, медь, пластмассы и др.) она весьма условна. Материалы, свойства которых в разных направлениях различны, называются *анизотропными*.

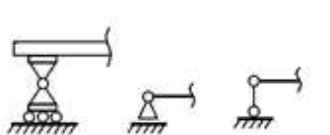
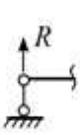
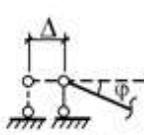
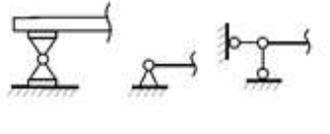
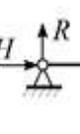
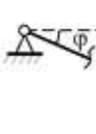
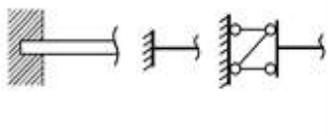
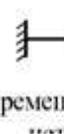
- Материал конструкции обладает свойством идеальной упругости, т.е. способностью полностью восстанавливать первоначальную форму и размеры тела после снятия внешней нагрузки. Эта предпосылка справедлива лишь при напряжениях, не превышающих для данного материала определенной по результатам испытаний постоянной величины, называемой пределом упругости. Предпосылка об идеальной упругости материала используется при решении большинства задач сопротивления материалов.

1.5 Схематизация по опорным устройствам

Для прикрепления сооружения к основанию служат опоры, обеспечивающие неподвижность опорных точек конструкции. Обычно в сопротивлении материалов рассматривают три основных типа опор: шарнирно подвижная опора (катковая), шарнирно неподвижная опора и жесткое защемление (заделка). Существуют и другие опорные устройства, понятие о которых будет вводиться по мере необходимости.

В таблице 1.2 представлены названия некоторых опор, их конструктивное устройство и схематичное представление в расчетных схемах, соответствующие опорам реакции и возможные перемещения (линейные и угловые).

Таблица 1.2 Классификация опор и их условное изображение

Шарнирная опора			 Δ – перемещение; φ - угол поворота
Шарнирно-неподвижная опора			
Заделка			 Перемещений

На рисунках 1.3 - 1.5 представлены конструктивные оформления опорных устройств и соответствующие им условные изображения на расчетной схеме.

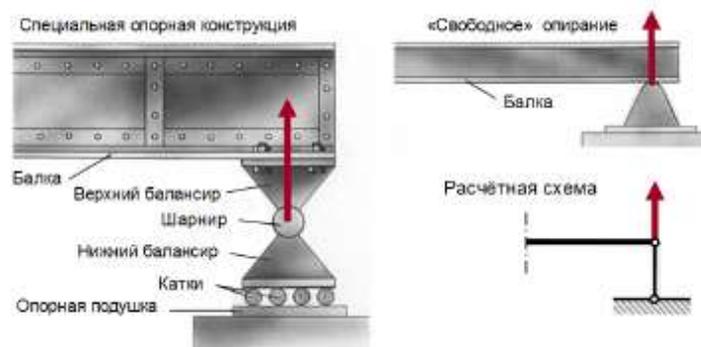


Рисунок 1.3 – Шарнирно-подвижная опора (стержневая, свободное опирание).

Конструкция и условное обозначение.

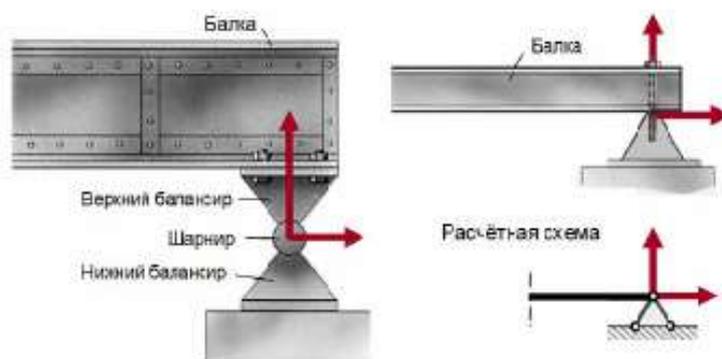


Рисунок 1.4 – Шарнирно-неподвижная опора (катковая).

Конструкция и условное обозначение.

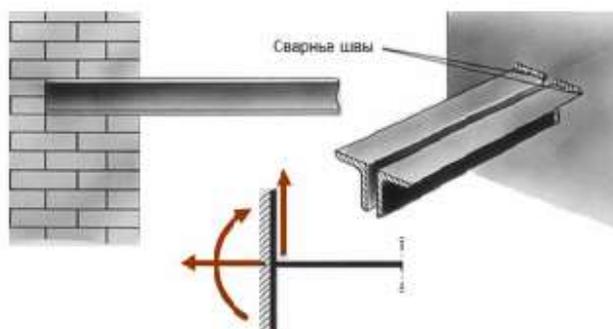


Рисунок 1.5 – Жесткое защемление (заделка).

1.6 Схематизация по нагрузке

Нагрузки, действующие на конструкцию, являются по отношению к ней внешними силами.

Сила – мера механического воздействия тел. Силы различаются:

- По времени действия: постоянные и временные
- По способу приложения к телу: поверхностные и объемные
- Поверхностные: сосредоточенные, распределенные по площади, распределенные по линии (условно)
- По характеру действия во времени: статические и динамические.

Постоянные – все время существуют без изменения величины и положения на конструкции.

Объемные – приложены к каждой единице объема (гравитационные)

Поверхностные нагружают тело по его поверхности

Сосредоточенные – равнодействующая сил давления, условно приложена в точке.

Распределенные нагружают тело по всему или по значительной части объема, поверхности или длины. Распределенная нагрузка задается интенсивностью и измеряется соответственно в кН/м^3 , кН/м^2 , кН/м .

Статическое нагружение – постепенное нагружение от нуля до конечной величины, достигнув которого либо не меняется, либо изменяется медленно и незначительно. Инерционные силы отсутствуют.

Динамическое нагружение – имеет значительное ускорение

1. Внезапно приложенные – сразу всей величиной
2. Ударное – резкое изменение скоростей соударяющихся тел, не выносят хрупкие материалы
3. Повторно-переменные – цикл изменения нагрузки может изменяться многократно, могут приводить к усталости материала.

1.7 Основные принципы и гипотезы сопротивления материалов

- Принцип независимости действия сил означает, что результат действия на тело системы сил равен сумме результатов воздействия тех же сил, прилагаемых к телу последовательно и в любом порядке. Он применим к деформируемым телам лишь тогда, когда перемещения точек приложения сил, являющиеся результатом деформации тела, во-первых малы по сравнению с размерами тела и во-вторых линейно зависят от действующих сил (закон Гука).
- На основании принципа Сен-Венана в точках тела, достаточно удаленных от мест приложения нагрузок, величина внутренних сил весьма мало зависит от конкретного способа приложения этих нагрузок, а зависит только от ее статического эквивалента. Этот принцип во многих случаях позволяет производить замену одной системы сил другой системой, статически эквивалентной, что позволяет часто значительно упростить расчет.
- Гипотеза плоских сечений предполагает, что сечение, плоское и перпендикулярное к продольной оси до деформации, остается таким же и после деформации. Эта предпосылка впервые была введена Бернулли. Она играет исключительно важную роль в

сопротивлении материалов и используется при выводе большинства формул для расчета брусьев.

- Гипотеза об отсутствии начальных напряжений отрицает наличие в материале внутренних сил до приложения внешней нагрузки. Это допущение полностью не выполняется. Например, в стальных деталях имеются внутренние силы, вызванные неравномерным остыванием, в дереве – неравномерным высыханием, в бетоне – в процессе твердения и т.д. Однако, часто они достаточно малы, чтобы их учитывать.

По мере необходимости, при выводе формул, будем принимать и другие гипотезы и предположения, основанные на опыте.

1.8 Внутренние силовые факторы (ВСФ) в сечениях бруса

При деформации тела под действием внешних сил изменяется взаимное положение частиц – силы взаимодействия между частицами получают приращения. *Приращение сил взаимодействия между частицами материала, вызванное изменением их взаимного расположения при деформации тела под действием внешних сил, называют внутренними силами.*

Приращения сил взаимодействия между частицами материала, расположенные по разные стороны от плоскости сечения тела, называют внутренними силами в сечении.

Из допущения о сплошности следует допущение о непрерывности распределения внутренних сил в сечении по площади сечения.

Внутренние силы в сечении – силы взаимодействия между сечениями.

Внутренние силы в сечении приводят к центру масс в сечении. Главный вектор \mathbf{R} и главный момент \mathbf{M} внутренних сил в сечении в центре масс разлагают на составляющие по осям сечения x, y, z , (рисунок 1.6).

Составляющие по осям главного вектора \mathbf{R} и главного момента \mathbf{M} в сечении в центре масс называют внутренними силовыми факторами (ВСФ).

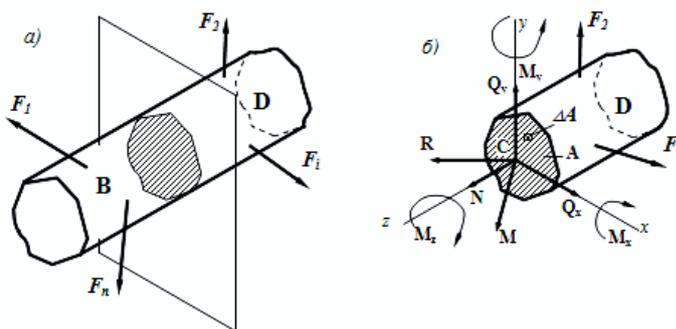


Рисунок 1.6 - Внутренние силовые факторы в сечениях бруса в общем случае нагружения

ВСФ в сечении бруса определяют методом сечений – из уравнений равновесия отсеченной этим сечением части бруса.

Определим ВСФ в сечении бруса A , находящегося в состоянии равновесия под действием системы внешних сил (СВС) FF_1, F_2, \dots, F_n . Расположим начало координат в

центре масс сечения S , перпендикулярного осиз, которая касается оси бруса в данном сечении, x , соответственно горизонтальная и вертикальная оси сечения.

Составляющие главного вектора R внутренних сил:

1. N – нормальная, продольная сила, действующая вдоль оси бруса;
2. Q_x – поперечная перерезывающая сила по оси x ;
3. Q_y – поперечная перерезывающая сила по оси y ;

$$R = N + Q_x + Q_y$$

Составляющие главного момента M внутренних сил:

1. Тили ($M_z; M_{кр}$) - крутящий момент в сечении, пара сил действует в плоскости, перпендикулярной к сечению (скручивающий момент);
2. M_x -изгибающий момент, действующий в плоскости, перпендикулярной оси x ;
3. M_y -изгибающий момент, действующий в плоскости, перпендикулярной оси y ;

$$M = T + M_x + M_y$$

Индексы при ВСФ соответствуют выбранной системе координат. (*Обратите внимание, что в технической литературе часто приводится другая система координат*).

Уравнения равновесия отсеченной части рассматриваемого бруса:

$$N + \sum_{i=1}^k z(F_i) = 0 \quad (1.1)$$

$$Q_x + \sum_{i=1}^k x(F_i) = 0 \quad (1.2)$$

$$Q_y + \sum_{i=1}^k y(F_i) = 0 \quad (1.3)$$

$$T + \sum_{i=1}^k \text{mom}_z(F_i) = 0 \quad (1.4)$$

$$M_x + \sum_{i=1}^k \text{mom}_x(F_i) = 0 \quad (1.5)$$

$$M_y + \sum_{i=1}^k \text{mom}_y(F_i) = 0 \quad (1.6)$$

В первых трех уравнениях под знаком суммы стоят проекции всех внешних сил на соответствующую ось. В следующих трех – проекции вектора момента на соответствующую ось всех внешних сил.

Из уравнения (1.1) следует:

$$N = \sum_{i=1}^k z(F_i)$$

Нормальную силу в сечении по величине и знаку вычисляют как алгебраическую сумму проекций на ось z сечения внешних сил, приложенных к отсеченной рассматриваемой части

Так как у сечения есть две стороны, и мы можем приближаться к сечению, как справа, так и слева, решили задавать направление внешних сил. Правило знаков для нормальной силы - положительную нормальную (продольную) силу вызывают такие внешние силы, которые стремятся оторвать по рассматриваемому сечению одну часть от другой. Положительной является растягивающая нормальная сила, ее вектор направлен из тела рассматриваемой отсеченной части.

Из уравнения (1.4) следует:

$$T = \sum_{i=1}^k \text{tom}_z(F_i)$$

Крутящий момент в сечении по величине и знаку вычисляют как алгебраическую сумму моментов относительно оси z сечения внешних сил, приложенных к отсеченной рассматриваемой части.

Правило знаков для крутящего момента – будем считать, что положительный крутящий момент в сечении вызывают такие внешние силы, момент которых относительно оси z сечения видится направленным против хода часовой стрелки, если смотреть на отсеченную часть со стороны рассматриваемого сечения. Положительный крутящий момент видится направленным по ходу часовой стрелки.

Из уравнения (1.3) следует

$$Q_y = \sum_{i=1}^k y(F_i)$$

Правило знаков для поперечных сил – считают, что положительную поперечную силу в сечении вызывают такие внешние силы, составляющие которой на левой отсеченной части направлены вверх, а на правой – вниз. Сами перерезывающие силы уравнивают друг друга.

Из уравнения (1.5) следует:

$$M_x = \sum_{i=1}^k \text{mom}_x(F_i)$$

Правило знаков для изгибающего момента – будем считать, что положительный изгибающий момент в сечении вызывают такие внешние силы, моменты которых относительно оси в плоскости сечения на левой отсеченной части видится направленным по ходу часовой стрелки, а на правой – против хода часовой стрелки.

Дифференциальные зависимости между ВСФ и интенсивностью внешней распределенной нагрузки.

Из уравнений равновесия элемента бруса длиной dz , нагруженного распределенной нагрузкой, можно получить следующие дифференциальные зависимости:

$$\frac{dN}{dz} = n; \quad \frac{dQ_x}{dz} = q_x; \quad \frac{dQ_y}{dz} = q_y; \quad (1.7)$$

$$\frac{dT}{dz} = m_z; \quad \frac{dM_x}{dz} = m_x \pm Q_y; \quad \frac{dM_y}{dz} = m_y \pm Q_x; \quad (1.8)$$

n, q_x, q_y – интенсивность соответственно осевой и поперечных распределенных по длине нагрузок; m_x, m_y, m_z – интенсивность моментной распределенной нагрузки.

Положительной будем считать интенсивность такой распределенной нагрузки, которая вызывает в сечении, будучи приложенной к отсеченной рассматриваемой части, положительный ВСФ. Сравнивая правила знаков для Q и M , можно отметить, что на левой отсеченной части одна и та же внешняя сила вызывает поперечную силу и изгибающий момент одинакового знака, а на правой отсеченной части – разных знаков.

1.9 Понятие о напряжениях и деформациях. Напряженное состояние в точке

Рассмотренные выше внутренние силовые факторы, которые могут быть вызваны не только действием внешних силовых факторов, но и температурных воздействий или смещения опор, не в полной мере отображают способность элементов конструкций из определенных материалов воспринимать эти факторы без разрушения ее элементов, или недопустимых деформаций. Почти 150 лет после открытия закона Гука понадобилось ученым, чтобы перейти к такой характеристике как *напряжение*.

Интенсивность распределения внутренних сил в сечении по площади сечения в некоторой его точке называют напряжением в этой точке сечения.

Иллюстрация понятия напряжения в точке представлена на рисунке 1.7.

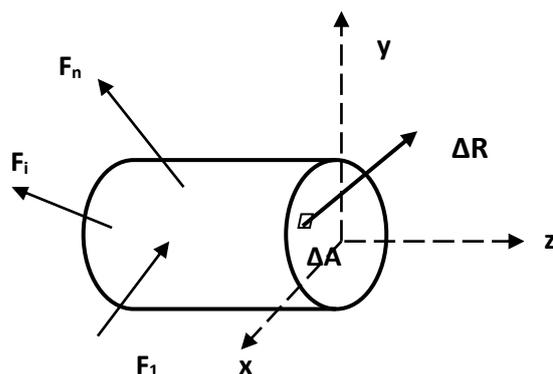


Рисунок 1.7- Напряжения в точке

ΔR – равнодействующая внутренних сил, действующих на этой площадке,
 ΔA – площадь в окрестности точки C , тогда напряжения в точке p будут равны

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}. \quad (1.9)$$

Для площадки бесконечно малых размеров

$$p = \frac{dR}{dA}. \quad (1.10)$$

Вектор полного напряжения p разлагают на составляющие:

$$p = \sigma + \tau$$

или

$$p = \sigma + \tau_x + \tau_y. \quad (1.11)$$

где: σ - нормальное напряжение, τ - полное касательное напряжение,

τ_x, τ_y – составляющие полного касательного напряжения в точке в плоскости сечения.

Кроме того, под воздействием нагрузок и других факторов, в конструкциях возникают перемещения и деформации.

Перемещения: линейное (f) и угловое (θ) – изменение положения элемента или точки элемента конструкции в рассматриваемой системе координат.

Приняты следующие обозначения линейных перемещений вдоль осей:

f_x - u перемещение вдоль оси x ,

f_y - v перемещение вдоль оси y ,

f_z - w перемещение вдоль оси z ,

θ – угол поворота в плоскости (пространстве).

Деформации – изменение элементами конструкций своих форм и размеров *под действием нагрузок или других воздействий*. Подробнее понятие деформации будет рассмотрено при изучении простых видов нагружения строительных конструкций

Обратите внимание также на различие понятий *перемещение* и *деформация*, хотя часто эти понятия смешивают.

1.10 Компоненты напряженного состояния

Прочность в некоторой точке тела зависит не только от напряжения в этой точке, как принадлежащей поперечному сечению, но и от всей совокупности напряжений на всей совокупности сечений, проходящих через точку.

Совокупность напряжений в рассматриваемой точке на всей совокупности площадок, проходящих через точку, называют напряженным состоянием в этой точке.

Площадка – часть плоскости сечения непосредственно у рассматриваемой точки.

Различают однородное и неоднородное напряженное состояние. Однородным состоянием в некотором объеме называют НС, одинаковое во всех точках этого объема.

Напряженное состояние задано определенно, если известны составляющие напряжений на трех взаимно перпендикулярных площадках.

Составляющие напряжений на любых трех взаимно перпендикулярных площадках называют компонентами напряженного состояния.

Неоднородное напряженное состояние изучают на выделенном в окрестности точки параллелепипеде с ребрами бесконечно малой длины – элементе материала.

Напряженное состояние можно задать тензором напряжений (рисунок 1.5).

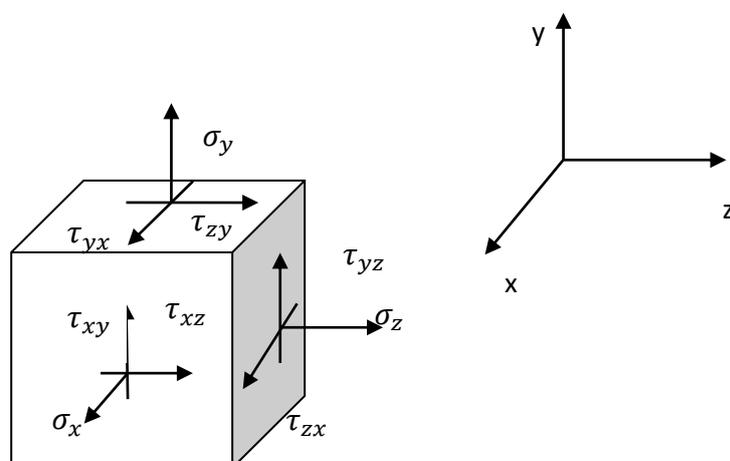


Рисунок 1.8 – Тензор напряжений. Напряжения на гранях произвольно ориентированного в пространстве элементарного куба

Присвоим σ индекс, параллельный соответствующей оси, для τ - два индекса, первый из которых обозначает ось, перпендикулярную площадке, а второй – параллельную оси.

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Закон парности касательных напряжений

Из уравнений равновесия элемента материала, выделенного в окрестности точки тремя взаимно перпендикулярными площадками общего положения, следует:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx}. \quad (1.13)$$

Составляющие касательных напряжений, нормальных к общему ребру двух взаимно перпендикулярных площадок, равны по величине и направлены либо к общему ребру, либо от него.

Контрольные вопросы:

- 1.1. Какие задачи решаются в СМ?
- 1.2. Назовите основные гипотезы СМ о материале детали.
- 1.3. Какие силы называются внутренними?
- 1.4. Каким методом можно определить внутренние силовые факторы?
- 1.5. В чем состоит метод сечений?
- 1.6. Что вы понимаете под деформацией? Какие бывают деформации?
- 1.7. Чем отличаются внутренние силовые факторы от полного напряжения в точках поперечного сечения?

Тема 2. Основы теории упругости. Виды напряженного состояния

Цель: знать методы и способы оценки прочности, жёсткости и устойчивости элементов строительных конструкций

Ключевые вопросы:

- 2.1. Виды напряженного состояния.
- 2.2. Понятие о главных площадках, главных напряжениях.
- 2.3. Напряжения на площадках, наклоненных к главным.
- 2.4. Круговая диаграмма напряженного состояния.

Методические указания

Обратите внимание, что не всегда напряженное состояние под действием внешних эксплуатационных нагрузок можно привести к так называемым простым видам нагружения. Часто элементы строительных конструкций испытывают сложное напряженное состояние (например, грунты как основание фундаментов и др.), поэтому нужно понять, какие напряжения являются главными, и как выражаются напряжения и деформации на произвольных площадках вокруг рассматриваемого элементарного объема материала через главные напряжения и деформации.

Изучая модуль, обратите внимание на понятия напряженного и деформированного состояния в точке, главные напряжения и главные деформации, на классификацию напряженных и деформированных состояний. Между ними существует взаимосвязь в виде обобщенного закона Гука. Из него следует, что линейному напряженному состоянию соответствует плоское деформированное состояние, а линейному деформированному соответствует объемное напряженное состояние.

Любое напряженное и деформированное состояние можно проанализировать, то есть изучить, как меняются главные напряжения и главные деформации при изменении углов наклона площадки по отношению к координатным осям. Этот анализ дает информацию необходимую для практики расчетов на прочность и жесткость:

- закон парности касательных напряжений,
- взаимосвязь нормальных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках.

Важную роль в процессах пластического течения и разрушения играют касательные напряжения. При всех видах напряженного состояния надо знать положение площадок, на которых касательные напряжения максимальны, и формулы для расчета их величины.

2.1 Виды напряженного состояния

Вращая элемент материала вокруг точки, можно найти такое его положение, при котором на гранях элементов исчезнут касательные напряжения. *Площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения τ , называются главными. Напряжения на главных площадках – главные напряжения.*

Главные напряжения обозначают $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, причем принято задавать напряжения таким образом: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (алгебраически с учетом знака).

Положительное растягивающее σ - его вектор направлен из тела отсеченной части.

σ_1 – алгебраически большее главное нормальное напряжение,

σ_3 - алгебраически меньшее главное нормальное напряжение,

σ_2 - промежуточное главное напряжение.

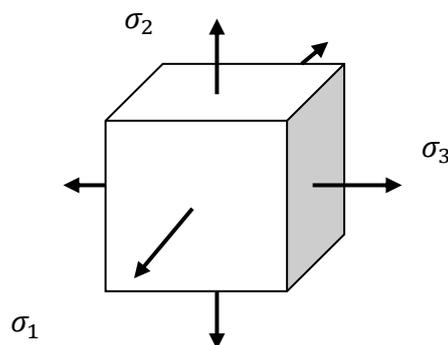


Рисунок 2.1 - Объемное напряженное состояние на главных площадках

Виды напряженного состояния можно задать соотношениями главных напряжений:

$$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 1 : 0,5 : -0,2$$

Если соотношение сохраняется – сохраняется вид напряженного состояния.

Различают три группы видов напряженного состояния: линейное, плоское и объемное.

Линейное напряженное состояние – ЛНС, при котором только одно из главных напряжений отлично от 0. Имеет всего два вида – линейное растяжение и линейное сжатие.

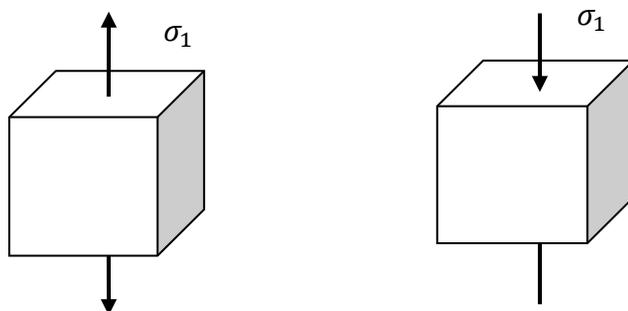


Рисунок 2.2 - Линейное растяжение и линейное сжатие элемента

Плоское напряженное состояние – ПНС, при котором одно из главных напряжений равно 0.

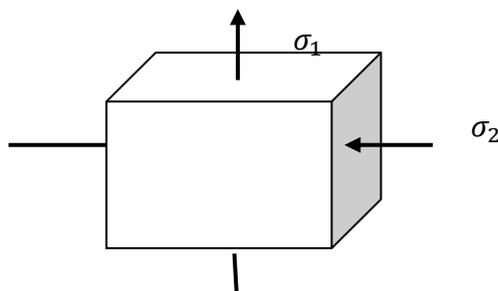


Рисунок 2.3 – Плоское напряженное состояние элемента

Объемное напряженное состояние – НС, при котором все главные напряжения отличны от нуля (рисунок 2.1).

2.2 Напряжения на площадке, наклоненной к нагруженной главной площадке при линейном напряженном состоянии

Важной задачей в сопромате является определение вида напряженного состояния и его численных характеристик – величины напряжений.

Определим величину напряжения на площадке, наклоненной к нагруженной главной площадке, при ЛНС.

Передняя грань является ненагруженной, поэтому можем изобразить ее в плоскости.

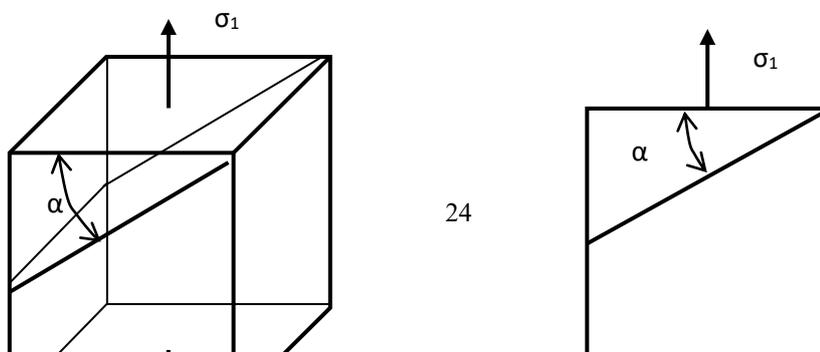


Рисунок 2.4 – Схема площадки, наклоненной к главной нагруженной площадке при линейном напряженном состоянии

Составим уравнения равновесия нижней отсеченной искомой площадкой части элемента (рисунок 2.5)

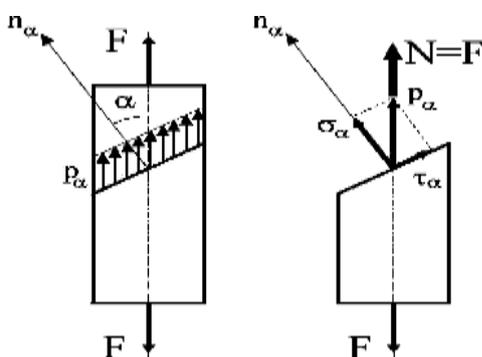


Рисунок 2.5 – Напряжения на площадке, наклоненной к главной, при одноосном напряженном состоянии

Перейдем теперь к определению напряжений на неглавных, наклонных площадках. Выделим площадку, нормаль к которой составляет с осью стержня угол α . Проведенную таким образом наклонную площадку будем обозначать α -площадкой, а действующие на ней полные, нормальные и касательные напряжения – p_α , σ_α , τ_α соответственно. При этом площадь α -площадки (A_α) связана с площадью поперечного сечения стержня A следующим образом:

$$A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha}.$$

Для определения напряжений воспользуемся методом мысленных сечений. Считая, что наклонная площадка рассекла стержень на две части, отбросим одну из них (верхнюю) и рассмотрим равновесие оставшейся (нижней). Осевая сила (N) в сечении представляет собой равнодействующую полных напряжений p_α .

Следовательно,

$$N = p_\alpha A_\alpha$$

Отсюда

$$p_{\alpha} = \frac{N}{A_{\alpha}} = \frac{N}{A} \cos \alpha = \sigma_1 \cos \alpha \quad (2.1)$$

Нормальные и касательные напряжения определим, проецируя полное напряжение на нормаль и плоскость α -площадки соответственно:

$$\sigma_{\alpha} = p_{\alpha} \cos \alpha, \text{ или} \quad \sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha; \quad (2.2)$$

$$\tau_{\alpha} = p_{\alpha} \sin \alpha, \text{ или} \quad \tau_{\alpha} = \sigma_1 \frac{\sin 2\alpha}{2}. \quad (2.3)$$

- 1) при $\alpha=0$ в поперечных сечениях стержня $\tau_{\alpha}=0$, $\sigma_{\alpha}=\sigma_1$ ($\sigma_1, \sigma_2=0, \sigma_3=0$);
- 2) при $\alpha=\pi/2$ в поперечных сечениях стержня $\tau_{\alpha}=0$, $\sigma_{\alpha}=0$;
- 3) при $\alpha=\pm\pi/4$ в поперечных сечениях стержня возникают максимальные касательные напряжения $\tau_{\alpha}=\tau_{\max}=\sigma_1/2$.

Чтобы аналитически решать задачу определения напряжений на площадке, нужно задаться правилами знаков:

1. Касательные напряжения на площадке будем считать положительным, если оно стремится повернуть элемент или его отсеченную часть вокруг центра масс C по ходу часовой стрелки.
2. Положительным будем считать угол, отсчитываемый от заданной площадки к искомой против хода часовой стрелки.

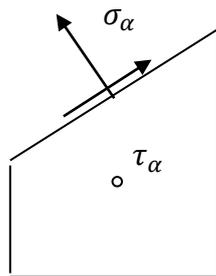


Рисунок 2.6 - Положительные значения угла наклона к главной площадке и касательных напряжений

2.3 Напряжения на площадках, наклоненных к главным площадкам, при плоском напряженном состоянии

Задачу будем решать методом сложения действия сил (суперпозиции). По этому методу напряжения, перемещения, деформации от системы сил или ряда факторов вычисляют как сумму напряжений, перемещений, деформаций от каждой силы, каждого фактора в отдельности. Сумма является геометрической.

Рассмотрим площадки, перпендикулярные ненагруженной главной площадке.

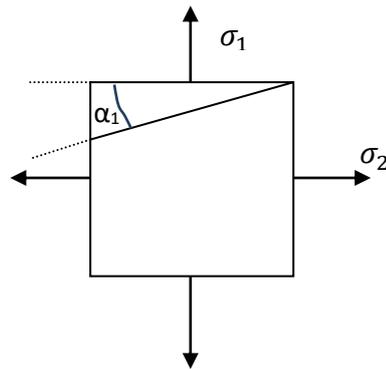


Рисунок 2.7 – Схема элемента материала при двухосном плоском напряженном состоянии

Разложим плоское напряженное состояние ПНС на составляющие линейного напряженного состояния

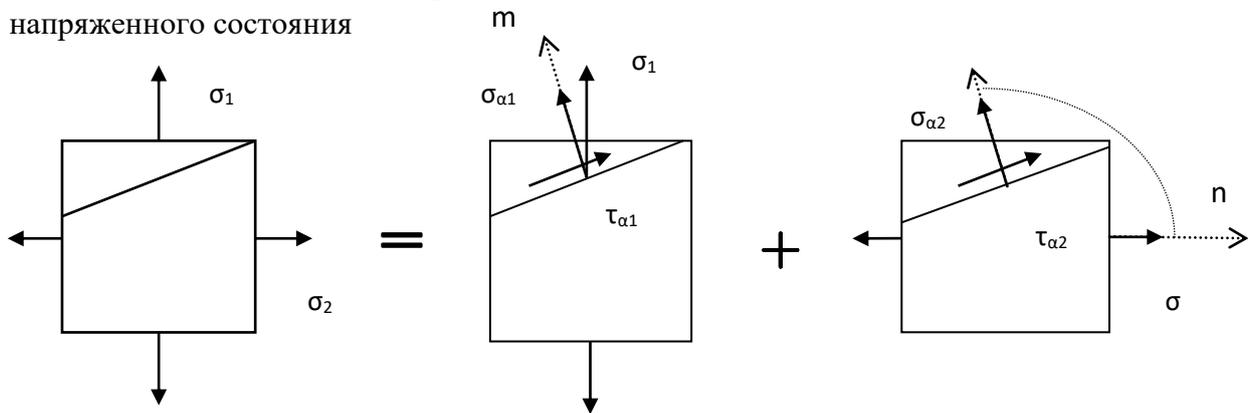


Рисунок 2.8 – Разложение плоского напряженного состояния на линейные по двум осям m, n - внешние нормали к площадкам.

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1(\cos \alpha_1)^2 + \sigma_2(\cos \alpha_2)^2$$

α_1 – угол между направлением σ_{α} и σ_1 , α_2 – угол между направлением σ_{α} и σ_2 , тогда очевидно:

$$\alpha_2 = \pi/2 + \alpha_1, \quad \cos \alpha_2 = \sin \alpha_1.$$

После преобразований получим $\sigma_{\alpha} = \sigma_1(\cos \alpha_1)^2 + \sigma_2(\sin \alpha_1)^2$ (2.4)

Касательные напряжения

$$\tau_{\alpha} = \sigma_1 \frac{\sin 2 \alpha_1}{2} + \sigma_2 \frac{\sin 2 \alpha_2}{2},$$

причем $2 \alpha_2 = \pi + 2 \alpha_1$

$$\tau_{\alpha} = (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\sin 2 \alpha_1}{2} \quad (2.5)$$

2.4 Круговая диаграмма НС для площадок, перпендикулярных к ненагруженной главной площадке при плоском напряженном состоянии

Преобразуем зависимости (2.2, 2.3) с учетом зависимостей

$$(\cos \alpha)^2 = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad (\sin \alpha)^2 = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_\alpha = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} + (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\cos 2\alpha_1}{2} \\ \tau_\alpha = (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\sin 2\alpha_1}{2} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Система уравнений является уравнением окружности параметрического вида в координатах σ, τ , параметром является α . Центр окружности лежит на оси σ на расстоянии

$$\frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2}$$

от начала координат.

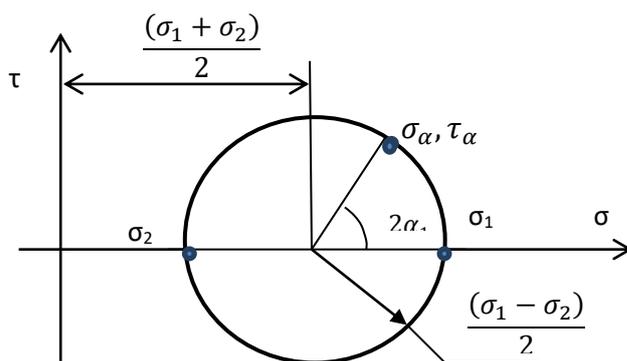


Рисунок 2.9 – Круговая диаграмма плоского напряженного состояния – круг Мора.

Радиус окружности составляет $\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2}$, в качестве параметра откладывается угол $2\alpha_1$. Все точки окружности соответствуют определенным площадкам, перпендикулярным к главной ненагруженной площадке. Координаты точки равны напряжениям на

соответствующей площадке. Если площадка от некоторого начального положения поворачивается в определенном направлении на угол α_1 , то соответствующая ей точка на круге Мора пробегает по окружности от начального положения в том же направлении дугу в $2\alpha_1$.

2.5 Отыскание главных площадок, определение главных напряжений при ПНС

Задача решается следующим образом: рассмотрим площадку, параллельную ненагруженной. Главные площадки будем обозначать цифрами 1,2, произвольные – буквами α, β . При определении знаков положим, что $\sigma_\alpha > \sigma_\beta$, то есть в качестве площадки α выбираем площадку с большим напряжением. Очевидно, что $\tau_\alpha = -\tau_\beta$.

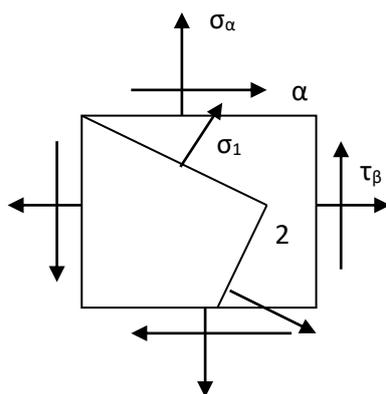


Рисунок 2.10 – Напряжения на главных и произвольных площадках элемента

Пример. Задано: $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \tau_\alpha, \tau_\beta$

Найти: $\sigma_1, \sigma_2, \alpha$.

Построим круговую диаграмму напряженного состояния в координатах σ, τ , где точка, соответствующая площадке α имеет координаты $(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$, а – площадке β - $(\sigma_\beta, \tau_\beta)$, и эти точки являются концами диаметра β .

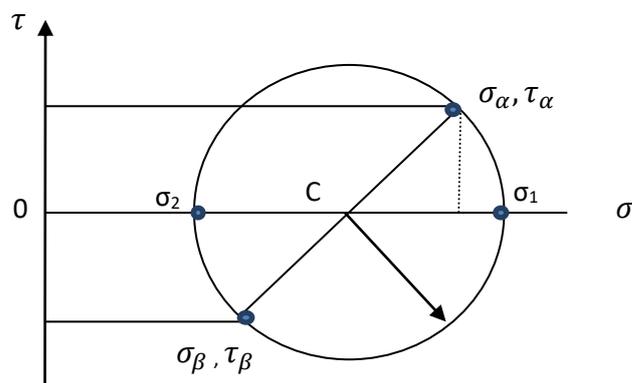


Рисунок 2.11 – Круговая диаграмма плоского напряженного состояния для заданных значениях нормальных и касательных напряжений на наклонных площадках.

$$OC = \frac{(\sigma_\alpha + \sigma_\beta)}{2}, \sigma_{1,2} = OC \pm R, \quad R = \sqrt{\left[\frac{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)}{2}\right]^2 + \tau_\alpha^2}.$$

Окончательно

$$\sigma_{1,2} = \frac{(\sigma_\alpha + \sigma_\beta)}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)}{2}\right]^2 + \tau_\alpha^2}; \quad (2.7)$$

$$tg2\alpha = -\frac{2\tau_\alpha}{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)} \quad (2.8)$$

2.6 Круговая диаграмма напряженного состояния для площадок общего положения при ОНС (объемном напряженном состоянии)

Также можно разложить ОНС на плоское НС, при котором искомая площадка перпендикулярна к ненагруженной главной, и линейное НС.

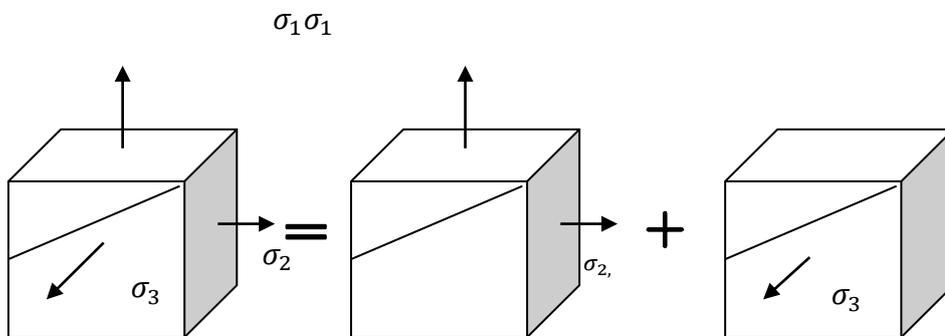


Рисунок 2.12 – Разложение объемного напряженного состояния на плоское и линейное.

Окончательный вид круговой диаграммы объемного напряженного состояния представлен на рисунке 2.13.

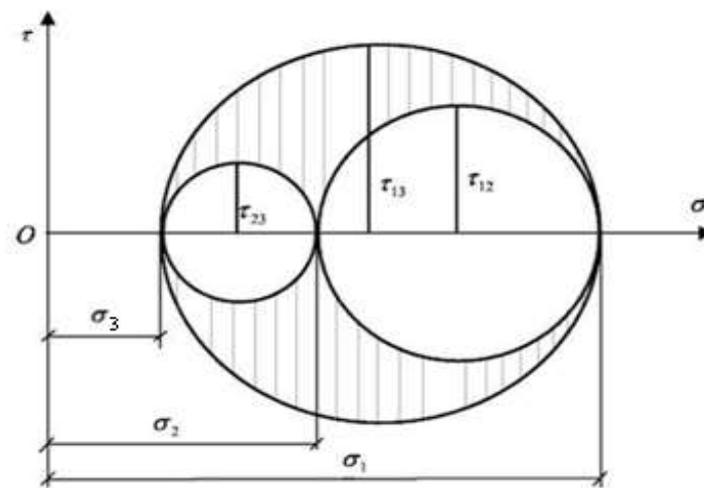


Рисунок 2.13 – Круговая диаграмма объемного напряженного состояния

Прочность не всегда определяется напряжениями, возникающими в поперечных сечениях балки. Для проверки прочности необходимо знать напряжения на площадках, проходящих через рассматриваемую точку.

При изучении темы необходимо разобраться:

- какие напряжения и площадки называются главными;
- как определяются напряжения на наклонных площадках при линейном, плоском напряженном и объемном состояниях;
- как определить главные напряжения при помощи круга Мора.

В сопротивлении материалов наряду с линейной и угловой деформациями рассматривают и объемную деформацию; относительное изменение объема равно сумме линейных деформаций по трем взаимно перпендикулярным осям.

При проверке прочности элемента на гранях которого действуют главные напряжения σ_1 , σ_2 и σ_3 в первую очередь необходимо определить величины соответствующих деформаций. Между компонентами напряженного и деформированного состояния существует зависимость, которая в упругой области называется обобщенным законом Гука:

1) относительные удлинения

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)], & \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu \cdot (\sigma_1 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \quad (2.9)$$

2) относительные сдвиги

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (2.10)$$

3) относительное изменение объема

$$e = \frac{\sigma_{\text{ср}}}{k} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{k} \quad (2.11)$$

и где k — модуль объемной деформации $k = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2 \cdot \mu)}$

Контрольные вопросы:

- 2.1. Что называется напряженным, деформированным состоянием в точке?
- 2.2. Какие виды напряженного состояния вам известны?
- 2.3. Какие виды деформированного состояния вам известны?
- 2.4. В чем заключается закон парности касательных напряжений?
- 2.5. Чему равна сумма нормальных напряжений на двух взаимно перпендикулярных плоскостях?
- 2.6. Как расположена площадка с максимальной величиной касательных напряжений при линейном, плоском и объемном напряженном состоянии?
- 2.7. На каких площадках возникают наибольшие и наименьшие нормальные напряжения?
- 2.8. Запишите обобщенный закон Гука.

Тема 3. Осевое растяжение – сжатие (ОРС). Механические характеристики строительных материалов. Проверка прочности и подбор сечения при ОРС

Цель: применять знания в области сопротивления материалов при выборе исходной информации и нормативно-технических документов при оценке прочности, жёсткости и устойчивости элемента строительных конструкций.

Ключевые вопросы:

- 3.1. Осевое растяжение – сжатие (ОРС)
- 3.2. Напряжения в поперечном сечении бруса при осевом растяжении-сжатии (ОРС).
- 3.3. Проверка прочности, подбор сечения при ОРС
- 3.4. Перемещения при осевом растяжении-сжатии (ОРС)
- 3.5. Механические свойства материалов и их основные характеристики

Методические указания

Каждому виду нагружения соответствует определенный закон распределения напряжений и деформаций, а также используются определенные геометрические характеристики поперечных сечений, поэтому важно определить вид нагружения элементов конструкций.

Осевое растяжение – сжатие (ОРС) - вид напряженного состояния, при котором в поперечных сечениях бруса возникают только нормальные силы.

3.1 Напряжения в поперечном сечении бруса при осевом растяжении-сжатии (ОРС)

Рассмотрим деформацию образца при осевом растяжении/ сжатии (рисунок 3.1).

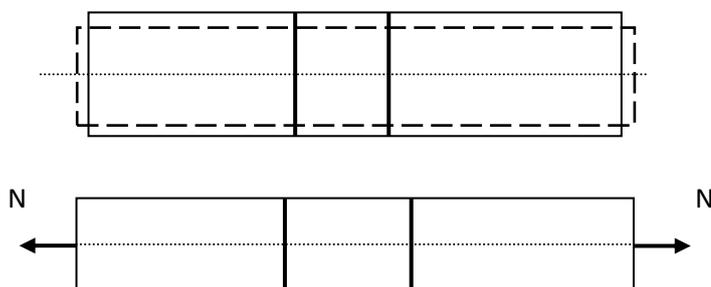


Рисунок 3.1- Растяжение образца под действием продольной силы, приложенной вдоль оси бруса

При нагружении образца растягивающей продольной силой происходят деформации: контуры поперечных сечений остаются плоскими; перемещаются поступательно;

все образующие удлиняются одинаково.

Так как продольные волокна удлиняются одинаково, они не скользят друг по другу, не давят друг на друга в поперечном направлении – в продольных сечениях отсутствуют касательные напряжения. Материал работает в условиях линейного напряженного состояния (ЛНС).

Напряжения в любой точке поперечного сечения при осевом растяжении / сжатии (ОРС) равны

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

3.2 Проверка прочности, подбор сечения при ОРС

При сжатии стержней малой гибкости деформирование происходит также, как и при растяжении для изотропных материалов. Для анизотропных материалов принцип деформирования сохраняется, но параметры деформирования отличаются при сжатии и растяжении. Для гибких стержней складывается особая картина: в сечениях помимо продольной силы возникает изгибающий момент, и встает необходимость проверки устойчивости стержней, который будет рассматриваться позднее.

Условие прочности при ОРС бруса постоянного сечения определяется просто, так как все точки поперечного сечения оказываются в одинаковых условиях. Строится эпюра продольной силы по длине бруса, определяется максимальное ее значение N_{\max} и делится на площадь поперечного сечения.

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq \sigma_{\text{adm}}. \quad (3.1)$$

σ_{adm} – так называемое допускаемое напряжение, в технической литературе обозначается также $[\sigma]$.

Условие прочности для бруса переменного сечения

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{N}{A}\right)_{\max} \leq \sigma_{\text{adm}}. \quad (3.2)$$

Подбор кругового сечения для бруса при ОРС:

$$d = \sqrt{\frac{4N_{\max}}{\pi\sigma_{\text{adm}}}}. \quad (3.3)$$

3.3 Перемещения при осевом растяжении-сжатии (ОРС)

Определим перемещения нижнего концевое сечения бруса переменного сечения равное его полному удлинению Δl (рисунок 3.2),

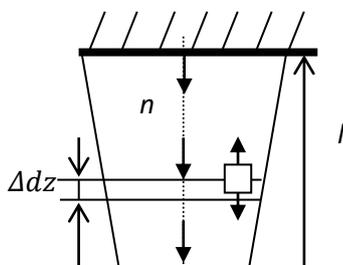


Рисунок 3.2 – Растяжение бруса переменного сечения под действием равномерно распределенной нагрузки

По длине изменяется площадь поперечного сечения $A(z)$ и продольная сила $N(z)$, напряжения запишутся в виде:

$$\sigma(z) = \frac{N(z)}{A(z)} \quad (3.4)$$

Закон Гука $\sigma(z) = E\varepsilon(z)$ (3.5)

Относительная продольная деформация в сечении с абсциссой z является отношением приращения Δdz к длине dz :

$$\varepsilon(z) = \Delta dz / dz.$$

Удлинение рассматриваемого элемента бруса Δdz и полное удлинение бруса Δl равно

$$\Delta dz = \frac{\sigma(z)}{E} dz = \frac{N(z) dz}{EA(z)}, \quad (3.5)$$

$$\Delta l = \int_l \frac{N(z)}{EA(z)} dz \quad (3.6)$$

Удлинение бруса, имеющего n участков, будет равно

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \int_l \frac{N_i(z)}{EA_i(z)} dz \quad (3.7)$$

При постоянной продольной силе на каждом участке полное удлинение бруса вычисляется как

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{EA_i}. \quad (3.8)$$

E – характеристика жесткости (упругости) материала, зависит от его физических свойств,

EA – жесткость сечения бруса для постоянной площади сечения,

$\frac{EA}{l}$ – жесткость участка бруса при постоянной силе и площади сечения.

Пример. Подобрать диаметр бруса кругового поперечного сечения (рисунок 3.3)

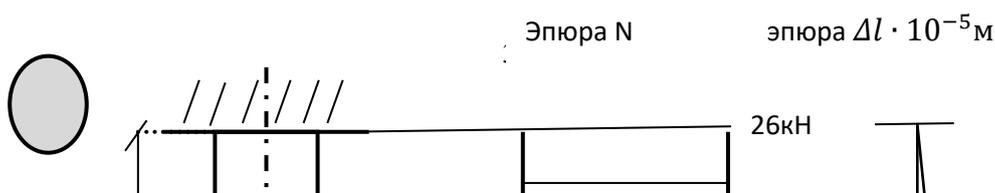


Рисунок 3.3 – Расчетная схема конструктивного элемента, эпюра продольной силы и перемещений

Дано: $\sigma_{adm} = 100$ МПа, $E = 210$ ГПа

Подобрать сечение бруса (определить диаметр), определить полное удлинение бруса.

а) Построим эпюру нормальных сил, используя метод сечений, который заключается в том, что можно отбросить часть бруса (условно), если заменить ее силовыми факторами, которые в ней действуют.

б) Расчет начнем с конца, противоположного заделке (чтобы не определять реакцию, действующую в заделке):

1. Первый участок I - от 0 до 0,5 м. На него действует только внешняя растягивающая продольная сила $P_1 = 20$ кН, приложенная к концу бруса:

$$N_2 = P_1 = 20 \text{ кН}$$

2. Второй участок - II от 0 до 0,8 м. На него действует внешняя растягивающая продольная сила $P_1 = 20$ кН, приложенная к концу бруса; сжимающая продольная сила $P_2 = -10$ кН, приложенная в начале II участка, а также растягивающая распределенная нагрузка интенсивностью $n = 20$ кН/м на длине z :

$$N_2 = 20 - 10 + nz,$$

в начале участка $N_2 = 10$ кН,

в конце участка соответственно $N_2 = 10 + 20 \cdot 0.8 = 26$ кН.

3. Третий участок III- от 0 до 0,6м. На него по-прежнему действует внешняя растягивающая продольная сила $P_1=20 \text{ кН}$, приложенная к концу бруса; сжимающая продольная сила $P_2=-10 \text{ кН}$, приложенная вначале II участка, а также растягивающая распределенная нагрузка интенсивностью $n=20 \text{ кН/м}$ на длине 0,6м. То есть, внешняя нагрузка, приложенная к началу III участка, равна нагрузке, действующей на конец II участка, и остается постоянной в пределах этого участка, так как никаких внешних сил на III участке не приложено:

$$N_3 = 26 \text{ кН}.$$

4. Подберем сечение бруса из условия прочности:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq \sigma_{adm}.$$

Максимальное значение продольной силы N_{max} согласно эпюре N (рисунок 3.3) равно $N_{max} = 26 \text{ кН}$.

$$A = \frac{\pi d^2}{4}, \quad d = \sqrt{\frac{4 N_{max}}{\pi \sigma_{adm}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 26 \cdot 10^3}{3.14 \cdot 100 \cdot 10^6}} = 0.0575 \text{ м},$$

Если материал анизотропный, то при растяжении и сжатии могут быть заданы различные значения σ_{adm} .

В соответствии с *нормальным рядом размеров (ГОСТ 6636-69)* выбираем диаметр 60мм.

$$\text{Тогда } A = \frac{3.14 \cdot 0.0575^2}{4} = 2.83 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Вычислим перемещения каждого участка бруса с учетом определенной площади поперечного сечения:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0.5}{210 \cdot 10^9 \cdot 2.83 \cdot 10^{-3}} = 1.68 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} + \int_0^{0.8} \frac{nz}{EA} dz = \frac{(10 \cdot 0.8 + 20 \cdot 0.8^2) \cdot 10^3}{210 \cdot 10^9 \cdot 2.83 \cdot 10^{-3}} = 3.49 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EA_3} = \frac{26 \cdot 10^3 \cdot 0.6}{210 \cdot 10^9 \cdot 2.83 \cdot 10^{-3}} = 2.62 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Следовательно, полное перемещение торца сечения равно

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{EA} = (1.68 + 3.49 + 2.62) \cdot 10^{-5} = 7.79 \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

- На эпюре перемещений откладываем Δl_3 в конце III участка вниз от заделки, так как смещение в заделке равно нулю;
- в конце второго участка откладываем ординату, равную $(\Delta l_3 + \Delta l_2)$;
- в конце первого участка откладываем ординату, равную $(\Delta l_3 + \Delta l_2 + \Delta l_1)$ с учетом алгебраических знаков, (рисунок 3.3).

При построении эюр внутренних силовых факторов жесткость бруса, которая определяется размерами сечений и зависит от материала, принимается в общем виде, но она оказывает влияние на определение напряжений в сечениях бруса (площадь при растяжении-сжатии) и величину деформаций (жесткость бруса EA).

Определение геометрических характеристик рассмотрено в следующей лекции. Для ОРС такой характеристикой является **площадь поперечного сечения A** .

Модуль Юнга, входящий в понятие жесткости, является физической характеристикой материала бруса, также как и напряжения, и характеризует его способность обеспечивать прочность.

3.4 Механические свойства материалов. Диаграмма растяжения малоуглеродистой стали

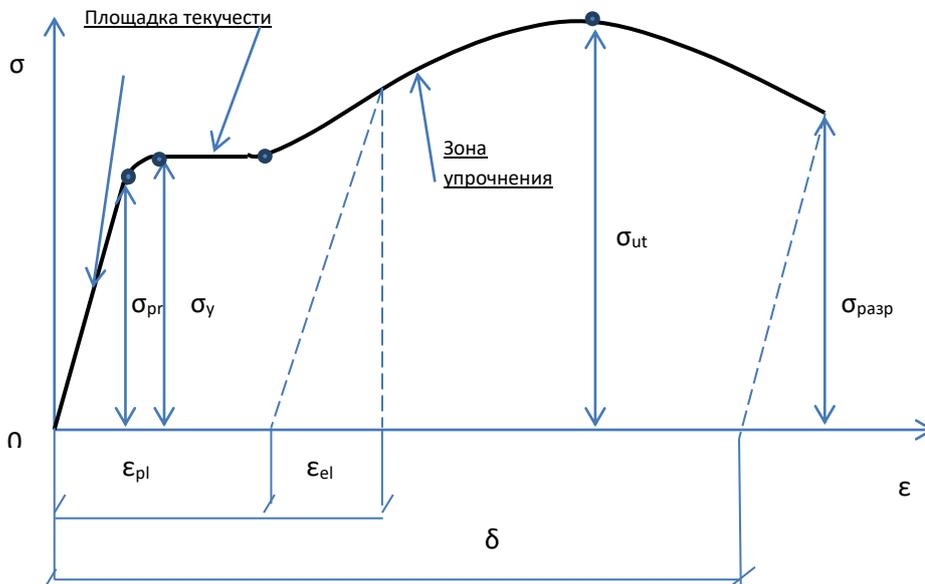


Рисунок 3.4 – Диаграмма растяжения образца из малоуглеродистой стали

На рисунке 3.4 введены принятые в соответствии с системой СИ международные обозначения, [в квадратных скобках использованы аналогичные обозначения, которые встречаются в отечественной технической литературе]:

σ_{pr} – предел пропорциональности, [$\sigma_{пр}$]; σ_y – предел текучести, [σ_T]; σ_{ut} – предел прочности при растяжении, [$\sigma_{вр}$]; ϵ_{pl} – пластическая относительная деформация, [$\epsilon_{п}$];

ϵ_{el} – упругая относительная деформация, [ϵ_y].

Для определения основных механических характеристик материала, для каждой партии проводятся испытания изготовленных по ГОСТу образцов круглого сечения на растяжение в разрывных машинах. Результаты испытаний представлены в виде диаграммы растяжения, (рисунок 3.4), в данном случае испытания выполнены для малоуглеродистой стали, которая обладает свойством пластичности.

Пояснения к диаграмме растяжения образца из малоуглеродистой стали, обладающей свойством пластичности.

- 1) При нагружении в начале испытаний график деформирования представляет собой линейную зависимость до нагружения, соответствующего пределу пропорциональности – *зона упругости*, этой точке соответствуют упругие деформации по закону Гука, и если на этом этапе снять нагрузку, то упругие деформации исчезают.
- 2) Затем график отклоняется от прямой, но зона по-прежнему остается упругой, то есть развиваются только упругие деформации до появления в сечениях образца напряжений, соответствующих *пределу упругости* σ_e . На диаграмме эта характеристика не отмечена, точка находится между пределом пропорциональности и пределом текучести.
- 3) Важным показателем является предел текучести, соответствующий началу *площадки текучести* – такого состояния, когда нагрузка остается постоянной, а деформации растут. При этом после *разгрузки*, которая проходит параллельно упругой зоне, остаются *пластические (остаточные) деформации*.
- 4) Затем следует *зона упрочнения*-пластические деформации на этом этапе прирастают медленнее.
- 5) По мере дальнейшего роста нагрузки напряжения в сечениях приближаются к пределу прочности. В этот момент в каком-то из сечений образца (наиболее слабом, имеющим большее количество несовершенств в материале) появляется так называемая *шейка-резкое сужение* поперечного сечения, после чего происходит разрыв образца, так как площадь поперечного сечения уменьшается.

Остаточным относительным удлинением δ называется отношение *остаточной линейной деформации* $\Delta l_{\text{ост}}$ образца к его *первоначальной длине* l

$$\delta = \frac{\Delta l_{\text{ост}}}{l} = \frac{l_{\text{разрыв}} - l}{l} 100\%$$

$l_{\text{разрыв}}$ – *длина образца после разрыва*.

Основные механические характеристики материала: E , σ_{pr} , σ_y , $\sigma_{\text{ти}}$ или σ_{uc} .

Иначе выглядит диаграмма сжатия различных материалов (рисунок 3.5)

Пределы текучести при растяжении и сжатии для одной и той же пластической стали, практически одинаковы. Понятие *предела прочности при сжатии* условно, так как при сжатии образец расплющивается, поперечное сечения постоянно увеличивается.

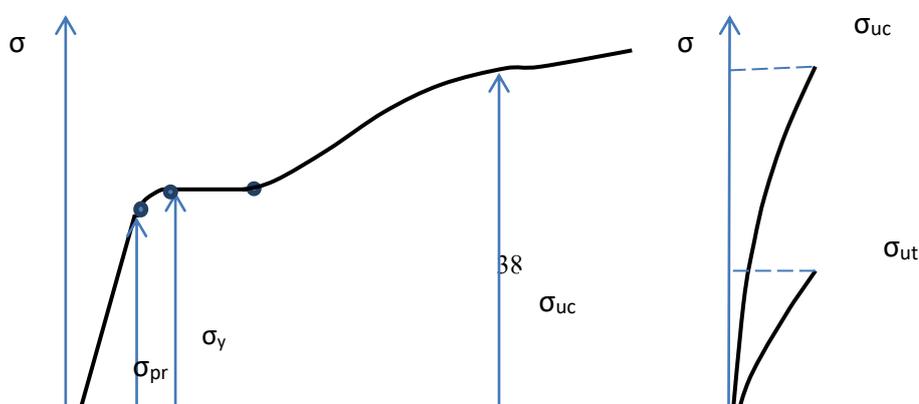


Рисунок 3.5 - Диаграмма сжатия а) пластичного материала, б) хрупких материалов

Хрупкие материалы (чугун, бетон) деформируются иначе: с самого начала не следуют закону Гука; упругие деформации очень малы, практически отсутствуют; пределы прочности материала на растяжение значительно меньше, чем на сжатие (рисунок 3.5.б).

На рисунке 3.6 представлены виды образцов разных строительных материалов до и после испытания на сжатие.

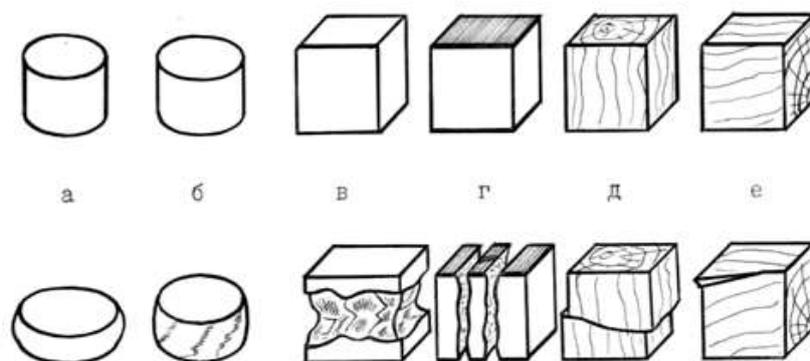


Рисунок 3.6 - Вид образцов из различных материалов до и после испытания на сжатие:
а – малоуглеродистая сталь; б – чугун; в – цементный раствор без смазки торцов; г – цементный раствор со смазкой торцов; д – дерево вдоль волокон; е – дерево поперек волокон

Особым своеобразием отличается сопротивление **сжатию древесины** как материала анизотропного и обладающего волокнистой структурой. При сжатии, как и при растяжении, древесина обладает различной **прочностью** в зависимости от направления сжимающей силы по отношению к направлению волокон.

При сжатии вдоль волокон древесина значительно (в 8-10 раз) прочнее, чем при сжатии поперек волокон, так как связь между годовыми кольцами стволов деревьев гораздо слабее. При сжатии вдоль волокон образец разрушается вследствие сдвига одной части относительно другой (рисунок 3.6, д), а при сжатии поперек волокон древесина склонна к прессованию и не всегда удается определить момент начала разрушения (рисунок 3.6, е).

Поведение деревянных конструкций под нагрузкой изучается подробнее на дисциплине «Конструкции из дерева и пластмасс»

3.5 Понятие пластичности и хрупкости

Еще одно свойство строительных материалов, которое часто путают с прочностью – *твёрдость*.

Прочность и твердость это разные понятия! Алмаз – один из самых твердых материалов, но гвоздь из него сломается, если по нему ударить обычным молотком, а стальной гвоздь – нет, хотя сталь не самый твердый металл.

Прочность – способность всей конструкции или материала противостоять своему разрушению от внешнего воздействия.

Прочность материала выявляют нагрузкой образца из этого материала замером величин его упругих и пластических свойств и зависимости между напряжением и относительным удлинением. Но разные материалы по-разному реагируют на внешнее воздействие.

Материал может быть ***упругим***, т.е. восстанавливать свою первоначальную форму после снятия внешних нагрузок. Численно эта упругость выражается величиной модуля упругости $E = \tan \alpha$, где α – угол наклона линии деформирования металла к оси абсцисс, и пределом упругости, т.е. таким максимальным напряжением, при котором деформации после снятия нагрузки исчезают.

Также материал может быть ***пластичным*** - сохранять деформированное состояние после снятия нагрузки, т.е. получать остаточные деформации без разрушения. Мерой пластичности материала служит относительное остаточное удлинение при разрыве. Перед разрушением в образце в месте разрыва образуется «шейка», поперечное сечение образца уменьшается, и в зоне шейки развиваются большие местные пластические деформации. Относительное удлинение при разрыве складывается из равномерного удлинения на всей длине образца и локального удлинения в зоне шейки. Мерой пластичности может также служить относительное сужение при разрыве.

Ну и наконец, материал может быть ***хрупким*** - разрушаться при малых деформациях. Выявляется это свойство испытаниями на ударную вязкость на специальных маятниковых копрах. Под действием удара молота копра образец разрушается. Ударная вязкость КС определяется затраченной на разрушение образца работой, отнесенной к площади поперечного сечения. Один и тот же металл может разрушаться как вязко, т.е. с развитием значительных пластических деформаций, так и хрупко, в зависимости от целого ряда факторов. Таким образом, ударная вязкость является комплексным показателем, характеризующим состояние металла (хрупкое или вязкое), сопротивление динамическим (ударным) воздействиям, чувствительность к концентрации напряжений и служит для сравнительной оценки качества материала.

Строго говоря, нужно рассматривать пластичное или хрупкое состояние материала, которое может зависеть от внешних причин. Например, пластичный материал при низких температурах может стать хрупким. Теория разрушения, которая различает вязкое и хрупкое разрушение, является предметом рассмотрения дисциплины Механика деформируемого твердого тела.

Если материал подвергать постоянному переменному (циклическому), то при достаточно большом числе циклов разрушение может произойти гораздо раньше. Это явление называется ***усталостью металла***. Поэтому рассчитывают еще и на ***циклическую прочность***.

Твердость – свойство не всего образца, а поверхностного слоя металла сопротивляться упругой и пластической деформациям или разрушению при внедрении в него индентора из более твердого материала.

Обычно чем тверже материал, тем выше его статическая прочность. Так как испытание на твердость проводится без разрушения детали, широко применяют приближенную оценку прочности материала и правильности термообработки по величине твердости.

Твердость по Бринеллю (НВ) определяют вдавливанием в испытуемый материал шарика из закаленной стали диаметром 10 мм под нагрузкой 3000 кгс. Число НВ равно отношению силы, вдавливающей шарик, к площади поверхности полученного отпечатка.

Твердость по Роквеллу (HRC) определяют вдавливанием алмазного конуса в закаленную сталь. Число твердости HRC соответствует разности глубин проникновения конуса под действием основной нагрузки (150 кгс) и предварительной (10 кгс).

Ползучесть – свойство материала непрерывно деформироваться во времени без увеличения нагрузки. Ползучесть в металлах проявляется в основном при высоких температурах. Оценка степени ползучести производится по результатам длительных испытаний образцов на растяжение.

Контрольные вопросы:

- 3.1. В чем состоит гипотеза плоских сечений?
- 3.2. Как вычисляются нормальные напряжения в поперечном сечении растянутого стержня?
- 3.3. Что называется абсолютной продольной, поперечной деформациями? Как определяется относительная продольная и поперечная деформации? Какова их размерность?
- 3.4. Запишите закон Гука.
- 3.5. В каких сечениях стержня возникают наибольшие по величине нормальные и касательные напряжения?
- 3.6. Какие механические характеристики прочностных свойств пластичных и хрупких материалов вы знаете?
- 3.7. Что называется физическим и условным пределом текучести?
- 3.8. Что называется пределом прочности?
- 3.9. Что такое наклеп?
- 3.10. В чем заключается метод допускаемых напряжений?
- 3.11. В чем заключается метод разрушающих нагрузок?
- 3.12. В чем разница между методом допускаемых напряжений и разрушающих нагрузок?
- 3.13. Запишите условие прочности при растяжении, сжатии.
- 3.14. Запишите условие жесткости при растяжении, сжатии.

Тема 4. Геометрические характеристики поперечных сечений элементов строительных конструкций

Цель: применять знания в области сопротивления материалов при выборе исходной информации и нормативно-технических документов при оценке прочности, жёсткости и устойчивости элемента строительных конструкций.

Ключевые вопросы:

- 4.1 Характерные оси сечения

- 4.2 Статические моменты площади плоского сечения или части сечения
- 4.3 Определение геометрических характеристик относительно центральных осей
- 4.4 Полярный момент инерции площади сечения
- 4.5 Осевые моменты инерции площади сечения относительно центральных осей
- 4.6 Центробежный момент инерции
- 4.7 Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей
- 4.8 Изменение моментов инерции при повороте осей
- 4.9 Главные оси и главные моменты инерции

Методические указания

О прочности элементов конструкций в целом судят по прочности наиболее опасного сечения, такого сечения, которое находится под действием совокупности неблагоприятных нагрузок в этом сечении. При действии продольной силы вдоль оси элемента, нормальные напряжения получают делением величины этой силы на площадь.

При других видах нагружения площадь не является основной характеристикой для определения напряжений, действующих в поперечных сечениях элемента. Можно провести простой опыт: изогнуть линейку, которая плоскостью расположена горизонтально, очень легко, но если повернуть ее вертикально ребром, то изогнуть ее в этой плоскости уже не получится. Следовательно, на прочность и деформации влияет не только площадь. Очевидно, что геометрия поперечных сечений (их размеры и форма, ориентация) также влияет на величину напряжений и деформаций, поэтому изучение таких характеристик и определение их численных значений необходимо для вычисления напряжений в сечениях бруса, а также деформаций, перемещений при различных видах нагружения. При изучении теории обратите внимание на взаимосвязь осевых моментов инерции с полярным моментом инерции. Постарайтесь запомнить понятия геометрических характеристик плоских сечений. Важно знать, относительно каких координатных осей осевые моменты инерции имеют минимальное значение, какие оси являются главными и центральными.

Характерные оси сечения** - такими осями называются **центральные, главные и главные центральные оси сечения.

*Оси, проходящие через центр тяжести поперечного сечения, называются **центральными.***

*Оси, относительно которых **центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты принимают экстремальные значения, называются главными осями.** Если они к тому же являются центральными, то тогда называются **главными центральными осями.***

4.1 Статические моменты площади плоского сечения или части сечения

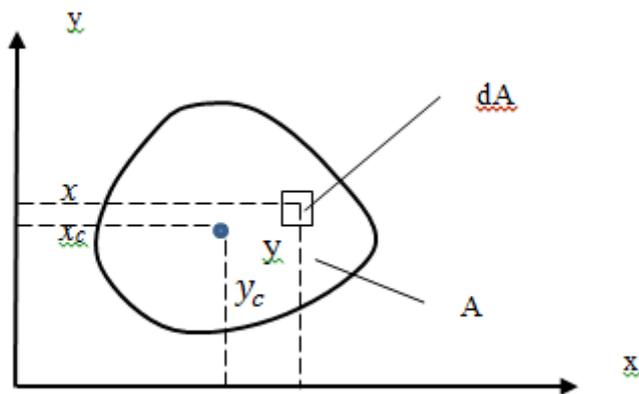


Рисунок 4.1- Статический момент площади сечения

A – площадь фигуры

Все точки dA имеют координаты x, y точно до бесконечно малых.

Статическим моментом площади A относительно оси x является интеграл вида

$$S_x = \int_A y dA,$$

а статическим моментом площади A относительно оси y является интеграл вида

$$S_y = \int_A x dA.$$

Если известно положение центра масс $c(x_c, y_c)$, то статические моменты относительно осей будут равны

$$S_x = \int_A y dA = y_c A; \tag{4.1}$$

$$S_y = \int_A x dA = x_c A.$$

Из определения статического момента следует, *статические моменты относительно главных осей равны 0*.

Статический момент сложной фигуры можно вычислить как сумму статических моментов простых фигур, площадь которых вычисляется элементарно и известно положение центра масс.

Статический момент сложной фигуры, состоящей из n простых фигур можно представить в виде суммы конечного числа конечных величин

$$S_x = \sum_{i=1}^n S_{xi} \tag{4.2}$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n S_{yi}.$$

Статические моменты используют для определения центров масс:

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_i^n S_{xi}}{\sum_i^n A_i}$$

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_i^n S_{yi}}{\sum_i^n A_i}.$$
(4.3)

4.2 Определение геометрических характеристик относительно центральных осей. Полярный момент инерции площади сечения

От него зависят напряжения в сечениях бруса, если при деформации бруса его сечение вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости сечения. Применяется при расчетах элементов конструкции кругового поперечного сечения.

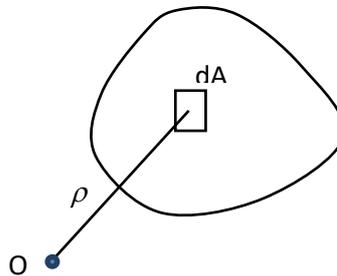


Рисунок 4.2 – Полярный момент инерции площади поперечного сечения

Рассмотрим некоторую точку площади сечения на расстоянии ρ от полюса O (рисунок 4.2).

Полярным моментом инерции называется интеграл вида

$$I_p = \int_A \rho^2 dA.$$
(4.4)

Момент инерции площади круга относительно центра масс, т. е. относительно центра окружности, употребляется только при скручивании и для кругового сечения.

Выделим площадку, все точки которой должны быть равноудалены от полюса, очевидно, что это будет кольцо толщиной $d\rho$, (рис.4.3). Тогда площадь этого кольца будет равна

$$dA = 2\pi\rho d\rho,$$

$$I_p = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2}.$$
(4.5)

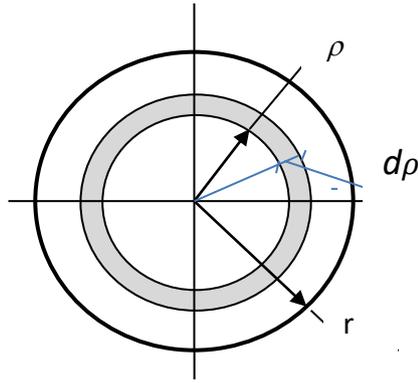


Рисунок 4.3 - Полярный момент инерции кругового сечения

Если выразить полярный момент инерции через диаметр, то получим

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = 0.1 d^4. \quad (4.6)$$

Полярный момент инерции площади кольца

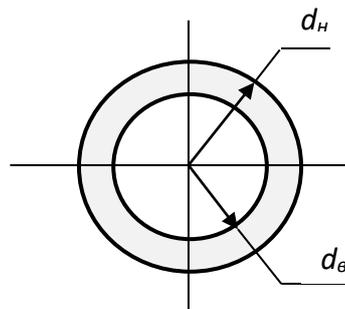


Рисунок 4.4 - Полярный момент инерции кольцевого сечения

d_n – наружный диаметр, d_b - внутренний диаметр, $d_n/d_b = c$. Момент инерции кольца можно представить как разность

$$I_p = I_{pI} - I_{pII} = 0.1 d_n^4 - 0.1 d_b^4 = 0.1 d_n^4 (1 - c^4) \quad (4.7)$$

4.3 Осевые моменты инерции площади сечения относительно центральных осей

Моменты инерции площади сечения относительно оси, принадлежащей плоскости сечения, применяют для вычисления напряжений в сечениях бруса, перемещений, если при деформации его сечение вращается относительно осей, лежащих в плоскости сечения.

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA. \quad (4.8)$$

Установим связь между осевыми моментами инерции и полярным.

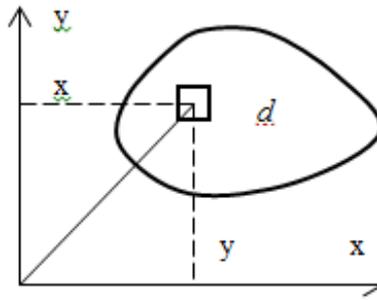


Рисунок 4.5 – Связь осевых и полярного момента инерции

Очевидно, что $\rho^2 = x^2 + y^2$,
тогда полярный момент инерции будет равен

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_x$$

$$I_p = I_y + I_x \quad (4.9)$$

Очевидно, что для круга вследствие центральной симметрии, осевые моменты инерции равны $0.5I_p$

$$I_y = I_x$$

$$I_p = 2I_x = 2I_y$$

$$I_y = I_x = 0.05d^4 . \quad (4.10)$$

Моменты инерции прямоугольника относительно его осей симметрии (рис.4.6)

Элементарная площадь dA выделенного слоя прямоугольника dy равна

$$dA = b dy,$$

тогда осевой момент инерции получим, подставив значение dA в формулу (4.8)

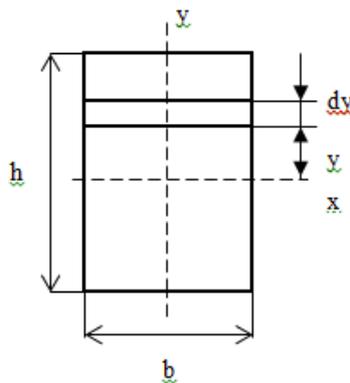


Рисунок 4.6 – Определение осевых моментов инерции прямоугольного профиля

$$I_x = \int_{-h/2}^{h/2} b y^2 dy = \frac{bh^3}{12},$$

$$(4.11)$$

$$I_y = \frac{b^3 h}{12}.$$

Обратите внимание, что в куб возводится сторона, перпендикулярная оси.

Центробежный момент инерции является характеристикой, необходимой для определения главных осей, определяется интегралом

$$I_{xy} = \int_A xy \, dA. \quad (4.12)$$

В отличие от полярного и осевых моментов может быть отрицательным и равным 0.

4.4 Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей

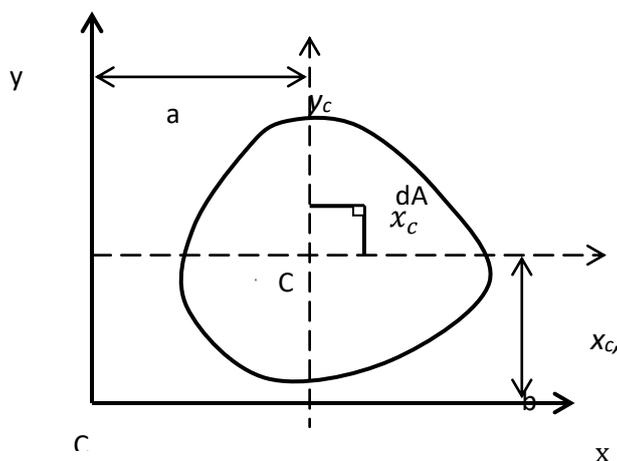


Рисунок 4.7 - Связь между осевыми моментами инерции при параллельном переносе осей

1. Установим связь между осевыми моментами инерции при параллельном переносе осей (рисунок 4.7).

Пусть задана система центральных осей x_c, y_c , центр масс которой расположен в точке c , а также система осей x, y , параллельных x_c, y_c соответственно и расстояния между осями a, b .

Также нам известны координаты x_c, y_c элементарной площадки dA , площадь фигуры A , осевые моменты и центробежный момент инерции в системе центральных осей $I_{x_c}, I_{y_c}, x_c, y_c$.

Нужно определить I_x, I_y, I_{xy} в системе координат x, y .

Выразим координаты точки в нецентральных осях через координаты точки в центральных осях

$$x = x_c + a, \quad y = y_c + b.$$

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A (y_c + b)^2 dA = \int_A y_c^2 dA + \int_A 2y_c b dA + \int_A b^2 dA;$$

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_A (x_c + a)^2 dA = \int_A x_c^2 dA + \int_A 2x_c a dA + \int_A a^2 dA;$$

Т.к. статический момент относительно центральных осей равен 0, получим:

$$I_x = I_{x_c} + Ab^2;$$

$$I_y = I_{y_c} + Aa^2; \quad (4.13)$$

Очевидно, что из моментов инерции относительно параллельных осей наименьшим является момент инерции относительно центральной оси, наибольшим – относительно оси, наиболее удаленной от центра масс фигуры.

2. Установим изменение центробежного момента инерции при параллельном переносе осей

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_A xy dA = \int_A (x_c + a)(y_c + b) dA = \\ &= \int_A x_c y_c dA + \int_A x_c b dA + \int_A y_c a dA + \int_A ab dA \\ I_{yx} &= I_{x_c y_c} + abA \end{aligned} \quad (4.14)$$

4.5 Изменение моментов инерции при повороте осей

Определение моментов инерции в системе координат u, v при ее повороте на угол α относительно системы координат x, y (рисунок 4.8).

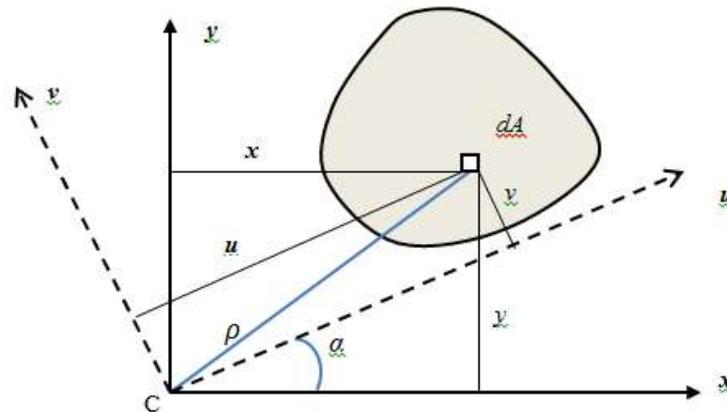


Рисунок 4.8 - Изменение моментов инерции при повороте осей

Дано: I_x, I_y, I_{xy}, α

Найти: I_u, I_v, I_{uv}

Из аналитической геометрии известна зависимость

$$u = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad v = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

Исключим *иивв* в выражениях осевых моментов инерции:

$$\begin{aligned}
 I_u &= \int_A v^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA = \\
 &= \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA - 2 \cos \alpha \sin \alpha \int_A xy dA + \sin^2 \alpha \int_A x^2 dA; \\
 I_v &= \int_A u^2 dA = \int_A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA = \\
 &= \cos^2 \alpha \int_A x^2 dA + 2 \cos \alpha \sin \alpha \int_A xy dA + \sin^2 \alpha \int_A y^2 dA.
 \end{aligned}$$

Окончательно:

$$I_u = \cos^2 \alpha I_x + \sin^2 \alpha I_y - \sin 2 \alpha I_{xy}; \quad (4.15)$$

$$I_v = \sin^2 \alpha I_x + \cos^2 \alpha I_y + \sin 2 \alpha I_{xy}; \quad (4.16)$$

$$I_u + I_v = I_x + I_y. \quad (4.17)$$

Сумма моментов инерции относительно взаимно перпендикулярных осей с общим началом координат является константой.

Аналогичные преобразования проведем для центробежного момента инерции I_{uv} :

$$\begin{aligned}
 I_{vu} &= \int_A uv dA = \int_A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - x \sin \alpha) dA = \\
 &= \cos^2 \alpha \int_A xy dA + \cos \alpha \sin \alpha \int_A xy dA - \cos \alpha \sin \alpha \int_A xy dA + \sin^2 \alpha \int_A y^2 dA; \\
 I_{vu} &= I_{xy} \cos 2 \alpha + \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2 \alpha.
 \end{aligned} \quad (4.18)$$

4.6 Главные оси и главные моменты инерции

Из выражения (4.17) следует, что при изменении угла поворота α значения осевых моментов меняются, но их сумма остается неизменной. Значит, существует такое α , при котором один из моментов инерции будет максимальным, а другой примет минимальное значение.

Дифференцируя выражение (4.16) по параметру α и приравнявая производную нулю, находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}. \quad (4.19)$$

Также можно отметить, при этом угле α центробежный момент инерции обратится в нуль. *Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты принимают экстремальные значения, называются главными осями.* Если они к тому же являются центральными, то тогда *называются главными центральными осями.*

Осевые моменты инерции относительно главных осей называются *главными моментами инерции*. Представим (4.15), (4.16) в виде:

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_y - I_x}{2} \cos 2 \alpha - I_{xy} \sin 2 \alpha;$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_y - I_x}{2} \cos 2 \alpha + I_{xy} \sin 2 \alpha.$$

Учитывая зависимости

$$\cos 2 \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2 \alpha}}; \quad \sin 2 \alpha = \frac{\operatorname{tg} 2 \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2 \alpha}},$$

и используя (4.19), после преобразований получим выражения для определения экстремальных значений осевых моментов инерции

$$I_{\min}^{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\frac{I_y^2 - I_x^2}{2} + I_{xy}^2}. \quad (4.20)$$

При проектировании строительных конструкций часто возникает необходимость подбирать составное, так называемое, сложное сечение, комбинируя разные прокатные профили, полосы для того, чтобы обеспечить требуемые геометрические характеристики.

В случае сложных сечений его площадь разбивается на простые фигуры или профили, для которых известны координаты центров тяжести, легко рассчитать или известны площади, статические моменты, моменты инерции относительно своих осей (собственные моменты инерции). Затем определяется суммарная площадь, координаты центра тяжести составного сечения, необходимые моменты инерции, положение главных осей. Конечной целью является вычисление *момента сопротивления сечения*, понятие о котором будет введено по мере изучения других разделов сопромата.

Контрольные вопросы:

- 4.1. Что называется статическим моментом плоского сечения относительно какой-либо оси?
- 4.2. Чему равен статический момент плоского сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения?
- 4.3. Как определить координаты центра тяжести сложного сечения?
- 4.4. Что называется осевым, полярным моментом инерции? Какая между ними существует взаимосвязь?
- 4.5. Как определяются моменты инерции сложных сечений?
- 4.6. Относительно каких координатных осей осевые моменты инерции имеют минимальную величину?

Тема 5. Кручение. Сдвиг

Цель: овладеть навыками оценки прочности, жёсткости и устойчивости элемента строительных конструкций, в т.ч., с использованием прикладного программного обеспечения

Ключевые вопросы:

- 5.1 Напряжения в поперечных сечениях бруса кругового профиля
- 5.2 Проверка прочности, подбор сечения для брусев кругового профиля при кручении
- 5.3 Перемещения при кручении
- 5.4 Кручение бруса некругового сечения
- 5.5 Сдвиг

5.1 Напряжения в поперечных сечениях бруса кругового профиля

Кручением называют вид напряжений, при котором в поперечном сечении бруса возникают только крутящие моменты T или $(M_z; M_k)$. Брус, работающий на кручение, называется *валом*.

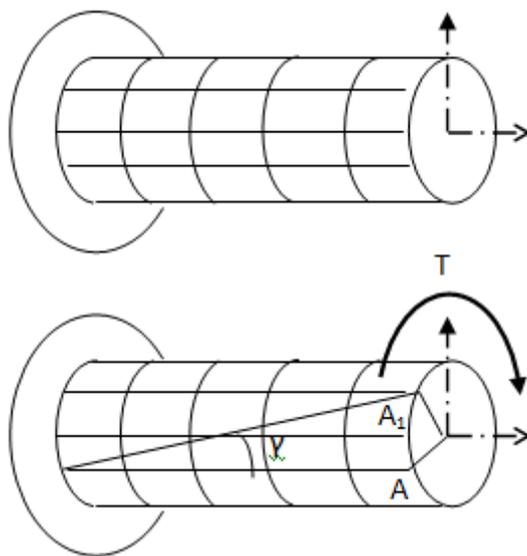


Рисунок 5.1 – Деформация вала при кручении

Деформация образца при кручении – длина и поперечные размеры образца не изменились, площади поперечных сечений остались плоскими, поступательно не переместились. Точка a на поверхности переместилась в точку A_1 . Размеры ячейки сеток вдоль и поперек образца не изменились. Приращения получили углы ячейки, γ - угол сдвига, материал работает в условиях чистого сдвига.

Допущение о деформации бруса при кручении: поперечные сечения при деформации остаются плоскими, вращаясь вокруг оси образца, не изменяя размеров, поступательно не перемещаются. Так как продольные и поперечные размеры не изменяются, в продольных и поперечных сечениях отсутствуют нормальные напряжения. Поскольку размеры сечения не изменяются, в его точках отсутствуют радиальные касательные напряжения (касательные напряжения в общем случае можно разложить на две составляющих), и в данном случае

вектор касательных напряжений перпендикулярен радиусу точки, для которой оно определяется (рисунок 5.2).

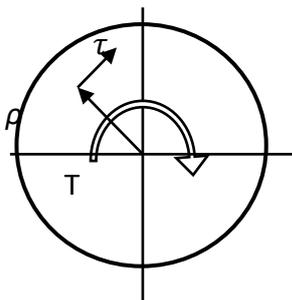


Рисунок 5.2 – Касательные напряжения на площадке вала произвольного радиуса ρ

При кручении поперечные сечения бруса вращаются друг относительно друга. Угол взаимного поворота двух сечений, удаленных друг относительно друга на расстояние l , называют *углом закручивания на длине l* .

θ_{rel} (рад/м)-- угол взаимного поворота двух сечений, удаленных друг относительно друга на единицу длины, называют *относительным углом закручивания*.

Рассмотрим цилиндрическую поверхность радиуса ρ , $d\varphi$ – угол закручивания на длине dz (рисунок 5.3).

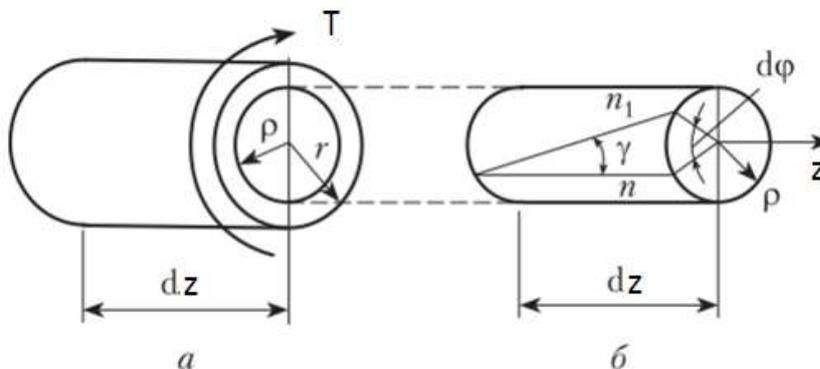


Рисунок 5.3 – Зависимость угла сдвига и закручивания

Образующая n займет новое положение n_1 , и угол между ними является углом сдвига γ . Ввиду малости деформаций можно установить связь между углом сдвига γ и $d\varphi$ – углом закручивания на длине dz .

$$AA_1 = dz \operatorname{tg} \gamma = \gamma dz$$

$$AA_1 = \rho d\varphi$$

$$\gamma = \frac{\rho d\varphi}{dz}$$

С учетом закона Гука для сдвига $\tau = \gamma G$ определим значение касательных напряжений при кручении поперечного сечения вала

$$\tau = \frac{G\rho d\varphi}{dz}$$

Так как dR – равнодействующая внутренних касательных сил на площадке площадью dA в окрестности рассматриваемой точки, то элементарный крутящий момент будет равен

$$dR \cdot \rho = \tau dA \cdot \rho = G\rho^2 d\varphi \frac{dA}{dz}$$

$$T = G \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 dA = GJ_p \frac{d\varphi}{dz}$$

В свою очередь, учитывая, что

$$G \frac{d\varphi}{dz} = \frac{\tau}{\rho}$$

получим следующую формулу – распределение касательных напряжений по высоте сечения:

$$\tau = \frac{T\rho}{J_p} \quad (5.1)$$

Геометрической характеристикой для вычисления максимального касательного напряжения является *полярный момент сопротивления*.

Полярный момент сопротивления для круга:

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{max}} = \frac{\pi D^4}{32} : \frac{D}{2} = 0,2D^3 \quad (5.2)$$

Полярный момент сопротивления для кольцевого сечения:

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{max}} = \frac{\pi D^4(1 - c^4)}{32} : \frac{D}{2} = 0,2D^3(1 - c^4) \quad (5.3)$$

Максимальное касательное напряжение при кручении в сечении с крутящим моментом

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_p} \quad (5.4)$$

Построим эпюру распределения касательных напряжений по диаметру сечения круглого и кольцевого сечения (рисунок 5.4).

$$\tau_{max} = T/W_p \quad \tau_{max} = T/W_p$$

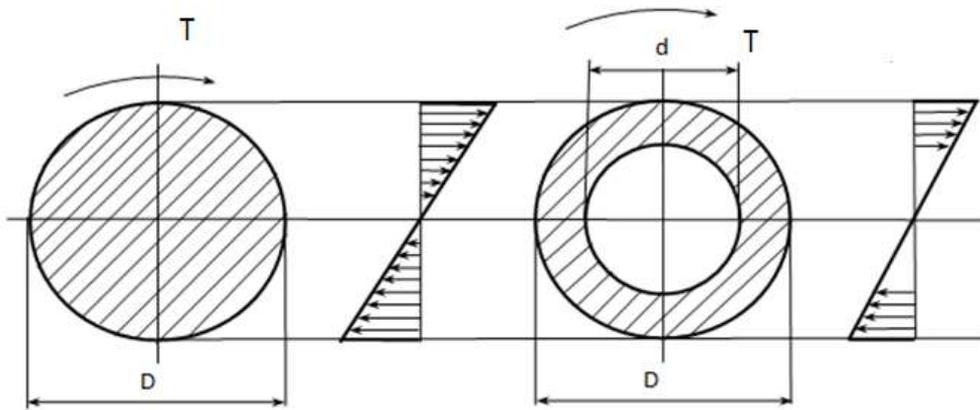


Рисунок 5.4 – Распределение касательных напряжений по высоте кругового и кольцевого сечения

5.2 Проверка прочности, подбор сечения для брусьев кругового профиля при кручении

Условие прочности для чистого сдвига:

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_p} \leq \tau_{adm}$$

Условие прочности для бруса постоянного сечения:

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_p} \leq \tau_{adm} \quad (5.5)$$

Условие прочности для бруса переменного сечения:

$$\tau_{max} = \left(\frac{T}{W_p} \right)_{max} \leq \tau_{adm} \quad (5.6)$$

Подбор кругового сечение вала: подставим выражение для полярного момента сопротивления в формулу (5.5) и приравняем максимальные касательные напряжения к допускаемым:

$$\tau_{adm} = \frac{T_{max}}{0.2d^3}$$

откуда $d = \sqrt[3]{\frac{T_{max}}{0.2\tau_{adm}}}$. (5.7)

Диаметр подбирается в соответствии с рядом нормальных размеров, нормальных диаметров.

С целью рационального использования материала конструкций допускается перегрузка - 5%, т.е. $\tau = 1.05\tau_{max}$

5.3 Перемещения при кручении

Угол закручивания на длине dz :

$$T = \frac{GI_p d\varphi}{dz}; \quad d\varphi = \frac{T dz}{GI_p};$$

Выражение для вычисления полного угла закручивания

$$\theta = \int_0^l \frac{T dz}{GI_p}. \quad (5.8)$$

Угол закручивания бруса постоянного сечения по длине равен

$$\theta = \int_0^l \frac{T dz}{GI_p} = \frac{Tl}{GI_p}. \quad (5.9)$$

Для бруса переменного сечения:

$$\theta = \int_0^l \frac{T(z) dz}{GI_p(z)} \quad (5.10)$$

Угол взаимного поворота концевых сечений бруса или вала называют *полным углом закручивания*.

Полный угол закручивания для бруса, состоящего из n участков:

$$\theta = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{T_i dz}{GI_{pi}} \quad (5.11)$$

и соответственно для бруса постоянного сечения в пределах i -того участка

$$\theta = \sum_{i=1}^n \frac{T_i dz}{GI_{pi}} \quad (5.12)$$

Часто для вала ограничивают перемещения, которыми при кручении являются углы закручивания.

Условие жесткости:

$$\theta_{max} \leq \theta_{adm}, \quad (5.13)$$

где θ_{adm} - допускаемый угол закручивания.

Иногда условие жесткости задается для относительных углов закручивания:

$$\theta_{relmax} \leq \theta_{reladm} \quad (5.14)$$

очевидно, что

$$\theta_{rel} = \frac{T}{GI_p}. \quad (5.15)$$

Характеристики жесткости при кручении

G - характеризует жесткость материала бруса,

GI_p - жесткость сечения бруса при кручении.

5.4 Расчеты на прочность

Существует три подхода расчетов **на прочность**:

1. **Проектировочный расчет** - определяется диаметр бруса (вала) в опасном сечении по формулам (5.5)-(5.7)
2. **Проверочный (поверочный) расчет**— проверяется выполнение условия прочности при *заданных размерах* поперечного сечения

Прочность также проверяется в процентах по формуле:

$$\delta\% = \frac{|\tau_p - [\tau]|}{[\tau]} \cdot 100\% \leq 5\%$$

Если расчетное напряжение получится больше допускаемого - считаем процент перегруза; если расчетное напряжение получится меньше допускаемого - считаем процент недогруза.

3. **Определение нагрузочной способности** (максимального крутящего момента)

$$[T] = [\tau] \cdot W_p$$

Пример 1. Проверить на прочность вал, если диаметр вала $d = 0.05\text{м}$, $[\tau] = 20\text{МПа}$

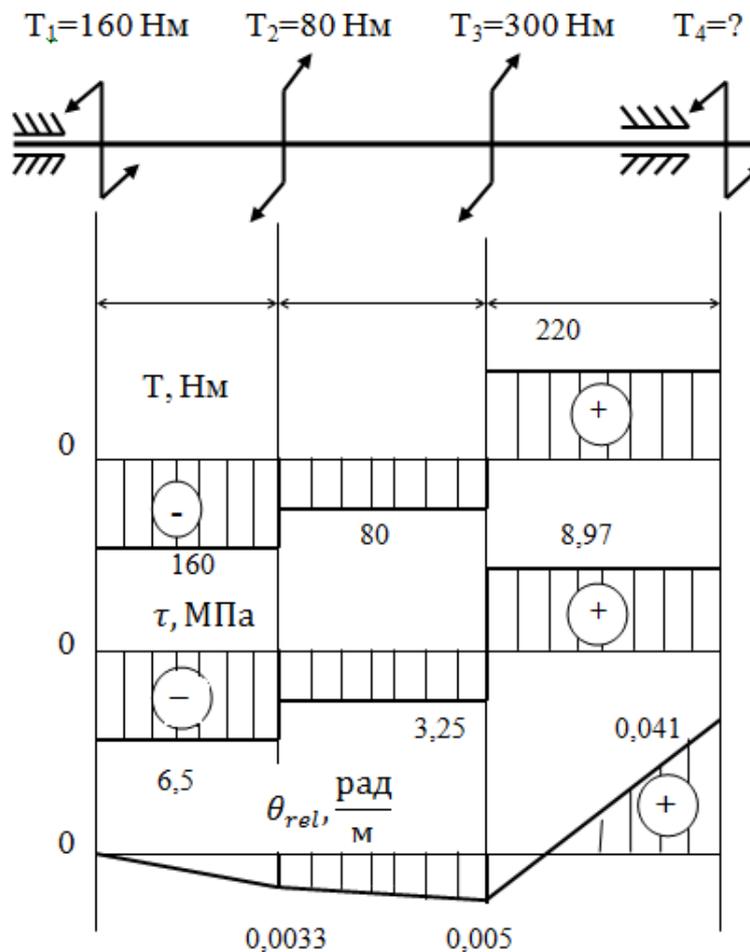


Рисунок 5.5 – Расчет вала из условия прочности

Определяем T_4

$$T_4 = -T_1 + T_2 + T_3 = -160 + 80 + 300 = 220 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Разбиваем на расчетные участки, заделку берем справа, нумеруем участки с левой стороны-получаем 3 участка. Производим расчет крутящих моментов по участкам с левой стороны:

$$T_I = -T_1 = -160 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$T_{II} = -T_1 + T_2 = -160 + 80 = -80 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$T_{III} = -T_1 + T_2 + T_3 = -160 + 80 + 300 = 220 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Строим эпюру моментов.

Определяем касательные напряжения на участках:

Если $d = 0.05 \text{ м}$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3;$$

$$\tau_I = \frac{T_I}{W_p} = \frac{-160}{2,4 \cdot 10^{-5}} = -6,5 \text{ МПа};$$

$$\tau_{II} = \frac{T_{II}}{W_p} = \frac{-80}{2,4 \cdot 10^{-5}} = -3,25 \text{ МПа};$$

$$\tau_{III} = \frac{T_{III}}{W_p} = \frac{220}{2,4 \cdot 10^{-5}} = 8,97 \text{ МПа};$$

Проверяем прочность вала:

$$\tau_{max} \leq [\tau]$$

$$\tau_{max} = \tau_3 = 8,97 \text{ МПа} \leq [\tau] = 20 \text{ МПа}$$

Прочность вала обеспечена.

Расчет на жесткость: при расчете на жесткость определяется деформация и сравнивается с допускаемой.

Условие жесткости при кручении можно записать в виде:

$$\varphi_0 = \frac{T}{GJ_p} \leq [\theta_{rel}].$$

Произведение GJ_p называют жесткостью сечения при кручении. Модуль упругости можно определить как $G \cong 0,4E$. Для стали $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

$$[\theta_{rel}] \approx 1 \frac{\text{град}}{\text{м}} = 0,02 \frac{\text{рад}}{\text{м}} \text{ — допускаемый относительный угол закручивания.}$$

Эпюра распределения относительных углов закручивания представлена на рисунке 5.5

5.5 Кручение бруса некругового сечения

При кручении таких брусков их сечения не остаются плоскими, наблюдается *депланация* (рисунок 5.6). Возникают внутренние взаимно уравновешивающие друг друга нормальные силы. Решение такой задачи заимствовано из теории упругости, в сопротивлении материалов используются только выводы из нее.

Если на поверхности бруса отсутствует распределенная касательная нагрузка, то в соответствии с законом парности отсутствуют составляющие касательных напряжений, нормальные к линиям контуров – в точках контура сечения касательные напряжения направлены по касательным к линиям контура (рисунок 5.7).

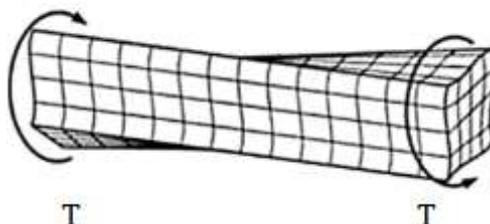


Рисунок 5.6 – Деформация бруса прямоугольного профиля при кручении

Распределение касательных напряжений в сечении прямоугольного сечения

Обозначения, принятые при расчете стержня прямоугольного сечения на кручение

h, b – большая и меньшая стороны прямоугольника;

τ_{max} – наибольшее касательное напряжение;

τ' – касательное напряжение в середине меньшей стороны;

$\theta, (\varphi)$ – угол закручивания;

$It, (I_k)$ – геометрический фактор жесткости- момента инерции бруса прямоугольного профиля при кручении);

$Wt, (W_k)$ – момент сопротивления при кручении;

α, β, η – коэффициенты, зависящие от соотношения сторон h/b .

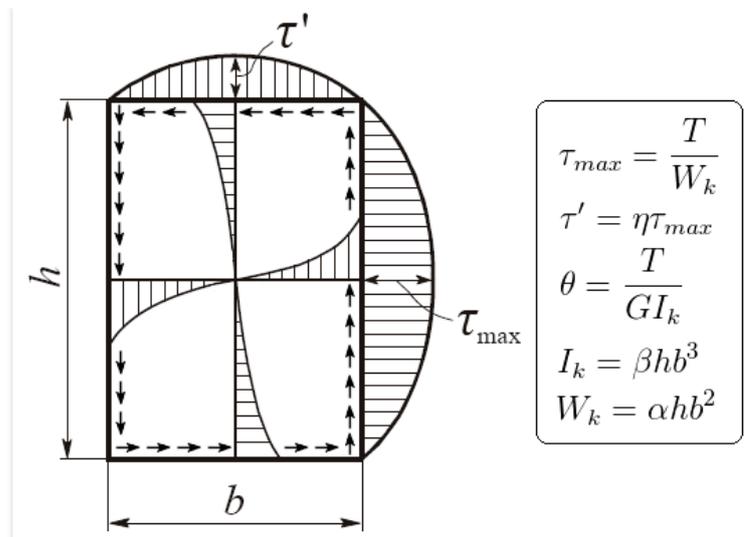


Рисунок 5.7 - Распределение касательных напряжений по контуру прямоугольного сечения

Касательные напряжения изменяются по параболическому закону, максимальное напряжение на длинной стороне посередине определяется по формуле:

$$\tau_{max} = T / w_t \quad (5.16)$$

$w_t = \alpha b h^2$ – момент сопротивления при кручении для прямоугольного сечения.

Максимальное напряжение на короткой стороне посередине определяется по формуле:

$$\tau'_{max} = \eta \tau_{max} \quad (5.17)$$

Угол закручивания бруса прямоугольного сечения:

$$\theta = T / G I_t \quad (5.18)$$

$$I_t = \beta h b^3 \quad (5.19)$$

геометрический фактор жесткости – момент инерции при кручении стержня прямоугольного профиля

α, β, η – числовые коэффициенты, определенные методами теории упругости в зависимости от соотношения сторон (таблица 5.1).

Таблица 5.1 - Коэффициенты α, β, η для определения касательных напряжений по контуру прямоугольного сечения и углов закручивания в зависимости от соотношения сторон h/b .

h/b	1	1,5	2	4	6	8	10	∞
α	0,208	0,231	0,246	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,229	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
η	1,0	0,859	0,795	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

5.6 Сдвиг

Особые случаи сдвига, когда в сечении действует только поперечная сила - например, резка полосы ножницами. На сдвиг также работают жесткие соединения конструкций – сварные, заклепочные и так далее (рисунок 5.8).



Рисунок 5.8 – Расчетная схема заклепочного соединения

Связь касательных напряжений с внутренней силой Q выражается, согласно их равномерного распределения по сечению

$$\tau = \frac{Q}{S},$$

а условие прочности записывается по *минимальной площади среза S_{\min}* , отражающей минимальное число соединяющих элементов (заклепок, болтов, штифтов и т.д.) или минимальную длину сварного шва.

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{S_{\min}} \leq$$

$[\tau]$

(5.20)

При расчете болтовых или заклепочных соединений учитывается *смятие контактирующих поверхностей*, то есть пластическую деформацию, возникающую на поверхности контакта:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{S_{\text{см}}} \leq$$

$[\sigma_{\text{см}}]$

(5.21)

где $S, \text{см}^2$ – площадь проекции поверхности контакта на диаметрально плоскость.

При выполнении проектного расчета, то есть при определении необходимого диаметра заклепки, болта или при определении их количества необходимо учитывать условие прочности на срез и на смятие, из двух значений следует взять большее число, округлив его до ближайшего целого в меньшую сторону.

Примечания: 1. Так как болты и заклепки ослабляют соединяемые листы, последние проверяют на разрыв в ослабленных сечениях

$$\sigma = \frac{F}{S_{\min}} \leq [\sigma_p] \quad (5.22)$$

При расчетах сварных швов считают, что в разрезе угловой шов имеет форму прямоугольного равнобедренного треугольника и разрушение шва происходит по его минимальному сечению, высота которого

$$m = \delta \cos 45^\circ \approx 0,7 \delta$$

где δ – минимальная толщина соединяемых листов.

Пример. Определить необходимое количество заклепок диаметром 20 мм для соединения внахлестку двух листов толщиной 8 мм и 10 мм (рисунок 5.8). Сила F , растягивающая соединение, равна 200 кН. Допускаемые напряжения: на срез $[\tau] = 140$ МПа, на смятие $[\sigma_c] = 320$ МПа.

Решение.

Из условия прочности на срез необходимое число заклепок

$$n \geq \frac{F}{\pi d^2 / 4 [\tau]} = \frac{2 \cdot 10^5}{3.14 \frac{0.02^2}{4} 140 \cdot 10^6} = 4.53 \approx 5$$

Из условия прочности на смятие необходимое число заклепок

$$n \geq \frac{F}{\delta d [\sigma_c]} = \frac{2 \cdot 10^5}{8 \cdot 10^{-3} \cdot 0.02 \cdot 320 \cdot 10^6} = 3.9 \approx 4$$

Ответ: 5 заклепок.

Контрольные вопросы:

- 5.1. Как определяется относительный угол закручивания вала?
- 5.2. Запишите условия проекторочного и проверочного расчетов круглого вала.
- 5.3. Какие три задачи можно решить из условий прочности и жесткости при кручении круглого вала?
- 5.4. Назовите исходные данные для проекторочного расчета из условия прочности круглого вала при кручении.
- 5.5. Назовите исходные данные для проверочного расчета из условия прочности круглого вала при кручении.
- 5.6. Назовите исходные данные для проверочного расчета из условия жесткости круглого вала при кручении.

Тема 6. Чистый изгиб. Поперечный изгиб. Напряжения и деформации при изгибе

Цель: знать методы и способы оценки прочности, жёсткости и устойчивости элемента строительных конструкций, в т.ч., с использованием прикладного программного обеспечения

Ключевые вопросы:

- 6.1 Напряжения и деформации при изгибе.
- 6.2 Поперечный изгиб
- 6.3 Касательные напряжения τ в поперечном и продольном сечениях балки Расчеты на прочность при изгибе
- 6.4 Перемещения при плоском изгибе
- 6.5 Дифференциальное уравнение упругой линии балки
- 6.6 Определение перемещений при плоском изгибе методом начальных параметров
- 6.7 Теории прочности

Методические указания

Изучение деформации изгиба начинается с изучения чистого изгиба. В поперечном сечении балки возникает только один внутренний силовой фактор – изгибающий момент. Непременное условие возникновения чистого изгиба состоит в том, чтобы внешние пары

сил лежали в плоскости, проходящей через одну из главных осей поперечного сечения балки. В этой же плоскости лежит внутренний силовой фактор – изгибающий момент. Используя простейшие формы поперечных сечений балки (прямоугольник, круг, полукруг), потренируйтесь прилагать к расчетной схеме консольной балки пары сил так, чтобы возникала деформация чистого изгиба.

Обратите внимание на то, что при выводе формулы нормальных напряжений в поперечном сечении балки при чистом изгибе к гипотезам расчетной схемы сопротивления материалов добавляется еще две – гипотеза плоских сечений и гипотеза отсутствия взаимного давления волокон в направлении перпендикулярном оси балки. Это дает основание утверждать, что волокна балки испытывают одноосное растяжение, сжатие, что существенно упрощает конечную формулу. Важно понять, что для балки постоянного поперечного сечения кривизна любого волокна зависит только от изгибающего момента. Если эпюра изгибающего момента постоянна на каком-то участке, то любое волокно этого участка изогнуто по дуге окружности (кривизна постоянна). Радиус волокон увеличивается при переходе от сжатых волокон к растянутым. Когда балка имеет несколько участков чистого изгиба, ось ее состоит из дуг окружностей, переходящих одна в другую. Дуги в точках перехода (перегиба) имеют общую касательную, производные равны. Постарайтесь представить закон распределения нормальных напряжений по поперечному сечению, т.е. как они изменяются в направлении параллельном нейтральной оси и перпендикулярном направлению.

С особым вниманием и тщательностью проанализируйте формулу определения максимальной величины нормальных напряжений в поперечном сечении балки при чистом изгибе и постарайтесь ее запомнить. С увеличением осевого момента сопротивления напряжения в заданном сечении уменьшаются, т.к. изгибающий момент постоянен. Для сечения, крайние точки которого в растянутой и сжатой зоне не одинаково удалены от нейтральной линии (оси), возможно вычисление двух моментов сопротивления (для растянутой и сжатой частей сечения). Это необходимо для материалов, имеющих неодинаковое сопротивление растяжению и сжатию. В балках, изготовленных из таких материалов, наибольшие по величине растягивающие напряжения (именно они наиболее опасны для хрупких материалов) могут возникнуть в сечениях с меньшим по абсолютной величине изгибающим моментом. При этом момент сопротивления сечения для растянутой зоны может быть много меньше, чем для сжатой. Из условия прочности при чистом изгибе ставятся и решаются проектировочная, проверочная и эксплуатационная задачи расчета на прочность. Необходимо подробно разобраться в сущности этих задач и запомнить расчетные формулы. При поперечном плоском изгибе в поперечных сечениях балки возникает два внутренних силовых фактора – поперечная сила Q и изгибающий момент M_x . Необходимо тщательно и всесторонне разобраться с методикой построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов. Постарайтесь понять и запомнить правила контроля эпюр поперечных сил и изгибающих моментов. Обратите внимание на дифференциальные зависимости между поперечной силой и распределенной внешней нагрузкой, между поперечной силой и изгибающим моментом и использование их при контроле правильности построения эпюр. От действия изгибающего момента в поперечном сечении изгибаемого бруса возникают нормальные напряжения, а от поперечной силы – касательные. Из-за действия касательных напряжений поперечные сечения перестают быть плоскими (гипотеза Бернулли теряет силу). Кроме того, при поперечном изгибе возникают

напряжения в продольных сечениях балки. Имеет место надавливание волокон друг на друга. Картина деформации существенно отличается от наблюдаемой при чистом изгибе. Однако при расчете нормальных напряжений при плоском поперечном изгибе этими отличиями пренебрегают. Как показала практика, использование формулы расчета нормальных напряжений для чистого изгиба при плоском поперечном изгибе дает вполне надежные результаты. Тем не менее, надо помнить, что для плоского поперечного изгиба эта формула приближенная. Распределение нормальных напряжений по поперечному сечению имеет более сложный характер. Касательные напряжения в поперечном сечении балки при плоском поперечном изгибе определяются по формуле Журавского. При выводе ее использована дополнительная гипотеза о равномерном распределении касательных напряжений по ширине поперечного сечения. Во многих случаях это не соответствует действительности. Расчеты методами теории упругости показывают, что закон распределения касательных напряжений более сложен, и об этом надо не забывать. Формула Журавского позволяет, по сути, вычислить более или менее точно только вертикальную составляющую суммарного касательного напряжения в каждой точке поперечного сечения. Величина касательных напряжений в заданном поперечном сечении балки и определяемых формулой Журавского существенно зависит от ширины b . Лишь при весьма малых значениях b касательные напряжения имеют величину, сравнимую с нормальными напряжениями. Вертикальные стенки поперечных сечений балок, изготовленных из профилей прокатного сортамента, достаточно толстые. Потому максимальная величина касательных напряжений много меньше нормальных. При расчетах таких балок на прочность касательными напряжениями, как правило, пренебрегают. Обязательно необходимо рассчитывать величину касательных напряжений в балках, изготовленных из гнутых профилей тонколистового проката. При этом надо помнить, что для исключения явления закручивания балки под действием внешних сил, необходимо, чтобы в каждом сечении линия действия силы проходила через центр изгиба.

Важно понять, что проектировочный расчет балки при плоском поперечном изгибе и при чистом изгибе производится из одного и того же условия прочности по нормальным напряжениям. Соотношение между величинами, входящими в это условие, определяет условия оптимального проектирования. При проектировании более рациональной конструкции необходимо изменением положения опор добиваться минимальной величины изгибающего момента в опасном сечении с одновременным увеличением момента сопротивления для растянутой или сжатой зоны (путем выбора более рационального поперечного сечения балки). Наиболее выгодным сечением балок с точки зрения затрат материала являются такие, у которых наибольшая доля материала размещена в верхней и нижней частях сечения, где наибольшие напряжения σ . Условия прочности по касательным и эквивалентным напряжениям используются при проверочном расчете.

Обратите внимание на то, что определение перемещений при изгибе, как чистом, так и поперечном, производится с использованием формул, полученных для чистого изгиба. Тем самым мы пренебрегаем влиянием на перемещения напряжений, искривляющих поперечные сечения (явление депланации) и напряжений взаимного сдавливания волокон балки.

Дифференциальное уравнение упругой линии балки при поперечном плоском изгибе записывается также с использованием формулы кривизны балки при ее чистом изгибе EJ

Чтобы не допускать ошибок при записи дифференциального уравнения упругой линии балки, разберитесь, как необходимо размещать систему координат (начало отсчета, направление осей координат)

6.1 Чистый изгиб. Поперечный изгиб. Напряжения и деформации при изгибе

Плоским изгибом называется такой вид деформации стержня, при котором все внешние нагрузки, включая опорные реакции, лежат в одной из главных плоскостей стержня yOz или xOz (рисунок 6.1) и вызывают искривление оси стержня в этой плоскости. Изгибаемый стержень называется *балкой* или *брусом*.

В поперечном сечении балки могут возникать два внутренних усилия – изгибающий момент M_x (или M_y) и поперечная сила Q_x (или Q_y). Если поперечная сила отсутствует, то изгиб называется *чистым*, а при наличии поперечной силы изгиб называется *поперечным*. В дальнейшем будем рассматривать балки с поперечными сечениями, симметричными относительно оси y , и нагруженными силами в плоскости yOz .

При изгибе продольная ось балки искривляется, поперечные сечения, оставаясь плоскими, поворачиваются, продольные волокна либо растягиваются, либо сжимаются (рисунок 6.2).

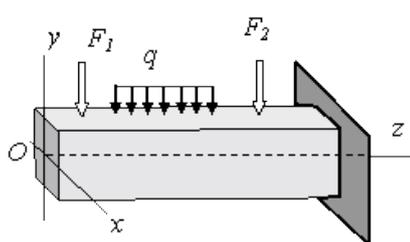


Рисунок 6.1 - Изгиб стержня в плоскости yOz

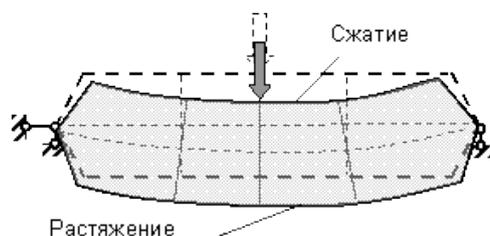


Рисунок 6.2 - Деформированное состояние балки

Для внутренних усилий приняты следующие правила знаков:

Изгибающий момент считается положительным, если растянуты нижние и сжаты верхние волокна;

Поперечная сила считается положительной, если стремится повернуть выделенную часть балки по ходу часовой стрелки (рисунок 6.3).

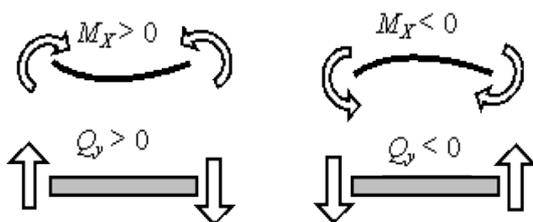


Рисунок 6.3 – Правило знаков для поперечных сил и изгибающих моментов

График, показывающий изменение изгибающего момента вдоль оси балки, называется эпюрой изгибающих моментов (Эпюра M_x). График, показывающий изменение поперечной силы вдоль оси балки, называется эпюрой поперечных сил (Эпюра Q_y). Для построения эпюр находят опорные реакции балки, потом балку разделяют на участки, на каждом из которых получают методом сечений уравнения M_x и Q_y , а затем строят графики полученных функций. Ординаты эпюры M_x откладывают со стороны растянутых волокон балки (положительные – вниз от оси, отрицательные – вверх от оси). Положительные ординаты эпюры Q_y откладывают вверх от оси, отрицательные – вниз от оси графика.

6.1 Примеры построения эпюр

Построить эпюры внутренних усилий в балке, расчетная схема которой представлена на рисунке 6 4, а.

Находим опорные реакции, для чего составляем уравнения моментов относительно опорных точек от всех действующих на балку внешних силовых факторов, включая реакции:

$$\sum M_A = R_B \cdot 4 - F \cdot 5.5 - q \cdot 4 \cdot 2 = 0,$$

Откуда

$$R_B = \frac{8 \cdot 5.5 + 12 \cdot 4 \cdot 2}{4} = 35 \text{кН};$$

$$\sum M_B = -R_A \cdot 4 - F \cdot 1.5 + q \cdot 4 \cdot 2 = 0,$$

$$R_B = \frac{-8 \cdot 1.5 + 12 \cdot 4 \cdot 2}{4} = 21 \text{кН}.$$

Проверка правильности определения реакций (рисунок 4, б)

$$\sum F_y = R_A - q \cdot 4 + R_B - F = 21 - 12 \cdot 4 + 35 - 8 = 56 - 56 = 0.$$

Получено уравнение прямой, так как переменная z_2 входит в уравнение в первой степени. Для построения эпюры вычисляем моменты по концам участка.

$$\text{При } z_2=0, M_{x2}=0, \text{ при } z_2=1.5\text{м}, M_{x2} = -8 \cdot 1.5 = -12 \text{кНм}.$$

Строим эпюру поперечных сил. В сечении на левом участке балки (рисунок 4, в) находим поперечную силу из уравнения проекций всех сил на вертикальную ось y , заменив распределённую нагрузку её равнодействующей:

$$\sum F_y = R_A - qz_1 = 0, \text{ или } Q_{y1} = 21 - 12z_1.$$

Получено уравнение прямой.

$$\text{На левом конце участка при } z_1=0, Q_{y1}=21 \text{кН},$$

$$\text{при } z_1=4\text{м}, Q_{y1} = 21 - 12 \cdot 4 = -27 \text{кН}.$$

В сечении на правом участке балки (рисунок 4, в) находим поперечную силу из уравнения проекций всех сил на вертикальную ось y :

$$Q_{y2} = F = 8 \text{ кН.}$$

для всех поперечных сечений.

6.2 Правила согласования эпюр

В теории изгиба балок уравнение упругой линии балки является дифференциальным уравнением четвертого порядка, и все внешние и внутренние силовые факторы и деформации связаны между собой зависимостями, что отражается на графиках.

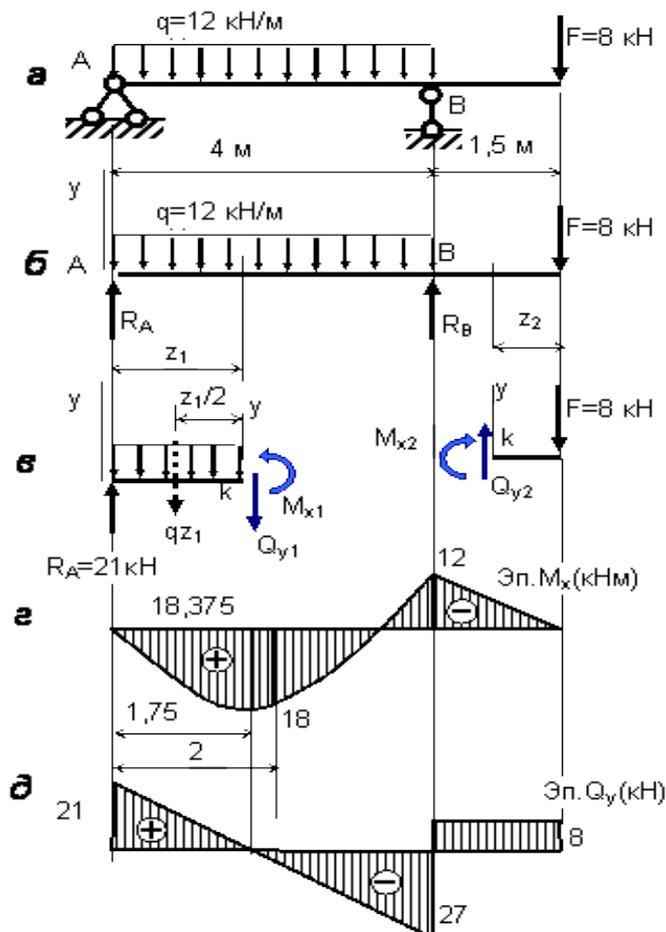


Рисунок 6.4 - Эпюры внутренних силовых факторов при поперечном изгибе

Проверка правильности построения эпюр M_x и Q_y выполняется с использованием следующих особенностей графиков.

1. В точке приложения сосредоточенной силы на эпюре Q_y должен быть скачок на величину силы, а на эпюре M_x – перелом.
2. В точке приложения сосредоточенного момента на эпюре M_x должен быть скачок на величину этого момента.

3. На участке балки, где нет распределённой нагрузки, величина Q_y постоянна, а эпюра M_x изображается наклонной прямой, при этом тангенс угла наклона этой прямой равен величине Q_y .
4. На участке балки, где есть равномерно распределённая нагрузка интенсивностью q , эпюра Q_y изображается наклонной прямой, тангенс угла наклона которой равен q , а эпюра M_x изображается параболой. В том сечении, где $Q_y=0$, момент M_x имеет экстремальное значение.

6.3 Напряжения и деформации при изгибе

Рассмотрим вначале случай плоского *чистого изгиба* (рисунок 6.5), при котором отсутствует поперечная сила, а в любом сечении возникает только изгибающий момент M_x .

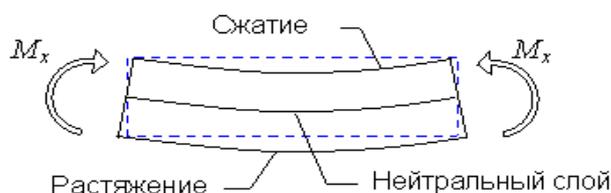


Рисунок 6.5 – Деформация балки при чистом изгибе

Рассматривая деформацию элемента, воспользуемся двумя гипотезами:

гипотеза плоских сечений: - поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации;

гипотеза линейного напряженного состояния - продольные волокна стержня растягиваются или сжимаются и не давят друг на друга, для них выполняется закон Гука

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Деформация оси балки (изгиб нейтральной оси бруса) связана с её кривизной. Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения *называется нейтральной линией (осью)*, она всегда проходит через центр тяжести поперечного сечения.

Кривизна нейтрального слоя оси балки при плоском чистом изгибе:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_x} \quad (6.1)$$

Где ρ – кривизна, которая связана с прогибом математической зависимостью:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{d^2y}{dz^2} / \left[1 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}$$

Или

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{d^2y}{dz^2}$$

Квадратом первой производной можно пренебречь в виду малости последней по отношению к единице. Знак зависит от выбора системы осей для относительно жестких балок.

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \pm \frac{M}{EI_x} \quad (6.2)$$

Нормальные напряжения по высоте поперечного сечения балки изменяются по линейному закону, а по ширине сечения остаются постоянными (рисунок 6.6). Нормальные напряжения в произвольной точке вычисляют по формуле

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I_x} y. \quad (6.3)$$

где M_x – изгибающий момент; I_x – момент инерции площади поперечного сечения относительно нейтральной оси; y – расстояние от нейтральной оси до той точки, в которой вычисляют напряжение. Знак напряжений («плюс» при растяжении, «минус» при сжатии) указывают по физическому смыслу в зависимости от знака изгибающего момента (рисунок 6.6).

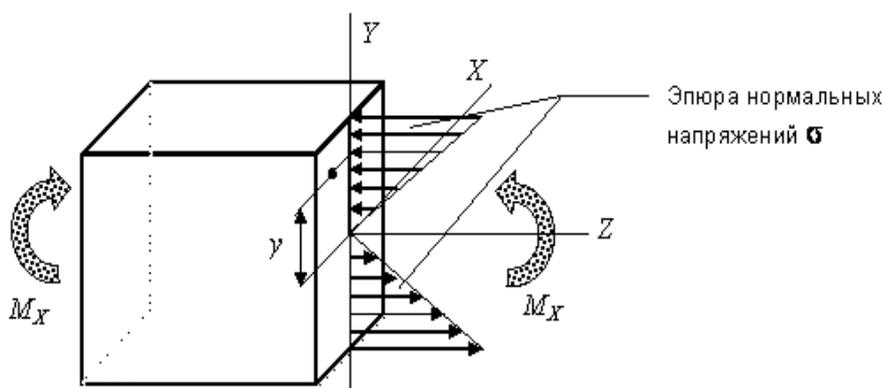


Рисунок 6.6 - Распределение нормальных напряжений σ по высоте поперечного сечения балки

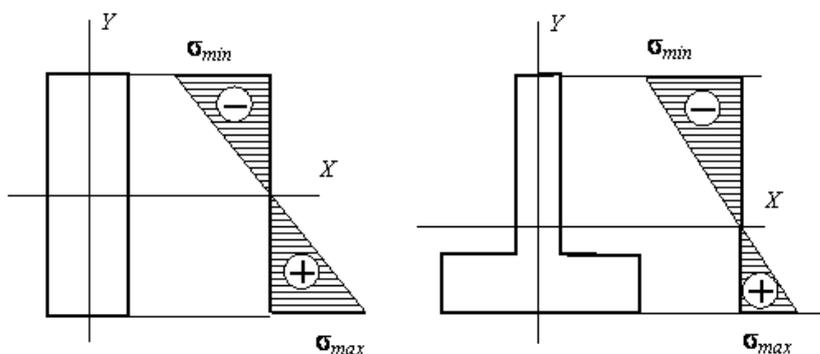


Рисунок 6.7 - Эпюры нормальных напряжений для различных поперечных сечений балки при положительном изгибающем моменте (нейтральная ось x проходит через центр тяжести поперечного сечения)

6.4 Поперечный изгиб

Если кроме изгибающего момента M_x в сечениях бруса действует поперечная сила Q_y , изгиб называется *поперечным изгибом* (рисунок 6.8).

Связанные с поперечной силой деформации сдвига приводят к искривлению поперечных сечений, но эти изменения слабо сказываются на распределении нормальных напряжений, и поэтому формулу (6.3) используют и при поперечном изгибе.

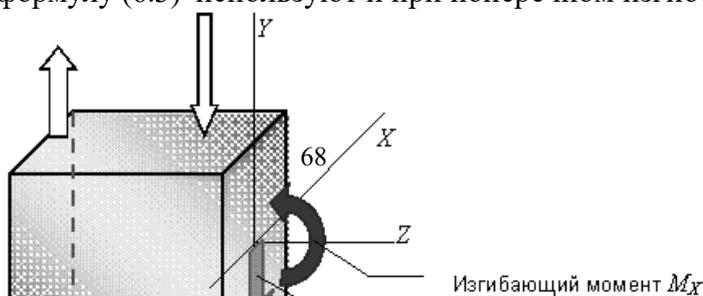


Рисунок 6.8 – Поперечный изгиб балки и нагрузки в сечении

Возникающие при сдвигах касательные напряжения действуют в поперечных и продольных сечениях балки (рисунок 6.9). Величина касательных напряжений определяется по формуле Журавского

$$\tau = \frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{b I_x} \quad (6.4)$$

где: Q_y – поперечная сила; $S_x^{\text{отс}}$ – статический момент *отсечённой* площади поперечного сечения $A_{\text{отс}}$ относительно нейтральной оси x ; b – ширина поперечного сечения в том месте, где вычисляют напряжения по высоте; I_x – момент инерции площади поперечного сечения относительно нейтральной оси x .

При нахождении касательного напряжения в точке K (рисунок 6.9) следует провести через эту точку прямую, параллельную оси X . Часть площади по одну сторону от этой прямой называют *отсечённой площадью* $A_{\text{отс}}$, статический момент которой относительно оси X равен произведению отсечённой площади на расстояние от её центра тяжести до оси X

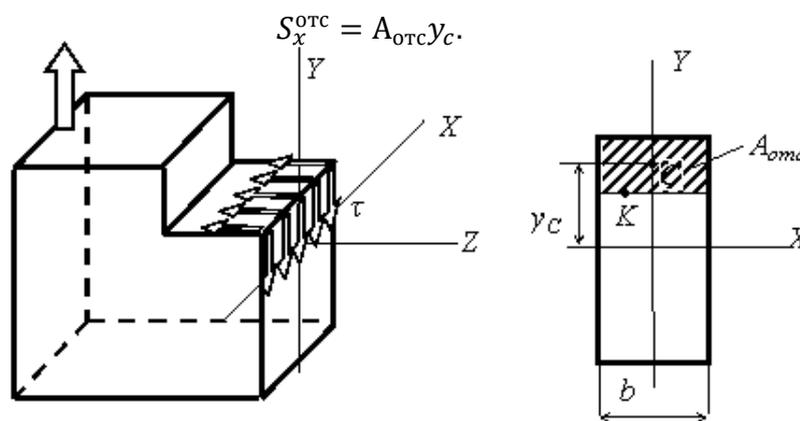


Рисунок 6.9 - Касательные напряжения τ в поперечном и продольном сечениях балки

По ширине поперечного сечения касательные напряжения распределены равномерно, а по высоте сечения – в зависимости от формы сечения. Эпюры напряжений для различных случаев показаны на рисунке 6.10.

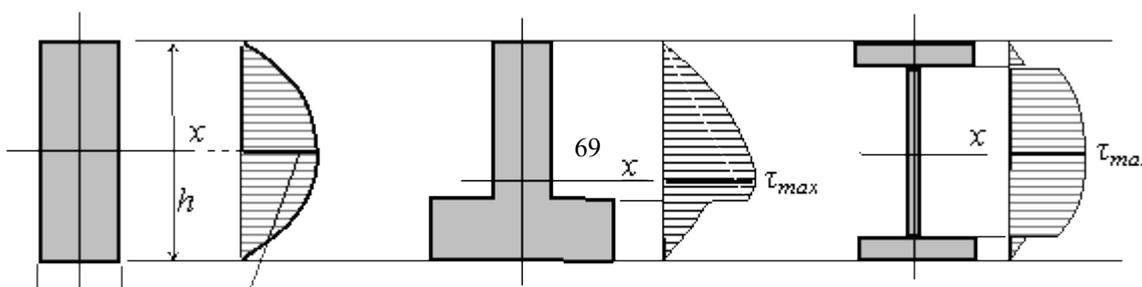


Рисунок 6.10 - Эпюры касательных напряжений для различных поперечных сечений балки

6.5 Расчеты на прочность при изгибе

Условие прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} \leq \sigma_{adm} = R_y \gamma, \quad (6.5)$$

где σ_{max} – наибольшее по модулю напряжение в поперечном сечении; M_x – изгибающий момент; $W_x = \frac{I_x}{|y_{max}|}$ – осевой момент сопротивления; σ_{adm} – допускаемые нормальные напряжения.

Условие прочности по касательным напряжениям

$$\tau_{max} = \frac{Q_y S_x^{отс}}{b I_x} \leq \tau_{adm}, \quad (6.6)$$

где τ_{max} – наибольшее по модулю напряжение в поперечном сечении; τ_{adm} – допускаемые касательные напряжения.

Если для материала балки заданы различные допускаемые нормальные напряжения при растяжении и сжатии, то условия прочности применяют отдельно к наиболее растянутым и к наиболее сжатым волокнам балки.

6.6 Перемещения при плоском изгибе

Положение любой точки балки после ее деформации известно, если известно перемещение центра масс сечения, которому принадлежит точка, и угол поворота этого сечения вокруг нейтральной оси.

Составляющая перемещений центра масс сечения по нормали оси недеформированной балки называется прогиб в этом сечении.

Угол, между плоскостью некоторого сечения деформированной балки и плоскостью этого же сечения недеформированной балки, называют углом поворота этого сечения.

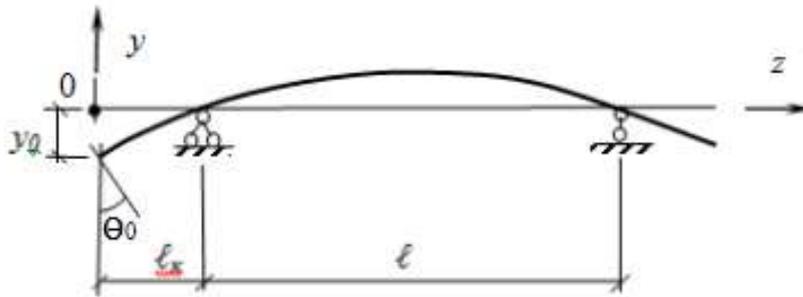


Рисунок 6.11 – Деформация балки при изгибе

y_0 - прогиб в начале координат,

θ_0 - угол поворота сечения балки в начале координат

$$\theta \approx \tan \theta = dy/dz$$

Перемещения удобно определять, имея уравнение упругой балки. *Упругая линия балки – искривленная ось – график функции прогибов.*

6.7 Дифференциальное уравнение упругой линии балки. Метод начальных параметров

Система знаков в дифференциальном уравнении.

Воспользуемся уравнением (6.2) и примем, если ось y направлена вверх, то в нашей системе знаков получим:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M}{EI_x} \quad (6.7)$$

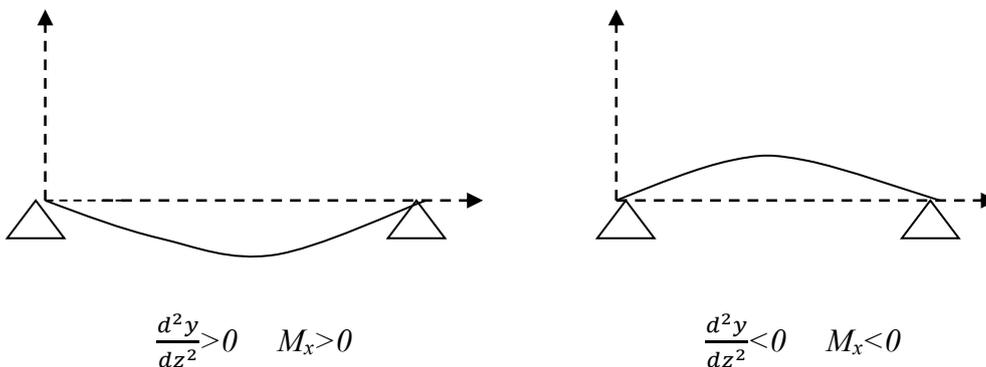


Рисунок 6.12 – Система знаков для изогнутой оси

Проинтегрировав уравнение один раз, получим уравнение углов поворота, дважды – уравнение упругой линии.

Постоянные интегрирования определяют из условий на опорах и границах участков.

Можно уравнивать постоянные интегрирования на участках, если выполнить ряд требований:

- Отсчет абсцисс всех участков вести от одного начала,
- Все члены предыдущих участков должны содержаться в уравнениях последующих участков.
- Каждый вновь появившийся член уравнения должен содержать множитель $(z-a)$, где a – сумма длин предыдущих участков,
- Интегрирование ведут, не раскрывая скобок.

Составим и проинтегрируем дифференциальное уравнение упругой линии балки, выполняя условия выравнивания постоянных интегрирования на участках.

Обозначения в принятой схеме:

- M - изгибающий момент,
- F - сосредоточенная сила (включая опорную реакцию)
- a_m, a_f, a_q - абсцисса приложения момента, сосредоточенной силы, распределенной нагрузки

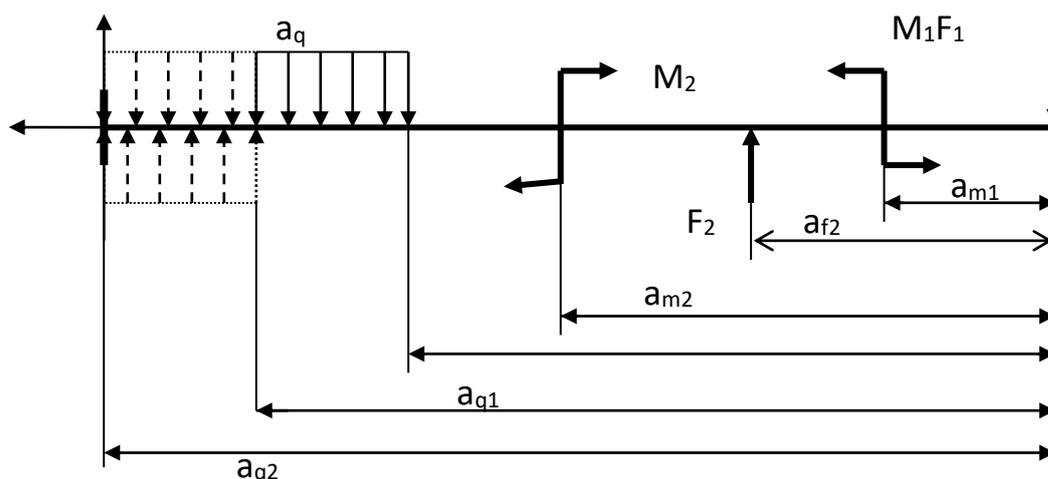


Рисунок 6.13 – Общая расчетная схема для определения уравнения прогибов балки методом начальных параметров

Составим уравнение изгибающих моментов по участкам, отсчитывая от начала координат:

1. Первый участок

$$EJ_x y'' = -F_1 z;$$

$$EJ_x y' = -F_1 \frac{z^2}{2} + C_1;$$

$$EJ_x y = -F_1 \frac{z^3}{6} + C_1 z + D_1;$$

2. Второй участок

$$EJ_x y'' = -F_1 z + M_1 (z - a_m)^0;$$

$$EJ_x y' = -F_1 z + M_1(z - a_{m1}) + C_2;$$

$$EJ_x y = -F_1 \frac{z^3}{6} + M_1 \frac{(z - a_{m1})^2}{2} + D_2;$$

Приравнивая прогибы и углы поворота в начале второго и конце первого участка, получим $C_1 = C_2, D_1 = D_2$, то есть постоянные интегрирования одинаковы для всех участков.

Уравнения моментов по участкам:

$$3. EJ_x y'' = -Fz + M_1(z - a_m)^0 + F_2(z - a_{af2});$$

$$4. EJ_x y'' = -Fz + M_1(z - a_m)^0 + F_2(z - a_{af2}) - M_2(z - a_{m2})^0;$$

$$5. EJ_x y'' = -Fz + M_1(z - a_m)^0 + F_2(z - a_{af2}) - M_2(z - a_{m2})^0 - q \frac{(z - a_{q1})^2}{2};$$

$$6. EJ_x y'' = -F_1 z + M_1(z - a_m)^0 + F_2(z - a_{af2}) - M_2(z - a_{m2})^0 - q \frac{(z - a_{q1})^2}{2} + q \frac{(z - a_{q2})^2}{2};$$

На последнем участке продлеваем распределенную и вычитаем нагрузку, начиная с участка $z = a_{q2}$ (компенсирующую нагрузку противоположного знака).

Дважды проинтегрируем последнее уравнение:

$$EJ_x y' = -F_1 \frac{z^2}{2} + M_1(z - a_m) + F_2 \frac{(z - a_{af2})^2}{2} - M_2(z - a_{m2}) - q \frac{(z - a_{q1})^3}{6} + q \frac{(z - a_{q2})^3}{6} + C;$$

$$EJ_x y = -F_1 \frac{z^3}{6} + M_1 \frac{(z - a_{m1})^2}{2} + F_2 \frac{(z - a_{af2})^3}{6} - M_2 \frac{(z - a_{m2})^2}{2} - q \frac{(z - a_{q1})^4}{24} + q \frac{(z - a_{q2})^4}{24} + Cz + D;$$

Установим физический смысл постоянных: θ_0, y_0 – угол поворота сечения и прогиб в сечении в начале отсчета абсцисс. Их значения получают из граничных условий (условий на опорах). Знаки членов уравнения определяются знаками моментов от внешних силовых факторов.

Запишем уравнение в свернутом виде и получим **универсальное уравнение прогибов (упругой линии)- уравнение в начальных параметрах.**

$$EJ_x y = EJ_x y_0 + EJ_x \theta_0 z + \sum M_i \frac{(z - a_{mi})^2}{2!} + \sum F_i \frac{(z - a_{fi})^3}{3!} + \sum q_i \frac{(z - a_{qi})^4}{4!}; \quad (6.8)$$

Пример. Для балки (рисунок 6.14, а) необходимо:

- проверить прочность при $b = 6\text{см}$, $F = 15\text{кН}$, $\sigma_{adm} = 160\text{МПа}$, $\tau_{adm} = 80\text{МПа}$;
- определить допускаемую величину силы F ;
- подобрать размер t коробчатого поперечного сечения при $F = 15\text{кН}$.

Строим эпюры внутренних усилий (рисунок 6.14, в, г). Для прямоугольного поперечного сечения вычисляем момент сопротивления

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{6 \cdot 12^2}{6} = 144 \text{ см}^3.$$

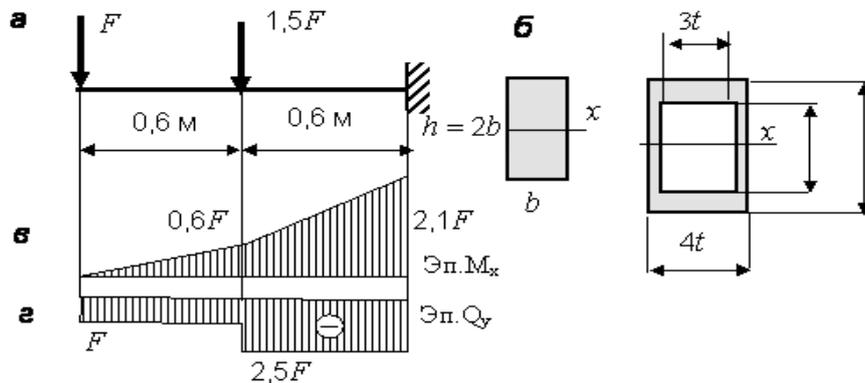


Рисунок 6.14 - Расчет балки на прочность:

a – схема балки; *б* – формы поперечного сечения:

в – эпюра изгибающих моментов; *г* – эпюра поперечных сил

Проверяем условие прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{max} = \frac{M_x^{max}}{W_x} = \frac{1.5 \cdot 2.5 \cdot 100}{144} = \frac{21.9 \text{ кН}}{\text{см}^2} = 219 \text{ МПа} > 160 \text{ МПа}.$$

Проверяем условие прочности по касательным напряжениям

$$\tau_{max} = \frac{1.5Q}{bh} = \frac{1.5 \cdot 2.5 \cdot 15}{6 \cdot 12} = \frac{0.78 \text{ кН}}{\text{см}^2} = 7.8 \text{ МПа} < 80 \text{ МПа}.$$

По касательным напряжениям прочность балки обеспечена, а по нормальным напряжениям – нет.

Определяем, какую нагрузку может выдержать балка при заданных размерах поперечного сечения.

Наибольший изгибающий момент $M_{max} = 2.1F$ подставляем в условие прочности

$$\sigma_{adm} = \frac{2.1F}{W_x} = \frac{2.1F \cdot 100}{144} \leq 16,$$

откуда получаем

$$F \leq \frac{16 \cdot 144}{210} = 11 \text{ кН}.$$

Для определения размера t коробчатого поперечного сечения вначале находим его момент инерции как разность моментов инерции внешнего и внутреннего прямоугольников

$$I_x = \frac{4t(6t)^3}{12} - \frac{3t(4t)^3}{12} = 56t^4.$$

Затем получаем выражение для момента сопротивления

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}} = \frac{56t^4}{3t} = 18.67t^3,$$

которое подставляем в условие прочности

$$\sigma_{max} = \frac{2.1F}{W_x} = \frac{2.1 \cdot 15 \cdot 100}{18.67t^3} \leq 16,$$

откуда получаем $t = 2,2$ см.

6.8 Теории прочности

Понятия о об эквивалентном напряжении, о предельных напряженных состояниях. Пять теорий прочности. На предыдущих лекциях рассматривались простые виды деформаций. Одна из важных задач сопротивления материалов состоит в создании теорий прочности, на основе которых можно проверить прочность элементов в сложном напряжённом состоянии.

Существует ряд теорий прочности; в каждом случае применяют ту, которая в наибольшей степени отвечает характеру нагружения и разрушения материала. В каждой теории прочности используется определенная гипотеза прочности, учитывающая наибольшее влияние на прочность материала того или иного фактора. Наиболее важными факторами, связанными с возникновением опасного состояния материала являются: нормальные и касательные напряжения, линейные деформации и потенциальная энергия деформации.

Эквивалентное напряжение – напряжение, которое следует создать в растянутом образце, чтобы его напряженное состояние стало равно опасным заданному напряженному состоянию.

Заменяя сложное напряженное состояние эквивалентным линейным, получаем возможность использовать при сложном напряженном состоянии условие прочности при простом растяжении:

$$\sigma_{\text{экр}} = [\sigma_p]$$

Первая теория прочности (*гипотеза наибольших нормальных напряжений*).

Согласно этой теории прочности опасное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает тогда, когда наибольшее по модулю главное напряжений достигает предельного значения для заданного материала при простом растяжении (сжатии). Условия прочности при растяжении и сжатии имеют вид:

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 \leq [\sigma_p] \quad \text{или} \quad \sigma_{\text{экр}} = \sigma_3 \leq [\sigma_{\text{сж}}] \quad (6.9)$$

Данная теория прочности дает положительные результаты лишь для некоторых хрупких материалов.

Вторая теория прочности (*гипотеза наибольших линейных деформаций*).

Условия прочности при растяжении и сжатии имеют вид:

$$\sigma_{\text{экв}} = [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq [\sigma_p]$$

или $\sigma_{\text{экв}} = [\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)] \leq [\sigma_{\text{сж}}]$ (6.10)

Экспериментальная проверка данной гипотезы выявила ряд недостатков, поэтому она почти не применяется для расчетов.

Третья теория прочности (*гипотеза наибольших касательных напряжений*).

Условие прочности по третьей теории прочности имеет вид

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq [\tau] = \frac{[\sigma_p]}{2}$$

Или в виде

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma_p] \quad \equiv \quad \sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma_p]. \quad (6.11)$$

Во многих случаях третья теория прочности дает приемлемые результаты.

Четвертая теория прочности (*гипотеза энергии формоизменения*).

Согласно данной теории прочности опасное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает тогда, когда удельная потенциальная энергия изменения формы достигает предельного для данного материала значения:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \quad (6.12)$$

Пятая теория прочности (*гипотеза прочности Мора*). Данная гипотеза прочности учитывает различие в свойствах материалов при растяжении и сжатии. Условие прочности по гипотезе Мора имеет вид:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - k\sigma_3 \leq [\sigma_p]; \quad k \approx \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_{\text{сж}}]}. \quad (6.13)$$

Контрольные вопросы:

- 6.1. Какой изгиб называется прямым чистым изгибом?
- 6.2. Какой изгиб называется плоским поперечным изгибом?
- 6.3. Какие внутренние силовые факторы возникают при чистом изгибе?
- 6.4. Какие внутренние силовые факторы возникают при плоском поперечном изгибе?
- 6.5. Чему равен изгибающий момент в каком-либо сечении балки?
- 6.6. Чему равна поперечная силы в каком-либо сечении балки?
- 6.7. Какие правила знаков используются при составлении уравнений изгибающих моментов и поперечных сил на каком-либо участке?
- 6.8. Что такое нейтральный слой, силовая плоскость, нейтральная линия (нейтральная ось), силовая линия?
- 6.9. Как взаимно расположены силовая и нейтральная линии при прямом изгибе?
- 6.10. Какие гипотезы использованы при выводе формулы нормальных напряжений при изгибе?
- 6.11. Как изменяются нормальные напряжения по поперечному сечению балки при плоском поперечном изгибе?
- 6.12. В каких точках поперечного сечения балки при плоском поперечном изгибе возникают наибольшие нормальные напряжения?

- 6.13. В каких точках поперечного сечения балки возникают наиболее по величине касательные напряжения?
- 6.14. Какие гипотезы использованы при выводе формулы для расчета касательных напряжений в поперечном сечении балки при плоском изгибе?
- 6.15. Какие деформации возникают при чистом и поперечном изгибе?
- 6.16. Запишите дифференциальное уравнение упругой линии балки.

Тема 7. Определение перемещений в конструкциях энергетическими способами

Цель: овладеть навыками оценки прочности, жёсткости и устойчивости элемента строительных конструкций, в т.ч., с использованием прикладного программного обеспечения

Ключевые вопросы:

- 7.1 Теорема Клайперона
- 7.2 Элементарная работа внутренних продольных сил (N) при растяжении-сжатии.
- 7.3 Элементарная работа внутренних поперечных сил при чистом сдвиге
- 7.4 Теорема о взаимности работ (теорема Бетти)
- 7.5 Теоремы о взаимности перемещений (теорема Максвелла)
- 7.6 Вычисления перемещений методом Мора
- 7.7 Потенциальная энергия деформации стержня
- 7.8 Теорема Кастильяно

Методические указания

Изучая простые виды нагружений, мы познакомились с методами определения деформаций, однако существуют другие методы расчета, основанные на *энергетических теоремах*. Основная идея заключается в том, что любой силовой фактор, действующий на конструктивный элемент, совершает соответствующее перемещение (линейное или угловое), то есть работу. Эта работа равна накопленной в конструкции упругой деформации. Отсюда можно определить перемещение. Эта тема является очень важной, так как позволяет определять перемещения в любом сечении стержневой системы от любого силового фактора, и широко используется при решении статически неопределимых стержневых систем.

7.1 Обобщенные теоремы, используемые в сопротивлении материалов

Теорема Клайперона

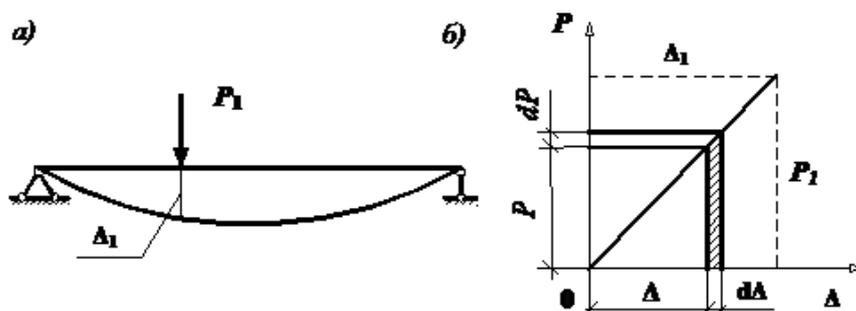


Рисунок 7.1 - К теореме Клайперона

Определим работу, которую совершает сила P_1 , действующая, например, на балку, изображенную на рисунке 7.1, а).

Будем считать, что нагрузка прикладывается к балке статически, то есть она медленно возрастает от нуля до заданной величины P_1 .

Пусть в некоторый момент сила, достигшая значения $P < P_1$, вызвала в месте своего приложения прогиб балки, равный Δ .

Увеличим это значение силы на бесконечно малую величину dP . Такое изменение нагрузки приведет к дополнительному прогибу $d\Delta$. Очевидно, что элементарная дополнительная работа будет равна:

$$dA = (P + dP)d\Delta \approx Pd\Delta.$$

Полная работа, совершенная внешней силой, определяется по формуле:

$$A = \int_0^{P_1} Pd\Delta. \quad (7.1)$$

Для линейно деформируемой системы (график зависимости между прогибом Δ и силой P для такой системы показан на рисунке 7.1, б) прогиб балки пропорционален внешней нагрузке, то есть

$$\Delta = \delta_{11}P. \quad (7.2)$$

где δ_{11} – коэффициент пропорциональности или перемещение от силы, равной единице $\bar{P} = 1$. Коэффициент δ_{11} часто называют и *податливостью* системы.

Дифференцируя уравнение $\Delta = \delta_{11}P$, получим $d\Delta = \delta_{11}dP$.

Подставляя полученное значение в выражение работы внешних сил

$$A = \int_0^{P_1} Pd\Delta = \int_0^{P_1} \delta_{11}PdP = \frac{\delta_{11}P_1^2}{2} = \frac{P_1\Delta_1}{2}. \quad (7.3)$$

Это выражение соответствует *теореме Клайперона*.

Внешняя нагрузка, действующая на балку, обычно представляет собой группу сил. Выражение для упругой работы группы сил также можно представить в виде произведения двух величин: $A = P\Delta/2$, в котором множитель P зависит только от сил этой группы и называется *обобщенной силой*, а Δ зависит от перемещений и называется *обобщенным перемещением*. *Обобщенная сила* – это любые нагрузки (сосредоточенные силы, моменты, распределенную нагрузку), а *обобщенное перемещение* – это вид перемещения, на котором обобщенная сила производит работу.

Если нагруженное тело находится в равновесии, то внутренние силы равны по значению внешним силам и противоположны им по направлению. Очевидно, что они препятствуют развитию деформации.

Работа внутренних сил (U), с учетом их направления по отношению к деформации, всегда является отрицательной.

Работа внешних сил равна взятой с обратным знаком работе внутренних сил:

$$A = -U.$$

7.2 Элементарная работа внутренних силовых факторов

1. Пусть элемент стержня длиной dz испытывает растяжение (рисунок 7. 2, а).

Действие отброшенных частей стержня на рассматриваемый элемент заменим продольными силами N . Эти усилия показаны на рисунке штриховыми линиями. По отношению к элементу они являются как бы внешними. Вызываемое ими удлинение элемента равно

$$\Delta dz = \frac{N dz}{EF}.$$

Действие рассматриваемого элемента на отброшенные части показано на рисунке сплошными линиями. Элементарная работа внутренних продольных сил, постепенно увеличивающихся, и противодействующих развитию удлинения, согласно теореме Клапейрона, выразится формулой:

$$dU_N = -\frac{N \Delta dz}{2} = \frac{N \cdot N dz}{2 \cdot EF}. \quad (7.4)$$

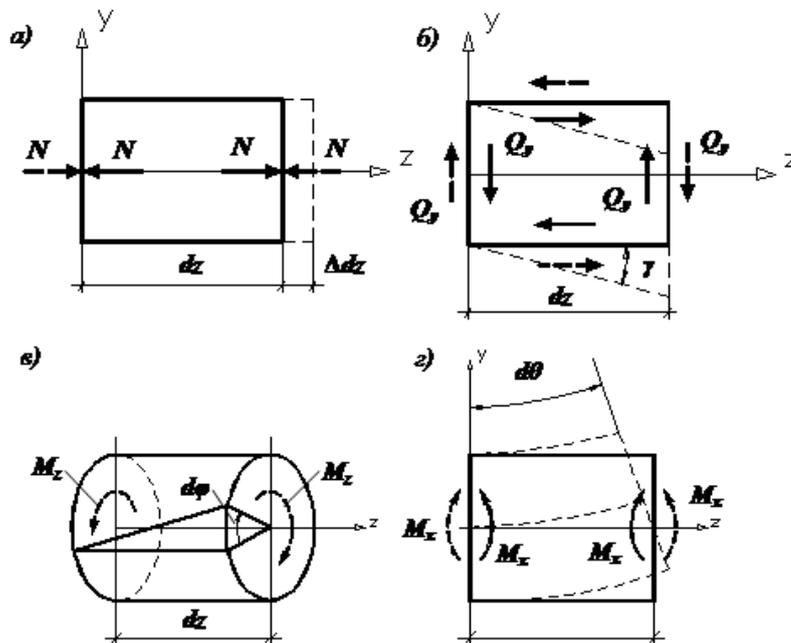


Рисунок 7.2 - Работа внутренних сил для различных видов нагружения

2. Элементарная работа внутренних поперечных сил при чистом сдвиге

При сдвиге происходит смещение слоев относительно друг друга (рисунок 7.2, б).

При чистом сдвиге касательные напряжения равномерно распределены по всему сечению и определяются по формуле:

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{F}.$$

Абсолютный сдвиг правого сечения элемента по отношению к левому сечению, с учетом закона Гука, равен:

$$\gamma dz = \frac{\tau_{zy} dz}{G} = \frac{Q dz}{GF},$$

Тогда

$$dU_{Q_y} = -\frac{Q_y \gamma dz}{2} = -\frac{1}{2} Q_y \cdot \frac{Q_y}{GF} dz.$$

При поперечном изгибе касательные напряжения распределены по сечению неравномерно. В этом случае выражение для элементарной работы внутренних перерезывающих сил может быть представлено в виде:

$$dU_{Q_y} = -\frac{k Q_y \gamma dz}{2} = -\frac{1}{2} k Q_y \cdot \frac{Q_y}{GF} dz, \quad (7.5)$$

где k – коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения стержня. Например, для прямоугольного поперечного сечения $k=1,2$.

3. Элементарная работа внутренних усилий при кручении

Поворот правого сечения элемента по отношению к левому сечению, происходящий под действием внешних по отношению к нему крутящих моментов (M_z), показанных (см. рисунок 7.2, в) штриховыми линиями, равен:

$$d\varphi = \frac{M_z dz}{GI_p}.$$

Тогда работа внутренних крутящих моментов (они на рисунке не показаны) на этом угле поворота определяется по формуле:

$$dU_{M_z} = -\frac{M_z d\varphi}{2} = -\frac{1}{2} M_z \cdot \frac{M_z}{GI_p} dz. \quad (7.6)$$

4. Элементарная работа внутренних усилий при изгибе

Пусть теперь элемент стержня испытывает изгиб. И пусть его правое поперечное сечение повернется на угол поворота $d\theta$ по отношению к левому сечению (рисунок 7.2, г).

Тогда внутренние изгибающие моменты, показанные (рисунок 7.2, г) сплошными линиями, совершат на этом угле поворота работу:

$$dU_{M_x} = -\frac{M_x d\theta}{2} = -\frac{1}{2} M_x \cdot \frac{M_x}{EI_x} dz. \quad (7.7)$$

При одновременном растяжении, кручении и прямом поперечном изгибе стержня проинтегрируем выражения элементарных работ по всей длине стержня, окончательно получим **формулу работы внутренних сил**:

$$U = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{N \cdot N dz}{EF} - \frac{1}{2} \int_0^l k Q_y \frac{Q_y}{GF} dz - \frac{1}{2} \int_0^l M_z \frac{M_z}{GI_p} dz - \frac{1}{2} \int_0^l M_x \frac{M_x}{EI_x} dz. \quad (7.8)$$

7.3 Принцип возможных перемещений

Принцип возможных перемещений сформулирован для абсолютно твердых тел Лагранжем в 1788 г. и впервые применен к деформируемым телам Пуассоном в 1833 г.

Формулировка принципа возможных перемещений: если система находится в равновесии под действием приложенной к ней нагрузки, то сумма работ внешних и внутренних сил на всяком бесконечно малом возможном перемещении точек системы, допускаемых связями, равна нулю. $A_B + U_B = 0$, где A_B – возможная работа внешних, а U_B – возможная работа внутренних сил.

В процессе совершения системой возможного перемещения значение и направление внешних и внутренних сил считаются неизменными. Поэтому возможная работа внешних и внутренних сил определяется простым произведением соответствующих сил и перемещений. Учитывая принятое в сопротивлении материалов допущение о малости деформаций и линейную зависимость деформаций от нагрузок, в качестве возможных перемещений можно принимать и конечные упругие перемещения, вызванные любым видом внешней нагрузки и происходящие без нарушения связей.

Теорема о взаимности работ (теорема Бетти): возможная работа сил первого состояния на соответствующих перемещениях, вызванных силами второго состояния, равна возможной работе сил второго состояния на соответствующих перемещениях, вызванных силами первого состояния.

Наметим на балке две точки 1 и 2 (рисунок 7.3, а).

Приложим статически в точке 1 силу P_1 . Она вызовет в этой точке прогиб Δ_{11} , а в точке 2 – Δ_{21} .

Для обозначения перемещений мы используем два индекса. Первый индекс означает место перемещения, а второй – причину, вызывающую это перемещение.

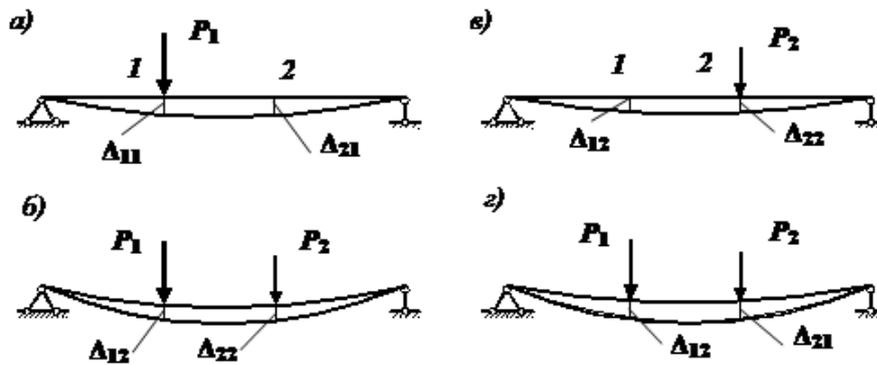


Рисунок 7.3. – К теореме Бетти о взаимности работ

Так, например, Δ_{21} означает прогиб балки в точке 2 от нагрузки P_1 .

После того, как закончен рост силы P_1 , приложим в точке 2 к деформированному состоянию балки статическую силу P_2 (рисунок 7.3 б). Балка получит дополнительные прогибы: Δ_{12} , в точке 1 и Δ_{22} , в точке 2.

Составим выражение для работы, которую совершают эти силы на соответствующих им перемещениях:

$$A_1 = \frac{P_1 \Delta_{11}}{2} + P_1 \Delta_{12} + \frac{P_2 \Delta_{22}}{2}.$$

В уравнении первое и третье слагаемые являются упругой работой сил P_1 и P_2 . Согласно теореме Клапейрона они имеют коэффициент 1/2. У второго слагаемого этого коэффициента нет, поскольку сила P_1 своего значения не изменяет и совершает возможную работу на перемещении Δ_{12} , вызванном другой силой P_2 .

Изменим теперь порядок нагружения балки. Сначала приложим к балке силу P_2 , а затем P_1 (рисунок 7.3 в, г).

Тогда работа будет равна

$$A_2 = \frac{P_2 \Delta_{22}}{2} + P_2 \Delta_{21} + \frac{P_1 \Delta_{11}}{2}.$$

Очевидно, что $A_1 = A_2$.

Из этого равенства следует **теорема Бетти**:

$$P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21}. \quad (7.9)$$

Теорема о взаимности перемещений

С учетом обозначения перемещений от единичной силы можно записать:

$$\delta_{12} = \delta_{21}.$$

Формулировка теоремы о взаимности перемещений (теорема **Максвелла**): *перемещение точки приложения первой единичной силы, вызванное действием второй силы, равно перемещению точки приложения второй единичной силы, вызванному действием первой единичной силы.*

Возможная работа внутренних сил – это работа внутренних сил первого состояния на перемещениях, вызываемых силами второго состояния.

Пусть мы имеем два состояния. Первому из них отвечают внутренние силы $N_1, Q_{y1}, M_{z1}, M_{x1}$, а второму $N_2, Q_{y2}, M_{z2}, M_{x2}$. Тогда, используя формулу работы внутренних сил и устранив в ней коэффициент, $1/2$ получим **формулу вычисления возможной работы внутренних сил**:

$$U_{12} = U_{21}$$

$$- \int_0^l N_1 \frac{N_2}{EF} dz - \int_0^l M_{z1} \frac{M_{z2}}{GI_p} dz - \int_0^l k Q_{y1} \frac{Q_{y2}}{GF} dz - \int_0^l M_{x1} \frac{M_{x2}}{EI_x} dz =$$

$$= - \int_0^l N_2 \frac{N_1}{EF} dz - \int_0^l M_{z2} \frac{M_{z1}}{GI_p} dz - \int_0^l k Q_{y2} \frac{Q_{y1}}{GF} dz - \int_0^l M_{x2} \frac{M_{x1}}{EI_x} dz. (7.10)$$

Интеграл Мора позволяет определять прогибы и углы поворота заданного сечения балки, используя интегральное исчисление. Хотя данный метод предпочтительнее метода начальных параметров, он неудобен из-за необходимости вычисления интеграла.

Приведенный интеграл соответствует совместному действию продольной силы, изгиба в плоскости, поперечной силы и кручения.

Этот же прием используется при определении перемещений, когда в качестве первого состояния принимается эпюра от действия единичного обобщенного перемещения, а в качестве второго – эпюра от действия внешней нагрузки – грузовая эпюра. При расчете балок, работающих на изгиб, а также рам рассматривается, как правило, действие только изгибающего момента.

7.4 Порядок вычисления перемещений методом Мора

Определение перемещений по формуле интеграла Мора часто называют **определением перемещений методом Мора**, а саму формулу – **интегралом Мора**.

Порядок вычисления перемещений методом Мора:

- к вспомогательной балке в той точке, где требуется определить перемещение, прикладываем единичное усилие. При определении прогиба прикладываем единичную силу $\bar{P}_k = 1$, а при определении угла поворота – единичный момент $\bar{M}_A = 1$;
- для каждого участка балки составляем выражения для изгибающих моментов заданной M_{xP} и вспомогательной \bar{M}_x балок;
- вычисляем интеграл Мора для всей балки по соответствующим участкам;
- если вычисленное перемещение имеет положительный знак, то это означает, что его направление совпадает с направлением единичного усилия. Отрицательный знак указывает на то, что действительное направление искомого перемещения противоположно направлению единичного усилия.

Пример вычисления интеграла Мора

Пусть для шарнирно опертой балки постоянной изгибной жесткости $EI_x = const$, длиной l , нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q (рисунок 7.4, а), требуется определить прогиб посередине пролета f и угол поворота на левой опоре θ_A .

Определение прогиба с помощью интеграла Мора

В том месте, где нам нужно определить прогиб, к вспомогательной балке прикладываем единичную силу $\bar{P}_k = 1$ (рисунок 7.4, б). Записываем выражения для изгибающих моментов:

$$M_{xP}(z_1) = \frac{ql}{2}z_1 - qz_1 \frac{z_1}{2} = \frac{qz_1}{2}(l - z_1); \quad \bar{M} = \frac{1}{2}z_1;$$

$$M_{xP}(z_2) = \frac{ql}{2}z_2 - qz_2 \frac{z_2}{2} = \frac{qz_2}{2}(l - z_2); \quad \bar{M} = \frac{1}{2}z_2;$$

Рассмотрим прогиб в середине пролета, и для этого случая интеграл Максвелла-Мора запишем в виде:

$$\Delta_K = f = \frac{2}{EI_x} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{4} z_1 q z_1 (l - z_1) dz = \frac{2q}{EI} \frac{1}{4} \left(\frac{z_1^3}{3} l - \frac{z_1^4}{4} \right) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_x}.$$

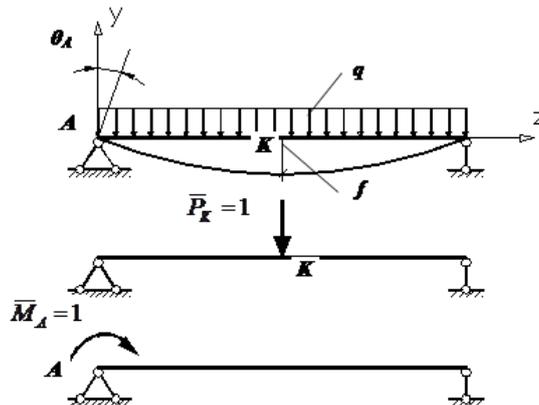


Рисунок 7.4. Определение прогиба и угла поворота методом Мора

Определение угла поворота методом Мора

Нагружаем вспомогательную балку единичным моментом $\bar{M}_A = 1$, прикладывая его в том месте, где мы ищем угол поворота (рисунок 7.4, в).

Записываем выражения для изгибающих моментов в заданной и вспомогательной балках только для одного участка $0 \leq z \leq l$

$$M_{xP}(z) = \frac{ql}{2}z - qz\frac{z}{2} = \frac{qz}{2}(l - z);$$

$$\bar{M}_x(z) = 1 - \frac{1}{l}z.$$

Тогда интеграл Мора будет иметь вид:

$$\theta_A = \Delta_{AP} = \frac{1}{EI_x} \int_0^l \left(1 - \frac{1}{l}z\right) qz(l - z) dz = \frac{1q}{EI_x} \frac{1}{2l} \left(\frac{z^2}{2} l^2 - 2l \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4}\right) = \frac{1}{24} \frac{ql^3}{EI_x}.$$

Положительный знак в выражении для угла поворота поперечного сечения балки указывает на то, что поворот сечения происходит по направлению единичного момента $\bar{M}_A = 1$.

7.5 Потенциальная энергия деформации стержня

Согласно закону сохранения энергии, работа внешних сил не исчезает, а переходит в потенциальную энергию V , накапливаемую в упругом теле при его деформировании.

Следовательно, потенциальная энергия деформации численно равна работе внешних сил при нагружении тела (или работе внутренних сил, совершаемой ими в процессе разгрузки).

Таким образом, потенциальная энергия деформации стержня равна:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EF} dz + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_z^2}{GI_p} dz + \frac{1}{2} \int_0^l k \frac{Q_y^2}{GF} dz + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_x^2}{EI_x} dz.$$

Как видно из этой формулы, **потенциальная энергия деформации** всегда положительна, поскольку она является квадратичной функцией обобщенных сил. Отсюда следует, что потенциальная энергия, накопленная в результате действия группы сил, не равна сумме потенциальных энергий, накопленных от действия каждой нагрузки в отдельности. То есть принцип независимости действия сил при вычислении **потенциальной энергии деформации** не применим.

Формулировка теоремы Кастильяно: *Перемещение точки приложения обобщенной силы по направлению ее действия равно частной производной от потенциальной энергии деформации по этой силе*

$$\Delta_{KP} = \frac{\partial V}{\partial P_K}$$

Раскроем статическую неопределимость балки, представленной на схеме (рисунок 7.5, а), используя теорему Кастильяно/

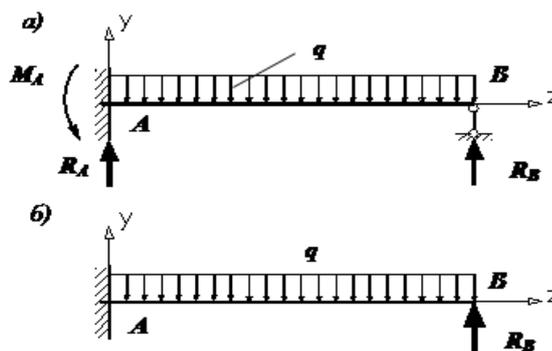


Рис. 7.5. Раскрытие статической неопределимости с помощью теоремы Кастильяно

Для определения опорных реакций (R_A и R_B), а также момента в жесткой заделке (M_A) мы имеем только два уравнения статики:

$$\sum Y = 0, \quad \sum M_A.$$

Мысленно удалим лишнюю связь – правую опору и вместо нее введем в рассмотрение неизвестную опорную реакцию R_B , которую мы будем рассматривать, как активную силу (рисунок 7.5, б).

Однако перемещение полученной таким образом статически определимой балки в точке приложения силы R_B должно быть равно нулю, то есть

$$\Delta_{BP} = 0.$$

Составим выражение для изгибающего момента в произвольном сечении статически определимой балки:

$$M_x(z) = R_B z - qz \frac{z}{2}.$$

Потенциальная энергия деформации балки будет равна:

$$V_u = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_x^2}{EI_x} dz = \frac{1}{2EI_x} \int_0^l \left(R_B z - qz \frac{z}{2} \right)^2 dz = \frac{1}{EI_x} \left(R_B^2 \frac{l^3}{3} + qR_B \frac{l^4}{4} + \frac{q^2 l^5}{20} \right).$$

Так как перемещение в месте приложения неизвестной силы R_B равно нулю, то

$$\frac{\partial V_U}{\partial R_B}, \text{ тогда } 2R_B \frac{l^3}{3} - q \frac{l^4}{4} = 0.$$

Решая полученное уравнение, находим реакцию правой опоры:

$$R_B = \frac{3ql}{8};$$

Теперь, составляя уравнения статики, легко определяем остальные две опорные реакции:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; \quad M_A - \frac{ql^2}{2} + R_B l = 0; \quad M_A = \frac{ql^2}{8}; \\ \sum Y = 0; \quad R_A - ql + R_B = 0; \quad R_A = \frac{5ql}{8}. \end{aligned}$$

Контрольные вопросы:

- 7.1 Сформулируйте теорему Клайперона
- 7.2 Чему равна элементарная работа внутренних продольных сил (N) при растяжении-сжатии.
- 7.3 Чему равна элементарная работа внутренних поперечных сил при чистом сдвиге
- 7.4 Сформулируйте теорему о взаимности работ (теорема Бетти)
- 7.5 Сформулируйте теорему о взаимности перемещений (теорема Максвелла)
- 7.6 Алгоритм вычисления перемещений методом Мора
- 7.7 Полная потенциальная энергия деформации стержня в общем случае нагружения
- 7.8 Теорема Кастильяно

Тема 8. Сложное сопротивление. Сложный изгиб. Внецентренное сжатие

Цель: овладеть навыками оценки прочности, жёсткости и устойчивости элемента строительных конструкций, в т.ч., с использованием прикладного программного обеспечения

Ключевые вопросы:

- 8.1 Косой изгиб
- 8.2 Внецентренное сжатие
- 8.3 Ядро сечения

Методические указания

Сложное сопротивление можно представить как сумму простых деформаций: растяжения, сжатия, кручения, плоского изгиба. На основе принципа независимости действия сил напряжения в каждой точке поперечного сечения бруса рассчитываются как

алгебраическая сумма напряжений, возникших в этой точке от каждой простой деформации в отдельности. Затем решается проблема прочности при простом или сложном напряженном состоянии с использованием одной из теорий предельных состояний. Часто для решения задач сложного сопротивления вполне достаточно знаний, полученных при изучении простых деформаций, за исключением внецентренного сжатия. При конструировании колонн из хрупких материалов для строителей важно обеспечить отсутствие растягивающих напряжений в поперечных сечениях колонн, для чего необходимо рассчитать ядро сечения, и определить распределение напряжений в составных сечениях колонн.

Все виды нагружений, кроме простых, относятся к сложному сопротивлению: кривой изгиб, внецентренное сжатие, совместное действия изгиба, кручения и растяжения. Расчет таких конструктивных элементов имеет свои особенности, которые будут рассмотрены ниже.

8.1 Косой изгиб

Косой изгиб - случай плоского изгиба, при котором **плоскость действия изгибающего момента не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции бруса.**

Самым простым решением задач на кривой изгиб является приведение его к двум прямым плоским изгибам. Действующий в поперечном сечении изгибающий момент раскладывают на главные оси инерции сечения, при этом в поперечных сечениях бруса возникают, в общем случае, как поперечные силы, так и изгибающие моменты. Действием поперечных сил Q , и соответственно, влиянием касательных напряжений, в расчетах на прочность часто пренебрегают.

Рассмотрим балку, защемленную одним концом и нагруженную на другом силой F (рисунок 8.1, а).

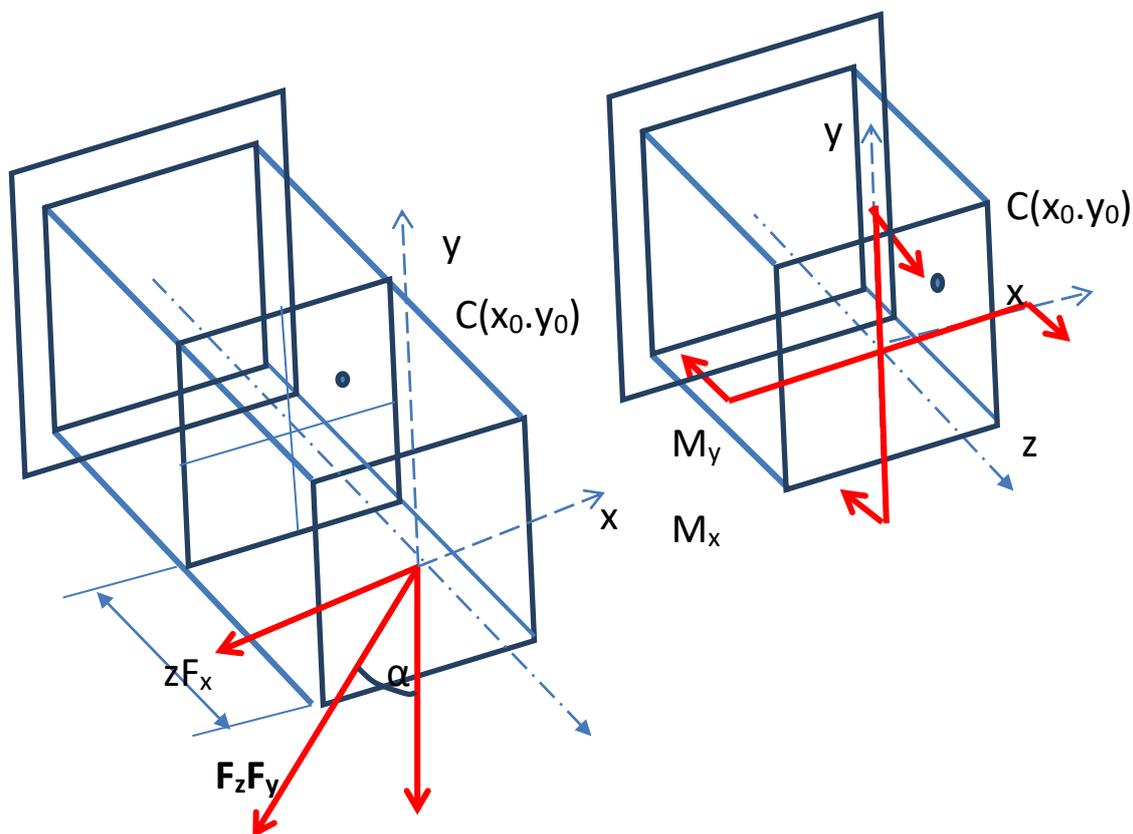


Рисунок 8.1 - Нагружение балки силой, вызывающей косою изгиб

Сила F лежит в плоскости торца балки и направлена под углом α к главной оси Oy . Определим напряжения в произвольной точке C поперечного сечения, отстоящего на расстоянии z от свободного конца балки

Для заданного направления главных осей точка C имеет положительные координаты x и y (рисунок 8.2).

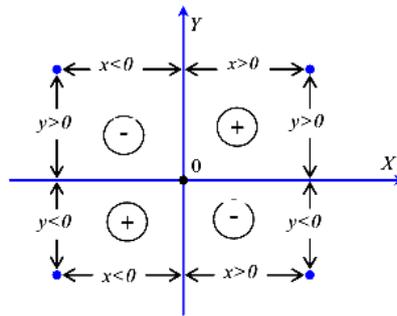


Рисунок 8.2 - Расстановка знаков на квадрантах координатной плоскости

В указанном сечении изгибающие моменты, возникающие при изгибе бруса в вертикальной и горизонтальной плоскостях (рисунок 8.1,б), соответственно

$$M_x = F_y z = Fz \cos \alpha;$$

$$M_y = F_x z = Fz \sin \alpha.$$

здесь F_x и F_y — вертикальная и горизонтальная составляющие силы F .

Индексами x и y при M обозначаются главные оси, относительно которых действуют эти изгибающие моменты, которые будем считать положительными, если они вызывают в точках первого квадранта растягивающие напряжения.

Исходя из принципа независимости действия сил, напряжение σ в точке C можно вычислить, рассматривая два плоских изгиба отдельно. Тогда

$$\sigma = \sigma^1 + \sigma^2,$$

где σ^1, σ^2 — нормальные напряжения, вызываемые действием соответственно только момента M_x и только момента M_y .

$$\text{Поскольку } \sigma^1 = \frac{M_x}{J_x} y, \sigma^2 = \frac{M_y}{J_y} x, \sigma = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x.$$

Эта формула получена для частного случая косою изгиба балки, но она является общей формулой для вычисления напряжений при косою изгибе. Изгибающие моменты и координаты точек, в которых определяют напряжения, необходимо подставлять с учетом знаков. Уравнение нейтральной линии при косою изгибе в любом поперечном сечении можно получить положив $\sigma = 0$ и обозначив координаты точек этой линии x_0 и y_0 .

$$\frac{M_x}{J_x} y_0 + \frac{M_y}{J_y} x_0 = 0 \quad (8.1)$$

Из уравнения следует, что нейтральная линия всегда проходит через начало координат (центр тяжести сечения). Преобразуем полученную зависимость

$$M_x \left(\frac{y_0}{J_x} + \frac{M_y x_0}{M_x J_y} \right) = 0$$

Так как M_x не равно нулю, то приравняем к нулю другой множитель

$$\frac{y_0}{J_x} + \frac{M_y x_0}{M_x J_y} = 0$$

Обозначим

$$\frac{M_y}{M_x} = \frac{Fz \sin \alpha}{Fz \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (8.2)$$

Поделив обе части уравнения на x_0 и проведя небольшие преобразования, получим

$$\frac{y_0}{x_0} = -\frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg} \alpha.$$

Отношение $\frac{y_0}{x_0}$ представляет собой тангенс угла β наклона нейтральной линии к оси x . Поэтому окончательно имеем

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg} \alpha. \quad (8.3)$$

В случае, если выполняется условие $J_x \neq J_y$ также $\alpha \neq \beta$, т. е. нейтральная линия не перпендикулярна к силовой линии в отличие от прямого изгиба. Если же $J_x = J_y$ (круг, квадрат и др.), то указанные линии взаимно перпендикулярны. Тогда косой изгиб невозможен, поскольку любая центральная ось сечения является главной осью инерции.

При определении положения нейтральной линии, необходимо помнить, что углы α и β положительны, если отсчитываются следующим образом: по часовой стрелке от оси y , а β против часовой стрелки от оси x . На рисунке 8.3 показано положение нейтральной линии в опасном сечении балки.

Прочность балки следует проверять в тех сечениях, где изгибающие моменты M_x , M_y достигают одновременно больших значений. Таких сечений может оказаться несколько.

Если положение опасного сечения известно, то в нем нужно отыскивать наиболее нагруженные точки. Наглядное представление о распределении нормальных напряжений по поперечному сечению балки дают эпюры σ .

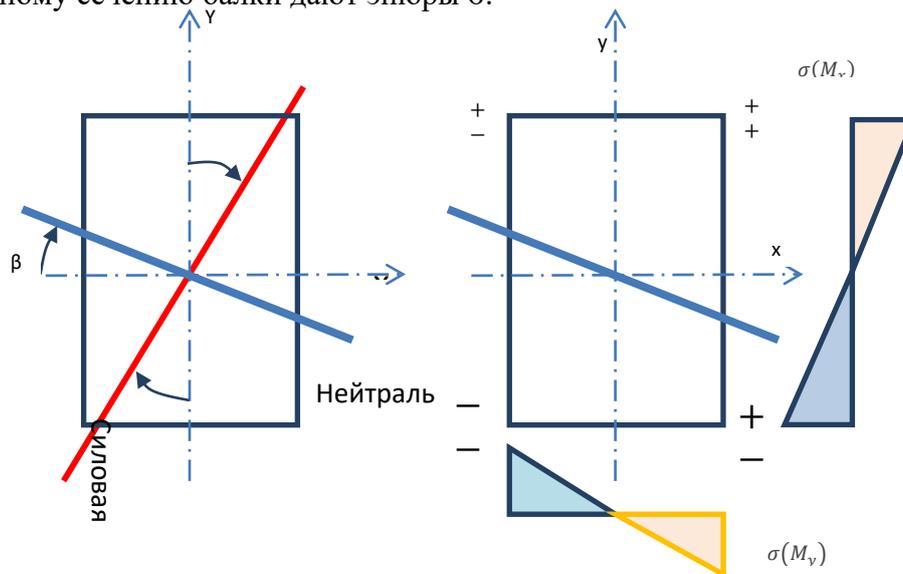


Рисунок 8.3 - Положение нейтральной оси поперечного сечения прямоугольной формы при косом изгибе

Применительно к рассмотренной балке эти эпюры показаны на рисунке 8.3. Очевидно, что наиболее напряженными будут точки А и В, наиболее удаленные от нейтральной линии, причем в точке А действует максимальное растягивающее напряжение, а в точке В — максимальное сжимающее напряжение. Для пластичных материалов обе точки одинаково опасны. В случае хрупкого материала более опасной будет точка А. Условие прочности имеет следующий вид:

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{J_x} y_{max} + \frac{M_y}{J_y} x_{max} \leq \sigma_{adm} \quad (8.4)$$

где x_{max} и y_{max} — координаты точки, наиболее удаленной от нейтральной линии.

Для сечений, имеющих две оси симметрии (например, прямоугольник, двутавр и др.) и выступающие углы, опасной будет одна из угловых точек, для которой условие прочности можно записать так:

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq \sigma_{adm}$$

W_x и W_y — моменты сопротивления сечения относительно осей x и y .

Если изгибу в двух плоскостях подвергаются брусья круглого, квадратного и тому подобных сечений, для которых косой изгиб невозможен, то их рассчитывают на прочность по суммарному изгибающему моменту

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}. \quad (8.5)$$

Определяя величину прогиба в какой-либо точке балки, вначале вычисляют прогибы f_x и f_y в направлении главных осей, а затем их суммируют геометрически. Таким образом, полный прогиб равен

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \quad (8.6)$$

Нетрудно установить, что линия полного прогиба при косом изгибе составляет с осью y угол β , т. е. она всегда перпендикулярна направлению нейтральной линии.

Пример: Подобрать размер двутавра для консольной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой

Дано: $q=5\text{кН/м}$; $l=2\text{м}$; $\alpha=10^\circ$; $\sigma_{adm} = 200\text{МПа}$

Из условия прочности при косом изгибе

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \left(\cos \alpha + \frac{W_x}{W_y} \sin \alpha \right) \leq \sigma_{adm}$$

Требуемый момент сопротивления

$$W_x \geq \frac{M_{max}}{\sigma_{adm}} \left(\cos \alpha + \frac{W_x}{W_y} \sin \alpha \right),$$

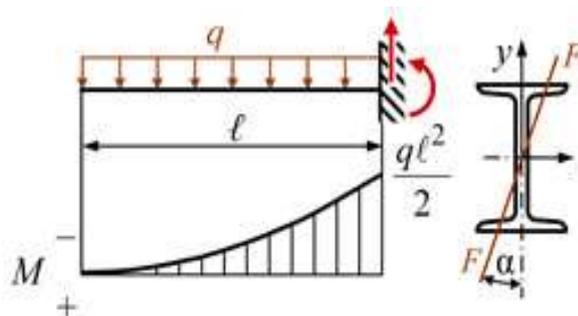


Рисунок 8.4 – Косой изгиб консольной балки

$$M_{max} = \frac{ql^2}{2} = 5 \cdot \frac{4}{2} = 10 \text{ кНм}$$

$$W_x \geq \frac{10 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^{-6}} (0,985 + 10 \cdot 0,174) = 136 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$

Примем двутавр №18 $W_x = 143 \text{ см}^3$; $W_y = 18,4 \text{ см}^3$;

Проверочный расчет

$$\sigma_{max} = \frac{10 \cdot 10^3}{143 \cdot 10^{-6}} \left(0,985 + \frac{143}{18,4} \cdot 0,174 \right) = 163 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

Недогрузка составляет

$$\frac{200 - 163}{200} 100 = 18,2\%$$

Примем двутавр №16 $W_x = 109 \text{ см}^3$; $W_y = 14,5 \text{ см}^3$

Проверочный расчет

$$\sigma_{max} = \frac{10 \cdot 10^3}{109 \cdot 10^{-6}} \left(0,985 + \frac{109}{14,5} \cdot 0,174 \right) = 210 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

Перегрузка составляет

$$\frac{200 - 210}{200} 100 = -5\%$$

Для сравнения рассмотрим напряжения при плоском изгибе

$$\sigma_{\alpha=0} = \frac{10 \cdot 10^3}{109 \cdot 10^{-6}} = 91,7 \text{ МПа}$$

Сопоставление напряжений при плоском и косом изгибе показывает, что в данном примере напряжения при косом изгибе больше примерно в 2,3 раза, следовательно, гораздо опаснее.

8.3 Внецентренное сжатие

При расчете железобетонных конструкций (колонн, свай) обязательно проводится расчет на внецентренное сжатие, случай, когда нагрузка в сечении приложена с эксцентриситетом по отношению к центру тяжести поперечного сечения. Пусть сила

Приложена в точке с координатами X_F, Y_F . Помимо действия сжимающей силы в сечениях бруса возникает изгибающий момент.

В сечениях стержня возникают следующие внутренние силовые факторы:

$$N = F; \quad M_y = Fx_F; \quad M_x = Fy_F.$$

Суммарное нормальное напряжение от действия этих факторов возникает в точке сечения с координатами x, y :

$$\sigma_z = \frac{F}{A} + \frac{M_y}{J_y}x + \frac{M_x}{J_x}y = \frac{F}{A} + \frac{Fx_Fx}{J_y} + \frac{Fy_Fy}{J_x}.$$

С целью нахождения опасных точек сечения определим положение нейтральной линии, для этого приравняем напряжение, возникающее в точках нейтральной линии, к нулю:

$$\sigma_{н.л.} = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x_{н.л.}}{\frac{J_y}{A}} + \frac{y_F y_{н.л.}}{\frac{J_x}{A}} \right) = 0. \quad (8.7)$$

откуда уравнение нейтральной линии имеет следующий вид:

$$1 + \frac{x_F x_{н.л.}}{i_y^2} + \frac{y_F y_{н.л.}}{i_x^2} = 0 \quad (8.8)$$

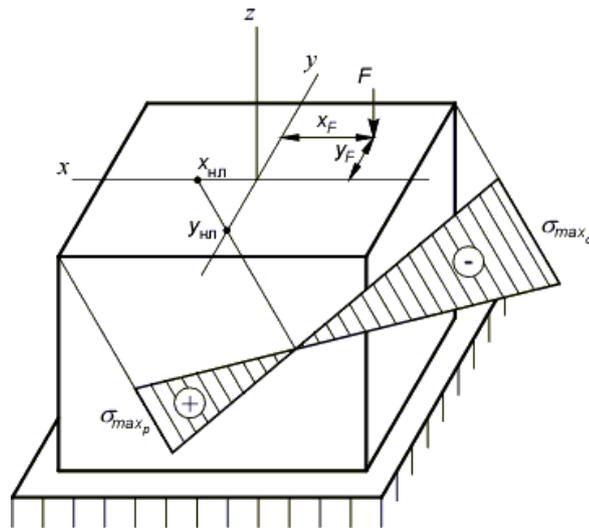


Рисунок 8.5 - Внецентренное сжатие. Положение нейтральной линии и распределение напряжений при внецентренном сжатии

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}; \quad - \text{ радиусы инерции сечения.}$$

Определим длины отрезков, отсекаемых нейтральной линией на осях координат

$$\begin{aligned} x_{н.л.} = 0 &\rightarrow y_{н.л.} = \frac{i_x^2}{y_F}; \\ y_{н.л.} = 0 &\rightarrow x_{н.л.} = \frac{i_y^2}{x_F}, \end{aligned} \quad (8.9)$$

Условия прочности при внецентренном растяжении-сжатии:

$$\sigma_{\Sigma \max p} \leq [\sigma]_p; \quad \sigma_{\Sigma \max c} \leq [\sigma]_c;$$

Аналогично данному виду деформации ведется расчет на прочность элементов конструкции, работающих при совместном действии изгиба и растяжения-сжатия.

Пример. Рассмотрим консольную балку, испытывающую прямой изгиб и растяжение.

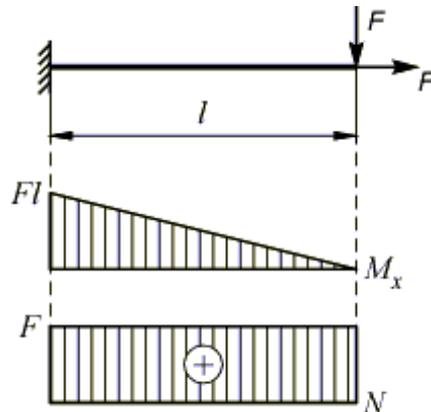


Рисунок 8.6 – Расчетная схема консольной балки

Под действием дополнительного напряжения от продольной силы нейтральная линия смещается от главной центральной оси поперечного сечения:

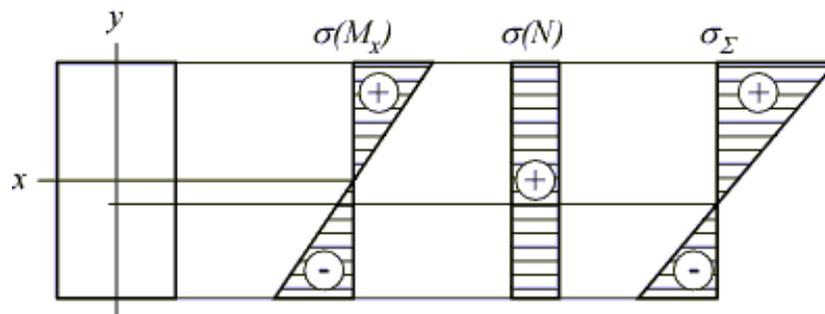


Рисунок 8.7 - Распределение напряжений при изгибе и растяжении

Если напряжения от продольной нагрузки составляет меньше 5% от изгибных напряжений, учитывать влияние продольной силы N необязательно.

8.3 Ядро сечения

Ядром сечения называется область в окрестности точки центра тяжести, при приложении в которую внешней продольной силы, в сечении будут возникать нормальные напряжения одного знака. Это особенно важно для конструкций, изготовленных из хрупких материалов, которые сжатию сопротивляются лучше, чем растяжению.

Построение ядра прямоугольного сечения при внецентренном растяжении или сжатии.

Определим такую точку приложения силы, чтобы нейтральная линия совпала с линией 1-1.

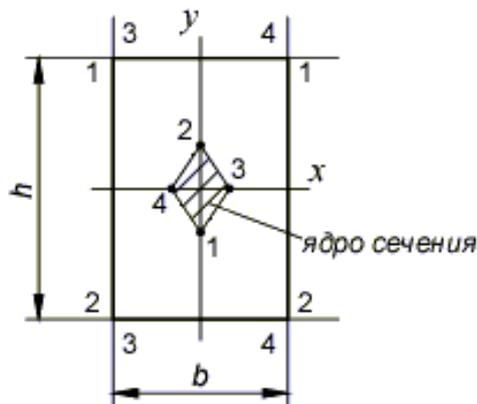


Рисунок 8.8 - Ядро сечения прямоугольного профиля
Длины отрезков, отсекаемых нейтральной линией на осях координат:

$$y_{н.л.} = h/2, \quad x_{н.л.} = \infty,$$

$$y_F = \frac{i_x^2}{y_{н.л.}}; \quad x_F = 0; \quad y_F = -\frac{h}{6}.$$

Соединяя найденные точки, получим ядро сечения.

Контрольные вопросы:

- 8.1. Приведите примеры сложного сопротивления.
- 8.2. Что называется сложным изгибом? Какие внутренние силовые факторы возникают при этом в поперечных сечениях балки? Приведите пример.
- 8.3. Запишите формулу расчета нормальных напряжений при сложном изгибе.
- 8.4. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях балки при сложном изгибе с растяжением, сжатием?
- 8.5. Что такое внецентренное сжатие?
- 8.6. Что такое ядро сечения,

Тема 9. Статически неопределимые стержневые системы. Метод сил. Метод трех моментов

Цель: уметь применять знания в области сопротивления материалов при выборе исходной информации и нормативно-технических документов при оценке прочности, жёсткости и устойчивости элемента строительных конструкций.

Ключевые вопросы:

- 9.1 Статически неопределимые системы
- 9.2 Методы расчета статически неопределимых систем.
- 9.3 Определение степени статической неопределимости метода сил.
- 9.4 Метод сил. Алгоритм расчета методом сил. Выбор основной системы
- 9.5 Канонические уравнения метода сил
- 9.6 Вычисление коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Метод Мора.
- 9.7 Правило Верещагина.

9.8 Формула Симпсона

9.9 Универсальная проверка коэффициентов и свободных членов канонических уравнений

9.10 Расчет многопролетных статически неопределимых балок. Метод трех моментов.

9.11 Выбор основной системы метода трех моментов

9.12 Алгоритм расчета многопролетных статически неопределимых балок. Метод трех моментов.

Методические указания

Статически неопределимыми системами называются стержневые системы, для определения реакций опор в которых только уравнений равновесия недостаточно. Число связей, наложенных на статически неопределимую систему, больше того количества связей, которые обеспечивают геометрическую неизменяемость конструкции. Такими связями могут быть как опорные связи, так и стержни самой конструкции. Будем рассматривать *балки* и *простые рамы*, то есть такие конструкции, в которых связями, обеспечивающими геометрическую неизменяемость, являются опорные закрепления (опорные связи).

Анализ степени статической неопределимости сложных стержневых систем является непростой задачей, изучается подробнее в строительной механике стержневых систем ввиду того, что связи, налагаемые на систему, могут быть разными, схемы содержат условные обозначения, которые означают разные ограничения перемещений и соответствующих им реакций.

Для обеспечения геометрической неизменяемости балки (рамы) в плоскости достаточно трех связей. Каждая связь запрещает какое-то перемещение. Шарнирно-подвижная опора запрещает перемещение по направлению, перпендикулярному плоскости опирания, и является одной связью. Шарнирно-неподвижная опора делает невозможными линейные перемещения по двум взаимно-перпендикулярным направлениям (вертикальному и горизонтальному) и соответствует двум связям, наложенным на конструкцию. Наконец, при наличии жесткого защемления на конце стержня становятся невозможными все перемещения: и вертикальное, и горизонтальное, и угол поворота, поэтому жесткое защемление представляет собой три связи, обеспечивающие геометрическую неизменяемость балки (рамы). Каждая дополнительная связь сверх трех для плоских систем превращает конструкцию в статически неопределимую. На схемах также могут быть врезанные шарниры, простые и сложные, которые также влияют на картину деформирования конструкции.

9.1 Статически неопределимые стержневые системы

Дополнительные связи, которые не являются необходимыми для обеспечения геометрической неизменяемости конструкции, называются *лишними*.

Для раскрытия статической неопределимости таких систем необходимо составлять дополнительные уравнения совместности деформаций. В предыдущих лекциях для расчёта отдельных статически неопределимых стержней, работающих на растяжение–сжатие, кручение, изгиб, использовалась группа соотношений, включающая в себя уравнения

равновесия, геометрические и физические уравнения. Число таких уравнений определяется числом статической неопределимости стержневой системы.

Рассмотрим некоторые примеры статически неопределимых стержневых систем.

На рисунке 9.1 приведены примеры статически неопределимых балок и рам.

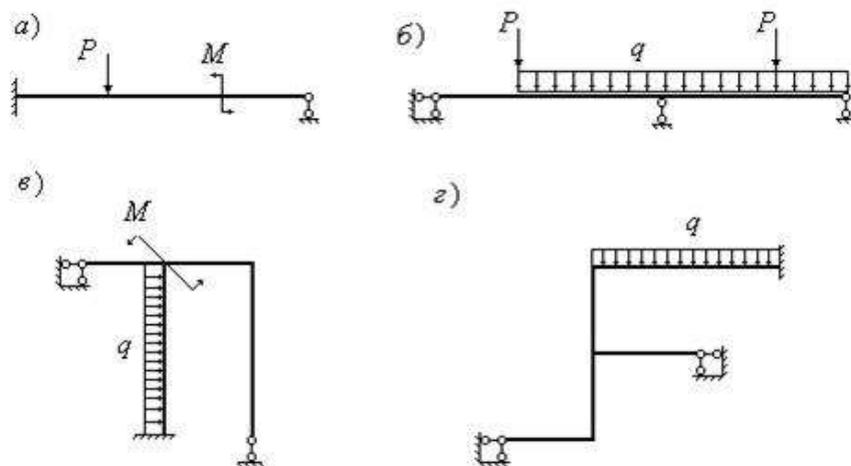


Рисунок 9.1 – Статически неопределимые балки и рамы

Балка, изображенная на рис. 9.1,б, называется **неразрезной** балкой. Происходит это название оттого, что промежуточная опора лишь подпирает балку.

В месте опоры балка не разрезана шарниром, шарнир не врезан в тело балки. Поэтому влияние напряжений и деформаций, которые балка испытывает на левом пролете, сказываются и на правом пролете. Если в месте промежуточной опоры врезать шарнир в тело балки, то в результате система станет статически определимой: из одной балки мы получим две независимые друг от друга балки, каждая из которых будет статически определимой.

Следует отметить, что неразрезные балки являются менее материалоемкими по сравнению с разрезными, так как в таких конструкциях более рационально распределен изгибающий момент по длине. В связи с этим неразрезные балки получили широкое применение в строительстве, но специальной методики расчета, включающей в себя использование деформаций системы.

В этой теме понятие “расчет” подразумевает только построение эпюр внутренних силовых факторов, возникающих в элементах системы, а не расчет на прочность, жесткость и т.д.

Статически неопределимые системы обладают рядом характерных особенностей:

1. Статически неопределимая система ввиду наличия добавочных лишних связей, по сравнению с соответствующей статически определимой системой оказывается более жесткой.

2. В статически неопределимых системах возникают меньшие внутренние усилия, что определяет их экономичность по сравнению со статически определимыми системами при одинаковых внешних нагрузках.

3. Разрушение лишних связей в нагруженном состоянии, не ведет к разрушению всей системы в целом, так как удаление этих связей приводит к новой геометрически неизменяемой системе, в то время как потеря связи в статически определимой системе приводит к изменяемой системе.

4. Для расчета статически неопределимых систем необходимо предварительно задаваться геометрическими характеристиками поперечных сечений элементов, т.е. фактически их формой и размерами, так как их изменение приводит к изменению усилий в связях и новому распределению усилий во всех элементах системы.

5. При расчете статически неопределимых систем необходимо заранее выбрать материал конструкции, так как необходимо знать его модули упругости.

6. В статически неопределимых системах температурное воздействие, осадка опор, неточности изготовления и монтажа вызывают появление дополнительных усилий.

9.2 Методы расчета статически неопределимых систем

Основными методами расчета статически неопределимых систем являются:

1. **Метод сил.** При расчете по *методу сил* основными искомыми величинами являются усилия в лишних связях. Знание усилий в лишних связях позволит по методу сечений выполнять полный расчет по определению усилий, возникающих в поперечных сечениях элементов заданной системы.

2. **Метод трех моментов.** За неизвестные принимаются моменты на опорах многопролетных неразрезных балок, часто используемых строительных конструкций.

3. **Метод перемещений.** При расчете по *методу перемещений* основными искомыми величинами являются перемещения узловых точек, вызванные деформацией системы. Знание этих перемещений необходимо и достаточно для определения всех внутренних усилий, возникающих в поперечных сечениях элементов, заданной системы.

4. **Метод конечных элементов.** При расчете по *методу конечных элементов* система разбивается на простые *конечные элементы* и по матрице жесткости элемента и системы в целом устанавливается связь между перемещениями узлов элемента и системы и усилиями в них.

5. **Смешанный метод.** Здесь часть неизвестных представляет собой усилия, а другая часть – перемещения.

6. **Комбинированный метод.** Используется при расчете симметричных систем на несимметричные нагрузки. Оказывается, что на симметричную составляющую заданной нагрузки систему целесообразно рассчитывать методом перемещений, а на обратно симметричную составляющую – методом сил.

Помимо указанных аналитических методов при расчете особо сложных систем используются различные численные методы.

С целью уменьшения неизвестных реакций из сложной системы выделяется более простая основная система, расчет которой является достаточно простым.

Основная система отличается от заданной отсутствием некоторых связей или, наоборот, введенными в нее новыми абсолютно жесткими связями. Отброшенные связи заменяются в основной системе внешними, вначале неизвестными силами, приложенными по направлениям отброшенных связей, причем значения этих сил подбираются из условий отсутствия перемещений по направлениям отброшенных связей. Сформированная таким образом система уравнений называется системой канонических уравнений *метода сил*.

Если основную систему получают из заданной введением новых жестких связей, то неизвестными станут перемещения по направлениям этих связей, а условиями для составления уравнений – условия отсутствия реактивных сил во введенных

связях. Составленные уравнения называют каноническими уравнениями *метода перемещений*.

Недостатком введения основной системы является необходимость производить расчеты несколько раз: на действие заданной нагрузки и на действие каждого неизвестного перемещения по направлению введенных связей. Затруднения возникают и при вычислениях коэффициентов канонических уравнений и их свободных членов, они, впрочем, меньше при использовании ЭВМ.

Лишние связи сооружений можно удалять, не нарушая их геометрической неизменяемости.

Степень статической неопределимости внешне статически неопределимой системы S легко установить путем вычитания из общего числа опорных стержней m количество независимых уравнений равновесия n , которое может быть составлено для данной системы (одно - для одномерных; три - для плоских и шесть - для пространственных систем).

$$n = C - Y \quad (9.1)$$

где C - число связей, накладываемых на конструкцию; Y - число возможных независимых уравнений равновесия, которые можно составить для рассматриваемой системы.

Правило (9. 1) для определения степени статической неопределимости применяют только для простых систем. В более сложных случаях это правило не работает.

Внутренне статически неопределимой называют систему, обладающую лишними связями, введенными для взаимного соединения частей системы.

Прежде, чем перейти к определению степени статической неопределимости рамы, изображенной на рисунок 6, введем несколько определений. Первое из этих определений включает в себя понятие о простом шарнире.

Простым называется шарнир, соединяющий два стержня (рисунок 9. 2).



Рисунок 9. 2. Простой шарнир

Шарнир, соединяющий несколько стержней, называется **сложным** (рисунок 9. 3).

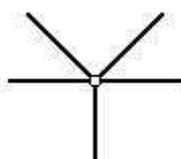


Рисунок 9. 3 – Сложный шарнир

Число простых шарниров, которые могут заменить один сложный шарнир, определим из формулы:

$$Ш = СТ - 1 \quad (9.2)$$

где СТ - число стержней, входящих в узел.

Пересчитаем сложный шарнир, изображенный на рисунок 9.3 в число простых шарниров с помощью формулы (9. 2): $\text{Ш}=5-1=4$. Таким образом, сложный шарнир, изображенный на рисунке 9. 3, можно заменить четырьмя простыми шарнирами.

Введем еще одно понятие - *замкнутый контур*.

Любой замкнутый контур три раза статически неопределим.

Для доказательства теоремы рассмотрим замкнутый контур, нагруженный внешними силами (рисунок 9. 5).

Разрежем замкнутый контур вертикальным сечением и покажем внутренние силовые факторы, возникающие в месте сечения. В каждом из сечений возникают три внутренних фактора: поперечная сила Q, изгибающий момент M и продольная сила N.

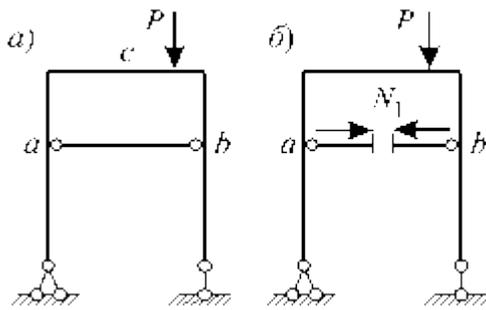


Рисунок 9. 4 - Схема рамы с затяжкой

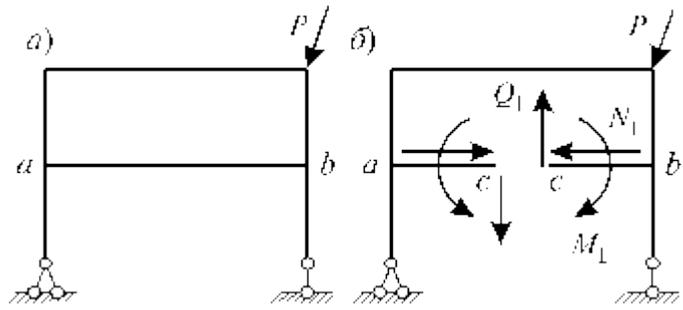


Рисунок 9. 5 – Схема рамы с замкнутым контуром

Теперь, используя понятие о простом шарнире и замкнутом контуре, можно сформулировать еще одно правило для определения степени статической неопределимости:

$$n = 3K - \text{Ш} \quad (9.3)$$

Двухопорная рама с затяжкой (рисунок 9.4, а) внутренне один раз статически неопределима. Статически определимая система (рисунок 9. 4, б) получена из заданной (рис. 9. 4 а) путем разрезания затяжки *ab*. И при этом взаимодействие частей затяжки заменяется только одной неизвестной осевой силой N_1 . Следовательно, в статически определимой системе, изображенной на рис. 9. 4, б имеем одно лишнее неизвестное N_1 , которое невозможно определить при помощи метода сечений. Поэтому заданная система (рисунок 9. 4, а) является один раз статически неопределимой.

Если затяжку жестко заделать в стойки, как это показано на рисунке 9. 5, а, то получим трижды статически неопределимую систему.

Действительно, в данном случае после разрезания нижнего ригеля *ab*, взаимодействие частей *ac* и *bc* характеризуется уже тремя неизвестными усилиями N_1, Q_1, M_1 (рисунок 9. 5, б), которые нельзя определить из условия равновесия. Поэтому система, изображенная на рисунке 9. 5, а) является три раза внутренне статически неопределимой.

9.3 Метод сил

Наиболее широко применяемым в машиностроении общим методом раскрытия статической неопределимости стержневых и рамных систем является *метод сил*. Он заключается в том, что заданная статически неопределимая система освобождается от

дополнительных связей как внешних, так и взаимных, а их действие заменяется силами и моментами. Величина их в дальнейшем подбирается так, чтобы перемещения в системе соответствовали тем ограничениям, которые накладываются на систему отброшенными связями. Таким образом, при указанном способе решения неизвестными оказываются силы. Отсюда и название «метод сил».

Алгоритм расчета методом сил

Независимо от особенностей рассматриваемой конструкции, можно выделить следующую последовательность расчета статически неопределимых систем методом сил:

1. Определить степень статической неопределимости.
2. Выбрать основную систему.
3. Сформировать эквивалентную систему.
4. Записать систему канонических уравнений.
5. Построить единичные и грузовые эпюры внутренних силовых факторов, возникающих в элементах рассматриваемой конструкции.
6. Вычислить коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы канонических уравнений.
7. Построить суммарную единичную эпюру.
8. Выполнить универсальную проверку коэффициентов при неизвестных и свободных членов.
9. Решить систему канонических уравнений, т.е. определить реакции лишних связей.
10. Построить эпюры возникающих внутренних силовых факторов для заданной системы (иначе говоря, окончательные эпюры).
11. Выполнить статическую и кинематическую проверки.

Отметим, что пункты 7, 8, 11 приведенного алгоритма не являются безусловно необходимыми, хотя и позволяют контролировать правильность выполнения расчета. А для систем с одной лишней связью пункты 7 и 8 просто лишены смысла, так как в этом случае суммарная единичная эпюра совпадает с единичной.

Остановимся подробнее на некоторых из вышеперечисленных этапов расчета.

Выбор основной системы

Система, освобожденная от дополнительных связей, становится статически определимой. Она носит название *основной системы*. После того как дополнительные связи отброшены и система превращена в статически определимую, необходимо ввести вместо связей неизвестные силовые факторы, которые принято называть *лишними неизвестными*. В тех сечениях, где запрещены линейные перемещения, вводятся силы. Там, где запрещены угловые смещения, вводятся моменты. Как в том, так и в другом случае неизвестные силовые факторы будем обозначать X_i , где i — номер неизвестного. Наибольшее значение i равно степени статической неопределимости системы.

Заметим, что для внутренних связей силы X_i , — являются взаимными. Если в каком-либо сечении рама разрезана, то равные и противоположные друг другу силы и моменты прикладываются как к правой, так и к левой частям системы.

Выбор основной системы (ОС) является непростым. Неудачный выбор основной системы может привести к значительной трудоемкости решения, а иногда и к грубой

ошибке. Нельзя руководствоваться только одним правилом образования основной системы, а именно, что число отбрасываемых связей должно быть равным степени статической неопределимости. Надо обязательно следить еще и за тем, какие связи отбрасываются. Некоторые связи отбрасывать недопустимо. При выборе основной системы надо следить, кроме всего прочего, и за геометрической и кинематической неизменяемостью всей системы и отдельных ее частей.

Так, у балки (рисунок 9. 6,а), которую далее будем называть заданной системой (ЗС), степень статической неопределимости $n=1$. Если исключить лишнюю связь (правую опору) и обозначить неизвестную реакцию через X , получим ее основную систему (ОС) (рисунок 9. 6,б).

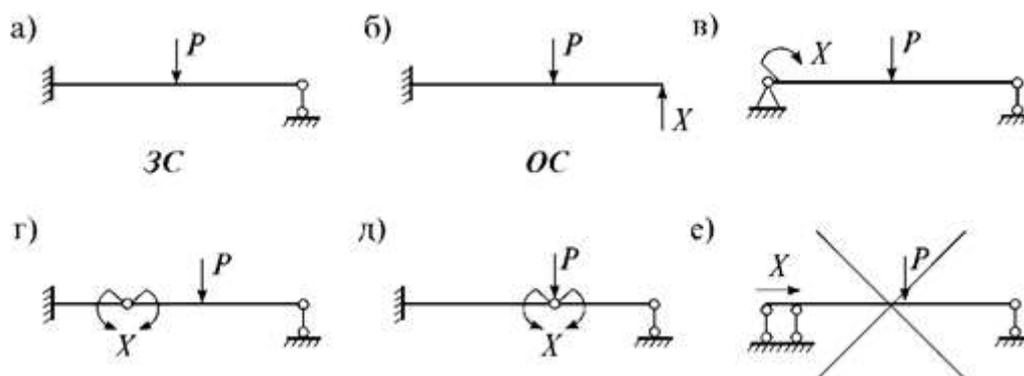


Рисунок 9. 6 – Выбор основной системы

Способов исключения лишних связей много (теоретически – бесконечное число). Например, лишнюю связь можно исключать как на рисунке 9.6,в-е. Однако одна из этих схем (рисунок. 6,е) геометрически изменяема и для дальнейшего расчета непригодна. Все остальные схемы могут быть приняты за основную систему.

Если воспользоваться известным теоретическим положением о том, что в линейно-упругих системах внешняя нагрузка распределяется единственным образом, то результаты расчетов по различным основным системам должны быть одинаковыми. Однако объем вычислений в разных основных системах может быть разным. Поэтому из многих вариантов основной системы нужно выбирать наиболее оптимальную. Например, в нашем примере первый вариант основной системы (рисунок 9.6, б) предпочтительнее остальных, т.к. в ней эпюры строятся легче.

Для заданной расчётной схемы статически неопределимого сооружения существует множество вариантов основных систем метода сил. Для расчёта принимается вариант, удовлетворяющий ряду требований, среди которых обязательным является требование геометрической неизменяемости основной системы метода сил. Выполнение некоторых желательных требований при выборе основной системы метода сил способствует сокращению времени на расчёт статически неопределимого сооружения. Это, прежде всего, образование простых по структуре основных систем методом сил, где чётко просматриваются рабочие схемы (главные и второстепенные части), легко определяются реакции опорных связей и внутренние усилия.

Устранение каких-либо связей не изменяет внутренние усилия и деформации системы, если к ней приложить дополнительные силы и моменты, представляющие собой реакции отброшенных связей. Значит, если к основной системе приложить заданную

нагрузку и реакции удаленных связей, то основная и заданная системы станут *эквивалентными*.

Основную систему с приложенными к ней лишними неизвестными X_1, X_2, \dots, X_n и внешней нагрузкой P называют *эквивалентной системой* при условии, что её действительные перемещения согласуются с наложенными на исходную систему связями. Для каждой статически неопределимой заданной системы (рис. 9.7, а) можно подобрать, как правило, различные основные системы (рис. 9.7, б, в), однако их должно объединять следующее условие - основная система должна быть статически определимой и геометрически неизменяемой (т.е. не должна менять свою геометрию без деформаций элементов).

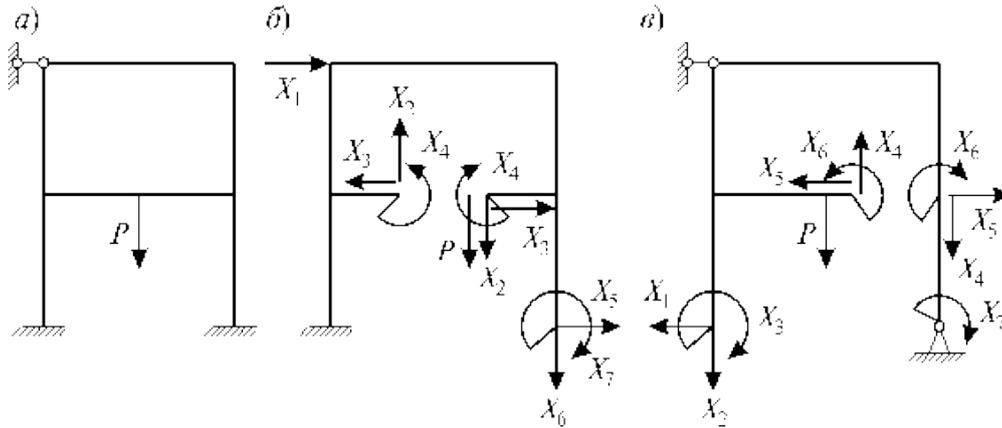


Рисунок 9. 7 – Примеры выбора лишних связей

9.4 Канонические уравнения метода сил

В заданной системе по направлениям имеющихся жестких связей, в том числе и тех связей, которые отброшены при переходе к основной системе, перемещений быть не может, поэтому и в основной системе перемещения по направлениям отброшенных связей должны равняться нулю. А для этого реакции отброшенных связей должны иметь строго определенные значения.

Условие равенства нулю перемещения по направлению любой i -ой связи из n отброшенных на основании принципа независимости действия сил имеет вид:

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \dots + \Delta_{in} + \Delta_{iF} = 0; \quad (9.4)$$

где первый индекс означает направление перемещения и номер отброшенной связи, а второй указывает на причину, вызвавшую перемещение, т.е. Δ_{ik} - это перемещение по направлению i -ой связи, вызванное реакцией k -ой связи; Δ_{iF} - перемещение по направлению i -ой связи, вызванное одновременным действием всей внешней нагрузки.

В методе сил реакцию k -ой связи принято обозначать через x_k . С учетом этого обозначения и в силу справедливости закона Гука перемещения Δ_{ik} можно представить в виде:

$$\Delta_{ik} = \delta_{ik} x_k, \quad (9.5)$$

где δ_{ik} - единичное (или удельное) перемещение по направлению i -ой связи, вызванное реакцией $\bar{x}_k = 1$, т.е. реакцией, совпадающей по направлению с X_k , но равной единице.

Грузовая эпюра строится от внешней нагрузки, приложенной к основной системе. При этом можно строить одну эпюру от одновременного действия всех внешних нагрузок или несколько эпюр, отдельно от каждой из приложенных нагрузок. Такое разбиение одной грузовой эпюры на несколько более простых, как правило, целесообразно только тогда, когда среди действующих нагрузок есть равномерно распределенная, и эпюра моментов на соответствующем участке под ней является знакопеременной. При этом в каждом каноническом уравнении число свободных членов будет равно числу построенных грузовых эпюр.

Единичные и грузовые перемещения (коэффициенты и свободные члены канонических уравнений) в общем случае можно вычислить методом Мора. Для балок и рам это можно сделать при помощи правила Верещагина.

При вычислении коэффициентов и свободных членов канонических уравнений метода сил, помимо интегрирования

$$\delta_{ik} = \int \frac{\bar{M}_i M_k}{EI} dx$$

а также

$$\Delta_{iF} = \int \frac{\bar{M}_i M_F}{EI} dx$$

применяют различные упрощенные приемы вычисления интегралов.

Особенно обстоятельно они разработаны для рам с прямолинейными стержнями постоянного сечения. Жесткость $EI = \text{const}$ при этом выносится за знак интеграла, а под интегралом остается произведение двух функций: M_i и M_k , одна из которых, как правило, или обе являются линейными функциями. Операция интегрирования здесь часто называется перемножением эпюр и ее символически изображают следующим образом:

$$\frac{1}{EI} \int_a^b M_1 M_2 dx = M_1 \otimes M_2 \quad (9.8)$$

здесь знак \otimes означает умножение в смысле формулы Мора.

Русский ученый Верещагин усовершенствовал метод, доказав, что вычисление интеграла Мора может быть заменено перемножением площадей грузовой эпюры моментов (грузовое состояние) на ординату с единичной эпюры (единичное состояние) под центром тяжести первой эпюры на всех участках стержневой системы.

При помощи расчленения эпюр на части можно добиться того, чтобы при перемножении участвовали эпюры простой структуры, для которых легко определяются и площади, и положения центров тяжести.

Приближенная формула Симпсона для перемножения эпюр представлена на рисунке 9.8. Определенный по приведенной формуле результат Δ_i численно равен произведению

площади момента грузовой эпюры на ординату (угол поворота) единичной эпюры, взятой в центре тяжести грузовой.

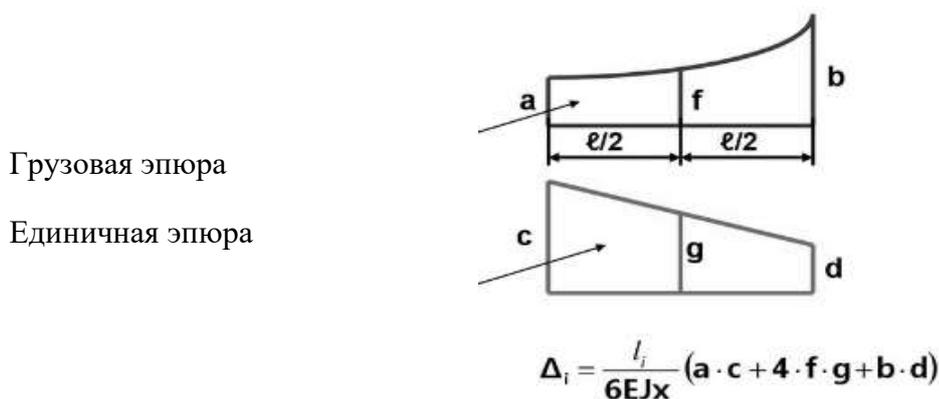


Рисунок 9.8 – Формула Симпсона

9.6 Универсальная проверка коэффициентов и свободных членов канонических уравнений

Для выполнения универсальной проверки необходимо построить суммарную единичную эпюру \bar{M}_s - эпюру моментов от одновременного действия всех единичных сил, приложенных к основной системе:

$$\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i$$

Перемножим суммарную единичную эпюру с эпюрой \bar{M}_i :

$$\begin{aligned} \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_s}{EI} ds &= \int \frac{1}{EI} \bar{M}_i (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) ds = \\ &= \int \frac{1}{EI} \bar{M}_i \bar{M}_1 ds + \int \frac{1}{EI} \bar{M}_i \bar{M}_2 ds + \dots + \int \frac{1}{EI} \bar{M}_i \bar{M}_n ds = \delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{in}; \end{aligned}$$

Таким образом, результат перемножения суммарной и i -ой единичной эпюр - это перемещение по направлению i -ой связи от совместного действия единичных лишних неизвестных. Это перемещение равно сумме коэффициентов i -го канонического уравнения:

$$\delta_{is} = \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_s}{EI} ds = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n \delta_{ik}. \quad (9.9)$$

Такая проверка называется **построчной** и выполняется для каждого канонического уравнения.

Вместо n построчных проверок чаще всего выполняется одна – **универсальная** проверка, которая состоит в перемножении суммарной единичной эпюры самой на себя и проверке условия:

$$\delta_{ss} = \int \frac{\bar{M}_s \bar{M}_s}{EI} ds = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n \delta_{ik}. \quad (9.10)$$

Если универсальная проверка выполняется, единичные перемещения вычислены правильно; если нет – необходимо выполнить построчные проверки, что позволит уточнить перемещение, при вычислении которого допущена ошибка.

Для выполнения проверки грузовых перемещений необходимо перемножить суммарную единичную и грузовую эпюры изгибающих моментов:

$$\int \frac{\bar{M}_s M_F}{EI} ds = \int \frac{1}{EI} M_F (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) ds =$$

$$= \int \frac{1}{EI} \bar{M}_1 M_F ds + \int \frac{1}{EI} \bar{M}_2 M_F ds + \dots + \int \frac{1}{EI} \bar{M}_n M_F ds = \Delta_{1F} + \Delta_{2F} + \dots + \Delta_{nF};$$

Таким образом, проверка свободных членов системы канонических уравнений состоит в выполнении условия:

$$\delta_{sF} = \int \frac{\bar{M}_s M_F}{EI} ds = \sum_{i=1}^n \Delta_{iF} i = 1, 2, \dots, n \quad (9.11)$$

9.7 Построение окончательных эпюр внутренних силовых факторов

Окончательные эпюры можно построить двумя способами.

Так как при найденных значениях лишних неизвестных X_i выполняются условия совместности деформаций, то из расчета основной системы можно получить все искомые внутренние усилия заданной системы. На основании принципа независимости действия сил для изгибающих моментов получим:

$$M = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n + M_F,$$

или, учитывая, что

$$M_1 = \bar{M}_1 X_1; \quad M_2 = \bar{M}_2 X_2; \quad \dots \quad M_n = \bar{M}_n X_n;$$

приходим к выражению:

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_F = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i X_i + M_F. \quad (9.12)$$

Аналогично определяется продольные и поперечные силы:

$$Q = \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + \dots + \bar{Q}_n X_n + M_F = \sum_{i=1}^n \bar{Q}_i X_i + Q_F. \quad (9.13)$$

$$N = \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \dots + \bar{N}_n X_n + M_F = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i X_i + N_F. \quad (9.14)$$

Второй способ основан на том, что в результате вычисления реакций лишних связей X_i исходная статически неопределимая система приведена к статически определимой системе, нагруженной внешними нагрузками и реакциями лишних связей. Поэтому окончательные эпюры внутренних силовых факторов можно построить для эквивалентной системы, вычислив предварительно (и то не всегда) из условий равновесия опорные реакции последней. Недостатком первого способа является то обстоятельство, что для его реализации необходимо дополнительно построить эпюры поперечных и продольных сил,

которые не используются в расчетах. В связи с этим для построения окончательных эпюр более рациональным представляется второй способ, а условие (9.12) можно использовать в качестве дополнительной проверки.

9.8 Проверка окончательной эпюры изгибающих моментов

Эта проверка выполняется в двух вариантах: статическая и кинематическая.

При *статической проверке*, выполняемой обычно для рам, вырезаются узлы и записываются условия их равновесия под действием узловых сосредоточенных моментов и изгибающих моментов на концах стержней. Алгебраическая сумма моментов в любом узле должна быть равна нулю. Проверка является вспомогательной и выполняется автоматически при правильных эпюрах изгибающих моментов в основной системе и при выполнении кинематической проверки. Статическая проверка эпюр Q и N состоит в том, что для любой отсеченной части рамы сумма проекций на две оси всех действующих сил – внешних нагрузок и внутренних усилий – должна быть равна нулю.

9.9 Метод трех моментов

На практике часто возникает необходимость расчета неразрезных поперечных балок, опирающихся на ряд опор. Для такой многопролетной неразрезной балки удобнее в качестве неизвестных принять опорные моменты. Упругая линия изгиба балки при нагружении не имеет сломов на опорах, то есть угол поворота на i -той опоре слева и справа один и тот же.

Расчетная схема представлена на рисунке 9.9

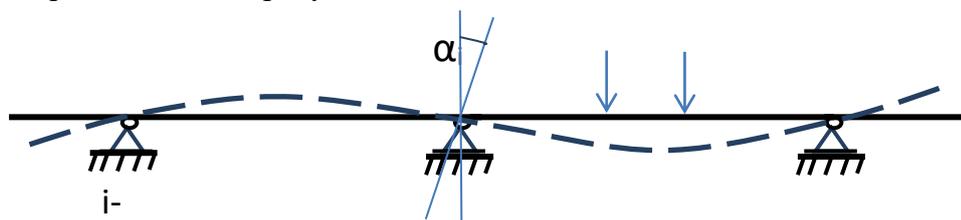


Рисунок 9.9 - Схема i -той опоры многопролетной неразрезной балки и прилегающих к ней пролетов

На рисунке 9.10 представлена эквивалентная система, которую можно получить, если ввести шарниры в промежуточные опоры, и загрузить их неизвестными моментами, которые подлежат определению. Условием совместности деформаций является то обстоятельство, что угол поворота на i -той опоре от действия опорных моментов и нагрузки на левый пролет равен углу поворота от действия нагрузок и моментов на правый пролет.

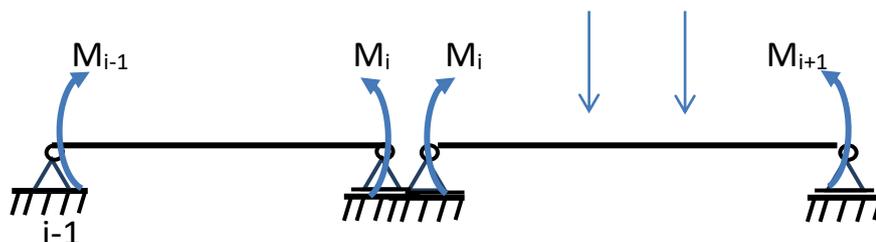


Рисунок 9.10 - Эквивалентная схема для метода трех моментов

Моменты направим таким образом, чтобы они вызывали положительный изгибающий момент в сечениях балки.

Зададимся правилом знака для углов поворота – если сила или момент на рассматриваемой опоре поворачивает сечение по часовой стрелке, будем считать его положительным. Тогда можно записать уравнение угла поворота на i -той опоре от действия опорных моментов M_{i-1}, M_i , и угла $\alpha_{i,i}(P)$, создаваемый нагрузкой на левый пролет, в предположении, что балка шарнирно оперта по концам пролета:

$$-\frac{M_{i-1}l_i}{6EJ_i} - \frac{M_i l_i}{3EJ_i} - \alpha_{i,i}(P) = \alpha_i \quad (9.15)$$

для угла поворота на i -той опоре от действия опорных моментов M_i, M_{i+1} , и угла $\alpha_{i,i+1}(P)$, создаваемого нагрузкой на правом пролете шарнирно опертой балки:

$$\frac{M_i l_{i+1}}{3EJ_{i+1}} + \frac{M_{i+1} l_{i+1}}{6EJ_{i+1}} + \alpha_{i,i+1}(P) = \alpha_i \quad (9.16)$$

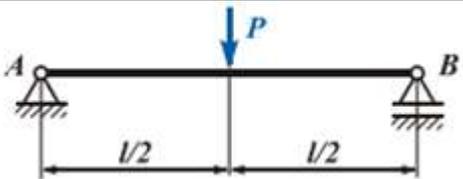
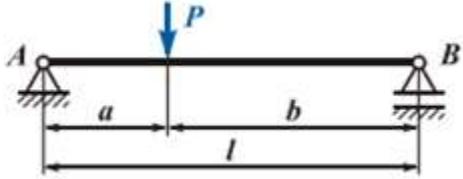
Примем условие, что $EJ = \text{const}$, умножим оба уравнения на $6EJ$, и, после преобразований, получим уравнение совместности деформаций на i -той опоре

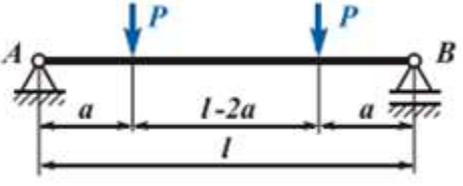
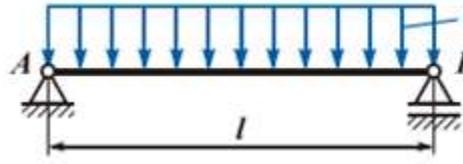
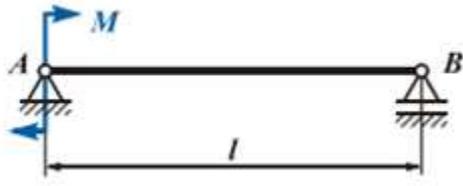
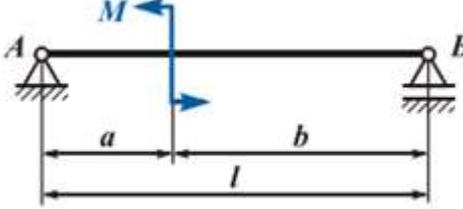
$$M_{i-1}l_i + 2M_i(l_i + l_{i+1}) + M_{i+1}l_{i+1} = -6EI(\alpha_{i,i} + \alpha_{i,i+1}) \quad (9.17)$$

Из уравнения видно, что оно содержит три неизвестных момента, поэтому получило название **метода трех моментов**.

Углы поворота от внешней нагрузки, приложенной в пролете, приведены в таблице 9.1

Таблица 9.1 - Углы поворота на опорах однопролетных балок для типовых случаев нагружения

Расчетная схема балки и нагрузка	Углы поворота
	$\alpha_A = \frac{Pl^2}{16EI}$ $\beta_B = \frac{Pl^2}{16EI}$
	$\alpha_A = \frac{Pab(l+b)}{6l \cdot EI}$ $\beta_B = \frac{Pab(l+a)}{6l \cdot EI}$

	$\alpha_A = \frac{Pa(l-a)}{2EI}$ $\beta_B = \frac{Pa(l-a)}{2EI}$
	$\alpha_A = \frac{ql^3}{24EI}$ $\beta_B = \frac{ql^3}{24EI}$
	$\alpha_A = \frac{Ml}{3EI}$ $\beta_B = \frac{Ml}{6EI}$
	$\alpha_A = \frac{M(l^2 - 3b^2)}{6l \cdot EI}$ $\beta_B = \frac{M(3a^2 - l^2)}{6l \cdot EI}$

Контрольные вопросы:

- 9.1 Как устанавливается степень статической неопределимости системы
- 9.2 Какие методы расчета статически неопределимых систем вы знаете?
- 9.3 Требования к выбору основной системы метода сил.
- 9.4 Метод сил. Алгоритм расчета статически неопределимой системы методом сил.
- 9.5 Канонические уравнения метода сил
- 9.6 Каков физический смысл главного коэффициента метода сил?
- 9.7 Каков физический смысл втростепенного коэффициента метода сил?
- 9.8 Каков физический смысл свободного члена уравнения метода сил?
- 9.9 Как определяется главный коэффициент метода сил?
- 9.10 Как определяется втростепенный коэффициент метода сил?
- 9.11 Как определяется свободный член уравнения метода сил?
- 9.12 Сформулируйте правило Верещагина.
- 9.13 Формула Симпсона
- 9.14 Выбор основной системы метода трех моментов

- 9.15 Алгоритм расчета многопролетных статически неопределимых балок. Метод трех моментов.

Тема 10. Устойчивость сжатых стержней

Цель: знать методы и способы оценки прочности, жёсткости и устойчивости элементов строительных конструкций, в т.ч. с использованием прикладного программного обеспечения.

Ключевые вопросы:

- 10.1 Понятие устойчивости.
- 10.2 Определение критической силы.
- 10.3 Алгоритм расчета сжатых стержней.
- 10.4 Условие равной устойчивости в разных плоскостях.
- 10.5 Пример подбора сечения для центрально сжатых стержней

Методические указания

Расчет на устойчивость сжатых стержней является одной из важных практических задач для студентов, обучающихся по направлению подготовки - Строительство

В 2011 году изменились нормы проектирования центрально-сжатых стержней, а имеющиеся книги и методические пособия на эту тему были изданы под старые стандарты, в них использованы устаревшие данные по маркам стали, их прочностным характеристикам, а также обозначения, не соответствующие современным стандартам. Поэтому в лекции подробно рассмотрены теоретические аспекты расчета на устойчивость центрально-сжатых стержней из сталей, которые применяются в промышленно-гражданском строительстве. Такая градация обусловлена некоторым отличием в расчетах. Особый акцент сделан на учет закрепления стержней в разных плоскостях, подобный подход активно реализуется в современной литературе и международных нормах Еврокод. Приведен пример подбора сечения для центрально сжатых стержней при проектировании промышленно-гражданских зданий и сооружений.

Обратите внимание на то, что явление потери устойчивости наблюдается уже при напряжении, не превышающем предела пропорциональности, при котором невозможно разрушение от потери прочности. Однако элементы конструкций при этом напряжении могут мгновенно потерять устойчивость и разрушиться. В этом основная опасность потери устойчивости. Наступление этого состояния существенно зависит от гибкости стержня. При большой гибкости для расчета критических напряжений используется формула Эйлера, для средней гибкости – эмпирическое уравнение Ясинского. Решение проектной задачи (подбор сечения) производится методом последовательных приближений.

10.1 Понятие устойчивости. Устойчивость стержней

Термин "устойчивость" охватывает очень широкий круг вопросов: от движения планет и течения жидкостей, до строительных конструкций и энергетических систем. В сопротивлении материалов рассматривается устойчивость формы и устойчивость положения.

Под устойчивостью будем понимать способность элемента при воздействии на него сжимающих внешних нагрузок сохранять первоначально заданную форму равновесия, т.е. деформироваться таким образом, чтобы гарантировать его заданные эксплуатационные качества.

Если при действии малых возмущений тело отклоняется от состояния равновесия незначительно, а после прекращения их действия возвращается в исходное состояние, то такое состояние называется *устойчивым*. Если после прекращения действия малых возмущений тело не возвращается в исходное состояние, то такое состояние называется *неустойчивым*.

Оценивая устойчивость, нужно иметь в виду вполне определенное состояние этой системы. Например, шарик на идеально гладкой поверхности (рисунок 10.1) может находиться в разных состояниях:

- а) устойчивом по отношению к любым отклонениям;
- б) неустойчивом во всех направлениях;
- в) устойчивом в плоскости xz и неустойчивом в плоскости yz ;
- г) в безразличном состоянии.

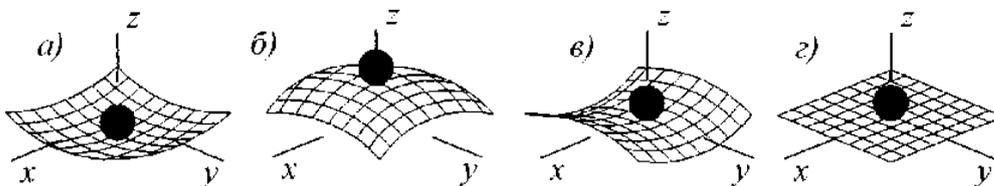


Рисунок 10.1 - Примеры видов равновесия:

- а) устойчивое состояние; б) неустойчивое состояние; в) устойчивое в плоскости xz и неустойчивое в плоскости yz ; г) безразличное состояние

Применительно к строительным конструкциям форма равновесия стержня может быть устойчивой, неустойчивой и безразличной. Чтобы на опыте выявить, каким является равновесие стержня, надо вывести его из положения равновесия, приложив к стержню кратковременную малую возмущающую нагрузку, и посмотреть на поведение стержня после снятия нагрузки (рисунок 10. 2).

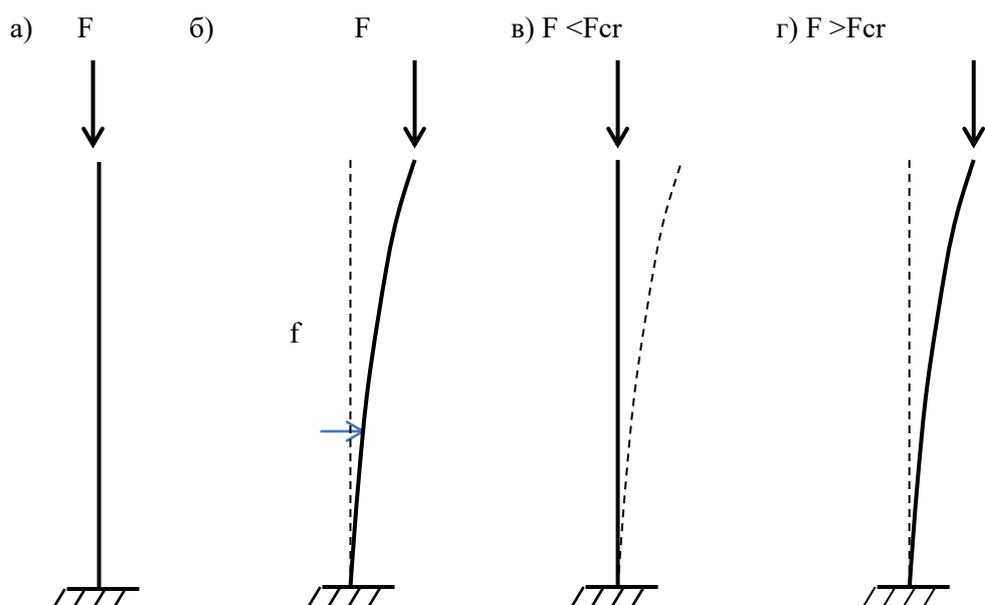


Рисунок 10.2 - Устойчивость сжатого стержня под действием возмущающей нагрузки

а) до нагружения; б) при нагружении;

после снятия нагрузки

в) устойчивая форма равновесия; г) неустойчивая форма равновесия.

Рассмотрим поведение центрально- сжатого стержня (рисунок 10.2, а). Приложим к нему возмущающую нагрузку - горизонтальную силу f (рисунок 10.2, б), рассматриваемый стержень изогнется. Если после снятия возмущения стержень возвращается в исходное прямолинейное состояние, то такое состояние называется устойчивым. Если же после удаления возмущающей нагрузки стержень остается в изогнутом состоянии, то первоначальная прямолинейная форма равновесия является неустойчивой.

Максимальная нагрузка, при которой прямолинейная форма равновесия сжатого стержня еще устойчива, называется *критической силой* F_{cr} . Рисунок. 10.2 поясняет данное определение критической силы. Если нагрузка меньше критической силы или достигла ее (рисунок 10.2, в), то после снятия возмущающей нагрузки стержень остается прямолинейным. Если же нагрузка стала больше критической величины (рисунок 10.2, г), то стержень после снятия возмущения остается в изогнутом состоянии.

На практике всегда бывают различные возмущения. При превышении силы критического значения сжатый стержень начинает изгибаться. При этом сжимающая сила вызывает дополнительно изгибающие моменты, линейная зависимость между нагрузками и деформациями нарушается; наблюдается значительное нарастание прогибов при малом увеличении сжимающей силы. Это явление называется продольным изгибом.

Условие, обеспечивающее работу стержней конструкции с определенным запасом против потери устойчивости, называется условием устойчивости.

Для обеспечения устойчивости конструкций и сооружений допускаются нагрузки, которые меньше критических. *Отношение критической нагрузки к ее допускаемой величине*

называется коэффициентом запаса устойчивости. Минимальный коэффициент запаса устойчивости в соответствии с нормами [7] составляет $n_y = 1,3$.

10.2 Определение критической силы. Формула Эйлера

Задача определения критической силы впервые была решена Л. Эйлером в 1744 г. для шарнирно закрепленного прямолинейного стержня.

Если раньше определялась деформация стержня при заданных внешних нагрузках, то при продольном изгибе ставится обратная задача: задавшись искривлением оси сжатого стержня, следует определить, при каком значении осевой сжимающей силы F такое искривление возможно.

Рассмотрим прямой стержень постоянного сечения, шарнирно опертый по концам; одна из опор допускает возможность продольного перемещения соответствующего конца стержня (рисунок 10.3).

Пусть стержень сжат центрально приложенными продольными силами F и получил малое искривление в плоскости наименьшей жесткости.

Так как деформации малы, для решения поставленной задачи можно воспользоваться приближенным дифференциальным уравнением изогнутой оси стержня. Выбрав систему координатных осей, как показано на рисунке 10.3, имеем:

$$EJ \frac{d^2y}{dz^2} = M(z) \quad (10.1)$$

Возьмем сечение на расстоянии z от начала координат; ордината изогнутой оси в этом сечении будет y , а изгибающий момент равен

$$M(z) = -Fy.$$

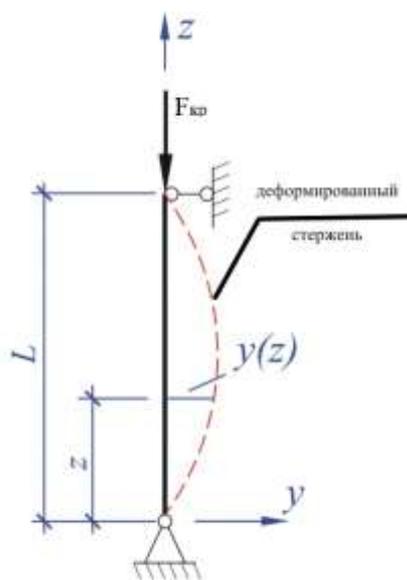


Рисунок 10.3 - Расчетная схема к задаче Эйлера

По исходной схеме изгибающий момент получается отрицательным, ординаты же при выбранном направлении оси y оказываются положительными.

Тогда дифференциальное уравнение принимает вид

$$EJ \frac{d^2 y}{dz^2} = -Fy. \quad (10.2)$$

Разделив обе части уравнения на EJ и обозначив

$$\frac{F}{EJ} = k^2,$$

приводим его к виду:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + k^2 y = 0. \quad (10.3)$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид:

$$y = a \sin kz + b \cos kz \quad (10.4)$$

Это решение включает в себе три неизвестных: постоянные интегрирования a и b и значение $k = \sqrt{\frac{F}{EJ}}$, так как величина критической силы нам неизвестна.

Из граничных условий на концах стержня получим два уравнения:

1) в начале координат при $z = 0$ прогиб $y = 0$,

2) при $z=L$ прогиб $y = 0$.

Из первого условия следует $0 = b$.

Таким образом, изогнутая ось является синусоидой с уравнением

$$y = a \sin kz$$

Применяя второе условие, получаем:

$$0 = a \sin kL.$$

Отсюда следует, что или a или kL равны нулю.

Если a равно нулю, то из уравнения (10.4) следует, что прогиб в любом сечении стержня равен нулю, т. е. стержень остался прямым, что не соответствует исходным предпосылкам нашего вывода. Следовательно, $\sin kL = 0$, и величина kL может иметь следующий бесконечный ряд значений

$$kL = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi$$

n — любое целое число.

Отсюда $k = \frac{\pi n}{L}$, и окончательно

$$F = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{L^2} \quad (10.5)$$

Нагрузка, удерживающая изогнутый стержень в равновесии, теоретически имеет ряд значений. Но в практике интересно наименьшее значение осевой сжимающей силы, при которой становится возможным продольный изгиб, то следует принять $n=1$. К тому же, другие форма потери устойчивости могут быть получены только при установке промежуточных опор.

Тогда получаем выражение для критической силы:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{L^2} \quad (10.6)$$

Это — так называемая *формула Эйлера* для сжатого стержня с шарнирно-опертыми концами. *Значению критической силы соответствует изгиб стержня по синусоиде с одной полуволной.*

Задача решена для других случаев закрепления концов стержня, результаты расчета сведены в единую формулу.

С учетом влияния закрепления концов стержня на величину критической силы *обобщенная формула Эйлера* принимает вид:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} \quad (10.7)$$

где E - модуль упругости материала;

J - момент инерции сечения;

L - длина стержня;

μ - коэффициент расчетной (приведенной) длины, который так же называют коэффициентом Ясинского.

Произведение μl носит название *расчетной (приведенной) длины*.

Коэффициенты расчетной длины μl стержней постоянного сечения определяют в зависимости от материала, условий закрепления их концов и вида нагрузки по нормативным документам для соответствующих материалов. Для типичных случаев закрепления стержней и вида нагрузки значения μ приведены в таблице 10.1.

Следует обратить особое внимание, что *коэффициент приведения длины μ для одного и того же стержня в разных плоскостях может быть различным.*

Расчет по формуле (10.6) производится отдельно для каждой плоскости изгиба. За расчетное значение принимается минимальная критическая сила $F_{cr} = \min (F_{crx}, F_{cry})$.

Для частного случая, когда закрепление концов стержня во всех плоскостях одинаковое, формула (10.6) записывается в виде

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2} \quad (10.8)$$

При выводе формулы Эйлера использован закон Гука. Следовательно, формула (10.8) применима, если потеря устойчивости происходит при упругих деформациях стержня. Область применимости формулы Эйлера ограничивается условием

$$\sigma < R_{pr},$$

где R_{pr} - предел пропорциональности материала.

Максимальные критические напряжения σ_{cr} , определяемые по формуле Эйлера, равны пределу пропорциональности при сжатии.

Для удобства практического пользования это условие обычно записывают в виде ограничения по гибкости:

$$\lambda > \lambda_{пр}, \quad (10.9)$$

где $\lambda_{пр}$ - предельная гибкость, определяемая по формуле

$$\lambda_{пр} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_{pr}}} \quad (10.10)$$

здесь R_{pr} - предел пропорциональности материала.

Гибкость стержня определяется по формуле

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} \quad (10.11)$$

где i - радиус инерции сечения -

$$i = \sqrt{\frac{J}{A}} \quad (10.12)$$

характеристика, которая отражает связь площади и момента инерции поперечного сечения, и характеризует жесткость бруса на сжатие и изгиб. В разных плоскостях изгиба стержня отличается.

10.3 Устойчивость стержней при неупругих деформациях

Между тем, элементы реальных конструкций не всегда работают в упругой стадии. Поэтому необходимо исследование устойчивости при неупругих деформациях.

Результаты опытов (рисунок 10.4) показывают, что при потере устойчивости в упругой стадии экспериментальные точки лежат близко к гиперболе Эйлера, чем подтверждают ее достаточную точность. У стержней, теряющих устойчивость при пластических деформациях, экспериментальные результаты сильно разбросаны (это объясняется разбросом диаграмм сжатия) и расположены значительно ниже гиперболы.

Для расчетов на устойчивость при неупругих деформациях различными авторами предложены различные эмпирические формулы, основанные на выборе кривых, близких к результатам опытов. Для критических напряжений наибольшее распространение из них получило выражение

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda, \quad (10.13)$$

где a, b — константы, имеющие размерность напряжения.

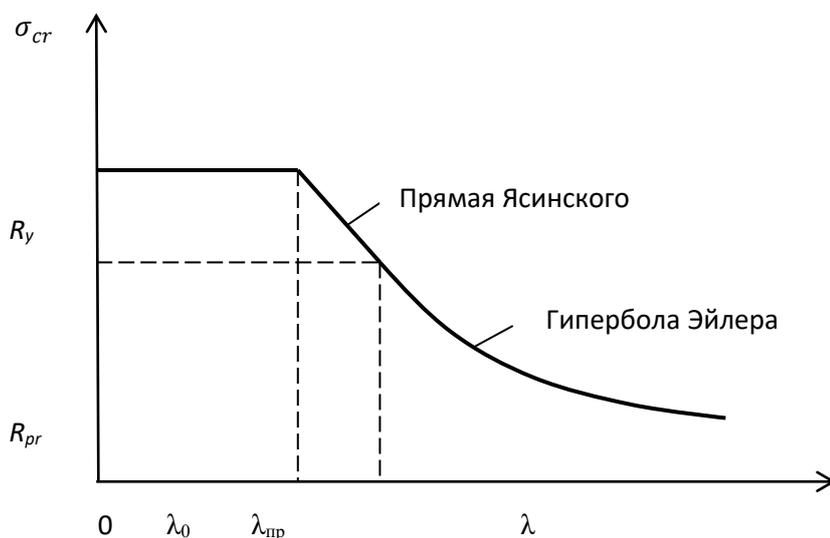


Рисунок 10.4 - График зависимости критических напряжений от гибкости

Выражение (10.11) имеет название формула Ясинского-Тетмайера. При этом в отечественной литературе ее часто называют формулой Ясинского, а в зарубежных — формулой Тетмайера.

Значения коэффициентов a и b обычно приводят в справочниках по устойчивости. Однако с появлением новых материалов и изменением их номенклатуры такие справочники зачастую не удовлетворяют практические запросы.

Для некоторых видов материалов коэффициенты a и b приведены в таблице 10.2

Формулу (10.11) можно переписать для критической силы:

$$F_{cr} = A(a - b\lambda), \quad (10.14)$$

где A — площадь поперечного сечения.

Необходимо отметить, что при *малой гибкости стержня* ($\lambda < \lambda_0$) вместо потери устойчивости достигается *опасное состояние материала в виде достижения предела прочности материала, из которого изготовлен стержень*, и формулой Ясинского-Тетмайера пользоваться нельзя. В *низкоуглеродистых сталях опасное состояние материала соответствует появлению пластических деформаций*. Следовательно, формула Ясинского применима, если выполняется следующее условие $\sigma_{cr} < R_y$,

где R_y - расчетное сопротивление по пределу текучести.

$$F_{cr} = \begin{cases} \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} & \text{при } \lambda \geq \lambda_{пр}, \\ A(a - bx) & \text{при } \lambda_0 < \lambda < \lambda_{пр}, \\ A R_y & \text{при } \lambda \leq \lambda_0. \end{cases} \quad (10.15)$$

$$\lambda_0 = 0.4 \sqrt{\frac{E}{R_y}}, \quad (10.16)$$

$$\lambda_{пр} = 3.4 \sqrt{\frac{E}{R_y}}. \quad (10.17)$$

Полученные по формуле (10.18) значения $\lambda_{пр}$ практически совпадают со значениями, приведенными в справочниках. Значения λ_0 , вычисленные по формуле (10.16) значительно меньше справочных. Например, для стали С235 вычисленное значение по формуле (10.16)

$\lambda_0 = 12$, а справочное значение $\lambda_0 = 60$.

Справочные значения λ_0 и $\lambda_{пр}$ для некоторых материалов приведены в таблице 10.4.

Для обеспечения устойчивости допускаются нагрузки, составляющие лишь определенную часть от *критических* и называемые *допускаемыми силами* $[F]_y$.

$$[F]_y = \frac{F_{cr}}{n_y} \quad (10.18)$$

Здесь n_y – коэффициент запаса устойчивости, зависящий от материала стержня.

Рекомендуемые значения коэффициента устойчивости находятся в пределах:

- для стальных стоек $n_y = 1,5 \dots 3$;
- для деревянных $n_y = 2,5 \dots 3,5$;
- для чугунных $n_y = 4,5 \dots 5,5$.

Поперечные сечения сжатых стержней должны назначаться не из условия прочности от чистого сжатия, а из условия того, чтобы сжимающие напряжения должны быть меньше критических напряжений:

$$\sigma < \sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A}$$

10.4 Выбор материала и рациональной формы сечения

Выбор материала. Так как в формулу Эйлера из всех механических характеристик входит лишь модуль Юнга, то для повышения устойчивости стержней большой гибкости нецелесообразно применять высокопрочные материалы, так как модуль Юнга для всех марок сталей примерно одинаков.

Для стержней малой гибкости применение высокосортных сталей оправдано, так как с повышением предела текучести у таких сталей повышаются и критические напряжения, а значит и запас устойчивости.

Форма сечения. В некоторых случаях при подборе поперечного сечения стержней, работающих на устойчивость, следует выбирать такую форму сечения, чтобы гибкость стержня была одинаковой относительно обеих главных осей его сечения (*условие равноустойчивости*), а значит максимальный и минимальный моменты инерции такого сечения должны быть одинаковы $J_{\max} = J_{\min}$. Если условия закрепления стержня неодинаковое в двух плоскостях изгиба, то равенство моментов инерции не обеспечивает равноустойчивость и требует расчета.

Кроме того, необходимо стремиться к получению при данной площади наибольших радиусов инерции. Для этого необходимо выбирать сечения, большая часть площади которых по возможности была удалена от центра тяжести (трубчатые, коробчатые сечения).

По степени рациональности известные сечения можно распределить следующим образом: трубчатое сечение, коробчатое, двутавровое, состоящее из швеллеров, квадратное, круглое, прямоугольное.

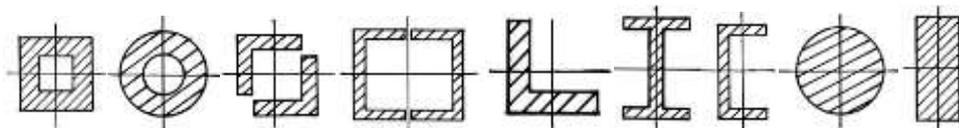


Рисунок 10.5 - Поперечные сечения, распределенные по степени рациональности

10.5 Практический расчет сжатых стержней

При расчете на устойчивость могут быть следующие задачи:

подбор сечения стержня (проектная задача), которая возникает при новом проектировании;

определение допускаемой нагрузки, которая возникает при реконструкции здания;

определение коэффициента запаса устойчивости, которая возникает при экспертизе проекта.

Условие устойчивости сжатых стержней

Условие устойчивости для сжатых стержней имеет вид

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \varphi \cdot R_y, \quad (10.19)$$

где N - продольная сжимающая сила;

A - площадь поперечного сечения брутто (без учета ослабления сечения);

φ - коэффициент устойчивости (продольного изгиба) при центральной сжатии;

R_y - расчетное сопротивление по пределу текучести (предел текучести материала).

Коэффициент продольного изгиба, изменяющийся в пределах $0 \leq \varphi \leq 1$, представляет собой коэффициент уменьшения основного расчетного сопротивления для продольного изгиба (коэффициент устойчивости). Коэффициент продольного изгиба зависит от критических напряжений, а, следовательно, является функцией гибкости стержня:

$$\varphi = \frac{\sigma_{cr}}{n_y R_y}, \quad (10.20)$$

где n_y - коэффициент запаса устойчивости.

В некоторых случаях определение значения коэффициента φ как некоторой функции от гибкости (условной гибкости) для различных материалов установлено соответствующими нормами проектирования.

Более подробные пояснения, необходимые при проектировании металлических и деревянных конструкций согласно требованиям СП, приведены в [7].

В соответствие с СП 16.13330.2011 [1] коэффициент продольного изгиба устанавливается в зависимости от двух параметров: *типа сечения и приведенной гибкости λ* .

Все сечения разбиты на три типа: а, b и с, которые приведены в таблице 10.2.

Условная гибкость определяется в зависимости от гибкости и предела текучести стали, то есть учитывает материал конструкции:

Таблица коэффициентов продольного изгиба для сталей по СП 16.13330.2011 [1] приведены в таблице 10.3.

При решении проектной задачи в формуле (10.19) присутствуют сразу два неизвестных: площадь поперечного сечения A и коэффициент продольного изгиба φ . При этом коэффициент φ зависит от площади поперечного сечения A и формы поперечного сечения и поэтому не может быть назначен заранее. Ввиду этого расчет на устойчивость выполняется методом последовательных приближений (методом итераций).

Алгоритм подбора поперечного сечения:

1. В первом приближении принимают $\varphi_1 = 0,5.. 0,6$.

- Из условия устойчивости (10.20) находят требуемую площадь поперечного сечения

$$A_1 \geq \frac{N}{R_y \varphi_1}$$

- По сортаменту или из соотношения сторон для некатанных профилей в зависимости от требуемой площади сечения A_1 подбирают сечение или профиль и определяют фактические радиусы инерции i_{x1} и i_{y1} :
- Вычисляют максимальную гибкость стержня (10.18), а при подборе поперечных сечений строительных конструкций - условную гибкость (10.17), так как закрепление концов стержня в разных плоскостях может быть различным. Модуль Юнга в соответствии с материалом определяется по таблице 10.5.
- По таблицам [10.1, 10.3] приложения находят фактический коэффициент продольного изгиба φ
- Проверяют условие устойчивости для подобранной площади и фактический коэффициент продольного изгиба φ по формуле (10.19)

- Сечение считается подобранным правильно, если приняты минимальные размеры, удовлетворяющие условию (10.19) для прокатных профилей или когда фактический коэффициент продольного изгиба отличается от принятого значения φ менее чем на 5 % для сечений в виде простых фигур (прямоугольное, круглое и т.д.).
- Если фактические напряжения оказываются выше допускаемых напряжений материала или имеется значительный запас (напряжения в конструкции значительно меньше допускаемых), выполняется вторая попытка.

2. Второе приближение

На этом этапе задаются новым значением φ_2

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^{\text{факт}}}{\varphi_1^{\text{факт}}}$$

Далее выполняют все пункты первой попытки.

Если условие не выполняется, то принимается 3-я попытка и т.д. до тех пор, пока условие устойчивости (10.19) не будет выполнено. На практике обычно делают 2-4 попытки.

Процесс последовательных приближений (итерационный процесс) продолжается до тех пор, пока разница между величиной расчетных напряжений и расчетным сопротивлением материала не будет меньше величины, установленной СНиП. Обычно требуется, чтобы разница между двумя указанными величинами не превышала 3 - 5%.

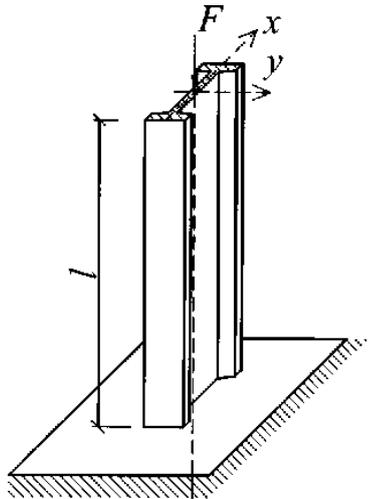
Условие, когда фактический коэффициент продольного изгиба отличается от принятого значения φ менее чем на 5 %, требуется при подборе сечений непрокатных профилей. При расчете же прокатных профилей в рамках сортамента это условие не всегда выполнимо.

При правильно подобранном сечении коэффициент запаса устойчивости автоматически будет равен около 1.3, т.к. данный коэффициент уже заложен в коэффициент продольного изгиба φ . Поэтому при решении проектной задачи вычисление коэффициента запаса устойчивости может использоваться в качестве проверки.

При практическом проектировании часто применяют условие равной устойчивости. Равноустойчивость стержня характеризуется равной вероятностью потери устойчивости во всех плоскостях.

В курсе «сопротивления материалов» часто условие закрепления стержня во всех плоскостях считают одинаковым, т.е. $\mu_x = \mu_y$, или $J_x = J_y$, (на практике это условие чаще всего не реализуется).

10.6 Пример. Подбор сечения центрально нагруженной стойки здания



Стойка каркаса здания

длиной $l = 3,0$ м

выполнена из двутавра по ГОСТ 8239,

нагружена силой $F = 450$ кН, выполнена из стали марки С245,

схема закрепления стержня приведена на рисунке 10.6.

Требуется определить номер двутавра.

Рисунок.10.6 - Схема закрепления стойки.

Решение

По таблице 10. 5. предел текучести стали С245 $R_y = 240$ МПа = 24 кН/см², модуль упругости стали $E = 2,06 \cdot 10^5$ МПа. Вид сечения относится к типу b согласно таблице 10.2

Закрепление стержня во всех плоскостях одинаковое, тогда в соответствии с таблицей П1 коэффициент приведения длины в обеих плоскостях $\mu_x = \mu_y = \mu = 2$.

Поскольку коэффициенты приведения длины в разных плоскостях равны, максимальной гибкости будет соответствовать минимальный радиус инерции

$$i = \min (i_x, i_y).$$

Подбор сечения осуществляется методом последовательных приближений (методом итераций).

В первом приближении принимаем $\varphi_1 = 0,5$.

Из условия обеспечения устойчивости (10.20) находим требуемую площадь поперечного сечения A_1 :

$$A_1 \geq \frac{N}{R_y \varphi_1} = \frac{450}{24 \cdot 0,5} = 37,5 \text{ см}^2$$

По сортаменту в зависимости от A_1 подбираем сечение с ближайшей большей площадью поперечного сечения $A_1^{\text{факт}}$, находим фактический радиус инерции i_{y1} и гибкость λ_1 , которые зависят от площади A_1 . *Обратите внимание на положение осей, заданных в сортаменте и в расчетной схеме.*

По сортаменту (ГОСТ 8239-89) принимаем двутавр № 27 с фактической площадью $A^{\text{факт}} = 40,2 \text{ см}^2$, $i_{x1} = 2,54 \text{ см}$, $i_{y1} = 11,2 \text{ см}$.

Для дальнейших расчетов принимается минимальный радиус инерции $i = \min(i_{x1}, i_{y1}) = 2,54 \text{ см}$. Максимальную гибкость

$$\lambda_1 = \frac{2 \cdot 300}{2,54} = 236$$

здесь 300 - длина стержня в сантиметрах.

Для элементов конструкций промышленно-гражданского назначения нужно определить условную гибкость

$$\bar{\lambda}_1 = \lambda_1 \sqrt{\frac{R_y}{E}} = 236 \sqrt{\frac{24}{2,06 \cdot 10^5}} = 8,05.$$

По таблице 10.3 методом интерполяции определяем фактический коэффициент продольного изгиба

$$\varphi_1^{\text{факт}} = 0,118.$$

Проверяем условие устойчивости

$$\sigma_1 = \frac{450}{0,118 \cdot 40,2} = 94,8 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} > R_y = 24 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2},$$

Устойчивость не обеспечена, фактический коэффициент устойчивости для выбранного сечения отличается от принятого в первом приближении

$$\frac{\varphi_1^{\text{факт}} - \varphi_1}{\varphi_1} \cdot 100\% = \frac{0,118 - 0,5}{0,5} \cdot 100\% = 76,4\% > 5\%.$$

Следовательно, требуется 2-е приближение.

Во втором приближении принимаем

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1^{\text{факт}} + \varphi_1}{2} = 0,368,$$

Тогда требуемая площадь поперечного сечения во втором приближении

$$A_2 \geq \frac{N}{R_y \varphi_2} = \frac{450}{24 \cdot 0,368} = 51,0 \text{ см}^2$$

В соответствии с сортаментом (ГОСТ 8239-89) принимаем двутавр № 33 с фактической площадью

$$A^{\text{факт}} = 53,8 \text{ см}^2,$$

тогда $i_{x2} = 2,79 \text{ см}$, $i_{y2} = 13,5 \text{ см}$,

определяемое минимальное значение из показателей гибкости в двух плоскостях
 $i_2 = \min(i_{x2}, i_{y2}) = 2,79 \text{ см.}$

Максимальная гибкость в соответствии с минимальным радиусом инерции

$$\lambda_2 = \frac{2 \cdot 300}{2,79} = 215,$$

условная гибкость

$$\bar{\lambda}_2 = \lambda_2 \sqrt{\frac{R_y}{E}} = 215 \sqrt{\frac{24}{2,06 \cdot 10^5}} = 7.33.$$

По таблице 10.3 методом интерполяции определяем фактический коэффициент продольного изгиба $\varphi_2^{\text{факт}} = 0,143,$

Проверяем условие устойчивости:

$$\sigma_2 = \frac{450}{0,143 \cdot 53,8} = 58,5 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} > R_y = 24 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2},$$

$$\frac{\varphi_2^{\text{факт}} - \varphi_1^{\text{факт}}}{\varphi_1^{\text{факт}}} \cdot 100\% = \frac{0,143 - 0,368}{0,368} \cdot 100\% = 61,1\% > 5\%.$$

Следовательно, требуется 3-е приближение

В третьем приближении принимаем

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2^{\text{факт}} + \varphi_1^{\text{факт}}}{2} = 0,256,$$

Тогда требуемая площадь поперечного сечения в этом приближении

$$A_3 \geq \frac{N}{R_y \varphi_1} = \frac{450}{24 \cdot 0,256} = 73,2 \text{ см}^2$$

По сортаменту (ГОСТ 8239-89) принимаем двутавр № 40 с фактической площадью

$$A^{\text{факт}} = 72,6 \text{ см}^2,$$

тогда $i_{x3} = 3,03 \text{ см, } i_{y3} = 16,2 \text{ см,}$ принимаем минимальное значение из показателей гибкости в двух плоскостях $i_3 = \min(i_{x3}, i_{y3}) = 3,03 \text{ см.}$

Максимальная гибкость

$$\lambda_3 = \frac{2 \cdot 300}{3,03} = 198,$$

Условная гибкость

$$\bar{\lambda}_3 = \lambda_3 \sqrt{\frac{R_y}{E}} = 198 \sqrt{\frac{24}{2,06 \cdot 10^5}} = 6,75.$$

По таблице 10.3 методом интерполяции определяем фактический коэффициент продольного изгиба

$$\varphi_3^{\text{факт}} = 0,167.$$

Проверяем условие устойчивости:

$$\sigma_3 = \frac{450}{0,167 \cdot 72,6} = 37,1 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} > R_y = 24 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2},$$

Условие устойчивости не выполняется, при этом

$$\frac{\varphi_3^{\text{факт}} - \varphi_2^{\text{факт}}}{\varphi_2^{\text{факт}}} \cdot 100\% = \frac{0,167 - 0,256}{0,256} \cdot 100\% = 34,7\% > 5\%.$$

В четвертом приближении принимаем

$$\varphi_4 = \frac{\varphi_3^{\text{факт}} + \varphi_2^{\text{факт}}}{2} = 0,211$$

Требуемая площадь поперечного сечения

$$A_4 \geq \frac{N}{R_y \varphi_4} = \frac{450}{24 \cdot 0,211} = 88,6 \text{ см}^2$$

По сортаменту (ГОСТ 8239-89) подходит двутавр № 50 с фактической площадью

$$A^{\text{факт}} = 100 \text{ см}^2,$$

тогда $i_{x4} = 3,23 \text{ см}$, $i_{y4} = 19,9 \text{ см}$, принимаем минимальное значение из показателей гибкости в двух плоскостях $i_4 = \min(i_{x4}, i_{y4}) = 3,23 \text{ см}$.

Максимальная гибкость

$$\lambda_4 = \frac{2 \cdot 300}{3,23} = 186,$$

Условная гибкость

$$\bar{\lambda}_4 = \lambda_4 \sqrt{\frac{R_y}{E}} = 186 \sqrt{\frac{24}{2,06 \cdot 10^5}} = 6,34.$$

По таблице 10.3 методом интерполяции определяем фактический коэффициент продольного изгиба

$$\varphi_4^{\text{факт}} = 0,194,$$

Проверяем условие устойчивости (10):

$$\sigma_4 = \frac{450}{0,194 \cdot 100} = 23,2 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} < R_y = 24 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2},$$

Разница в значениях допускаемого и максимального напряжений в сечении конструкции составляет

$$\frac{24 - 23,2}{24} \cdot 100\% = 3,3\%.$$

Подбор сечения можно считать законченным, так как условие по разнице коэффициентов продольного изгиба в 5 % не всегда выполняется ввиду ограничения номенклатуры сортамента.

Ответ: для обеспечения устойчивости принимаем двутавр № 50 по ГОСТ 8239-89.

10.7 Продольно-поперечный изгиб

При расчете строительных конструкций часто встречаются случаи, когда в поперечном сечении элемента одновременно действуют продольная сила и поперечная нагрузка. Такой вид нагружения называется *продольно-поперечным изгибом* (рисунок 10.7).

В этом случае изгибающий момент создается не только поперечной нагрузкой M_q , но и продольной силой P , момент которой равен Py . Ввиду малости деформаций полагают, что M_q не зависит от прогиба и величины продольной силы. Дифференциальное уравнение упругой линии можно записать

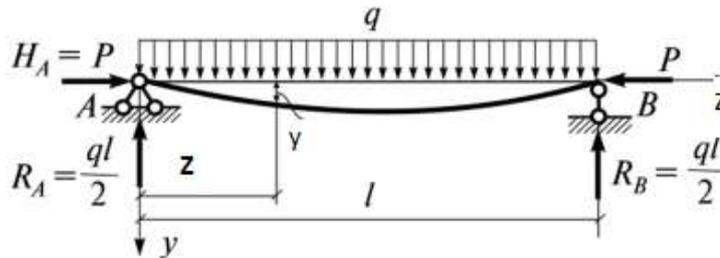


Рисунок 10.7 - Продольно-поперечный изгиб

$$EIy'' = -Py + M_q \quad (10.21)$$

Введем обозначение

$$k^2 = \frac{P}{EI}$$

где k - аргумент сложного изгиба.

Тогда уравнение примет вид

$$y'' + k^2y = \frac{M_q}{EI} \quad (10.22)$$

Решение дифференциального уравнения из математики

$$y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + y_{\text{ч.р.}}$$

$y_{\text{ч.р.}}$ - частное решение зависит от нагрузки.

Для схемы, представленной на рисунке 10.7, можно записать

$$EIy'' = \frac{qlz}{2} - \frac{qz^2}{2} - Py$$

Частное решение

$$y_{\text{ч.р.}} = \frac{q}{2EI k^2} \left(\frac{2}{k^2} + lz - z^2 \right).$$

Тогда уравнение упругой линии запишется в виде

$$y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + \frac{q}{2EI k^2} \left(\frac{2}{k^2} + lz - z^2 \right).$$

Постоянные C_1 и C_2 определяют из граничных условий: прогиб y на опорах равен нулю.

В итоге уравнение упругой линии и изгибающего момента для продольно-поперечного изгиба в случае нагружения поперечной равномерно-распределенной нагрузкой

$$y = \frac{q}{EI k^4} \left(-(1 - \cos kl) \frac{\sin kz}{\sin kl} + 1 - \cos kz + \frac{k^2}{2} (lz - z^2) \right) \quad (10.23)$$

$$M = EIy'' = \frac{q}{k^2} \left((1 - \cos kl) \frac{\sin kz}{\sin kl} + \cos kz - 1 \right) \quad (10.24)$$

Наибольший изгибающий момент в середине пролета равен

$$M_{\text{max}} = \frac{q}{k^2} \frac{1 - \cos \frac{kl}{2}}{\cos \frac{kl}{2}} \quad (10.25)$$

Для более сложных форм загрузки, тем более несимметричной, строгое решение усложняется, поэтому используют более простой прием – считают прогибы с учетом сжимающей силы f и без учета f_q .

$$EIy'' = EIM_q - Py \quad (10.26)$$

Форма упругой линии и y_q в обоих случаях близка к синусоиде, поэтому можно записать

$$y = f \sin \frac{\pi z}{l} \quad \text{и} \quad y_q = f_q \sin \frac{\pi z}{l}, \quad (10.27)$$

где f и f_q - прогибы в середине пролета.

Моменты также можно записать

$$EIf \frac{\pi^2}{l^2} = EIf_q \frac{\pi^2}{l^2} + Pf$$

Соотношение прогибов равно

$$f = \frac{f_q}{1 - \frac{P}{P_{cr}}}. \quad (10.28)$$

Так как моменты пропорциональны прогибам, очевидно

$$M = \frac{M_q}{1 - \frac{P}{P_{cr}}}. \quad (10.29)$$

Для разных видов загрузки P_{cr} имеет различные значения.

(Подбор сечения в приведенном примере выполнен классическим методом итераций, но можно использовать метод подбора. Если в первом приближении получается, что коэффициент продольного изгиба значительно меньше принятого, можно во втором приближении задать его значение с некоторым шагом к полученному, например, 0,2 вместо 0,118. Это позволяет уменьшить число итераций. По мере приобретения опыта подобных расчетов можно самостоятельно определять подходящий метод.)

Справочные материалы для расчетов устойчивости сжатых стержней

Таблица 10.1 - Коэффициенты расчетной (приведения) длины μ

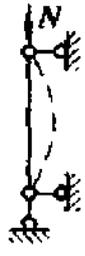
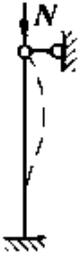
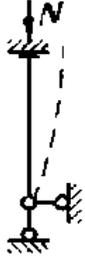
Вид материала	Схема закрепления стержня и вид нагрузки					
						
сталь	1,0	0,7	0,5	2,0	1,0	2,0
дерево	1,0	0,8	0,65	2,2	1,0	2,2

Таблица 10.2 - Типы поперечных сечений, определяющих условную гибкость

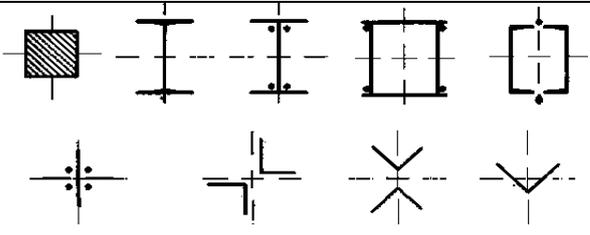
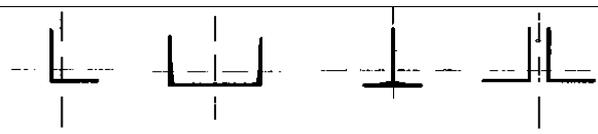
Обозначение	Форма
a	
b	
c	
Примечание. Для прокатных двутавров высотой свыше 500 мм при расчете на устойчивость в плоскости стенки следует принимать тип сечения а.	

Таблица 10.3 - Коэффициенты продольного изгиба

Условная гибкость λ	Коэффициенты $\varphi \cdot 10^3$ для типа сечения			Условная гибкость λ	Коэффициенты φ для типа сечения		
	a	b	c		a	b	c
0,4	999	998	992	5,4	261		255
0,6	994	986	950	5,6	242		240
0,8	981	967	929	5,8		226	
1,0	968	948	901	6,0		211	
1,2	954	927	878	6,2			
1,4	938	905	842	6,4		198	
1,6	920	881	811	6,6			
1,8	900	855	778	6,8		186	
2,0	877	826	744	7,0			
2,2	851	794	709	7,2		174	
2,4	820	760	672	7,4			
2,6	785	722	635	7,6		164	
2,8	747	683	598	7,8			
3,0	704	643	562	8,0		155	
3,2	660	602	526	8,5			
3,4	615	562	492	9,0		147	
3,6	572	524	460	9,5			
3,8	530	487	430	10,0		139	
						132	

4,0	475	453	401	10,5	125
4,2	431	421	375	11,0	119
4,4	393	392	351	11,5	105
4,6	359	359	328	12,0	094
4,8	330	330	308	12,5	
5,0	304	304	289	13,0	
5,2	281	281	271	14,0	

Примечание. Значения коэффициентов φ в таблице увеличены в 1000 раз.

Для промежуточных значений условной гибкости коэффициент продольного изгиба определяется линейной интерполяцией. Для всех типов сечений при $\lambda < 0,4$ коэффициент $\varphi = 1$.

Таблица 10.4 - Коэффициенты для расчета по формуле Ясинского-Тетмайера

Материал	a, МПа	b, МПа	λ_0	λ
Сталь Ст2	264	0,70	60	105
Сталь Ст3	310	1,14	61	100
Сталь Ст4, 20	328	1,15	60	96
Сталь Ст5, 30	464	3,26	60	90
Сталь 40	321	1,16	60	90
Сталь 45	449	1,67	52	85
Сталь С235	295	1,00	60	102
Сталь С275	345	1,10	63	91
Дюралюминий	406	1,83	30	53
Сосна, ель	29,3	0,194	-	70

Таблица 10.5 - Модули упругости некоторых материалов

Материал	Модуль упругости E, МПа
Сталь углеродистая	206000
Сталь легированная	210000
Чугун серый, белый	115000-160000
Чугун ковкий	155000
Дюралюминий катанный	71000
Древесина вдоль волокон	10000
Древесина поперек волокон	400

Контрольные вопросы:

- 10.1. В чем заключается явление потери устойчивости сжатого стержня?
- 10.2. Какая сила называется критической?
- 10.3. По какой формуле рассчитывается критическая сила для стержня большой гибкости?
- 10.4. Что произойдет с величиной критической силы, если длину стержня увеличить в три раза?
- 10.5. Что называется гибкостью стержня?
- 10.6. Каковы пределы применимости формулы Эйлера?
- 10.7. Зависит ли величина критической силы от условий закрепления стержня? Как это учитывается в расчетах?

- 10.8. По какой формуле рассчитывается критическое напряжение для стержней малой и средней гибкости?
- 10.9. Запишите условие устойчивости сжатого стержня.
- 10.10. Расскажите последовательность решения проектировочной задачи (подбор поперечного сечения) из условия устойчивости.

Тема 11. Динамическое нагружение. Удар. Коэффициент динамичности

Цель: знать методы и способы оценки прочности, жёсткости и устойчивости элементов строительных конструкций, в т.ч. с использованием прикладного программного обеспечения.

Ключевые вопросы:

- 11.1 Понятие динамического нагружения.
- 11.2 Ударная нагрузка
- 11.3 Циклическое нагружение
- 11.4 Определение динамического коэффициента при ударе (без учета массы ударяемой системы)

Методические указания

Ранее мы рассматривали напряженное состояние строительных конструкции под действием статических сил, когда скорость нарастания деформаций от статической нагрузки невелика, а потому можно пренебречь возникающими при этом силами инерции.

Динамические явления оказывают влияние и могут менять условия работы строительных конструкций.

11.1 Динамическое нагружение

Динамическое нагружение возникает при приложении быстро возрастающих усилий или в случае ускоренного движения исследуемого тела. В таких случаях необходимо учитывать силы инерции и возникающее движение масс системы.

Динамические нагрузки можно подразделяются на ударные и повторно-переменные.

Ударная нагрузка (удар) – нагружение, при котором ускорения частиц тела резко изменяют свою величину за очень малый промежуток времени (внезапное приложение нагрузки). Хотя удар и относится к динамическим видам нагружения, в ряде случаев при расчете на удар силами инерции пренебрегают.

Повторно-переменное (или циклическое) нагружение – нагрузки, меняющиеся во времени по величине, а в некоторых случаях и по знаку.

Таким образом, задачи на динамическое нагружение можно классифицировать следующим образом:

- 1) задачи с учетом сил инерции (силы инерции не зависят от свойств и деформаций системы);
- 2) задачи на циклическое нагружение и колебания;

3) расчеты на ударную нагрузку.

Общий метод расчета на динамическую нагрузку основан на принципе Д'Аламбера, согласно которому всякое движущееся тело в любой момент времени можно рассматривать, как находящееся в состоянии равновесия под действием внешних сил (включая опорные реакции) и сил инерции.

Сила инерции равна произведению массы тела на ускорение и направлена в сторону, противоположную ускорению.

Принцип Д'Аламбера является одним из важнейших общих принципов динамики несвободных материальных систем, который превращая динамические задачи в статические, значительно упрощает их решения. Следовательно, когда известны силы инерции, то без ограничений рекомендуется применять метод сечений и для определения внутренних усилий использовать уравнения равновесия статики.

В случаях, когда определение сил инерции затруднительно, для расчета динамических напряжений и деформаций используется закон сохранения энергии.

В этом методическом пособии не рассматриваются методы решения динамических задач при постоянном ускорении движущегося тела (ускорение или задается, или определяется по законам кинематики твердого тела), при периодически меняющихся по величине и направлению ускорения и внешней нагрузке ввиду ограниченного времени для изучения дисциплины.

Усталостное разрушение одно из самых распространенных. Происходит в большинстве случаев при напряжениях много меньше предела упругости (малоцикловая усталость). В этом состоит главная опасность усталостного разрушения. Из-за сложности явления процесс усталостного разрушения еще до конца не понят и не имеет аналитического описания. Методики расчетов построены на основе экспериментальных исследований ограниченного круга металлов и дают удовлетворительные результаты только для этих материалов в пределах установленных в эксперименте ограничений и принятых гипотез. Поэтому эти вопросы изучаются на специальных дисциплинах механики деформируемого тела, таких как Усталость», «Вибрация».

11.2 Удар

Нагрузки, не удовлетворяющие условиям плавности нагружения, называются **ударными**.

Физические условия разрушения при ударной нагрузке сильно отличаются от статических. В условиях далеких от разрушения статическую и ударную нагрузки можно сравнивать по их деформирующему эффекту, считая, что равные деформации есть признак эквивалентности нагружения.

Из повседневного опыта известно, что при падении груза на балку прогиб будет больше, чем просто от веса груза. Почему это происходит?

Пусть груз падает на балку с высоты H (рисунок 11.1). При соприкосновении с балкой груз имеет скорость

$$V = \sqrt{2qH}.$$

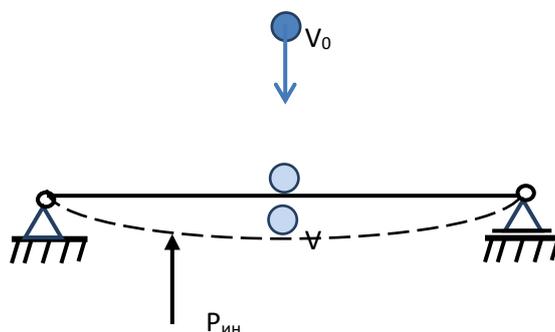


Рис. 11.1 – Расчетная схема динамического нагружения

За очень малый промежуток времени соударения скорость уменьшается до нуля. Приближенно вычислим среднюю величину ускорения

$$w = \frac{V_K - V_0}{t} = \frac{\sqrt{2qH}}{t} \quad 11.1$$

Скорость направлена вниз, ускорение будет направлено вверх, так как движение замедляется. Время соударения примем равным $0,001$ сек, а так как эта величина стоит в знаменателе, ускорение будет велико. При наличии ускорения всегда есть сила инерции, которая в данном случае будет тоже велика. Сила инерции противоположна ускорению, то есть, направлена вниз. В момент удара к весу груза добавляется сила инерции, поэтому ударная сила в несколько раз больше статической. Соответственно, деформация от ударной нагрузки в несколько раз больше. Сложность расчета состоит в том, что вычислить ударную силу как сумму $P+P_{ин}$ не удастся, потому что ускорение переменное и закон его изменения не всегда поддается определению. Расчет проводится по балансу энергий.

Расчет на удар сводится к статическому введением **динамического коэффициента**, который указывает, во сколько раз при ударе деформация и сила больше чем при статическом приложении равного груза.

11.3 Определение динамического коэффициента при ударе (без учета массы ударяемой системы)

Принимаем упрощающие допущения:

1. Удар абсолютно неупругий, т.е. после соударения падающий груз и ударяемая система движутся вместе с одинаковой скоростью.
2. Масса ударяемой системы намного меньше веса падающего груза.
3. При ударе справедлив закон Гука.

Вычислим динамический коэффициент для случая продольного и поперечного удара (рисунок 11.2).

Обозначим: P — вес груза

H —высота падения

V —скорость в момент удара

Δ_d —максимальное перемещение центра удара.

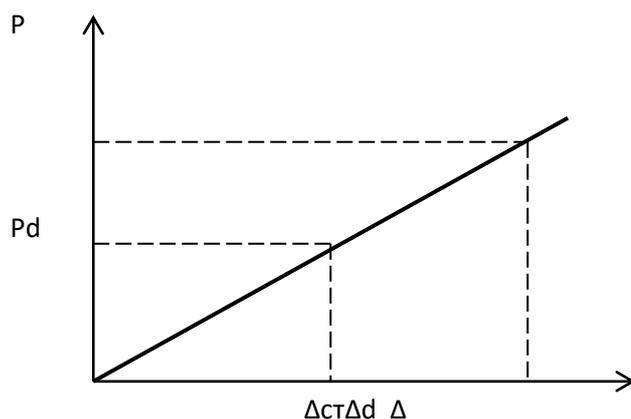


Рисунок 11.2 - Диаграмма деформирования в упругой зоне

На диаграмме (P, Δ) закону Гука соответствует прямая линия. Из справедливости закона Гука следует

$$\frac{P_d}{P_{ст}} = \frac{\Delta_d}{\Delta_{ст}} = K_d,$$

$$P_d = P_{ст} \frac{\Delta_d}{\Delta_{ст}} \quad 11.2$$

При ударе кинетическая энергия падающего груза переходит в потенциальную энергию упругой деформации системы $T=U$.

Вычислим T и U . По закону изменения кинетической энергии можно записать $T - T_0 = 0$.

Падение происходит из состояния покоя, поэтому

$$T_0 = 0, \quad T=A;$$

Работа силы тяжести равна произведению силы на путь

$$P(H + \Delta_d) = A;$$

Таким образом, получаем

$$T = P(H + \Delta_d).$$

При вычислении потенциальной энергии деформации упругой системы предполагается, что при динамической нагрузке она вычисляется, как и при статической, а следовательно равна площади диаграммы(P,Δ)

$$U = \frac{1}{2} P_d \Delta_d = A;$$

Приравниваем энергии T=U

$$P(H + \Delta_d) = \frac{1}{2} P \frac{\Delta_d^2}{\Delta_{cm}};$$

$$2H\Delta_{cm} + 2\Delta_{cm}\Delta_d = \Delta_d^2;$$

$$\Delta_d = \Delta_{cm} + \sqrt{\Delta_{cm}^2 + 2H\Delta_{cm}} = \Delta_{cm} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{cm}}} \right] = \Delta_{cm} k_d.$$

Формула для определения динамического коэффициента при ударе

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{cm}}}. \quad (11.3)$$

Здесь необходимо отметить, что скорость деформирования заметно влияет на механические свойства материалов. У всех материалов с увеличением скорости деформации повышаются такие характеристики прочности, как предел текучести и предел прочности, и снижаются характеристики пластичности:

- относительное удлинение и относительное сужение.

– материал становится прочнее и хрупче, упругие характеристики (модуль Юнга и коэффициент Пуассона) практически не изменяются.

Такое охрупчивание материала крайне нежелательно и опасно, поэтому при расчетах на прочность при динамическом действии сил допускаемые напряжения принимаются меньше, чем в статических условиях нагружения.

Пример. На двутавровую балку с высоты H падает груз F.

Требуется:

- 1) Определить наибольшие нормальные напряжения в балке;
- 2) Вычислить наибольшие напряжения в балке при условии, что правая опора заменена пружиной, податливость которой (т.е. осадка от груза 1 кН) равна α;
- 3) Сравнить полученные результаты.

Дано: номер двутавра 36; L=3м; F=11 кН; α=3 мм/кН; H=L/5

Решение.

Балка подвергается поперечному (изгибающему) удару.

Условие прочности балки:

$$\sigma_{dmax} = \sigma_{stmax} k_d \leq R$$

Наибольшее напряжение в балки от статического действия груза:

$$\sigma_{\text{stmax}} = \frac{M_x}{W_x}$$

где M_x – максимальный момент в сечении балки (определяется по эюре);
 W_x – момент сопротивления сечения при изгибе, для двутавра № 36: $W_x=743\text{см}^3$
(определяется по таблицам сортамента прокатной стали).

Построим эюру изгибающих моментов. Определим реакции опор:

$$\Sigma m_C = -R_A L + 0.8FL = 0, \text{ откуда}$$

$$R_A = 0.8F = 0.8 \times 11 = 8.8 \text{ кН}$$

$$\Sigma m_A = R_C L - 0.2FL = 0, \text{ откуда}$$

$$R_C = 0.2F = 0.2 \times 11 = 2.2 \text{ кН}$$

Балка имеет два участка. Обозначим z_i расстояние от левого (правого) конца балки до некоторого её сечения. Найдём изгибающие моменты в характерных сечениях балки.

$$M_A = 0; \quad M_B^л = 0.2R_A L = 0.2 \times 8.8 \times 3 = 5.28 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_B^п = 0.8R_C L = 0.8 \times 2.2 \times 3 = 5.28 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_C = 0.$$

Эюра изгибающих моментов построена на рисунке, со стороны растянутых волокон.

Тогда, при $M_x = 5.28 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (в сечении В) наибольшее напряжение в балке от статического действия груза:

$$\sigma_{\text{stmax}} = \frac{5280}{743 \times 10^{-6}} = 7.1 \times 10^6 \text{ Па} = 7.1 \text{ МПа}$$

Для определения динамического коэффициента вычислим величину прогиба в точке приложения груза от статического действия его.

Воспользуемся методом начальных параметров. Начало отсчёта абсциссы z примем на опоре А, где $y_0 = 0$. В точке удара:

$$EJ_{y_B} = EJ_{y_0} + EJ \nu_0 \cdot 0.2L + \frac{R_A (0.2L)^3}{6}$$

Неизвестный начальный параметр ν_0 найдём, составив уравнения для сечения С, где $y_C = 0$:

$$EJ_{y_C} = EJ_{y_0} + EJ \nu_0 L + \frac{R_A L^3}{6} - \frac{(0.8L)^3 F}{6} = 0$$

$$\text{Откуда } : \nu_0 = \frac{(0.8L)^3 F}{6EJL} - \frac{R_A L^3}{6EJL} = \frac{L^2 (0.512F - R_A)}{6EJ}$$

Тогда, при найденном выражении для ν_0 , получим:

$$EJ_{y_B} = \frac{L^2 (0.512F - R_A)}{6EJ} \cdot 0.2EJL + \frac{R_A (0.2L)^3}{6} = 0.2L^3 \cdot \frac{0.512F - R_A}{6} + \frac{R_A \cdot (0.2L)^3}{6} =$$

$$EJ_{y_B} = 0.2 \times 3^3 \times \frac{0.512 \times 11 \times 10^3 - 8.8 \times 10^3}{6} + \frac{0.008 \times 3^3 \times 8.8 \times 10^3}{6} = -2534.4$$

$$\text{Откуда } y_B = -\frac{2534.4}{EJ} = -\frac{2534.4}{2 \times 10^{11} \times 13380 \times 10^{-8}} = -9.5 \times 10^{-5} \text{ м} = -0.095 \text{ мм}$$

где $E = 2 \times 10^{11} \text{ Па}$ – модуль упругости; $J = J_x = 13380 \text{ см}^4$ – момент инерции (по таблице сортамента прокатной стали).

Находим динамический коэффициент:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_B}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 0.2 \times 3}{9.5 \times 10^{-5}}} = 113.4$$

Находим динамическое напряжение :

$$\sigma_{\text{dmax}} = 7.1 \times 113.4 = 805.14 \text{ МПа}$$

Находим прогиб от динамического действия груза F в точке удара:

$$y_d = k_d y_{\text{ст}} = k_d y_B = 113.4 \times 0.095 = 10.8 \text{ мм.}$$

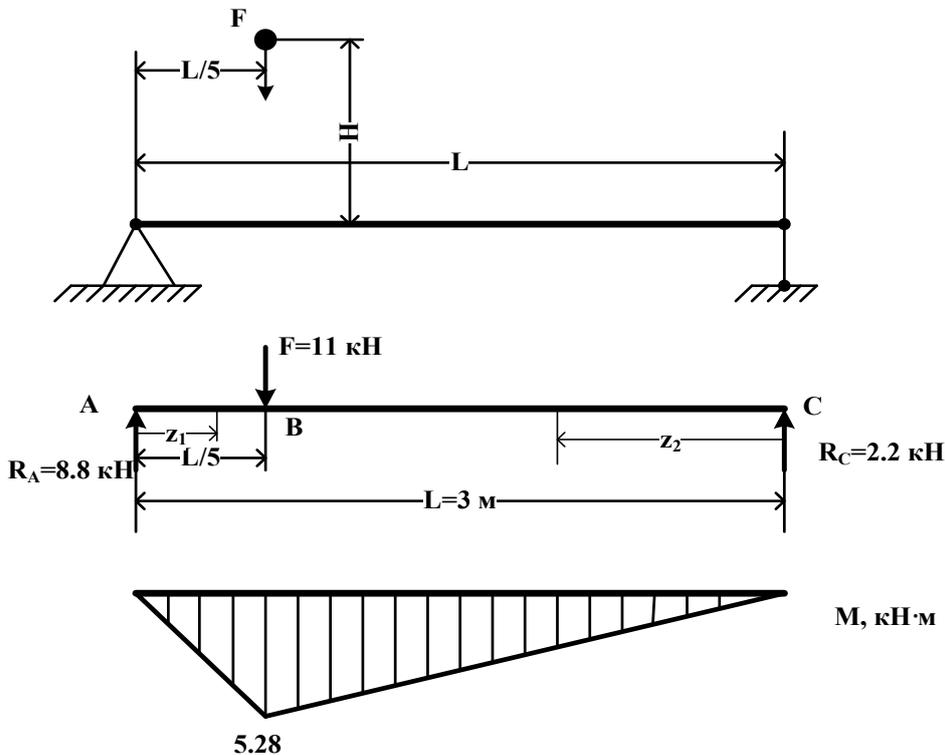


Рисунок 11.3 – Построение эпюры моментов балки при динамическом ударе

Вычислим наибольшее напряжение в балке при условии, что правая опора заменена пружиной.

В случае опирания правого конца балки на пружину при действии на балку статической силы F пружина под влиянием опорной реакции $R_C = 2.2 \text{ кН}$, укоротится на длину $a = R_C \alpha = 2.2 \times 3 = 6.6 \text{ мм}$.

Правый конец балки при этом опустится на величину a, а сечение B балки – на величину $y_{\text{вст}} = 0.2a = 0.2 \times 6.6 = 1.32 \text{ мм}$.

Полное вертикальное перемещение от статического действия силы F в сечении под силой (в сечении B) равно сумме величин прогиба, найденной при расчёте балки без пружины, и перемещения, вызванного сжатием пружины, т.е. :

$$\Delta_{\text{ст}} = y_B + y_{\text{вст}} = 0.095 + 1.32 = 1.415 \text{ мм.}$$

Находим динамический коэффициент:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 0.2 \times 3}{1.415 \times 10^{-3}}} = 30.1$$

Находим динамическое напряжение:

$$\sigma_{\text{dmax}} = 7.1 \times 30.1 = 213.71 \text{ МПа}$$

Находим прогиб от динамического действия груза F в точке удара:

$$y_d = k_d y_{st} = k_d \Delta_{ст} = 30.1 \times 1.415 = 42.6 \text{ мм.}$$

Таким образом, установка пружины под правым концом балки уменьшила динамические напряжения в
 $805.14 / 213.71 = 3.8$ раза.

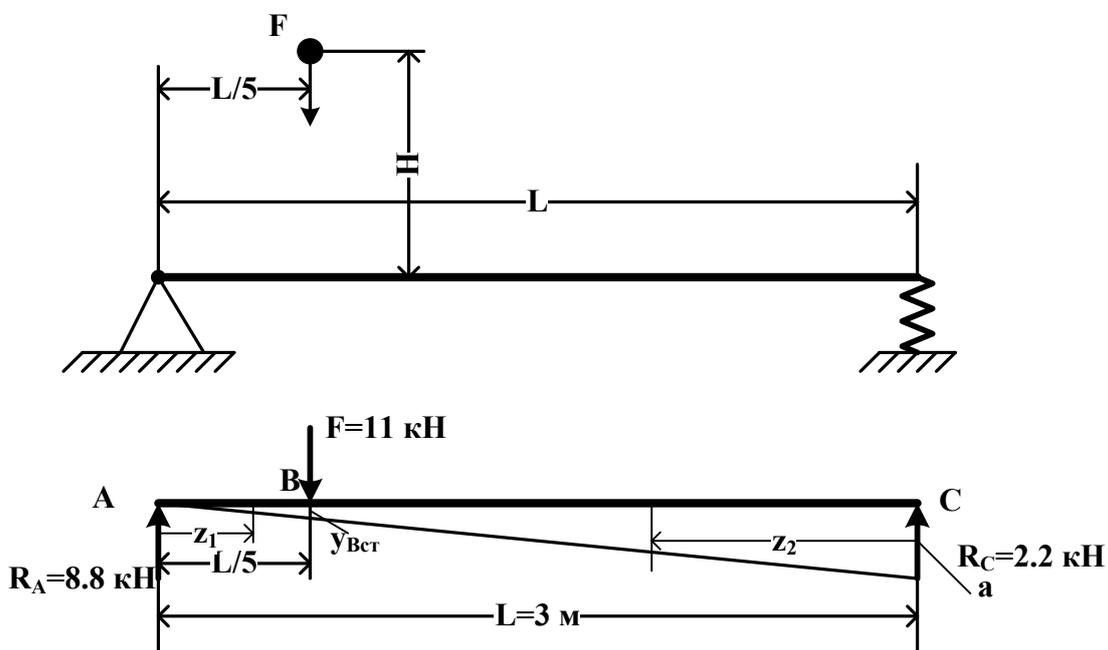


Рисунок 11.4 – Расчет усилий в балке с податливой опорой при динамическом ударе

Контрольные вопросы:

- 1 1.1. Какие нагрузки называются динамическими?
- 1 1.2. Какое явление называется ударом?
- 1 1.3. Что называется динамическим коэффициентом?
- 1 1.4. Чему равен динамический коэффициент при равноускоренном движении?
- 1 1.5. От чего зависит динамический коэффициент при продольном ударе?
- 1 1.6. Как изменятся напряжения при продольном ударе в случае увеличения площади поперечного сечения в 3 раза?

Список литературы

1. Кривошапко, С. Н. Сопротивление материалов. Теория и практикум: учеб. пособие / С. Н. Кривошапко ; рец.: С. И. Трушин, С. П. Иванов ; РУДН. - Москва: Юрайт, 2014. - 413 с. – ISBN 978-5-9916-4199-9.
2. Исаченко, В. В. Сопротивление материалов: рук.к решению задач: учеб. пособие / В. В. Исаченко, М. И. Мартиросов, В. И. Щербаков; Федер. агентство по образованию; НИЯУ "МИФИ. - Москва: [НИЯУ "МИФИ"], 2010 - . Ч. 1. - 288 с. – ISBN 978-5- 7262-12 03-6.
3. Сборник задач по сопротивлению материалов: учеб. пособие / Б. Е. Мельников [и др.]; ред. Л. К. Паршин. - Санкт-Петербург: Иван Федоров, 2003. - 431 с. – ISBN 5-93051-028-8.
4. Александров, А. В. Сопротивление материалов: учеб.для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – М.: Высш. шк., 2003. – 560 с.
5. Горшков, А. Г. Сопротивление материалов: учеб. пособие / А. Г. Горшков, В. Н. Трошин, В. И. Шалашилин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 544 с.
6. Сопротивление материалов: учеб пособие / Н. А. Костенко [и др]. – М.: Высш. шк., 2004. – 430 с.
7. СП 16.13330.2011. "Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81*".

Локальный электронный методический материал

ЖАННА ГРИГОРЬЕВНА КОНЦЕДАЕВА

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Редактор И. Голубева

Уч.-изд. л. 8,8. Печ. л. 8,8.

Издательство федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Калининградский государственный технический университет»,
236022, Калининград, Советский проспект, 1