Федеральное агентство по рыболовству
БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»
**Калининградский морской рыбопромышленный колледж**

Утверждаю
Заместитель начальника колледжа
по учебно-методической работе
А.И.Колесниченко

Подписано цифровой подписью: Колесниченко Андрей Игоревич
Причина: Я утвердил этот документ
Дата: 14 Март 2025 г. 12:07:15
DN: E=uc_fk@roskazna.ru, S=77 Москва, ИНН ЮЛ=7710568760, ОГРН=1047797019830, STREET="Большой Златоустинский переулок, д. 6, строение 1", L=г. Москва, C=RU, O=Казначейство России, CN=Федеральное казначейство

# ЕН.01 МАТЕМАТИКА

Методическое пособие для выполнения практических занятий
по специальности

**38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)**

**МО–38 02 01-ЕН.01.ПЗ**

| | |
|---|---|
| РАЗРАБОТЧИК | Исаева О.А. |
| ЗАВЕДУЮЩИЙ ОТДЕЛЕНИЕМ | Судьбина Н.А. |
| ГОД РАЗРАБОТКИ | 2024 |
| ГОД ОБНОВЛЕНИЯ | 2025 |

## Содержание

## Введение

Учебно-методическое пособие составлено в соответствии с рабочей программой дисциплины ЕН.01«Математика» по специальности 38.02.01 «Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)».

Рабочей программой дисциплины предусмотрено 24 академических часа на практические занятия.

Целью их проведения является закрепление теоретических знаний. Наряду с формированием умений и навыков в процессе практических занятий обобщаются и углубляются теоретические положения, вырабатывается способность применять теоретические знания на практике.

Выполнение практических заданий направлено на формирование у обучающихся следующих элементов компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде;

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

Перед проведением практических занятий обучающиеся обязаны проработать соответствующий материал, уяснить цель занятия, ознакомиться с содержанием и последовательностью его проведения, а преподаватель проверить их знания и готовность к выполнению задания.

После каждого практического занятия проводится защита отчета, как правило, на следующем практическом занятии перед выполнением последующей работы.

На защите отчета обучающийся должен знать теорию по данной теме, пояснить, как выполнялась работа в соответствии с основными требованиями к знаниям и умениям по данной теме рабочей программы.

## Перечень практических занятий

| № п/п | Практическое занятие | Количество часов |
|---|---|---|
| **Раздел I Элементы линейной алгебры** | | |
| Тема 1.1 Матрицы, операции над матрицами | | |
| 1 | «Действия над матрицами» | 4 |
| Тема 1.2 Решение систем линейных уравнений | | |
| 2 | «Методы решения систем линейных уравнений» | 4 |
| **Раздел III Дифференциальное исчисление** | | |
| Тема 3.2 Приложение производной | | |
| 3 | Исследование функций с помощью производной. Построение графиков функций | 4 |
| **Раздел IV Интегральное исчисление** | | |
| Тема 4.2 Определённый интеграл | | |
| 4 | «Интегральное исчисление». | 4 |
| **Раздел V Комплексные числа.** | | |
| **Тема 5.1 Комплексные числа** | | |
| 5 | «Комплексные числа». Построение геометрической модели комплексного числа. | 4 |
| **Раздел VI Теория вероятности и математическая статистика** | | |
| Тема 6.1 Теория вероятности и математическая статистика. | | |
| 6 | Реализация задач математической статистики. | 4 |
| | **ИТОГО** | **24** |

# РАЗДЕЛ 1 ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

## Практическое занятие №1 Действия над матрицами

*Цель занятия:*

– закрепить навыки выполнения действий над матрицами;

Работа направлена на формирование компетенций ОК 01-05

*Используемая литература: [2, гл.11, § 11.1-11.4]*

*Исходные материалы и данные:*

**Матрицы (и соответственно математический раздел - матричная алгебра)** имеют важное значение в прикладной математике, так как позволяют записать в достаточно простой форме значительную часть математических моделей объектов и процессов. Термин "матрица" появился в 1850 году. Впервые упоминались матрицы еще в древнем Китае, позднее у арабских математиков.

Матрицей $\mathbf{A=A_{mn}}$ порядка m*n называется **прямоугольная таблица чисел, содержащая m - строк и n - столбцов**.

$$A = A_{mn} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = B_{mn} = (b_{ij}),\ C = C_{mn} = (c_{ij})$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \\ a_{21}\ a_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы $\mathbf{a_{ij}}$**,** у которых i=j, называются диагональными и образуют **главную диагональ**.

Для квадратной матрицы (m=n) главную диагональ образуют элементы $a_{11}$, $a_{22}$,..., $a_{nn}$ .

**Равенство матриц.**

**A=B**, если порядки матриц **A** и **B** одинаковы и $\mathbf{a_{ij}=b_{ij}}$ **(i=1,2,...,m; j=1,2,...,n)**

**Действия над матрицами.**

1. Сложение матриц - поэлементная операция

$$A_{mn}+B_{mn}=C_{mn} = \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} \;\; a_{12}+b_{12} \dots a_{1n}+b_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}+b_{m1} \;\; a_{m2}+b_{m2} \dots a_{mn}+b_{mn} \end{vmatrix}$$

2. Вычитание матриц - поэлементная операция

$$A_{mn}-B_{mn} = \begin{vmatrix} a_{11}-b_{11} \;\; a_{12}-b_{12} \dots a_{1n}-b_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}-b_{m1} \;\; a_{m2}-b_{m2} \dots a_{mn}-b_{mn} \end{vmatrix}$$

3. Произведение матрицы на число - поэлементная операция

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

4. Умножение **A*B** матриц по правилу **строка на столбец** (число столбцов матрицы A должно быть равно числу строк матрицы B)

**$A_{mk}$*$B_{kn}$=$C_{mn}$** причем каждый элемент **$c_{ij}$** матрицы **$C_{mn}$** равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B , т.е.

$$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}=\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}$$

*Например,*

$$C_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+\dots+a_{1n}b_{n1}$$

$$C_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}+\dots+a_{1n}b_{n2}$$

Покажем операцию умножения матриц на примере

$$Пусть\ A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{33} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{23} * B_{33} = C_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1*(-1)+0*5+2*(-2) & 1*0+0*1+2*0 & 1*1+0*4+2*1 \\ 3*(-1)+1*5+0*(-2) & 3*0+1*1+0*0 & 3*1+1*4+0*1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

5. Возведение в степень

$$A^m = \underbrace{A * A * \ldots * A}_{m\ раз}$$

m>1 целое положительное число. A - квадратная матрица (m=n) т.е. актуально только для квадратных матриц

6. Транспонирование матрицы А. Транспонированную матрицу обозначают $A^T$ или A'

$$Если\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},\ то$$

$$A^T = A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Строки и столбцы поменялись местами

**Пример**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

**Виды матриц**

1. Прямоугольные: **m** и **n** - произвольные положительные целые числа

2. Квадратные: **m=n**

3. Матрица строка: **m=1**. Например, (1 3 5 7) - во многих практических задачах такая матрица называется вектором

4. Матрица столбец: **n=1**. Например

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

5. Диагональная матрица: **m=n** и **$a_{ij}$=0**, если **i≠j**. Например

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Единичная матрица: **m=n** и

$$E = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$т.е.\ \delta_{ij} = 0\ если\ i \neq j$$

$$\delta_{ij} = 1\ если\ i = j$$

7. Нулевая матрица: **$a_{ij}$=0, i=1,2,...,m**

**j=1,2,...,n**

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Треугольная матрица: все элементы ниже главной диагонали равны 0.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

9. Симметрическая матрица: **m=n** и **$a_{ij}$=$a_{ji}$**(т.е. на симметричных относительно главной диагонали местах стоят равные элементы), а следовательно **A'=A**

Например,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

*Содержание и порядок выполнения задания:*

Выполнить действия над матрицами:

| **I вариант** | **II вариант** | **III вариант** | **IV вариант** |
|---|---|---|---|
| **1) Найти сумму матриц:** | | | |
| $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 3 & -7 & -8 \end{pmatrix}$<br>$B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 4 & 2 & -9 \end{pmatrix}$ | $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & -7 \end{pmatrix}$<br>$B = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ | $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 12 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix}$<br>$B=\begin{pmatrix} -11 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ | $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$<br>$B = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -1 \\ -9 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ |
| **2) Найти разность матриц:** | | | |
| $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$<br>$B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ | $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$<br>$B = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ | $A = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}$<br>$B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$ | $A = \begin{pmatrix} -9 & 10 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$<br>$B = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -12 & -5 \end{pmatrix}$ |
| **3) Выполнить умножение матрицы на число**: | | | |
| $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -7 \\ 8 & -9 & 11 \\ 0 & -5 & 6 \end{pmatrix}$<br>Найти B = -3A | $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -7 \\ 8 & 4 & -7 \\ -9 & 5 & 3 \end{pmatrix}$<br>Найти B = 4A | $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -7 \\ 5 & 11 & -3 \end{pmatrix}$<br>Найти B = -6A | $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -11 & 8 & 4 \\ -13 & 0 & 9 \end{pmatrix}$<br>Найти B = 3A |
| **4) Найти произведение матриц:** | | | |
| $A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -6 & -3 \end{pmatrix}$<br>$B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -6 & -3 \end{pmatrix}$ | $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -5 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$<br>$B = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ | $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$<br>$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ | $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$<br>$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| **5) Транспонировать матрицу:** | | | |
| $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ | $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \\ -5 & -7 & -1 \end{pmatrix}$ | $A=\begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \\ 10 & 12 & -13 \end{pmatrix}$ | $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \\ 12 & 11 & 0 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ |

**Контрольные вопросы:**

1. Что называется матрицей?

2. Назовите виды матриц.
3. Как выполнить сложение матриц?
4. Как умножить матрицу на число?
5. Как выполнить умножение матриц?

## Практическое занятие №2 Методы решения систем линейных уравнений

*Цель занятия: Н*аучиться решать системы линейных уравнений по формулам Крамера и методом Гаусса;

Работа направлена на формирование компетенций ОК 01-05.

*Используемая литература:* [2, гл.12, § 12.1 - 12.5]

*Исходные материалы и данные:*

1. Внимательно изучить пример решения системы трёх линейных уравнений **по формулам Крамера.**

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x+4y+2z=5 \\ 5x-6y-4z=-3 \\ -4x+5y-3z=1 \end{cases}$$

Решение:

| Алгоритм | Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму |
|---|---|
| 1. Составить определитель системы: | $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & -6 & -4 \\ -4 & 5 & -3 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} -6 & -4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$ =3(18+20)-4(-15-16)+2(25-24)=114+124+2=240 |
| 2. Вычислить определитель Δx | $\Delta x=\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -3 & -6 & -4 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}=120$ |
| 3. Вычислить определитель Δy | $\Delta y=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & -3 \end{vmatrix}=180$ |
| 4. Вычислить определитель Δz | $\Delta z=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & -3 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix}=60$ |

| | |
|---|---|
| 5. Найти решение системы по формулам: X= $\frac{\Delta_x}{\Delta}$ ; У= $\frac{\Delta_y}{\Delta}$ ;Z= $\frac{\Delta_z}{\Delta}$ | $\frac{120}{240}=\frac{1}{2}$ $\frac{180}{240}=\frac{3}{4}$ $\frac{60}{240}=\frac{1}{4}$ X= ; У= ; Z= |
| 6. Записать ответ: | (0,5; 0,75; 0,25) |

Решить систему линейных уравнений **методом Гаусса**:

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=1 \\ 5x_1+3x_2-2x_3=2 \\ 3x_1+2x_2-3x_3=0 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Смотрим на левую верхнюю «ступеньку». Там у нас должна быть единица. В первом столбце единиц нет вообще, поэтому перестановкой строк ничего не решить. В таких случаях единицу нужно организовать с помощью элементарного преобразования. **К первой строке прибавляем вторую строку, умноженную на –1**. То есть, мысленно умножили вторую строку на –1 и выполнили сложение первой и второй строки, при этом вторая строка у нас не изменилась.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Теперь слева вверху –1, что нас вполне устроит. Кто хочет получить +1, может умножить первую строку на –1 (сменить у неё знак).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(2) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на 5. К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на 3.

(3) Первую строку умножили на –1. У третьей строки также сменили знак и переставили её на второе место, таким образом, на второй «ступеньке у нас появилась нужная единица.

(4) К третьей строке прибавили вторую строку, умноженную на 2.

(5) Третью строку разделили на 3.

Получили:

$$x_3 = 1$$

$$x_2 = 3$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + 3 - 1 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$$

Ответ: $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 1$.

*Содержание и порядок выполнения задания:*

| **I вариант** | **II вариант** | **III вариант** | **IV вариант** |
|---|---|---|---|
| **Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера и методом Гаусса. Сделать проверку корней** | | | |
| $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$ | $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 17. \end{cases}$ | $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -6 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$ | $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -3 \end{cases}$ |

**Контрольные вопросы:**

1. Как решить систему линейных уравнений по формулам Крамера?
2. В чём состоит принцип решения систем линейных уравнений методом Гаусса?

## РАЗДЕЛ 3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

### Практическое занятие №3 Исследование функций с помощью производной. Построение графиков функций

*Цель занятия:*

Закрепить навыки использования правил и формул дифференцирования функций, выполнения исследования функций с помощью производной и построения графиков по результатам исследования.

Работа направлена на формирование компетенций ОК 01-05

*Используемая литература: [1, гл. 2, § 2.1.10]*

*Исходные материалы и данные:*

Правила дифференцирования:

1. C’ = 0,

2. (u ± v)’ = u’ ± v’,

3. (u * v)’ = u’ * v + u * v’

4. (C * u)’ = C * u’,

5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u * v'}{v^2}$.

Основные формулы дифференцирования:

1. $(x^n)' = n\,x^{n-1}$,

2. (sinx)’ = cosx,

3. (cosx)’ = -sinx,

4. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,

5. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,

6. $(a^x)' = a^x * \ln a$,

7. $(e^x)' = e^x$,

8. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$,

9. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,

10. $(arctgx)' = \frac{1}{1-x^2}$,

11. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1-x^2}$,

12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Нахождение производной сложной функции:

y = g(u),

где u = f(x): $y_x' = g'(u) * f'(x)$ или $y_x' = y'_u * u'_x$.

1. Исследование функции на монотонность.

Если функция $y = f(x)$, $x \in (a; b)$, имеет положительную производную в каждой точке интервала $(a; b)$, то эта функция возрастает на интервале $(a; b)$.

Если функция $y = f(x)$, $x \in (a; b)$, имеет отрицательную производную в каждой точке интервала $(a; b)$, то эта функция убывает на интервале $(a; b)$.

2. Исследование функции на экстремум.

Необходимое условие существования экстремума:

Теорема Ферма: если точка $x_0$ является точкой экстремума функции $y = f(x)$ и в этой точке существует производная, то $f'(x_0) = 0$.

Достаточные условия существования экстремума: если производная $f'(x)$ при переходе через точку $x_0$ меняет знак с «+» на «-», то $x_0$ – точка максимума; если при переходе через точку $x_0$ производная меняет знак с «-» на «+», то $x_0$ – точка минимума. Если $f'(x)$ при переходе через точку $x_0$ не меняет знак, то в точке $x_0$ функция $f(x)$ не имеет экстремума.

3. Нахождение интервалов выпуклости и точек перегиба.

Если на интервале $(a; b)$ дважды дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет отрицательную (положительную) вторую производную, то график функции обращен выпуклостью вверх (вниз).

Необходимое условие существования точки перегиба: если функция $y = f(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно на интервале $(a;b)$ и точка $(x_0; f(x_0))$, где $x_0 \in (a; b)$ является точкой перегиба графика функции $f(x)$, то $f''(x_0) = 0$.

Достаточное условие существования точки перегиба: если функция $y = f(x)$,

$x \in (a; b)$, дважды дифференцируема на интервале $(a; b)$ и при переходе через

$x_0 \in (a; b)$ вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = x_0$ является точкой перегиба.

4. Асимптоты графика функции:

Прямая линия называется асимптотой графика функции $f(x)$, если расстояние от точки M, лежащей на графике, до этой прямой стремится к нулю при движении точки по графику в бесконечность.

Существуют три вида асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Прямая y = A называется горизонтальной асимптотой графика функции f(x) при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ ($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$).

Прямая y = kx + b (k ≠ 0) называется наклонной асимптотой графика функции y=f(x) при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx - b) = 0$, где $k = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$; b= $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx)$.

5. Общая схема исследования функций и построения графиков:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность и нечетность;

3) исследовать функцию на периодичность;

4) исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва;

5) найти асимптоты графика функции;

6) найти критические точки первого рода;

7) найти интервалы монотонности и экстремумы функции;

8) найти критические точки второго рода;

9) найти интервалы выпуклости и точки перегиба;

10) найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это возможно);

11) построить график функции.

*Содержание и порядок выполнения задания:*

Вариант № 1

1. Найти критические точки функции: $y=x^3-2x^2+x+3$.
2. Исследовать функцию на монотонность и экстремумы: $y=x^3+2x^2-7x-2$.
3. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции: $y=-x^3+5x^2$.
4. Выполнить исследование и построить график функции: $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2$.
5. Найти производную сложной функции: $y = (3x^6 - 7x + 2)^5$.

Вариант № 2

1. Найти критические точки функции: $y = x^3 - x^2 - x + 2$.
2. Исследовать функцию на монотонность и экстремумы: $y=2x^3- 3x^2 - 36x + 40$.
3. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции: $y=x^4 - 2x^3$.
4. Выполнить исследование и построить график функции: $y = - x^3 - x^2 + 5x$.

5. Найти производную сложной функции: $y = \sin(9x^2 - 3)$.

Вариант № 3

1. Найти критические точки функции: $y = 2x^3 - 10x^2 + 6x$.
2. Исследовать функцию на монотонность и экстремумы: $y = x^3 - x^2 - x + 3$.
3. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции: $y=2x^3 - 4x^2$.
4. Выполнить исследование и построить график функции: $y = 6x^4 - 4x^6$.
5. Найти производную сложной функции: $y = \ln(4 - 5x)$.

Вариант № 4

1. Найти критические точки функции: $y = x^3 + x^2 - 5x - 3$.
2. Исследовать функцию на монотонность и экстремумы: $y = x^3 + 6x^2 + 9x$.
3. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции: $y=x^4 + 3x^3$.
4. Выполнить исследование и построить график функции: $-\frac{x^3}{3} + 4x$.
5. Найти производную сложной функции: $y = e^{x^3 + 3x}$.

**Контрольные вопросы:**

1. Дать определение точек экстремума функции.
2. Как исследовать функцию на монотонность и экстремумы с помощью первой производной?
3. Как находятся интервалы выпуклости кривой и точки перегиба?
4. Что такое асимптоты графика функции? Как их найти?

## РАЗДЕЛ 4 ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

### Практическое занятие №4 Интегральное исчисление

*Цель занятия:*

– закрепить формулы интегрирования и основные приемы непосредственного интегрирования и способа подстановки, навыки вычисления определенного интеграла;

– уметь применять определенный интеграл для решения физических задач.

Работа направлена на формирование компетенций ОК 01-05

*Используемая литература: [1, гл.2, § 2.1.11, 2.1.12]*

*Исходные материалы и данные:*

Если функция F(x) – первообразная для функции f(x), то множество функций F(x) + C, где C – произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции f(x) и обозначается символом $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$;
2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$;
3. $\int dF(x) = F(x) + C$;
4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$;
5. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Таблица основных интегралов:

1. $\int 0 * dx = C$;
2. $\int 1 * dx = x + C$;
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ,n$\neq -1$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ (x ≠0);
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ (0 <a ≠ 1);
6. $\int e^x dx = e^x + C$;
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$;
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$;
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$;
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;
12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x + C$;

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$;

14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, a \neq 0$;

15. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$;

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$, $|x| < a$, $a \neq 0$.

1. Под непосредственным интегрированием понимают такой способ интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Примеры:

1.

$$\int \frac{3x^4 + 2x^2 - 3x + 7}{x^2}dx = 3\int \frac{x^4}{x^2}dx + 2\int \frac{x^2}{x^2}dx - 3\int \frac{x}{x^2}dx + 7\int \frac{dx}{x^2} = 3\int x^2dx + 2\int dx - 3\int \frac{dx}{x} + 7\int \frac{dx}{x^2} =$$

$$= 3 * \frac{x^3}{3} + 2x - 3\ln|x| - \frac{7}{x} + C = x^3 + 2x - 3\ln|x| - \frac{7}{x} + C;$$

2.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x * \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)dx}{\sin^2 x * \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x dx}{\sin^2 x * \cos^2 x} + \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x * \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$= \operatorname{tg}x - \operatorname{ctg}x + C$;

3.

$$\int \frac{dx}{4 + 3x^2} = \int \frac{dx}{3(x^2 + \frac{4}{3})} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{3} * \frac{\sqrt{3}}{2} * \operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{2} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{2} + C.$$

2. Способ подстановки (или замены переменной) заключается в следующем: заменяют новой переменной такую часть подынтегральной функции, при дифференцировании которой получается оставшаяся часть подынтегрального выражения (не считая постоянного множителя, на который всегда можно умножить и разделить подынтегральное выражение).

Примеры:

1. $\int \sin x * \cos x dx = \begin{vmatrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{vmatrix} = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$;

2. $\int e^{\sin^2 x} * \sin 2x dx = \begin{vmatrix} \sin^2 x = t \\ 2\sin x * \cos x = dt \end{vmatrix} = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin^2 x} + C$.

Если F(x) + C – первообразная функция для f(x), то приращение F(b) – F(a) первообразных функций при изменении аргумента x от x=a до x=b называется определенным интегралом и обозначается $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Эта формула называется формулой Ньютона – Лейбница.

Простейшие свойства определенного интеграла:

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;
2. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$;
3. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$;
4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Примеры:

1. $\int_1^3 8x^3 dx = 8\frac{x^4}{4} \Big|_1^3 = 2x^4 \Big|_1^3 = 2\,(3^4 - 1^4) = 160$;

2. $\int_{-1}^{1} (2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)dx = (x^2 + x^3 + x^4 + x^5) \Big|_{-1}^{1} = (1^2 + 1^3 + 1^4 + 1^5) -$

$- ((-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5) = 4$.

3. Способ подстановки:

$$\int_0^1 \left(4x^3 + 1\right)^5 x^2 dx = \begin{vmatrix} 4x^3 + 1 = t \\ 12x^2 dx = dt \\ x^2 dx = \frac{1}{12}dt \\ t_н = 1; tв = 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{12}\int_1^5 t^5 dt = \frac{1}{12} * \frac{t^6}{6} \Big|_1^5 = \frac{1}{72}(5^6 - 1) = 217.$$

Определенный интеграл широко применяется для вычисления площадей плоских фигур, объемов тел вращения, длины дуги, площади поверхности вращения, а также для решения ряда физических и технических задач. Так, путь, пройденный телом при прямолинейном движении, находится по формуле:

$$S=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

Работа переменной силы, произведенной при прямолинейном движении тела:

$$A=\int_a^b f(x)dx.$$

Работа, затраченная на растяжение или сжатие пружины:

$$A=k\int_{x_1}^{x_2} xdx.$$

*Содержание и порядок выполнения задания:*

Найти неопределенные интегралы:

1. а) $\int (x^2+3x^3+x+1)dx$; б) $\int (x-4x^2+x-3)dx$.

2. а) $\int \frac{3x^3-2x^2+5x}{2x^2}dx$; б) $\int \frac{x^3+3x^2+4x}{x^3}dx$.

3. а) $\int 2^x * e^x dx$; б) $\int 3^x * e^x dx$.

4. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$.

5. а) $\int \frac{x-16}{\sqrt{x}+4}dx$; б) $\int \frac{x^3+27}{x^2-3x+9}$.

6. а) $\int (x^2+3)^5 xdx$; б) $\int (x^3-7)^6 x^2 dx$.

7. а) $\int \frac{6x^2dx}{(1-2x^3)^4}$; б) $\int \frac{\cos xdx}{2\sin x+3}$.

8. а) $\int e^{2x^2} xdx$; б) $\int 6^{x^3} * x^2 dx$.

9. а) $\int \sin^2 x * \cos xdx$; б) $\int \cos^2 x * \sin xdx$.

10. а) $\int tgxdx$; б) $\int ctgxdx$.

Вычислить интегралы:

Вариант № 1

1. $\int_1^2 \left(4x^3 - 6x^2 + 2x + 1\right)dx$.

2. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \sin x\right)dx$.

3. $\int_0^1 \left(2x^3 - 1\right)^4 x^2 dx$.

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\sin x + 1} * \cos x dx$.

5. $\int_2^4 \frac{dx}{x-1}$.

Вариант № 2

1. $\int_2^3 (3x^2 - 4x - 1)dx$.

2. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 2\cos x\right)dx$.

3. $\int_0^1 \left(x^2 + 1\right)^3 x dx$.

4. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{1 - \cos t}dt$.

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} * \cos x dx$.

Вариант № 3

1. $\int_0^8 \left(3\sqrt{2x} - 4\sqrt[3]{x}\right)dx$.

2. $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \cos\frac{x}{4}dx$.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx$.

4. $\int_0^{-\frac{1}{2}} e^{-2x}dx$.

5. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{\cos x} \sin x dx$.

Решить задачи:

1. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = (3 + 3t^2)$ м/с. Найти путь, пройденный телом за первые 5 с. от начала движения.

2. Найти путь, пройденный телом за 4-ую секунду, если скорость его прямолинейного движения изменяется по закону $v = (3t^2 - 2t - 3)$ м/с.

3. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = (4t + a)$ м/с. Найти значение a, если известно, что путь, пройденный телом за 2 с. от начала движения, равен 48 м.

4. Какую работу совершает сила в 10 Н при растяжении пружины на 2 см?

5. Сила в 60 Н растягивает пружину на 2 см. Первоначальная длина пружины равна 14 см. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть ее до 20 см.?

**Контрольные вопросы:**

1. Дать определение неопределенного интеграла.
2. Сформулировать основные свойства неопределенного интеграла.
3. В чём заключается метод непосредственного интегрирования и метод подстановки?
4. Записать формулу Ньютона – Лейбница.
5. Перечислить свойства определенного интеграла.
6. Для решения каких задач применяется определенный интеграл?

## РАЗДЕЛ 5 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

### Практическое занятие №5 Комплексные числа Построение геометрической модели комплексного числа

*Цель занятия:*

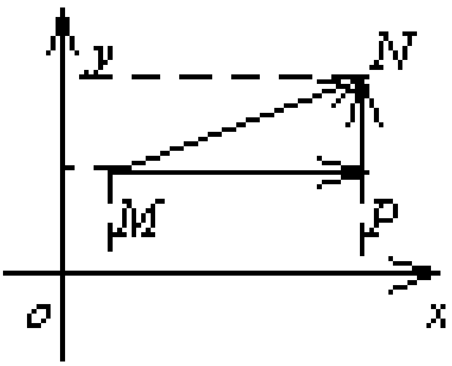
– закрепить навыки выполнения действий над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной форме,

Работа направлена на формирование компетенций ОК 01-05

*Используемая литература:* [2, гл.14, § 14.1-14.4]

*Исходные материалы и данные:*

Всякое действительное число геометрически можно изобразить точкой на вещественной оси и, обратно, каждой точке на оси соответствует вещественное число.




Если теперь рассматривать плоскость, то каждой точке плоскости можно сопоставлять некоторое число, которое будем называть ***комплексным.***

Очевидно, что любому вектору на оси *ox* можно сопоставить вещественное число. В частности, вектору длины единица, направление которого совпадает с положительным направлением оси ох, соответствует вещественное число единица.

Вектору длины единица, направление которого совпадает с положительным направлением оси *oy*, сопоставим символ i, который назовём ***мнимой единицей***. Мы знаем, что всякий вектор плоскости может быть представлен как сумма двух векторов, параллельных осям координат, то есть $\overline{MN} = \overline{MP} + \overline{PN}$. В этом равенстве $\overline{MP}$ параллелен оси *ox*, а $\overline{PN}$ параллелен оси *oy*.

По нашей договорённости вектору $\overline{MP}$ соответствует вещественное число *a*, вектору же $\overline{PN}$ соответствует символ *b i*, где b – вещественное число, абсолютное значение которого равно длине вектора $\overline{PN}$, будет положительным, если направление $\overline{PN}$ совпадает с положительным направлением оси *OY* и отрицательным в противоположном случае.

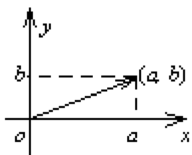


Рис. 2

Таким образом, соответственно, вектору сопоставим комплексное число вида z = *a* + *b i* .Эта запись является **алгебраической формой** записи комплексного числа. Заметим, что знак (+) в этом выражении не есть знак действия, а просто это выражение нужно рассматривать как единый символ для обозначения комплексного числа

Символы (*a, b*) можем рассматривать как координаты точки или как проекции вектора в двухмерном пространстве.

*Символ a называется* ***вещественной (действительной) частью*** *комплексного числа* и обозначается: *a* = R e z (от слова r e p r e z e n t).

*Символ b называется* ***мнимой частью*** *комплексного числа: b* = I m z (от слова i m a g i n e i r e s ). $i = \sqrt{-1}$ – ***мнимая единица***.

Если *b* = 0, то комплексное число принимает вид: $a + 0 \cdot i = a$.

Таким образом, действительное число можно считать частным случаем комплексного числа.

Два вектора считаются равными, если они имеют одинаковое направление и длину (или равные проекции).

*Два комплексных числа считаются равными между собой тогда и только тогда, когда равны их вещественные и мнимые части.*

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2.$$

Понятия больше или меньше для комплексных чисел не существует.

**Сложение и вычитание**

По аналогии со сложением и вычитанием векторов мы приходим к следующему **правилу сложения и вычитания комплексных чисел:**

$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + ... + (a_n + b_n i) = (a_1 + a_2 + ... + a_n) + (b_1 + b_2 + ... + b_n)i = a + bi$

Операция введена, так как получили элемент того же множества.

Вычитание определяется как действие, обратное сложению, то есть разность $x + iy = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i)$ определяется из условия:

$(x + iy) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + b_1 i)$ .

Из правила сложения получаем:

$x + a_2 = a_1$,

$y + b_2 = b_1$.

То есть $x = a_1 - a_2$, $y = b_1 - b_2$ и разность

$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$.

**Умножение комплексных чисел**

**Определение.** *Произведением двух комплексных чисел называется такое комплексное число, модуль которого равен произведению модулей сомножителей, а аргумент – сумме аргументов сомножителей:*

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2)i.$$

Отсюда следует **правило умножения комплексных чисел в алгебраической форме**: *комплексные числа можно перемножать как многочлены*.

Если $z = a + bi$ – комплексное число, то число $\bar{z} = a - bi$ называется ***сопряжённым*** с числом z . Его обозначают при помощи черты над числом.

$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$, но $a^2 + b^2 = \rho^2$, следовательно, $\rho = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

**Деление комплексных чисел**

Если делимое и делитель даны в алгебраической форме, то **правило деления** таково: *для того, чтобы разделить комплексное число* $(a_1 + b_1 i)$ *на другое комплексное число* $(a_2 + b_2 i)$, *то есть найти* $z = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$, *нужно и числитель, и знаменатель умножить на число, сопряжённое знаменателю.*

$$z = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i = a + bi.$$

В результате операции получили элемент того же множества. Значит, операция деления считается введённой.

**Возведение в степень комплексных чисел**

**Пример 1.** Решить уравнения а) $x^2 + 25 = 0$, б) $x^3 + 27 = 0$.

**Решение.** а) $x = \pm\sqrt{-25} = \pm 5\sqrt{-1} = \pm 5i$, то есть первое уравнение имеет два мнимых корня: $x_1 = 5i$, $x_2 = -5i$;

б) воспользуемся формулой $x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$, $x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$. Приравнивая нулю каждый из множителей, получаем один корень действительный и два комплексных:

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -3$$

$$x^2 - 3x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-36}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-27}}{2} = \frac{3 \pm 3i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad x_3 = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2};$$

$x_2$ и $x_3$ – сопряжённые комплексные числа.

**Пример 2.** Вычислить:

а) $\frac{(-9+3i)}{1-2i}$

**Решение.** а) Сначала запишем числа в алгебраической форме, выполнив операцию деления. Домножим на сопряжённое число, и, учитывая, что $i^2 = -1$, получим:

$$z = \frac{(-9+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-9+6i^2+3i-18i}{1-(2i)^2} = \frac{-15-i15}{5} = -3 - 3i;$$

$x = \text{Re}z = -3$, $y = \text{Jm}z = -3$, что соответствует точке на плоскости (- 3, - 3).

***Определение.*** Модулем комплексного числа $z = x + iy$ называется величина $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Модуль комплексного числа можно обозначать буквой $r = |z|$.

***Определение.*** Аргументом комплексного числа $z = x + iy$ называется число: $ArgZ = arctg\frac{y}{x} + 2\pi n, \quad n \in Z$. Главное значение аргумента обозначается: $\arg z = arctg\frac{y}{x}$, $0 \le \arg z < 2\pi$ или $a - \pi < \arg z \le \pi$.

***Пример.*** $-3+3i$

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\arg z = arctg\frac{3}{-3} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi.$$

$$ArgZ = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \quad k \in Z$$

**П.1. Тригонометрическая форма записи комплексного числа.**

Комплексное число $z = x + iy$ однозначно определяется парой действительных чисел $(x, y)$ поэтому можно установить взаимно однозначное соответствие между всевозможными точками плоскости и всевозможными комплексными числами.

Тогда, комплексное число можно изобразить с помощью точки плоскости, координаты которой $x$ - абсцисса, $y$ - ордината. Это геометрическая, интерпретация комплексного числа.

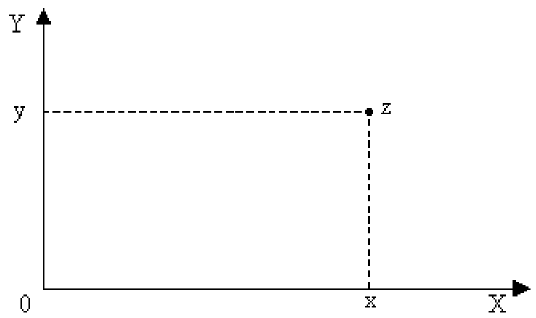



Рис. 1.

Тогда ось ОХ – где откладываются действительные части числа $z$ называется действительной осью.

OY – где откладывают мнимые части числа $z$ называется мнимой осью.

Такую плоскость будем называть «комплексной плоскостью».

Действительной и мнимой частям комплексного числа $z = x + iy$ можно также поставить в соответствие координаты радиус-вектора $\overline{OM} = (x; y)$.

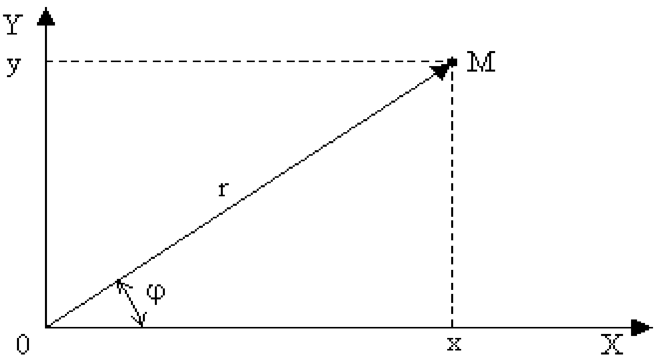



Рис. 2.

Т.е. комплексное число можно изобразить с помощью вектора $\overline{OM}$ .

Тогда, длина вектора $r$ - есть модуль комплексного числа $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ; а угол $\varphi$ есть аргумент комплексного числа:

$$\varphi = \arg z = arctg\frac{y}{x}; tg\,\varphi = \frac{y}{x}.$$

Из определения модуля и аргумента следует, что если $z = x + iy$, то $x = r\cos\varphi = |z|\cos\arg z$ , $y = r\sin\varphi = |z|\sin\arg\varphi$.

Тогда, любое комплексное число, отличное от нуля, можно представить в тригонометрической форме:

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

***Пример.*** 1) Представить комплексное число 1+i в тригонометрической форме:

$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}; \varphi = arctg\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

2) Представить число iв тригонометрической форме:

$$|z| = \sqrt{1} = 1, \cos\varphi = 0, sin\varphi = 1 => \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

**П.2. Показательная форма комплексного числа**

$\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ связаны формулой Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Тогда от тригонометрической формы комплексного числа можно перейти к показательной форме:

$z = re^{i\varphi}$.

Тогда $\bar{z} = re^{-i\varphi} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$. Складывая и вычитая, легко получить

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

***Примеры.*** Записать комплексное число в показательной форме.

1) $z = 1 - i \Rightarrow r = \sqrt{2}; \varphi = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow z = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

2) $z = -1 \Rightarrow r = 1, \varphi = \pi \Rightarrow z = e^{\pi i}$

**П.4. Алгебраические операции над комплексными числами.**

Сложение и умножение комплексных чисел производится по правилам сложения и умножения алгебраических многочленов; учитывая при этом, что $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = i$ и т.д.

1) Рассмотрим операции над комплексными числами в тригонометрической форме:

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Формула Муавра: $z = x + iy$.

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), k = 0;1;\ldots;n-1.$$

$w_0, w_0, \ldots, w_{n-1}$ имеет $n$ позиций в области комплексных чисел.

Из формулы для $\sqrt[n]{z}$ видно, что все $n$ различных значений величины $\sqrt[n]{z}$ имеют один и тот же модуль равный $\sqrt[n]{|z|}$. А так как $\frac{\varphi + 2(k+1)\pi}{n} - \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$

,то точки соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного $n$-угольника, вписанного в окружность радиуса $\left(\sqrt[n]{|z|}\right)$ с центром в начале координат.

3)Алгебраические операции в показательной форме:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)}, k = 0;1;...;n-1.$$

Примеры:

а) Представить число z = -5+5i в тригонометрической форме.

б) Вычислить $z^6, \sqrt{z}, \sqrt[3]{z}$.

в) Записать в тригонометрической форме число: $\dfrac{2(\cos\frac{7\pi}{3} - i\sin\frac{7\pi}{3})}{\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}}$.

Решение.

| Алгоритм | Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму |
|---|---|
| 1. Найти модуль и аргумент числа z= -5+5i и представить его в тригонометрической форме. | r=$\|z\| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$<br>$\cos\varphi = \frac{a}{r} == \frac{-5}{5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $cos\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; φ- угол 2-ой четверти, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, $z = 5\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$ |
| 2. Вычислить $z^6$. | $z^6 = (5\sqrt{2})^6(\cos\frac{6\cdot 3\pi}{4} + i\sin\frac{6\cdot 3\pi}{4}) = 5^6\cdot 2^3(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 5^6\cdot 2^3 i$ |
| 3.Найти $\sqrt{z}$. | $\sqrt{z} = \sqrt{5\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})} = \sqrt{5\sqrt{2}}(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{2} + \sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k}{2})$<br>, где k = 0, 1.<br>k = 0: z = $\sqrt{5\sqrt{2}}(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8})$<br>k = 1: z = $\sqrt{5\sqrt{2}}(\cos\frac{11\pi}{8} + i\sin\frac{11\pi}{8})$ |
| 4. Найти $\sqrt[3]{z}$. | k = 0: z = $\sqrt[3]{5\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$<br>k =1: $\sqrt[3]{5\sqrt{2}}(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12})$ |

| Алгоритм | Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму |
|---|---|
| | k = 2: $\sqrt[3]{5\sqrt{2}}(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12})$ |
| **Алгоритм** | **Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму** |
| 5.Записать в тригонометрической форме число $\frac{2(\cos\frac{7\pi}{3}-i\sin\frac{7\pi}{3})}{\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}}$. | 1. Запись комплексного числа в числителе не является тригонометрической формой, легко к ней приводится: $2(\cos\frac{7\pi}{3}-i\sin\frac{7\pi}{3})=2(\cos(-\frac{7\pi}{3})+i\sin(-\frac{7\pi}{3}))$<br>2. Выполним деление:<br>$\frac{2(\cos(-\frac{7\pi}{3})+i\sin(-\frac{7\pi}{3}))}{\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}}=$<br>$=2(\cos(-\frac{7\pi}{3}-\frac{5\pi}{6})+i\sin(-\frac{7\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}))=$<br>$=2(\cos(-\frac{7\pi}{2})+i\sin(-\frac{7\pi}{2}))=2(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2})=$<br>$=-2i$ |

*Содержание и порядок выполнения задания:*

Выполнить действия с комплексными числами:

| I вариант | II вариант |
|---|---|
| **1. Выполнить действия с комплексными числами в алгебраической форме** | |
| 1. (6 + 2i) + (5 + 3I)= | (5 – 4i) + (6 + 2i) = |
| 2. (7 – 3I) + (4 – 5i) = | (10 + 5i) + (- 7 – 3i) = |
| 3. (4 + 2i) – (- 3 + 2i) = | (- 3 – 5i) – (7 – 2i) = |
| 4. (8 – 3i) – (4 + i) = | (7 – 5i) – (- 2 + i) = |
| 5. (6 + 4i)*(5 + 2i) = | (- 2 + 3i)*(3 + 5i) = |
| 6. (3 + 2i)*(1 + i) = | (2 – 3i)*( - 5i) = |
| 7. (7 – 6i)*(7 + 6i) = | (1 – 3i)*(1 + 3i) = |
| 8. $\frac{5i}{3+2i}=$ | $\frac{-2i}{5-i}=$ |
| 9. $\frac{2-3i}{5+2i}$ | $\frac{3-7i}{3+2i}=$ |
| 10. $\frac{6+2i}{3-7i}-\frac{2+3i}{2+5i}$ | $\frac{3+2i}{3-2i}+\frac{5+2i}{3+2i}=$ |
| **2. Даны два комплексных числа в тригонометрической форме.**<br>**Найти $z_1$*$z_2$; $z_1/z_2$; $z_1^3$; $\sqrt{z_2}$.** | |
| $Z_1=2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$<br>$Z_2=0{,}4(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$ | $Z_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$<br>$Z_2=3(\cos\pi+i\sin\pi)$ |
| **3. Записать число z в тригонометрической форме и найти $z^6$.** | |
| $Z=-\sqrt{3}+i$ | Z = 3 – 3i |
| **4. Найти в показательной форме:** | |

| I вариант | II вариант |
|---|---|
| $\sqrt[3]{z}$, если $z = -27$. | $\sqrt[4]{z}$, если $z = -1$. |

**Контрольные вопросы:**

1. Дать определение комплексного числа в алгебраической форме.
2. Как выполняются действия над комплексными числами в алгебраической форме?
3. Что называется модулем и аргументом комплексного числа?
4. Как записывается комплексное число в тригонометрической форме?
5. Как записывается комплексное число в показательной форме?
6. Как выполнить умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня с комплексными числами в тригонометрической и показательной формах?

## РАЗДЕЛ 6 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

### Практическое занятие №6 Реализация задач математической статистики

*Цель занятия:*

– закрепить навыки решения задач на определение вероятности события.

Работа направлена на формирование компетенций ОК 01-05

*Используемая литература: [1, гл. 4, § 4.1.3]*

*Исходные материалы и данные:*

Вероятность события А равна отношению числа m исходов испытаний, благоприятствующих наступлению события А, к общему числу n всех равновозможных несовместных исходов, т. е. $P(A) = \frac{m}{n}$. При этом $0 \le P(A) \le 1$.

Пример 1.

Бросают игральную кость. Найти вероятность того, что выпадет четное число очков.

Решение:

Событие А – «выпадет четное число очков»,

n = 6, m = 3.

Получим $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Пример 2.

На каждой из семи одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: Н, О, П, Р, С, Т, У. Найти вероятность того, что на пяти взятых наугад и расположенных в ряд карточках можно будет прочесть слово «спорт» (событие А).

Решение:

Общее число всех возможных элементарных исходов n= $A_7^5 = 7 * 6 * 5 * 4 * 3 = 2520$, а благоприятствует событию А лишь один, т.е. m=1.

Поэтому, Р (А) = $\frac{1}{2520} \approx 0{,}0004$.

*Содержание и порядок выполнения задания:*

Решить задачи, используя основные понятия теории вероятностей:

1. а) Восемь различных книг расставляют наугад на одной полке. Какова вероятность того, что 3 определенные книги окажутся поставленными рядом?

б) В урне 3 белых и 9 черных шаров. Вынимают наугад 1 шар. Какова вероятность, что он черный?

2. а) Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет четное число очков.

б) Карточка «Спортлото» содержит 36 чисел. В тираже участвуют 5 чисел. Какова вероятность того, что будет угадано 3 числа?

3. а) В урне 7 красных и 6 синих шаров. Вынимают наугад 2 шара. Какова вероятность того, что они разного цвета?

б) Имеется 100 деталей, из которых 4% бракованных. Какова вероятность того, что вынутая наугад деталь – бракованная?

4. а) В урне 20 шаров, из которых 3 белых. Вынимают наугад 1 шар. Какова вероятность, что он не белый?

б) Карточка «Спортлото» содержит 45 чисел. В тираже участвуют 6 чисел. Какова вероятность того, что будет угадано 3 числа?

5. а) В лотерее из 50 билетов 8 выигрышных. Какова вероятность того, что из 5 выбранных наугад билетов 2 будут выигрышными?

б) В урне 4 красных и 7 синих шаров. Вынимают наугад 1 шар. Какова вероятность того, что он красный?

6. а) Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет нечетное число очков?

б) Карточка «Спортлото» содержит 45 чисел. В тираже участвуют 6 чисел. Какова вероятность того, что будет угадано 4 числа?

7. а) В урне 9 белых и 7 синих шаров. Вынимают наугад 2 шара. Какова вероятность того, что они оба белые?

б) Найдите вероятность того, что при бросании 2 – х игральных костей в сумме выпадет 6 очков?

8. а) В партии из 8 деталей 6 стандартных. Найти вероятность того, что среди 5 взятых наугад деталей ровно 3 стандартных.

б) Брошены 2 игральные кости. Найти вероятность того, что разность очков равна 2.

9. а) В урне 8 белых и 6 черных шаров. Из урны вынули 2 шара. Найти вероятность того, что оба они черные.

б) На 6 карточках буквы А, В, К, М, О, С. Перемешиваем и раскладываем в ряд. Найти вероятность того, что получится слово «Москва».

10. а) В урне 8 белых и 6 черных шаров. Из урны вынули 2 шара. Найти вероятность того, что оба они разного цвета.

б) Брошены 2 игральные кости. Чему равна вероятность того, что произведение выпавших очков равно 5?

Случайной называют величину, которая принимает в результате испытания то или иное возможное значение, заранее не известное, меняющееся от испытания к испытанию и зависящее от случайных обстоятельств. Случайная величина называется *дискретной*, если множество её значений конечно или счётно. Соответствие между возможными значениями $x_1$, $x_2$,…., $x_n$ случайной величины X и их вероятностями $p_1$, $p_2$,…., $p_n$ называется *законом распределения случайной величины X*. Закон распределения случайной величины может быть представлен в виде таблицы:

| X | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_i$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| p | $P_1$ | $P_2$ | … | $p_i$ | … | $p_n$ |

События $X=x_1$, $X=x_2$,…, $X=x_n$ образуют полную систему попарно несовместных событий, поэтому сумма их вероятностей равна единице, т.е.

$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$

Кроме закона распределения, который даёт полное представление о случайной величине, часто используют числа, которые описывают случайную величину суммарно. Такие числа называют числовыми характеристиками случайной величины. Среди числовых характеристик весьма важной является *математическое ожидание*, которое указывает, какое среднее значение случайной величины следует ожидать в результате испытаний или наблюдений.

Если известна дискретная случайная величина X, закон распределения которой имеет вид:

| Значения $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| Вероятности $p_i$ | $p_1$ | $p_2$ | … | $p_n$ |

То *математическим ожиданием* (или средним значением дискретной величины X) называется число $M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$. Таким образом, математическое ожидание дискретной случайной величины X равно сумме произведений возможных значений этой величины на их вероятности.

Основной числовой характеристикой степени рассеяния значений случайной величины X относительно её математического ожидания M(X) является *дисперсия*, которая обозначается через D(X). Дисперсией дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата её отклонения: $D(X) = M(X – M(X))^2$. Для вычисления дисперсий более удобной является формула: $D(X) = M(X^2) – (M(X))^2$.

*Содержание и порядок выполнения задания:*

*I. Найти вероятности, зная закон распределения случайной величины:*

1. Закон распределения дискретной случайной величины X имеет вид:

| X | 2 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|
| P | 0,1 | $p_2$ | 0,6 |

Тогда вероятность $p_2$ равна…

2. Закон распределения дискретной случайной величины X имеет вид:

| X | -3 | 7 | 9 |
|---|---|---|---|
| P | $p_1$ | 0,2 | 0,6 |

Тогда вероятность $p_1$ равна…

3. Закон распределения дискретной случайной величины X имеет вид:

| X | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,1 | $p_2$ | 0,6 | 0,1 |

Тогда вероятность $p_2$ равна…

4. Закон распределения дискретной случайной величины X имеет вид:

| X | -2 | 0 | 1 | 12 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,1 | 0,2 | 0,4 | $p_4$ |

Тогда вероятность $p_4$ равна…

*II. Найти математическое ожидание дискретной величины, заданной законом распределения:*

1. Математическое ожидание дискретной случайной величины, заданной законом распределения,

| X | 2 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|
| P | 0,2 | 0,3 | 0,5 |

равно…

2. Математическое ожидание дискретной случайной величины, заданной законом распределения,

| X | -3 | 7 | 9 |
|---|---|---|---|
| P | 0,2 | 0,2 | 0,6 |

равно…

3. Математическое ожидание дискретной случайной величины, заданной законом распределения

| X | -1 | 0 | 8 |
|---|---|---|---|
| P | 0,5 | 0,1 | 0,4 |

равно…

4. Математическое ожидание дискретной случайной величины, заданной законом распределения,

| X | 2 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|
| P | 0,2 | 0,3 | 0,5 |

равно…

*III. Найти дисперсию дискретной случайной величины, заданной законом распределения:*

1. Найти дисперсию дискретной случайной величины, если она задана законом распределения:

| X | 2 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|
| P | 0,2 | 0,3 | 0,5 |

и $M(X^2)=40,3$

2. Найти дисперсию дискретной случайной величины, если она задана законом распределения:

| X | -3 | 7 | 9 |
|---|---|---|---|
| P | 0,2 | 0,2 | 0,6 |

и $M(X^2)=60,2$

3. Найти дисперсию дискретной случайной величины, если она задана законом распределения:

| X | -1 | 0 | 8 |
|---|---|---|---|
| P | 0,5 | 0,1 | 0,4 |

и $M(X^2)=26,1$

4. Найти дисперсию дискретной случайной величины, если она задана законом распределения:

| | | | |
|---|---|---|---|
| X | 2 | 3 | 5 |
| P | 0,2 | 0,3 | 0,5 |

и $M(X^2)=16$

**Контрольные вопросы:**

1. Дать определение вероятности события А.

2. Записать формулу для вычисления вероятности события.

3. Как найти математическое ожидание дискретной случайной величины, заданной законом распределения?

4. Как найти дисперсию дискретной случайной величины, если она задана законом распределения.

## Используемые источники литературы

1. Богомолов, Н. В. Математика [Электронный ресурс]: учебник для сред. проф. образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. - 5-е изд., испр. и доп. - Москва: Юрайт, 2020.
2. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике [Электронный ресурс]: в 2 ч.: учеб. пособие для СПО. Ч. 1 / Н. В. Богомолов. - 11-е изд., испр. и доп. - Москва: Юрайт, 2020.
3. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике [Электронный ресурс]: в 2 ч.: учеб. пособие для СП . Ч. 2 / Н. В. Богомолов. - 11-е изд., испр. и доп. - Москва: Юрайт, 2020
4. Гончаренко, В. М. Элементы высшей математики: учебник / В. М. Гончаренко, Л. В. Липагина, А. А. Рылов. - Москва: КноРус, 2020. - 363 on-line. - (Среднее проф. образование).
5. Седых, И. Ю. Дискретная математика: учебное пособие / И. Ю. Седых, Ю. Б. Гребенщиков. - Москва: КноРус, 2021. - 329 on-line. - (Среднее проф. образование).
6. Иванисова, О. В. Дискретная математика и математическая логика [Электронный ресурс]: учебное пособие / О. В. Иванисова, И. В. Сухан. - Москва; Берлин: ДИРЕКТ-МЕДИА, 2020
7. Высшая математика [Электронный ресурс]: учебник и практикум для среднего профессионального образования / М. Б. Хрипунова; ред.: М. Б. Хрипунова, И. И. Цыганок. - Москва: Юрайт, 2020
8. Краткий курс высшей математики [Электронный ресурс]: учебник / К. В. Балдин, Ф. К. Балдин, В. И. Джеффаль; ред. К. В. Балдин. - Москва: Дашков и К°, 2020.
9. Осипенко, С. А. Элементы высшей математики [Электронный ресурс]: учебное пособие / С. А. Осипенко. - Москва; Берлин: ДИРЕКТ-МЕДИА, 2020