Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

С. Н. Мухина

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины
для студентов специальности
10.05.03 – Информационная безопасность автоматизированных систем

Калининград
Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ»
2023

Рецензент:
кандидат физико-математических наук, исполняющий обязанности заведующего кафедрой прикладной математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет»
Алексей Иванович Руденко

Мухина, С. Н.

Теория вероятностей и математическая статистика : учебно-методическое пособие по изучению дисциплины для студентов специальности 10.05.03 – Информационная безопасность автоматизированных систем / С. Н. Мухина. – Калининград: Изд-во ФГБОУ ВО «КГТУ», 2023. – 41 с.

Учебно-методическое пособие является руководством по изучению дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов специальности 10.05.03 – Информационная безопасность автоматизированных систем. Содержит характеристику дисциплины (цель и планируемые результаты изучения дисциплины, место дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы), тематический план с описанием для каждой темы форм проведения занятия, вопросов для изучения, методических материалов к занятию.

Табл. 16, список лит. – 8 наименований

Учебно-методическое пособие рассмотрено и одобрено в качестве локального электронного методического материала на заседании кафедры прикладной математики и информационных технологий Института цифровых технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» 22.02.2023, протокол № 2.

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины рекомендовано к использованию в учебном процессе в качестве локального электронного методического материала методической комиссией ИЦТ от 17.03.2023, протокол № 2.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие по учебной дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» представляет комплекс систематизированных учебных методических материалов и предназначено для научно-методического обеспечения профессиональной подготовки студентов по специальности 10.05.03 – Информационная безопасность автоматизированных систем, изучающих дисциплину в четвертом и пятом семестрах.

Цель создания пособия – обеспечить качественное методическое оснащение учебного процесса изучения дисциплины. Учебно-методическое пособие способствует успешному осуществлению учебной деятельности, эффективному усвоению учебного материала, позволяет организовать систему управления самостоятельной работой студентов, мотивирует к более глубокому изучению дисциплины.

Целью преподавания дисциплины является обучение студентов построению математических моделей случайных явлений, изучаемых естественными науками, физико-техническими и инженерно-физическими дисциплинами, экологией и экономикой, анализу этих моделей. Предполагается привитие студентам навыков интерпретации теоретико-вероятностных конструкций внутри математики и за ее пределами для того, чтобы заложить понимание формальных основ дисциплины и выработать у студентов достаточный уровень вероятностной интуиции, позволяющей им осознанно переводить неформальные стохастические задачи в формальные математические задачи теории вероятностей.

Общими задачами преподавания системы математических дисциплин для студентов указанной специальности, отражающимися в ее содержании, являются: развитие интеллектуальных и творческих способностей, познавательных процессов; формирование элементов соответствующих компетенций; формирование у студента личностного знания о роли математики как части общечеловеческой культуры, как универсального языка науки.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные понятия теории вероятностей, числовые и функциональные характеристики распределений случайных величин и их основные свойства, классические предельные теоремы теории вероятностей, основные понятия теории случайных процессов, основные понятия математической статистики, стандартные вероятностные и статистические модели для решения типовых прикладных задач, вероятностно-статистические методы анализа экспериментальных данных.

Знать: аксиоматику и основные понятия теории вероятностей; основные методы теории случайных процессов и теории систем массового обслуживания; основные понятия и определения математической статистики, выборочные характеристики, точечные и интервальные оценки неизвестных параметров.

Уметь: применять стандартные методы и модели к решению типовых теоретико-вероятностных и статистических задач; пользоваться расчетными формулами, таблицами, графиками при решении статистических задач; вычислять выборочные характеристики и находить оценки неизвестных параметров; использовать критерии проверки статистических гипотез, показатели эффективности системы.

Владеть: навыками пользования библиотеками прикладных программ для ЭВМ для решения вероятностных и статистических прикладных задач.

Место дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» относится к модулю «Математические науки» основной профессиональной образовательной программы высшего образования по специальности 10.05.03 – Информационная безопасность автоматизированных систем.

При изучении дисциплины используются знания, умения и навыки, полученные при изучении математического анализа, а также довузовской подготовки по математике.

Дисциплина является базой при изучении дисциплин естественнонаучного модуля, инженерно-технического модуля.

Основными видами аудиторных учебных занятий по дисциплине являются лекции, практические и лабораторные занятия.

Формирование знаний обучающихся обеспечивается проведением лекционных занятий.

Изучение разделов тематического плана сопровождается практическими и лабораторными занятиями, в ходе которых происходит закрепление теоретических знаний, формирование и совершенствование умений, навыков и компетенций.

Контроль знаний в ходе изучения дисциплины осуществляется в виде текущего контроля, а также промежуточной аттестации в форме дифференцированного зачета в четвертом учебном семестре и экзамена в пятом учебном семестре в соответствии с рабочим планом.

1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

1.1. Тематический план для студентов очной формы обучения

Таблица 1

Трудоемкость освоения дисциплины в четвертом семестре по очной форме обучения

№ п/п	Раздел (модуль) дисциплины	Контактная работа с преподавателем					СРС	Подготовка и аттестация в период сессии
		ЛК	ЛР	ПР	РЭ	КА		
1	События и действия над ними. Вероятностные схемы	4	5	6	1	0,05	22	
2	Случайные величины	10	12	8	1	0,05	22	
3	Предельные теоремы теории вероятностей	3	-	3	-	0,05	10,85	
ИТОГО:		**17**	**17**	**17**	**2**	**0,15**	**54,85**	**-**
Всего		**108**						

Таблица 2

Трудоемкость освоения дисциплины в пятом семестре по очной форме обучения

№ п/п	Раздел (модуль) дисциплины	Контактная работа с преподавателем					СРС	Подготовка и аттестация в период сессии
		ЛК	ЛР	ПР	РЭ	КА		
4	Выборки и числовые характеристики их распределений	4	2	2	0,5	0,5	4	
5	Основы теории точечного и интервального оценивания параметров распределения	4	2	4	0.5	0,5	4	
6	Проверка статистических гипотез	4	6	4	0,5	1	4	
7	Основы регрессионного и корреляционного анализа	3	4	4	0,5	1	4	
8	Теория систем массового обслуживания	2	3	3	-	0,25	2	
ИТОГО:		**17**	**17**	**17**	**2**	**3,25**	**18**	**33,75**
Всего		**108**						

1.2. Тематический план для студентов заочной формы обучения

Заочная форма обучения не предусмотрена.

2. СОДЕРЖАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Структура дисциплины представлена восемью тематическими разделами.

2.1. Раздел 1 События и действия над ними. Вероятностные схемы

Перечень изучаемых вопросов

1. Основные понятия теории вероятностей.
2. Алгебра событий.
3. Способы задания вероятностей.
4. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
5. Формула Бернулли.

Методические указания

Первая тема курса имеет особое значение, так как в ней излагаются основы теории вероятностей, без понимания и усвоения которых дальнейшее изучение вызовет значительные затруднения.

Существует несколько подходов к определению вероятности события (классический, геометрический, статистический).

Непосредственно подсчитать вероятность события возможно только в задачах, соответствующих экспериментам с конечным числом равновозможных несовместных исходов. При этом подсчет числа элементов различных подмножеств пространства элементарных событий осуществляется по формулам и правилам комбинаторики.

Основные формулы комбинаторики приведены в таблице 3.

Таблица 3

Формулы комбинаторики

Комбинации	Формула для вычисления
сочетания	$C_n^m = \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$
размещения	$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$
перестановки	$P_n = n!$

Чаще всего вероятность события вычисляется по формулам сложения и умножения вероятностей. Для этого сложное событие надо при помощи операций над событиями выразить через простейшие события, вероятности которых уже известны.

При использовании формулы Байеса следует следить за тем, чтобы сформулированные гипотезы образовывали полную группу несовместных событий.

Схема Бернулли (схема повторных испытаний) включает в себя формулу Бернулли и аппроксимирующие формулы (Пуассона, локальная и интегральная формулы Лапласа). Формула Бернулли и следствия из нее приведены в таблице 4.

Таблица 4

Формула Бернулли

Условие	Формула
Вероятность появления события ровно k раз	Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^n q^{n-k},\ k = 0,1,2,\dots,n$
Вероятность того, что событие A произойдет не более, чем k раз в n испытаниях (кумулятивная или накопленная вероятность)	$P_n(m \leq k) = P_n(0) + P_n(1) + \cdots P_n(k)$
Вероятность того, что событие A произойдет более, чем k раз в n испытаниях	$P_n(m > k) = P_n(k+1) + P_n(k+2) + \cdots + P_n(n).$
Вероятность того, что событие A произойдет хотя бы один раз	$P_n(k \geq 1) = 1 - P_n(0) = 1 - q^n$

В таблице 5 рассмотрены асимптотические приближения в схеме Бернулли: формула Пуассона, локальная теорема Муавра – Лапласа, интегральная теорема Лапласа.

Таблица 5

Асимптотические формулы в схеме Бернулли

Формула	Условие для применения
Пуассона: $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ \lambda = np$	$n \to \infty$ $p \to 0$ $\lambda = np \leq 10$

Формула	Условие для применения
Кумулятивная вероятность по формуле Пуассона: $P_n(m \leq k) = P_n(0) + P_n(1) + \cdots P_n(k)$	$n \to \infty$ $p \to 0$ $\lambda = np \leq 10$
Локальная формула Муавра – Лапласа: $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x);\ x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}};$ $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ – локальная функция Лапласа (значения могут быть получены из специальных таблиц)	$n \to \infty$ $0 < p < 1$
Интегральная формула Лапласа: $P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1);$ $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}};\ x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}};$ $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(u)du$ – функция Лапласа (значения берутся из специальных таблиц)	$n \to \infty$ $0 < p < 1$

При использовании локальной и интегральной формул Лапласа необходимо изучить свойства функций – локальной и интегральной Лапласа.

Свойства локальной функции Лапласа

1. Функция является четной (график симметричен относительно оси ординат), т. е. $\mathrm{f}(\text{-x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x})$.

2. Функция $f(x)$ – монотонно убывающая при положительных значениях x, причем при x $\to\infty$ $f(x) \to 0$. Практически можно считать, что уже при x $<$ -4; x $>$ 4 $f(x) \approx 0$.

Свойства локальной функции Лапласа

1. Функция является нечетной (график симметричен относительно начала координат), т. е. $\Phi(\text{-x}) = \text{-}\Phi(\mathrm{x})$.

2. Функция $\Phi(x)$ – монотонно возрастающая.

Причем при x $\to \infty$ $\Phi(\mathrm{x}) \to 0{,}5$. Практически можно считать, что уже при $x > 4$ $\Phi(x) \approx 0{,}5$.

Свойства локальной функции Лапласа отражены на рисунке 1, интегральной – на рисунке 2.

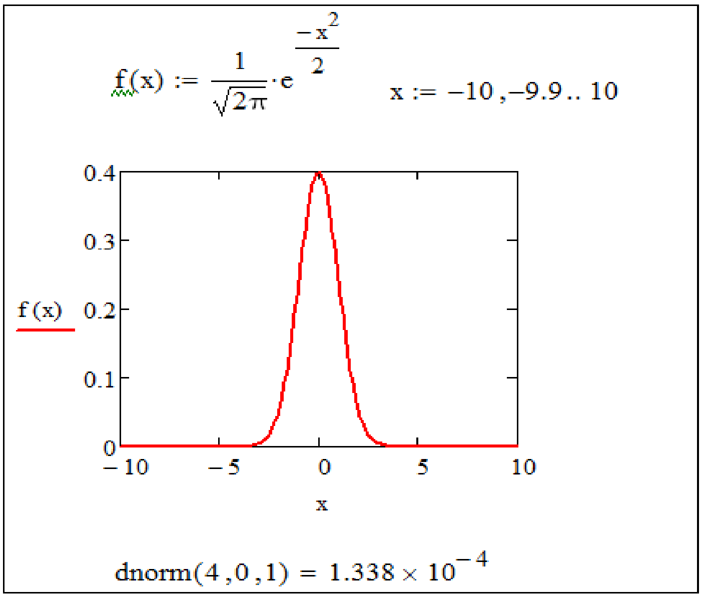


Рисунок 1. График локальной функции Лапласа

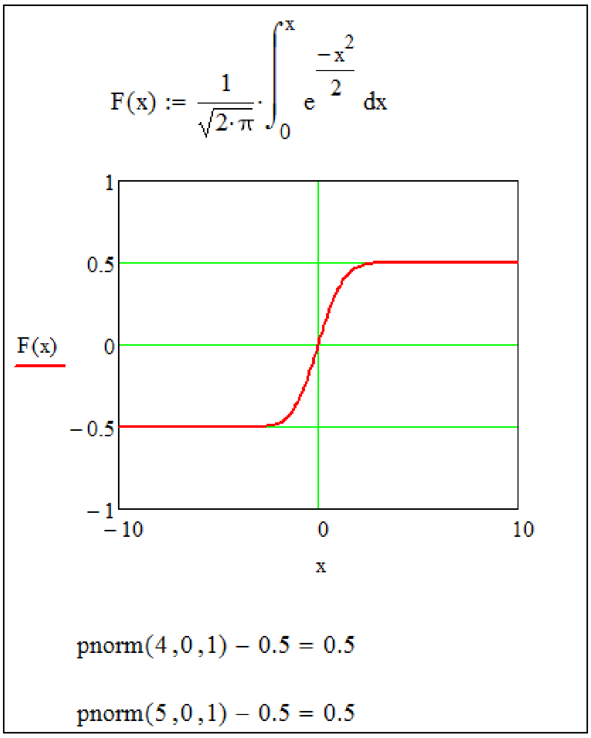


Рисунок 2. График интегральной функции Лапласа

По этой теме выполняется Лабораторная работа 1 «Вероятностные схемы». Лабораторная работа выполняется по вариантам в среде Mathcad.

Контрольные вопросы

1. Что изучает теория вероятностей?
2. Что называется элементарным событием (элементарным исходом)?
3. Что такое пространство элементарных событий?
4. Какое событие называется достоверным? Какое событие называется невозможным?
5. Что называется суммой двух событий? Что называется, произведением двух событий? Может ли сумма двух событий совпадать с их произведением?
6. Какие события называются несовместными? Какие события называются совместными?
7. Какое событие называется противоположным для данного события?
8. Какими способами можно задать вероятность события?
9. Какие значения может принимать вероятность события?
10. Чему равна вероятность невозможного события? Чему равна вероятность достоверного события?
11. Какие события образуют полную группу?
12. Какие события называются равновозможными?
13. В каком случае вероятность события вычисляется по формуле классической вероятности?
14. Как найти вероятность суммы двух несовместных событий? Как найти вероятность суммы двух совместных событий? Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?
15. Как определяется условная вероятность события?
16. Какие события называются независимыми?
17. Как найти вероятность произведения двух событий? Чему равна вероятность произведения двух независимых событий?
18. Чему равна сумма вероятностей гипотез в формуле полной вероятности?
19. Как пересчитать вероятности гипотез после опыта с учетом наблюденного результата?
20. Какая вероятность вычисляется по формуле Бернулли? Как найти наиболее вероятное число появлений события в данной серии опытов?

Рекомендуемая литература по разделу

В предлагаемой литературе [1, 2] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу. Задание по вариантам к Лабораторной работе 1 необходимо взять в [7].

2.2. Раздел 2. Случайные величины

Перечень изучаемых вопросов

1. Понятие и виды случайной величины.
2. Закон распределения случайной величины. Ряд распределения. Функция распределения и ее свойства.
3. Плотность распределения.
4. Числовые характеристики случайной величины.
5. Основные распределения дискретной случайной величины (Бернулли, Пуассона, геометрический).
6. Основные законы распределения непрерывной случайной величины (нормальный, показательный, равномерный).

Методические указания

Понятие случайной величины относится к важнейшим понятиям теории вероятностей. При рассмотрении случайных величин главную роль играет не пространство элементарных событий, на котором определена случайная величина как числовая функция, а закон распределения этой случайной величины.

Случайные величины условно разделяют на два вида: дискретные и непрерывные. Универсальным способом задания закона распределения случайной величины является функция распределения.

Однако во многих случаях необязательно знать закон распределения случайной величины, полностью ее описывающий. Достаточно знать числовые характеристики случайной величины, т. е. константы, характеризующие наиболее важные черты ее закона распределения.

Числовые характеристики случайных величин – не случайны. Особенно важно уяснить вероятностный смысл основных числовых характеристик (мода, медиана, математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение).

Обратить внимание надо также на нормальный закон распределения, так как он имеет важнейшее практическое значение.

Основные понятия, связанные с законами распределения ДСВ X и НСВ X, представлены в таблицах 6–9.

Таблица 6

Способы задания случайных величин

<table>
<tr><th>Дискретные
случайные величины</th><th>Непрерывные
случайные величины</th></tr>
<tr><td>Ряд распределения

x_1	x_2	…	x_n	…
p_1	p_2	…	p_n	…

$$\sum_i p_i = 1$$</td><td>Плотность распределения
$f(x) \geq 0$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$</td></tr>
<tr><td>Функция распределения и кумулятивная вероятность
$F(x_i) = P(X < x_i), i = 1, 2, \ldots$

1) $0 \leq F(x_i) \leq 1$;

2) $F(x_j) > F(x_i)$ при $x_j > x_i$;

3) $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.</td><td>Функция распределения
$P(X < x) = P(-\infty < X < x) =$
$$= \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = F(x)$$
1) $0 \leq F(x) \leq 1$;

2) $F(b) > F(a)$ при $b > a$;

3) $P(a < X < b) = F(b) - F(a) =$
$$= \int_a^b f(x)dx.$$</td></tr>
</table>

Таблица 7

Типы числовых характеристик

СВ *X*	**Характеристики положения**		
	M(x)=m$_x$ математическое ожидание	**Me(x)** медиана	**Mo(x)** мода
ДСВ	$M(X) = \sum_i x_i p_i$	–	наиболее вероятное значение
НСВ	$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$	квантиль $x_{0,5}$ (делит площадь под плотностью вероятности пополам)	точка максимума функции плотности

Продолжение таблицы 7

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="3">Характеристики рассеяния</td></tr>
<tr><td>D(X)
дисперсия</td><td>$\boldsymbol{\sigma(X)}$
среднее квадратическое отклонение</td><td>$\boldsymbol{\gamma}$
коэффициент вариации</td></tr>
<tr><td>ДСВ</td><td>$D(X)=\sum_i (x_i-m_x)^2 p_i$

$D(X)=M(X^2)-\ M^2(X)$</td><td rowspan="2">$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$</td><td rowspan="2">$\gamma=\frac{\sigma(X)}{M(X)}\cdot 100\%$
оценка относительного рассеяния СВ X по сравнению со средним значением</td></tr>
<tr><td>НСВ</td><td>$D(X)\ \int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 f(x)dx$

$D(X)=M(X^2)-\ M^2(X)$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2">Теоретические моменты</td></tr>
<tr><td>Начальные моменты
k-го порядка</td><td>Центральные моменты
k-го порядка</td></tr>
<tr><td>ДСВ</td><td>$\vartheta_k(X)=\sum_i x_i^k p_i$</td><td>$\mu_k(X)=\sum_i (x_i-m_x)^k p_i$</td></tr>
<tr><td>НСВ</td><td>$\vartheta_k(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$</td><td>$\mu_k(X)=$
$=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^k f(x)dx$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2">Характеристики формы</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{A_s}$
асимметрия</td><td>$\boldsymbol{E_s}$
эксцесс</td></tr>
<tr><td>ДСВ</td><td rowspan="2">$A_s=\frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)}$

характеризует степень несимметричности распределения</td><td rowspan="2">$E_s=\frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)}-3$

характеризует степень крутизны распределения</td></tr>
<tr><td>НСВ</td></tr>
</table>

Таблица 8

Библиотека основных распределений НСВ

Функция плотности	**Функция распределения**	**Числовые характеристики**
Равномерное распределение (параметры – *a, в*)		
$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & x<a;\ x>b\end{cases}$	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$	$M(X)=\dfrac{a+b}{2}$ $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Экспоненциальное распределение (параметр – λ)		
$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}$	$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}$	$M(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$
Нормальное распределение (параметры – *a*, σ)		
$f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$	$F(x)==\dfrac{1}{2}+\Phi\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$, где Φ(t) – функция Лапласа	$M(X)=a$ $D(X)=\sigma^2$

Таблица 9

Библиотека основных распределений ДСВ

Вероятность заданного значения	**Числовые характеристики**
Биномиальный закон (параметр – *p*)	
$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$	$M(X)=np \quad D(X)=npq$
Закон Пуассона (параметр – *λ*)	
$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	$M(X)=\lambda \quad D(X)=\lambda$
Геометрическое распределение (параметр – *p*)	
$P(X=k)=pq^{k-1}$	$M(X)=\frac{1}{p} \quad D(X)=\frac{q}{p^2}$
Гипергеометрическое распределение (параметры – *n1, n2, n*)	
$P(X=k)=\dfrac{C_{n_1}^k C_{n_2}^{n-k}}{C_{n_1+n_2}^n}$	$M(X)=n\dfrac{n_1}{n_1+n_2}$

По этой теме выполняются две лабораторные работы: Лабораторная работа 2 «Основные законы распределения ДСВ» и Лабораторная работа 3 «Основные законы распределения НСВ». Работы выполняется по вариантам в среде Mathcad.

Контрольные вопросы

1. Что такое случайная величина? Какие случайные величины являются дискретными, непрерывными?

2. Что такое закон распределения случайной величины?

3. Что такое ряд распределения случайной величины?

4. Что такое (интегральная) функция распределения случайной величины? Какими свойствами обладает (интегральная) функция распределения случайной величины?

5. Что такое плотность распределения случайной величины? Какими свойствами обладает плотность распределения случайной величины?

6. Что называется кривой распределения случайной величины?

7. Какими способами может быть задан закон распределения для дискретной случайной величины?

8. Какими способами может быть задан закон распределения для непрерывной случайной величины?

9. Как связаны функция распределения и плотность распределения непрерывной случайной величины?

10. Что такое математическое ожидание случайной величины? Какой вероятностный смысл имеет математическое ожидание случайной величины?

11. Как определяется математическое ожидание дискретной случайной величины? Как определяется математическое ожидание непрерывной случайной величины?

12. Что такое мода случайной величины? Как определяется мода дискретной случайной величины? Как определяется мода непрерывной случайной величины?

13. Что такое медиана непрерывной случайной величины?

14. Что такое дисперсия случайной величины? Какой вероятностный смысл имеет дисперсия? Что такое среднее квадратическое отклонение?

15. Как определяется дисперсия дискретной случайной величины? Как определяется дисперсия непрерывной случайной величины?

16. Что такое начальные и центральные моменты? Как центральные моменты выражаются через начальные моменты?

18. Что является начальным моментом первого порядка? Что является центральным моментом второго порядка?

19. Какие числовые характеристики являются характеристиками положения? Какие числовые характеристики являются характеристиками рассеивания?

20. Что такое нормальный закон распределения? Какие параметры имеет нормальный закон распределения?

21. Как определяется функция распределения стандартизованного нормального закона распределения? Как связаны функция стандартизованного нормального закона распределения и функция Лапласа?

22. В чем состоит правило трех сигм для нормального закона распределения?

Рекомендуемая литература по разделу

В предлагаемой литературе [1, 2] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу. Задание по вариантам к лабораторным работам 2 и 3 приведены в [7].

2.3. Раздел 3. Предельные теоремы теории вероятностей

Перечень изучаемых вопросов

1. Закон больших чисел.
2. Теорема Бернулли.
3. Центральная предельная теорема.
4. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.

Методические указания

Предельные теоремы теории вероятностей выражают связь теории вероятностей с практикой и являются основой для статистических исследований. Предельные теоремы определяют закономерности, которым подчинены вероятностные характеристики случайной величины при $n \to \infty$.

Совокупность предельных теорем рассматривает связи между теоретическими и эмпирическими описаниями характеристик случайных величин при $n \to \infty$ и объединяется термином «**закон больших чисел**». Закон больших чисел не имеет формулировки. Это объединение ряда теорем теории вероятностей.

Контрольные вопросы

1. Какие теоремы называются законом больших чисел?
2. Какие теоремы называются центральной предельной теоремой?
3. Сформулируйте неравенство Чебышева. Почему неравенство Чебышева имеет для практики ограниченное значение?

4. Каким условием должны удовлетворять случайные величины, чтобы к ним можно было применить теорему Чебышева?

5. Приведите примеры применения теоремы Чебышева на практике.

6. Сформулируйте теорему Чебышева. В чем состоит различие величины рассеяния каждой из достаточно большого числа независимых случайных величин, имеющих ограниченные дисперсии, и их среднего арифметического?

7. Сформулируйте теорему Бернулли. Сформулируйте теорему Бернулли, пользуясь «сходимости по вероятности».

8. Сформулируйте частный случай теоремы Чебышева, пользуясь понятием «сходимости по вероятности».

Рекомендуемая литература по разделу

В предлагаемой литературе [1, 2] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

2.4. Раздел 4. Выборки и числовые характеристики их распределений

Перечень изучаемых вопросов

1. Типы выборок и способы их формирования. Статистическое распределение выборки.

2. Графическое изображение статистического ряда – полигон и гистограмма.

3. Числовые характеристики выборочных распределений.

Методические указания

При изучении этой темы необходимо уяснить разницу между случайной величиной и генеральной совокупностью, между генеральной совокупностью и выборкой. Основной целью изучения статистических данных является установление статистических закономерностей, присущих массовым случайным явлениям. Поэтому особое внимание следует обратить на методы формирования выборки. Различные способы записи выборки служат для удобства анализа имеющихся данных.

При изучении теории вероятностей подробно рассматривались числовые характеристики случайных величин. Среди этих характеристик выделялись характеристики положения (математическое ожидание, мода, медиана, квантиль), характеристики рассеивания (дисперсия, коэффициент вариации), характеристики формы (асимметрия, эксцесс). Применительно к выборочным распределениям в математической статистике вводятся аналогичные характеристики. Эти значения всегда могут отличаться от теоретических значений и поэтому рассматриваются как оценки истинных значений.

Основные числовые характеристики выборочных распределений представлены в таблице 10.

Таблица 10

Числовые характеристики выборки

Характеристика	***Формула***
1	2
Средняя арифметическая (выборочная средняя)	$\overline{x}_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_i x_i n_i$
Выборочная мода	Значение признака, которому соответствует наибольшая частота (существует не всегда)
Выборочная медиана	Значение признака, приходящееся на середину ранжированного ряда наблюдений и зависит от четности объема выборки $\overline{Me} = \begin{cases} x_{k+1}, n = 2k+1 \\ x_k + x_{k+1}/2, n = 2k \end{cases}$
Размах вариации	$R = x_{max} - x_{min}$
Выборочная дисперсия	$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 n_i - (\overline{x}_{\text{в}})^2$
Исправленная выборочная дисперсия (для $n < 100$)	$S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}}$
Исправленное среднее квадратическое отклонение	$S = \sqrt{S^2}$
Выборочная асимметрия	$A_{\text{в}} = \frac{\sum (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^3 \cdot n_i}{n \cdot s^3}$
Выборочный эксцесс	$E_{\text{в}} = \frac{\sum (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^4 \cdot n_i}{n \cdot s^4} - 3$

По этой теме выполняется Лабораторная работа 4 «Вариационные ряды, их числовые характеристики и графическое изображение». Работа выполняется по вариантам в среде Mathcad. Также по этой теме выполняется расчетно-графическая работа.

Контрольные вопросы

1. Что такое выборка, объем выборки?
2. Что такое генеральная совокупность?
3. Какого типа могут быть результаты наблюдений? Какие наблюдения называются непрерывными? Какие наблюдения называются дискретными?
4. Что такое вариационный ряд? Что такое статистический ряд для: непрерывных наблюдений; дискретных наблюдений?
5. Как определяется объем выборки по сгруппированному ряду?
6. Как определяется число интервалов для интервального ряда?
7. Как представляется графически интервальный ряд? Как представляется графически сгруппированный ряд?
8. Как определяется эмпирическая функция распределения? В каком интервале может принимать значения эмпирическая функция распределения?
9. Чему равна площадь гистограммы, построенной в координатах (x, m), где m – частота. Чему равна площадь гистограммы, построенная в координатах $(x, m/n)$, где m/n – частость?
10. Как определяется среднее арифметическое выборки? Как определяется среднее арифметическое сгруппированного ряда, интервального ряда?
11. Как определяется выборочная дисперсия: для выборки, для сгруппированного ряда, для интервального ряда?
12. Как определяется выборочное среднее квадратическое отклонение?
13. Как определяется мода? Как определяется медиана? Как определяется коэффициент вариации?
14. Влияют ли крайние члены вариационного ряда на медиану, среднее арифметическое?

Рекомендуемая литература по разделу

В предлагаемой литературе [1, 2] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу. Задание по вариантам к Лабораторной работе 4 в [8]; задания по вариантам к расчетно-графической работе в [6].

2.5. Раздел 5. Основы теории точечного и интервального оценивания параметров распределения

Перечень изучаемых вопросов

1. Точечные оценки и их свойства.
2. Точечные оценки на основе метода моментов.

3. Метод максимального правдоподобия для дискретных и непрерывных случайных величин.

4. Сущность задач интервального оценивания.

5. Интервальное оценивание математического ожидания.

6. Интервальное оценивание дисперсии.

Методические указания

Задачи оценки – широкий класс математических задач. В математической статистике термин оценка относится к получению точечных и интервальных оценок неизвестных параметров распределения.

Виды статистических оценок

1. Точечные – оценка характеризуется одним числом.

2. Интервальные – оценка характеризуется двумя числами – концами интервала.

Методы получения точечных оценок

1. Метод моментов

Суть метода: сопоставление выборочных начальных $\overline{\vartheta}_k$ и центральных $\overline{\mu}_k$моментов с соответствующими теоретическими моментами ϑ_k и μ_k. Число уравнений должно соответствовать числу неизвестных параметров:

$$\vartheta_1 = M(X), \ \ \mu_2 = D(X);$$

$$\overline{\vartheta}_1 = \overline{x}_\text{в}, \quad \overline{\mu}_2 = S^2.$$

Оценки, получаемые с помощью метода моментов, обладают следующими свойствами: являются состоятельными; в случае нормального распределения – эффективными; в общем случае могут быть смещенными.

Получение точечных оценок методом моментов при заданном законе распределения приведено в таблице 11.

Таблица 11

Получение точечных оценок методом моментов

Закон	*Параметры*	*Уравнения*
Нормальный $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$	2 параметра – a, σ $M(X) = a$ $D(X) = \sigma^2$	$\overline{x}_\text{в} = \tilde{a}$ $S^2 = D(X) \Rightarrow$ $\Rightarrow S = \tilde{\sigma}$
Показательный $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$	1 параметр – λ $M(X) = \dfrac{1}{\lambda}$	$\tilde{\lambda} = \dfrac{1}{\overline{x}_\text{в}}$

Продолжение таблицы 11

Закон	***Параметры***	***Уравнения***
Равномерный $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & x<a;\ x>b\end{cases}$	2 параметра – a, b $M(X)=\dfrac{a+b}{2}$ $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{\tilde{a}+\tilde{b}}{2}=\overline{x}_{\text{в}},$ $\dfrac{\left(\tilde{b}-\tilde{a}\right)^2}{12}=S^2$
Биномиальный $P_n(k)=p^n q^{n-k}$	1 параметр – p $M(X)=np$	$\overline{x}_{\text{в}}=np,$ $\tilde{p}=\dfrac{\overline{x}_{\text{в}}}{n}$
Пуассона $P_n(k)\approx\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	1 параметр – λ $M(X)=\lambda=np$	$\tilde{\lambda}=\overline{x}_{\text{в}}$

2. Метод максимального правдоподобия

Суть метода: в качестве «наиболее правдоподобной» оценки неизвестного параметра θ берут значение, максимизирующее вероятность получить при *n* опытах данную выборку $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

Пусть

$$f_\theta(x)=\begin{cases}\text{плотность распределения } F_\theta, \text{если оно непрерывно,}\\ P_\theta(X=x), \qquad \text{если распределение } F_\theta \text{ дискретно.}\end{cases}$$

Функцией правдоподобия называется функция вида

$$f(x,\theta)=f_\theta(x_1)\cdot f_\theta(x_2)\cdot\ldots\cdot f_\theta(x_n).$$

Логарифмической функцией правдоподобия называется функция вида

$$L(x,\theta)=lnf(x,\theta).$$

Оценкой максимального правдоподобия $\tilde{\theta}$ неизвестного параметра θ называется такое значение $\tilde{\theta}$, при котором $f(x,\theta)$ достигает максимума. Часто удобнее максимизировать логарифмическую функцию правдоподобия, так как $f(x,\theta)$ и $L(x,\theta)$ достигают максимума в одних и тех же точках.

Достаточным условием существования локального максимума в $\tilde{\theta}$ служит неравенство вида:

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}L(x,\tilde{\theta})<0.$$

Алгоритм нахождения границ доверительного интервала

1. Получить точечную оценку $\tilde{\theta}$ искомого параметра.

2. Задать статистику $S(\theta,\tilde{\theta})$, содержащую параметр θ и его точечную оценку $\tilde{\theta}$ таким образом, чтобы функция распределения статистики была известна (точно или приближенно).

3. Задать уровень значимости $\alpha = 1 - \gamma$. Принять вероятности за пределами доверительного интервала слева и справа равные $\alpha/2$.

4. Определить квантили $q_{\alpha/2}$ и $q_{1-\alpha/2}$ распределения случайной величины $S(\theta, \tilde{\theta})$.

5. Записать неравенство $q_{\alpha/2} < S(\theta, \tilde{\theta}) < q_{1-\alpha/2}$, выразить из него искомый параметр θ.

Многолетней практикой решения задач математической статистики выработаны рекомендации по заданию статистик $S(\theta, \tilde{\theta})$ в каждой конкретной задаче (например, стандартное нормальное распределение, хи-квадрат, Фишера, Стьюдента).

По этой теме выполняется Лабораторная работа 5 «Точечное и интервальное оценивание параметров распределения». Работа выполняется по вариантам в среде Mathcad.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение точечной статистической оценки.
2. Какая оценка параметра распределения называется точечной?
3. Какими свойствами обладает выборочное среднее? Какими свойствами обладает выборочная дисперсия?
4. Какая числовая характеристика выборки является несмещенной для математического ожидания?
5. Какая числовая характеристика выборки является несмещенной для дисперсии?
6. Что понимается под термином «интервальная оценка параметра распределения»? Дайте определение доверительного интервала.
7. Что такое точность оценки и надежность оценки?
8. Что называется доверительной вероятностью? Какие значения она принимает?
9. Как изменится длина доверительного интервала, если увеличить: объем выборки; доверительную вероятность? Ответ обоснуйте.
10. Запишите формулу для нахождения доверительного интервала математического ожидания нормально распределенной случайной величины, если генеральная дисперсия: известна; неизвестна.

Рекомендуемая литература по разделу

В предлагаемой литературе [1, 2] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу. Выполняется Лабораторная работа 5, варианты в пособии [8].

2.6. Раздел 6. Проверка статистических гипотез

Перечень изучаемых вопросов

1. Виды гипотез. Критерий значимости.
2. Критическая область. Общий алгоритм проверки гипотез.
3. Проверка гипотез о виде распределения. Критерий хи-квадрат.
4. Другие задачи проверки гипотез.

Методические указания

Статистической гипотезой называется любое предположение о виде или параметрах неизвестного закона распределения.

Обратите внимание на то, что не всякое предположение может быть статистической гипотезой. Например, высказывание «на Марсе есть жизнь» не является статистической гипотезой, так как в ней не идет речь ни о законе распределения, ни о параметрах распределения случайной величины.

Проверяемую гипотезу называют **нулевой** $\boldsymbol{H_0}$. Противоположную ей гипотезу $\boldsymbol{H_1}$ называют **альтернативной**, **конкурирующей**.

Нулевая и альтернативная гипотезы – это две возможности выбора, осуществляемого в задачах проверки статистических гипотез.

Схема проверки нулевой гипотезы

1. Рассматривая выборочные данные и учитывая конкретные условия задачи, выдвигают нулевую гипотезу и альтернативную.

2. Так как решение о справедливости нулевой гипотезы принимается на основе выборочных данных, могут возникнуть ошибки двух родов.

Гипотеза $\boldsymbol{H_0}$	*Принимается*	*Отвергается*
верна	правильное решение	ошибка 1-го рода; вероятность ошибки 1-го рода равна уровню значимости α
неверна	ошибка 2-го рода; вероятность ошибки 2-го рода равна β	правильное решение

Замечание. *Возможно* ***одновременное*** *уменьшение α и β лишь при увеличении объема выборки.*

3. Задается уровень значимости α, значение которого обычно находится в интервале (0,001; 0,1). Задание таких значений связано с необходимостью использовать таблицы функций распределений. Применение средств

компьютерной математики позволяет находить характеристики распределений при произвольных значениях α.

4. Используя выборочные данные, вводится статистический критерий – некоторая функция *K*. Эти функции подчинены известному закону распределения (хи-квадрат распределение, t-распределение, нормальное и др.).

5. Определяется тип критической области и критические точки.

$\boldsymbol{H_1}$	**Критическая область**
$\boldsymbol{\theta} < d$	$\boldsymbol{w} \in (-\infty;\ -k_{\text{кр}1})$ - левосторонняя
$\boldsymbol{\theta} > d$	$\boldsymbol{w} \in (k_{\text{кр}\mathbf{2}};\ \infty)$ - правосторонняя
$\boldsymbol{\theta = d}$	$\boldsymbol{w} \in (-\infty;\ -k_{\text{кр}1}) \cup (k_{\text{кр}2};\ \infty)$ - двусторонняя

6. По выборочным данным вычисляется числовое значение критерия $k_{\text{наблюдаемое}}$. Применяется правило:

- $k_{\text{н}} \in \boldsymbol{w}$**,** то гипотеза H_0 отвергается и принимается альтернативная;

- $k_{\text{н}} \notin \boldsymbol{w}$**,** то гипотеза H_0 принимается.

Принятие гипотезы H_0 *следует расценивать не как раз и навсегда установленный, абсолютно верный содержащийся в ней факт, а лишь как достаточно правдоподобное, не противоречащее опыту утверждение.*

По своему прикладному содержанию статистические гипотезы можно подразделить на несколько основных типов: о законе распределения; о числовых значениях параметров; о равенстве числовых характеристик генеральных совокупностей; об однородности выборок (т. е. принадлежности их одной и той же генеральной совокупности).

Схема проверки гипотезы по критерию Пирсона

1. По выборке объема *n* строят статистический ряд (дискретный или интервальный) и его графическое изображение – полигон или гистограмму.

2. По данным предыдущих исследований или по предварительным данным выдвигают гипотезу H_0 о модели закона распределения СВ *X* с функцией распределения *F(x)*.

3. Параметры выбранного закона неизвестны, поэтому их заменяют наилучшими оценками по выборке.

4. Используя гипотетическую функцию распределения *F(x)*, определяют теоретические значения вероятностей $p_i = P(X = x_i)$ или $p_i = P(\alpha < x_i \le \beta)$, $\sum p_i = 1$.

5. Рассчитывают теоретические частоты $nt_i = p_i n$, $\sum nt_i = n$.

6**.** Рассчитывают наблюдаемое значение критерия Пирсона:

$$\chi^2_{\text{H}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - nt_i)^2}{nt_i},$$

где n_i – эмпирические частоты, $\sum n_i = n$.

7. Задаваясь уровнем значимости α, находят критическую область (она всегда правосторонняя) $\boldsymbol{w} \in \left(\chi^2{}_{\text{кр}};\ \infty\right)$. Значение $\chi^2{}_{\text{кр}}(1-\alpha, m-r-1)$ определяют по специальным таблицам, где m – количество промежутков, r – число параметров выбранного закона, оцениваемых по выборке.

8. Если $\chi^2_{\text{Н}} \in w$, то гипотеза отклоняется; если $\chi^2_{\text{Н}} \notin w$ – проверяемая гипотеза согласуется с выборочными данными, и она принимается.

Замечания

1. Если в каком-нибудь интервале число теоретических частот $nt_i < 5$, *необходимо объединить соседние интервалы.*

2. На практике если решение об отклонении нулевой гипотезы принято при близких значениях $\chi^2_{\text{Н}}$ *и* $\chi^2{}_{\text{кр}}$, *перед переходом к проверке другой гипотезы целесообразно повторить проверку с увеличением объема выборки.*

Схемы проверки гипотез о числовых значениях сведены в таблицу 12.

Таблица 12

Проверка гипотез о значениях числовых характеристик

Гипотеза H_0	Условие	Статистический критерий	
		$k_{\text{наблюдаемое}}$	$k_{\text{критическое}}$
$a = a_0$	σ^2 неизвестна	$t = \dfrac{(\overline{x_{\text{в}}} - a_0)\sqrt{n-1}}{S}$	$qt(1\text{-}\ \alpha, n-1)$
$a = a_0$	σ^2 известна	$T = \dfrac{(\overline{x_{\text{в}}} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma}$	$qnorm(1\text{-}\ \alpha, 0{,}1)$
$\sigma = \sigma_0$	a – произвольное	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^{\text{лев}}_{\text{кр}} = qchisq(\frac{\alpha}{2}, n-1)$ $\chi^{\text{пр}}_{\text{кр}} = qchisq(1-\dfrac{\alpha}{2}, n-1)$
$p(A) = {}$ $= p_0$	$n > 30$	$T = \dfrac{(w-p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$	$qnorm(1\text{-}\ \alpha, 0{,}1)$

Схемы проверки гипотез о равенстве числовых характеристик сведем в таблицу 13, в которой альтернативная гипотеза выбирается двусторонней.

Таблица 13

Проверка гипотез о равенстве числовых характеристик двух совокупностей

Гипотеза H_0	Условие	Статистический критерий	
		$k_{\text{наблюдаемое}}$	$k_{\text{критическое}}$
$a_1 = a_2$	Дисперсии σ_1^2 и σ_2^2 известны	$T = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$qnorm\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0{,}1\right)$
$a_1 = a_2$	Дисперсии неизвестны, но равны $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$T = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$, $S = \sqrt{\dfrac{S_1^2(n_1 - 1) + S_1^2(n_1 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}}$	$t^{\text{лев}} = qt\left(\frac{\alpha}{2}, k\right)$ $t^{\text{пр}} = qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, k\right)$ $k = n_1 + n_2 - 2$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$X_1 \sim N(a_1 \sigma_1)$ $X_2 \sim N(a_2 \sigma_2)$	$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ (в числителе должно быть большее значение)	$f^{\text{лев}} = qF\left(\frac{\alpha}{2}, n_1 - 1, n_2 - 1\right)$ $f^{\text{пр}} = qF\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n_1 - 1, n_2 - 1\right)$
$p_1 = p_2$	$n_1 > 30$ $n_2 > 30$	$T = \dfrac{w_1 - w_2}{\sqrt{\overline{p}(1 - \overline{p})}} \sqrt{\dfrac{1}{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ $w_1 = \dfrac{m_1}{n_1}, w_2 = \dfrac{m_2}{n_2}$ $\overline{p} = \dfrac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$	$qnorm\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0{,}1\right)$

По этой теме выполняется Лабораторная работа 6 «Проверка гипотезы о виде закона распределения СВ по критерию Пирсона» и Лабораторная работа 7 «Статистические гипотезы». Работы выполняются по вариантам в среде Mathcad. Также выполняется РГР «Проверка статистических гипотез (сравнение выборочной с математическим ожиданием, сравнение двух дисперсий, двух математических ожиданий)».

Контрольные вопросы

1. Что такое статистическая гипотеза? Приведите пример.
2. Какие гипотезы выдвигаются в задачах проверки гипотез?
3. Какая гипотеза называется нулевой гипотезой?
4. Какая гипотеза называется альтернативной гипотезой?
5. Что такое ошибка 1-го рода? Что такое ошибка 2-го рода?
6. Как определяются вероятности ошибок 1-го и 2-го рода?
7. Если вероятность ошибки 1-го рода уменьшается, то что происходит с вероятностью ошибки 2-го рода?
8. Что такое критическая точка? Что такое критическая область?
9. Что такое критерий для проверки гипотез?
10. В каком случае отвергается нулевая гипотеза? В каком случае принимается нулевая гипотеза?
11. Критерий принятий нулевой гипотезы при сравнении двух средних.
12. Критерий принятий нулевой гипотезы при сравнении двух дисперсий.
13. Изложите общую схему проверки статистических гипотез.
14. Что такое критерий значимости?
15. Что такое уровень значимости? Как он связан с доверительной вероятностью?
16. Поясните смысл ошибок первого и второго рода, возникающих при проверке гипотез.
17. Какие выводы делает исследователь, если гипотеза H_0 отклоняется? Какие выводы делает исследователь, если гипотеза H_0 принимается?
18. Как связаны вид альтернативной гипотезы и тип критической области?

Рекомендуемая литература по разделу

В предлагаемой литературе [1, 2] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу. Задание по вариантам к лабораторным работам 6 и 7 в [8]; задания по вариантам к расчетно-графической работе в [6].

2.7. Раздел 7. Основы регрессионного и корреляционного анализа

Перечень изучаемых вопросов

1. Задачи регрессии.
2. Линейная регрессия. Метод наименьших квадратов.
3. Оценки параметров линейной регрессии, их свойства.

4. Подходы к анализу адекватности линейной регрессии. Надежность оценок линейной регрессии.

5. Коэффициент корреляции, его точечная оценка. Проверка значимости.

Методические указания

Функциональная зависимость – это зависимость, при которой каждому значению одной (или нескольких) переменной соответствует определенное значение другой переменной (зависимой).

Пусть наблюдению подлежит случайная величина Y, зависящая от одной или нескольких других случайных величин X_1, X_2, …, X_k, которые называются **факторами**. В общем случае число факторов может быть неизвестно. Исследователь выбирает k наиболее существенных факторов. В этих условиях функциональная зависимость между Y и X недостижима, так как неучтено влияние неопределенных факторов, т. е. $y \approx f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ или $y = f(x_1, x_2, \dots, x_k) + \varepsilon$, где ε – стохастическая переменная, включающая влияние неучтенных факторов в модели. Говорят, что между Y и X существует ***стохастическая*** **(*или статистическая*, *вероятностная*)** ***связь***. Пример статистической связи – зависимость урожайности от количества внесенных удобрений и механизации предприятия. В силу неоднозначности статистической зависимости для исследователя представляет интерес усредненная по X схема зависимости.

Корреляционной зависимостью между двумя переменными величинами называется функциональная зависимость между значениями одной из них и условным математическим ожиданием другой.

Корреляционная зависимость может быть представлена в виде уравнения, которое называется модельным уравнением регрессии (или просто уравнением регрессии).

Задача корреляционного анализа – выявление связи между случайными переменными и оценка ее тесноты.

Задача регрессии – выбор модели зависимости между переменными и определение оценок неизвестных параметров этой модели.

Выбор модели регрессионных зависимостей осуществляется исходя из теоретических представлений о возможной взаимосвязи между переменными или из визуального анализа графиков наблюдений.

В зависимости от количества включенных в модель факторов X модели делятся на *однофакторные* (парная модель регрессии) и *многофакторные* (модель множественной регрессии).

В зависимости от вида функции $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ модели делятся на *линейные* и *нелинейные*.

Статистический анализ и построение линейной регрессии приведены в таблице 14.

Таблица 14

Линейная регрессия

<table>
<tr>
<td>Однофакторная регрессия
(на наблюдаемую переменную Y влияет один фактор X)
$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$
Замечание. Уравнение называется простой линейной регрессией или парной линейной регрессией</td>
<td>Множественная регрессия
(на наблюдаемую переменную Y влияют несколько факторов $X_1, X_2, \dots, X_p$)
$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_p x_p + \varepsilon$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Для оценки неизвестных параметров β применяют метод наименьших квадратов (МНК), суть которого состоит в минимизации суммы квадратов отклонений фактических значений результатного признака y_i от его расчетных значений $\hat{y}_i$, т. е.
$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 \to min$$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Алгоритм МНК в форме обобщенного обращения матрицы</td>
</tr>
<tr>
<td>1. Ввести исходные данные – массивы Y и X.
2. Составить матрицу $A_{n\text{x}2}$, n – число наблюдений, 2 – число неизвестных параметров:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$$</td>
<td>1. Ввести исходные данные – массивы Y и $X_1, X_2, \dots, X_p$.
2. Составить матрицу $A_{n\text{x(p+1)}}$, n - число наблюдений, p+1 – число неизвестных параметров:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} \dots & x_{p1} \\ \dots & \dots \dots & \dots \\ 1 & x_{1n} \dots & x_{pn} \end{pmatrix}$$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">3. Матрица неизвестных параметров $\beta = (A^T A)^{-1} A^T Y$.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Качество уравнения регрессии определяется по величине средней ошибки аппроксимации
$$\overline{A} = \frac{1}{n}\sum\left|\frac{y_i - f(x_i)}{y_i}\right| \cdot 100\ \%$$
(уравнение можно использовать как прогностическую модель, если $\overline{\text{A}} \leq 12\ \%$)</td>
</tr>
</table>

Продолжение таблицы 14

<table>
<tr><td colspan="2">Влияние совокупности факторов на результат Y</td></tr>
<tr><td>Выборочный линейный коэффициент корреляции
(характеризует степень взаимосвязи пары случайных величин, если зависимость между ними соответствует прямой линии)
$$r_{xy} = r_{yx} = \frac{\sum(x_i - \overline{x}_{\text{в}})(y_i - \overline{y}_{\text{в}})}{s_x s_y}$$
$-1 \le r \le 1$;
$|r| = 1$ – линейная функциональная связь, $\beta_1 \ne 0$;
$r = 0$ – Y и X не коррелированы</td><td>Выборочный сводный коэффициент корреляции R_s
(характеризует связь Y со всеми факторами, входящими в уравнение)
$$R_s = \sqrt{1 - \frac{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{nD_{\text{в}}(y)}}$$
$0 \le R_s \le 1$;
$R_s = 1$ – Y имеет функциональную связь с совокупностью факторов;
$R_s = 0$ – Y не коррелирован ни с одним из факторов</td></tr>
<tr><td colspan="2">Проверка значимости выборочного коэффициента корреляции (t-критерий Стьюдента)
H_0 – изучаемый фактор (факторы) не оказывает существенного влияния на результат, т. е. коэффициент корреляции генеральной совокупности равен 0.
H_1 – коэффициент корреляции генеральной совокупности отличен от 0. $t_{\text{критическое}} = qt(1 - \frac{\alpha}{2}, n - p - 1)$
p – число факторов, влияющих на результат,
n – число измерений,
w – критическая область двусторонняя</td></tr>
<tr><td>$$t_{\text{набл}} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$</td><td>$$t_{\text{набл}} = \frac{R_s\sqrt{n-p-1}}{\sqrt{1-{R_s}^2}}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Проверка значимости уравнения регрессии (F-критерий Фишера) – установить, соответствует ли математическая модель экспериментальным данным и достаточно ли включенных в уравнение факторов (одного или нескольких) для описания зависимой переменной.
H_0 – уравнение регрессии не надежное;
H_1 – уравнение регрессии надежное.
$$F_{\text{критическое}} = qF(1 - \alpha, p, n - p - 1)$$
p – число факторов, влияющих на результат,
n – число измерений,
w – критическая область левосторонняя</td></tr>
<tr><td>$$F_{\text{наблюдаемое}} = \frac{r_{xy}^2(n-2)}{1-r_{xy}^2}$$</td><td>$$F_{\text{наблюдаемое}} = \frac{R^2(n-p-1)}{1-R^2}$$</td></tr>
</table>

Продолжение таблицы 14

Коэффициенты эластичности и детерминации
1. Коэффициент эластичности $E_i = \beta_i \frac{\overline{x}_{\text{в}i}}{\overline{y}_{\text{в}}}$ показывает, на сколько процентов в среднем изменяется результативный признак Y при изменении факторного признака X_i на 1%. Высокий уровень эластичности означает сильное влияние независимой переменной на объясняемую переменную. 2. Коэффициент детерминации r_{xy}^2 (R^2) показывает долю вариации результативного признака, объясненную вариацией факторного признака. Чаще всего, давая интерпретацию коэффициента детерминации, его выражают в процентах

По этой теме выполняется Лабораторная работа 8 «Корреляционно-регрессионный анализ». Работы выполняются по вариантам в среде Mathcad.

Контрольные вопросы

1.Что такое стохастическая связь между случайными переменными?

2. Как можно оценить стохастическую связь?

3.Что оценивает выборочный коэффициент корреляции?

4.Что оценивает ранговый коэффициент корреляции?

5. Как определяется значимость коэффициента корреляции?

6.Что называется регрессией y на x?

7. Как задается парная линейная регрессия?

8. Какой метод используется для оценки коэффициентов парной линейной регрессии?

9. Как определяются коэффициенты парной линейной регрессии?

10. Как оценивается качество аппроксимации результатов наблюдений регрессионной моделью?

11. Сформулируйте основные задачи корреляционного анализа.

12. Какой вывод делает исследователь, если выборочный коэффициент корреляции равен: $r = -0{,}75; r = 0{,}92; r = 0{,}15$.

13. Что означает «проверить значимость коэффициента корреляции»?

14. Как проверить значимость коэффициента корреляции?

Рекомендуемая литература по разделу

В предлагаемой литературе [1, 2] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу. Задание по вариантам к Лабораторной работе 8 в [8].

2.8. Раздел 8. Теория систем массового обслуживания

Перечень изучаемых вопросов

1. Системы массового обслуживания, основные элементы, классификация.
2. Графическое изображение СМО. Граф состояний.
3. Показатели эффективности одноканальных и многоканальных систем с отказами.
4. Показатели эффективности одноканальных и многоканальных систем с очередью (ограниченной и неограниченной).

Методические указания

Системы массового обслуживания (СМО) представляют собой системы специфического вида. *Системой* называется целостное множество взаимосвязанных элементов, которые нельзя разделить на независимые подмножества.

Основными элементами СМО являются: входной поток заявок; очередь; каналы обслуживания (приборы, операторы, продавцы и пр.); выходной поток заявок (обслуженные заявки). Классификация СМО и показатели эффективности приведены в таблицах 15, 16.

Таблица 15

Классификация СМО

По числу каналов	
одноканальные	***многоканальные***
По дисциплине обслуживания	
с отказами (заявка получает отказ при условии занятости каналов, например, вызовов абонента через АТС)	***с ожиданием*** (***очередью***) (в случае занятости системы заявка поступает в очередь, например, обслуживание покупателей в магазине)

Показатели эффективности СМО описывают ее возможность справляться с потоком заявок. Формулы для расчета показателей эффективности приведены в пособии [8].

По этой теме выполняется Лабораторная работа 9 «Расчет показателей эффективности систем массового обслуживания». Работы выполняются по вариантам в среде Mathcad.

Таблица 16

Показатели эффективности

Показатели эффективности	
СМО с отказами	***СМО с очередью***
A – абсолютная пропускная способность СМО (среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени); Q – относительная пропускная способность (средняя доля пришедших заявок, обслуживаемых СМО); P_{serv} – вероятность обслуживания (вероятность того, что заявка будет принята на обслуживание); P_{otk} – вероятность отказа (вероятность того, что заявка покинет СМО необслуженной); $\overline{k}$ – среднее число занятых каналов (для многоканальной системы).	К показателям эффективности СМО с отказами добавляются: L_{CMO} – среднее число заявок в системе; $L_{оч}$ – среднее число заявок в очереди; $\overline{L}_{serv}$ – среднее число заявок, находящихся по обслуживанием; $\overline{t}_{wait}$ – среднее время пребывания заявки в очереди; $\overline{t}_{\text{СМО}}$ – среднее время пребывания заявки в СМО; $P_{зан}$ – вероятность того, что канал занят(степень загрузки канала).

Контрольные вопросы

1. Дайте краткое описание модели СМО с отказами. Какими показателями характеризуется функционирование СМО с отказами?
2. Как рассчитывается вероятности P0 и P1?
3. Что такое относительная пропускная способность?
4. Что такое абсолютная пропускная способность?
5. Приведите примеры СМО с отказами.
6. Дайте краткое описание многоканальной модели СМО с отказами.
7. Какими показателями характеризуется функционирование многоканальной СМО с отказами?
8. Дайте краткое описание одноканальной модели СМО с ограниченной очередью.
9. Как подсчитывается среднее число заявок в системе?
10. Приведите примеры СМО с ограниченной очередью.
11. Что такое дисциплина обслуживания? Назовите примеры наиболее известных дисциплин.
12. От каких факторов зависят в основном значения показателей СМО с неограниченной очередью? Как можно влиять на эти факторы для улучшения показателей?

13. Дайте краткое описание многоканальной модели СМО с ожиданием.

14. Какими показателями характеризуется функционирование многоканальной СМО с ожиданием?

15. Как рассчитываются предельные вероятности многоканальной СМО с неограниченной и ограниченной очередью?

16. Приведите примеры многоканальной СМО с ограниченной и неограниченной очередью.

Рекомендуемая литература по разделу

В предлагаемой литературе [8] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

3. ТРЕБОВАНИЯ К АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

3.1. Текущая аттестация

В ходе изучения дисциплины студентам предстоит пройти следующие этапы текущей аттестации: выполнить задания по темам практических занятий, выполнить девять лабораторных работ, выполнить две расчетно-графические работы по математической статистике.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества усвоения студентами учебного материала и стимулирования их учебной работы. Он может осуществляться в ходе всех видов занятий в форме, избранной преподавателем или предусмотренной рабочей программой дисциплины.

Текущий контроль предполагает постоянный контроль преподавателем качества усвоения учебного материала, активизацию учебной деятельности студентов на занятиях, побуждение их к самостоятельной систематической работе. Он необходим обучающимся для самоконтроля на разных этапах обучения. Их результаты учитываются выставлением преподавателем оценок в журнале учета успеваемости и в ходе ежемесячной аттестации.

При текущем контроле успеваемости учитывается: выполнение обучающимся всех работ и заданий, предусмотренных рабочей программой дисциплины, а именно выполнение заданий на практических занятиях; самостоятельную работу обучающихся; посещаемость аудиторных занятий.

Результаты текущего контроля успеваемости оцениваются по пятибалльной шкале:

- оценка **«отлично» (5)** – график самостоятельной работы и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся на 100 % и более (с опережением);

- оценка **«хорошо» (4)** – график самостоятельной работы и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся на 75 % и более;

- оценка **«удовлетворительно» (3)** – график самостоятельной работы и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся на 50 % и более;

- оценка **«неудовлетворительно» (2)** – график самостоятельной работы и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся менее чем на 50 %.

3.2. Условия получения положительной оценки

Промежуточная аттестация по дисциплине проводится в четвертом семестре в форме зачета с оценкой, во пятом семестре – в форме экзамена.

Зачет с оценкой. Оценка «отлично» выставляется в случае, если для задания приведено полное теоретическое обоснование, расчеты выполнены по правильным формулам и алгоритмам и без ошибок, выводы приведены полностью и по существу, студент понимает и может пояснить ход решения и привести экспликацию любой формулы, а также может дать развернутый и полный ответ на любой из контрольных вопросов, отчет оформлен в соответствии с установленными требованиями.

Оценка «хорошо» выставляется в случае, если теоретическое обоснование приведено с пробелами, расчеты выполнены по правильным формулам и алгоритмам, но с некоторыми ошибками, отчет оформлен с некоторыми нарушениями требований, однако выводы приведены полностью и по существу, а студент понимает и может пояснить ход решения и привести экспликацию любой формулы, а также может дать ответ на любой из контрольных вопросов.

Оценка «удовлетворительно» выставляется в случае, если теоретическое обоснование приведено формально и излишне кратко, расчеты выполнены по правильным формулам и алгоритмам, но со множеством арифметических ошибок, отчет оформлен с нарушениями требований, выводы приведены не полностью, ответы на контрольные вопросы вызывают затруднения и (или) излишне лаконичны, однако студент понимает и может пояснить ход решения и привести экспликацию любой формулы, а также может дать ответ на любой из контрольных вопросов.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется в случае, если теоретическое обоснование приведено формально и излишне кратко, или не приведено вовсе, расчеты выполнены с использованием неправильных алгоритмов и формул, отчет оформлен с нарушениями требований, выводы приведены не полностью или не приведены вовсе, студент плохо понимает (или не понимает вовсе) и не может пояснить ход решения, а также не может ответить на контрольные вопросы.

К экзамену допускаются студенты, имеющие по всем текущим контролям положительные оценки.

Экзамен проводится в соответствии с перечнем вопросов к экзамену, размещенному в ЭИОС КГТУ и представленному в Приложении 1.

Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса и три задачи. Выбор экзаменационных вопросов для включения в билет осуществляется из принципа равной сложности всех билетов и наибольшего охвата каждым билетом учебного материала.

Подготовка к экзамену ведется по конспекту лекций, учебникам и учебным пособиям, рекомендуемым к изучению в начале курса. В ходе подготовки к экзамену преподаватель проводит консультацию, на которой доводится порядок проведения экзамена и даются ответы на вопросы, вызвавшие затруднения у студентов в процессе подготовки.

Экзамен проводится в день, указанный в расписании занятий.

Студент, прибывший для сдачи экзамена, получает билет на бланке установленной формы и занимает указанное ему место для подготовки. После получения билета в течение 40 минут студент имеет право готовиться к ответу. На ответ по билету отводится до 15 минут.

Готовясь к ответу, обучающийся все доказательства, формулы, структурные схемы, графики и т.д. записывает и изображает на полученном листе в форме удобной для использования при устном ответе экзаменатору.

Ответ обучающегося должен быть четким, конкретным и кратким. После ответа преподаватель задает вопросы, помогающие ему выявить ход мыслей, логику рассуждений и способность применять полученные знания в практической деятельности. Если требуется уточнить оценку или степень знаний обучающегося по тому или иному вопросу, задаются дополнительные вопросы.

Студентам, пользующимся на экзамене материалами, различного рода записями, техническими средствами, не указанными в перечне разрешенных, выставляется оценка «**неудовлетворительно**», о чем докладывается заведующему кафедрой.

Знания, умения и навыки студентов определяются оценками «**отлично**», «**хорошо**», «**удовлетворительно**», «**неудовлетворительно**». Общая оценка объявляется курсанту СРАЗУ после окончания его ответа на билет экзамена.

Положительная оценка («**отлично**», «**хорошо**», «**удовлетворительно**») заносится в ведомость и зачетную книжку по окончании экзамена. Оценка «**неудовлетворительно**» выставляется только в ведомость.

Компетенции в той части, в которой они должны быть сформированы в рамках изучения дисциплины, могут считаться сформированными в случае, если студент получил на экзамене положительную оценку.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / В. Е. Гмурман. – 8-е изд., стер. – М. : Высш. шк. 2002. – 479 с. : ил. – ISBN 5060042146.

2. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие / В. Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М. : Высш. шк. 2004. – 404 с. : ил. – ISBN 506004212X.

Дополнительная литература

3. Бочаров, П. П. Теория вероятностей. Математическая статистика: учебное пособие / П. П. Бочаров, А. В. Печенкин. – М. : Гардарика, 1998. – 328 с.

4. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. [Текст]: учебное пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М.: ОНИКС 21 век: Мир и образование. Ч. 2. – 2003. – 416 с. : ил. – Библиограф : с. 416. – ISBN 5-329-00327-X. – ISBN 5-94666-009-8: 80.

5. Авдеева Н. Н. Математика. Теория вероятностей и математическая статистика : Учебно-методическое пособие с контрольными заданиями для студентов всех специальностей и направлений / Н. Н. Авдеева, С. Н. Мухина. – Калининград : Изд-во БГАРФ, 2013. – 66 с.

6. Корнева И. П. Специальные главы математики. Теория вероятностей и статистика : учебное пособие. – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2019. – с. 151.

7. Мухина, С. Н. Компьютерная математика в среде Mathcad : Учебное пособие. ИЗД–ВО БГАРФ, 2014. – 116 с.

8. Мухина, С. Н. Методы математической обработки информации. Реализация в среде Mathcad : Учебное пособие. Изд-во БГАРФ, 2019. – 115 с.

Приложение

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Тестовые задания предназначены для оценки в рамках текущего контроля успеваемости знаний, приобретенных студентами на лекционных и практических занятиях, и для измерения соответствующих индикаторов достижения компетенции.

Содержание теста определяется в соответствии с содержанием дисциплины пропорционально учебному времени, отведенному на изучение разделов, перечисленных в рабочей программе модуля. Тестовый вариант содержит 30 заданий закрытого типа с возможностью одиночного правильного ответа. Время выполнения теста – 70 минут.

Тестовые задания разработаны в программной среде Moodle (ссылка на электронный ресурс:

https://eios.klgtu.ru/course/view.php?id=9542;

https://cloud.mail.ru/public/Ep4h/8GzWA3pxp).

ТИПОВЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ К ЗАЧЕТУ С ОЦЕНКОЙ (ЧЕТВЕРТРЫЙ СЕМЕСТР)

1. Три подхода к определению вероятности события.

2. Действия над событиями. Условная вероятность события. Теорема умножения для зависимых и независимых событий.

3. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

4. Повторные независимые испытания: формула Бернулли, формула Пуассона, локальная и интегральная теоремы Муавра – Лапласа.

5. ДСВ, числовые характеристики, функция распределения.

6. Математическое ожидание и дисперсия СВ, свойства мат. ожидания и дисперсии.

7. НСВ, функция плотности, ее свойства, числовые характеристики НСВ.

8. Основные законы распределения ДСВ: биномиальный, Пуассона, геометрический, гипергеометрический. Их числовые характеристики.

9. Основные законы распределения НСВ: показательный, равномерный, нормальный, их свойства.

10. Нормальный закон распределения, правило трех сигм.

11. Задан закон распределения дискретной случайной величины:

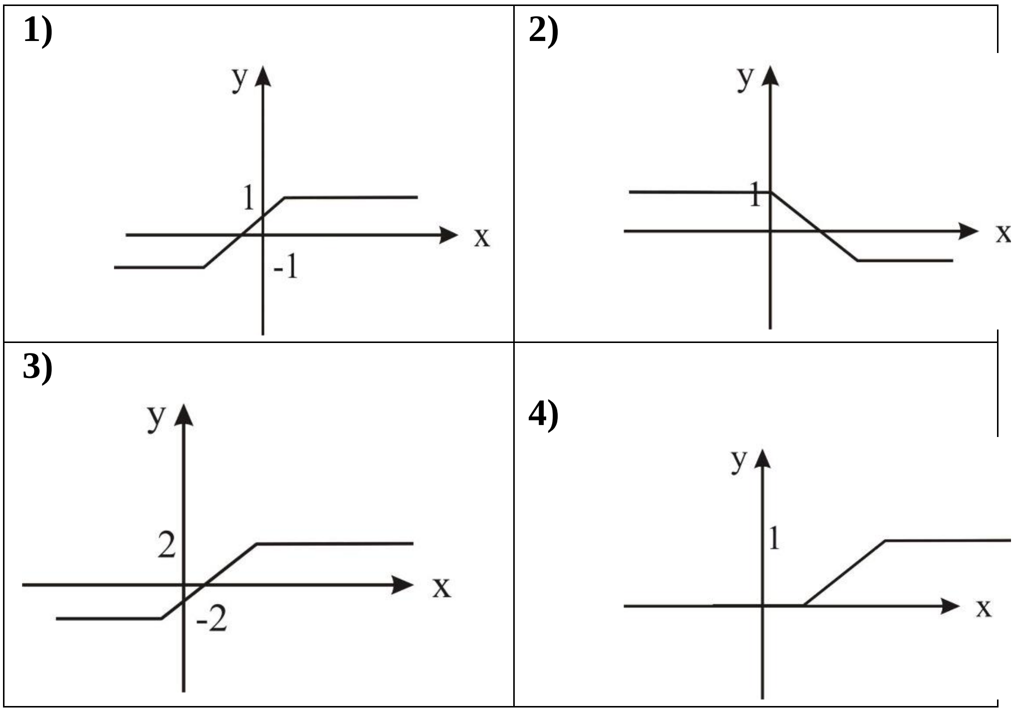
X	1	2	3	5	7
P	0,1	0,2	y	0,3	0,2

Найти y. Построить многоугольник и функцию распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

12. $M(X) = 6, M(Y) = 4$. Используя свойства математического ожидания, найдите $M(2X + 3Y)$.

13. В ящике 2 белых шара и 3 черных. Шары достают до тех пор, пока не появится белый шар. Составить закон распределения случайной величины X – числа испытаний.

14. Какой из этих графиков может соответствовать функции распределения случайной величины? Ответ обосновать.



15. Задана функция распределения случайной величины X. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, вероятность попадания случайной величины в интервал (2; 3).

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{x-1}{4}, & 1 \le x \le 5, \\ 1, & x \ge 5. \end{cases}$$

16. Нормально распределенная случайная величина имеет следующую функцию распределения $F(x) = 0{,}5 + \Phi(x - 1)$. Записать формулу плотности вероятности. Определить, из какого интервала (1;2) или (2;6) она примет значение с большей вероятностью.

ТИПОВЫЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ (ПЯТЫЙ СЕМЕСТР)

1. Основные законы распределения ДСВ: биномиальный, Пуассона, геометрический, гипергеометрический. Их числовые характеристики.

2. Основные законы распределения НСВ: показательный, равномерный, нормальный, их свойства.

3. Нормальный закон распределения, правило трех сигм.

4. Вариационные ряды, их графическое изображение (полигон, гистограмма), числовые характеристики вариационного ряда.

5. Методы нахождения точечных оценок (метод моментов).

6. Интервальное оценивание. Доверительная вероятность и предельная ошибка выборки.

7. Статистическая гипотеза и общая схема ее проверки.

8. Построение теоретического закона распределения по опытным данным. Критерий Пирсона.

9. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости. Линейная парная регрессии. Проверка значимости уравнения регрессии. Проверка значимости параметров связи.

10. Линейная множественная регрессия. Проверка значимости уравнения регрессии. Проверка значимости параметров связи. Явление мультиколлинеарности.

11. Нелинейная однофакторная модель регрессии. Аппроксимация многочленами.

12. Случайный процесс и его характеристики. Марковский случайный процесс.

13. Уравнения Колмогорова. Предельные вероятности состояний.

14. Процессы гибели и размножения, их характеристики.

15. СМО: классификация, показатели эффективности. Графическое изображение (граф состояний)

Локальный электронный методический материал

Светлана Николаевна Мухина

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Редактор М. А. Дмитриева

Уч.-изд. л. 1,5. Печ. л. 2,6.

Издательство федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Калининградский государственный технический университет».
236022, Калининград, Советский проспект, 1.