ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО РЫБОЛОВСТВУ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Калининградский государственный технический университет»

Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота

Е.И. КОРОТКАЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА В РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧ

ЧАСТЬ 27

ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ ГИРОСКОПА

Сборник задач
для курсантов и студентов
инженерных специальностей
всех форм обучения

Калининград
Издательство БГАРФ
2022

УДК 531.1(073)

Короткая, Е.И. **Теоретическая механика в решениях задач. Часть 27. Приближенная теория гироскопа**: сборник задач для курсантов и студентов инженерных специальностей всех форм обучения / Е.И. Короткая; БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ». – Калининград: Издательство БГАРФ, 2022. – 23 с. – Библиогр.: с. 23. – Текст: непосредственный.

Сборник задач (часть 27) рассмотрен и одобрен на заседании кафедры «Инженерная механика» 19 октября 2021 г., протокол № 2.

Библиогр. – 7 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Балтийской государственной академии рыбопромыслового флота от 27.01.22 г., протокол № 1.

Рецензенты: **Малыгина Е.С.**, канд. физ.-мат. наук,
доцент Института физико-математических наук
и информационных технологий БФУ им. И. Канта;
Осняч А.А., канд. техн. наук, доцент кафедры
инженерной механики БГАРФ

УДК 531.1(073)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник задач «Теоретическая механика в решениях задач» является результатом многолетней преподавательской деятельности его авторов в БГАРФ и предназначен для курсантов и студентов инженерных специальностей, обучающихся в Балтийской государственной академии рыбопромыслового флота для углубленного изучения курса теоретической механики.

В связи с большим объемом материала, а также для удобства пользования, сборник задач разделен на части, которые содержат краткие теоретические основы различных разделов курса теоретической механики и примеры решения задач, относящихся к этим разделам.

Двадцать седьмая часть настоящего сборника задач рассматривает раздел «Приближенная теория гироскопа».

27. ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ ГИРОСКОПА

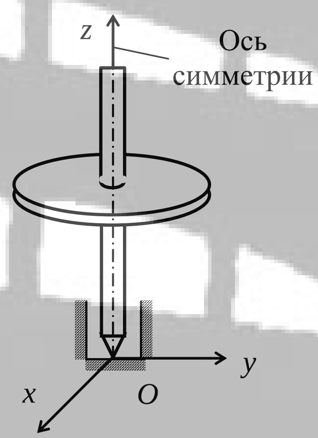
27.1. Теоретические основы

Гироскоп

Гироскопом называется симметричное твердое тело, угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ вращения которого вокруг оси симметрии значительно превосходит по модулю угловую скорость $\boldsymbol{\omega_1}$ вращения самой оси симметрии:

$$\omega \gg \omega_1.$$

Так, в современных гироскопических приборах угловая скорость ω собственного вращения достигает иногда 40000–50000 об/мин, а угловая скорость вращения $\boldsymbol{\omega_1}$ оси гироскопа равна одному обороту за 2–3 минуты и даже за 20 минут (для гирокомпасов).

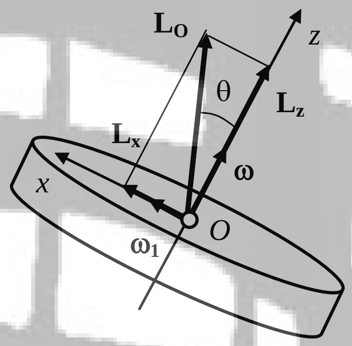


Рассмотрим сначала случай, когда гироскоп движется около неподвижной точки. Если выбрать начало координат в этой точке O и направить ось z по оси симметрии гироскопа, то оси x, y, z оказываются главными осями инерции гироскопа в неподвижной точке. Момент инерции I_z является полярным моментом инерции гироскопа, а I_x и I_y – экваториальными моментами инерции. В связи с наличием в твердом теле оси симметрии имеем $I_x = I_y$.

Пусть гироскоп вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг оси симметрии, которая в свою очередь вращается вокруг неподвижной точки с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega_1}$. В соответствии с теоремой о сложении вращений твердого тела вокруг пересекающихся осей, абсолютная угловая скорость $\boldsymbol{\omega_a}$ равна векторной сумме угловых скоростей переносного и относительного вращений:

$$\boldsymbol{\omega_a} = \boldsymbol{\omega_e} + \boldsymbol{\omega_r} = \boldsymbol{\omega_1} + \boldsymbol{\omega}.$$

Предположим для простоты, что $\boldsymbol{\omega_1} \perp \boldsymbol{\omega}$. Направим ось z вдоль $\boldsymbol{\omega}$, а ось x – вдоль $\boldsymbol{\omega_1}$. Разложим главный момент количеств движения $\mathbf{L_O}$ гироскопа на две составляющие $\mathbf{L_z}$ и $\mathbf{L_x}$. Модули этих составляющих соответственно равны: $L_\mathbf{z} = I_z\omega$; $L_\mathbf{x} = I_x\omega_1$.



Угол θ между главным моментом количеств движения $\mathbf{L_O}$ и осью z симметрии гироскопа определится равенством

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{I_x\omega_1}{I_z\omega}.$$

Так как $\boldsymbol{\omega} << \boldsymbol{\omega_1}$, то угол θ очень мал, в современных приборах он составляет доли секунды, и с достаточной для практики точностью можно считать, что вектор $\mathbf{L_O}$ совпадает с осью гироскопа, т. е.

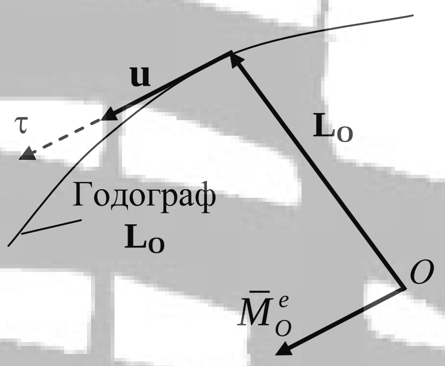
$$\mathbf{L_O} = \mathbf{L_z} = I_z\boldsymbol{\omega}.$$

На этом допущении основана приближенная (элементарная) теория гироскопов.

При решении задач с помощью приближенной теории гироскопов удобно пользоваться теоремой об изменении главного момента количеств движения системы материальных точек (кинетического момента) в ее кинематической интерпретации – теоремой Резаля: скорость **u** главного момента количеств движения системы материальных точек $\mathbf{L_O}$, определенного относительно неподвижной точки, векторно равна главному моменту внешних сил системы относительно той же точки:

$$\bar{u} = \bar{M}_O^e$$

(скорость **u** конца $\mathbf{L_O}$ направлена по касательной к годографу $\mathbf{L_O}$ в соответствующей точке).



Основное свойство гироскопа с тремя степенями свободы в случае, когда главный момент внешних сил $\bar{M}_O^e$ относительно неподвижной точки равен нулю, заключается в сохранении неизменного направления оси гироскопа по отношению к инерциальным осям.

Если же на гироскоп действуют внешние силы, главный момент которых относительно неподвижной точки O равен $\bar{M}_O^e$**,** то ось гироскопа перемещается (прецессирует) в пространстве. Угловая скорость прецессии ω_1 определяется с помощью теоремы Резаля по формуле

$$\omega_1 = \frac{M_O^e}{I_z \omega \sin\alpha},$$

где α – угол между осью гироскопа и вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega_1}$ прецессии.

Это равенство в совокупности с теоремой Резаля определяет закон прецессии оси гироскопа.

Задачи на определение движения оси гироскопа с помощью приближенной теории рекомендуется решать в такой последовательности:

1) проверить, имеет ли гироскоп или гироскопическая система, три степени свободы;

2) выбрать систему координат;

3) изобразить на рисунке внешние силы, приложенные к гироскопу;

4) определить главный момент внешних сил $\bar{M}_O^e$ относительно неподвижной точки;

5) найти главный момент количеств движения гироскопа относительно неподвижной точки $\mathbf{L_O}$;

6) применив теорему Резаля $\bar{u} = \bar{M}_O^e$, определить движение оси гироскопа.

Гироскопический момент

При изменении направления оси симметрии гироскопа возникает гироскопический момент, создающий гироскопические (динамические) давления на опоры.

Гироскопический момент определяется равенством

$$\bar{M}_O^{гир} = I_z\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega_1},$$

где I_z – момент инерции гироскопа относительно его оси симметрии;

$\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость собственного вращения;

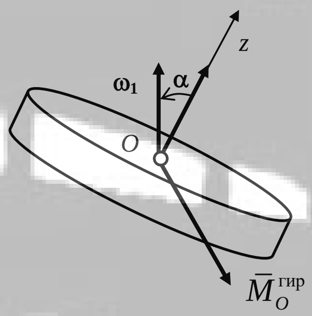
$\boldsymbol{\omega_1}$ – угловая скорость прецессии оси гироскопа.

По модулю гироскопический момент равен

$$M_O^{гир} = I_z\omega\omega_1\sin\alpha.$$

где α – угол между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega_1}$.

Гироскопический момент $\bar{M}_O^{гир}$ стремится совместить ось гироскопа (вектор $\boldsymbol{\omega}$) с осью прецессии (вектором $\boldsymbol{\omega_1}$) посредством поворота $\boldsymbol{\omega}$ к $\boldsymbol{\omega_1}$.



Если расстояние между опорами равно h, то модули гироскопических давлений $\mathbf{N}^{\text{гир}}$ на опоры можно определить по формуле

$$N^{\text{гир}} = \frac{M_O^{\text{гир}}}{h} = \frac{I_z\omega\omega_1\sin\alpha}{h}.$$

Главный момент внешних сил относительно неподвижной точки O определяется формулой

$$\bar{M}_O^{e} = -\bar{M}_O^{гир} = \boldsymbol{\omega_1} \times I_z\boldsymbol{\omega},$$

Модули главного момента внешних сил и гироскопического момента равны.

Главный момент внешних сил создает гироскопические (динамические) реакции опор $\mathbf{R}^{\text{гир}}$, причем

$$\mathbf{R}^{\text{гир}} = -\mathrm{N}^{\text{гир}},$$

поэтому по модулю

$$N^{\text{гир}} = R^{\text{гир}} = \frac{I_z\omega\omega_1\sin\alpha}{h}.$$

Задачи на определение гироскопических давлений (гироскопических реакций опор) рекомендуется решать в такой последовательности:

1) изобразить на рисунке вектор угловой скорости **ω** собственного вращения гироскопа и главный момент количеств движения $\mathbf{L_O} = I_z\boldsymbol{\omega}$;

2) определить и изобразить на рисунке вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega_1}$ прецессии оси гироскопа;

3) найти гироскопический момент $\bar{M}_O^{гир}$ (главный момент внешних сил $\bar{M}_O^e$);

4) определить направления и модули гироскопических давлений на опоры (гироскопических реакций опор).

27.2. Задачи

ЗАДАЧА 27.2.1. Волчок вращается по часовой стрелке вокруг своей оси *OA* с постоянной угловой скоростью ω = 600 рад/с; ось *OA* наклонена к вертикали; нижний конец оси *O* остается неподвижным; центр масс *C* волчка находится на оси *OA* на расстоянии *OC* = 30 см от точки *O*; радиус инерции волчка относительно оси равен 10 см. Определить движение оси волчка *OA*, считая, что главный момент количеств движения волчка относительно оси *OA* равен *J*ω.

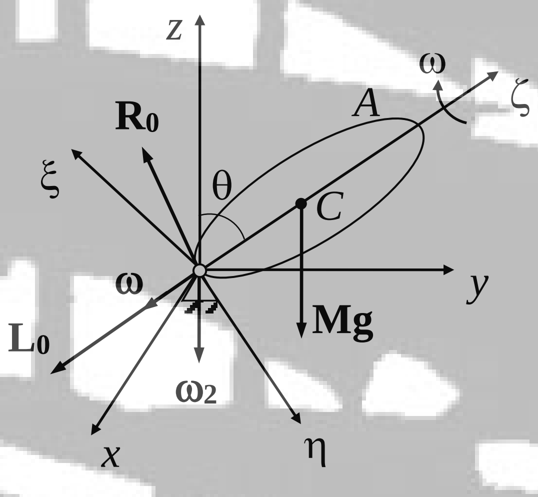


Рис. 27.2.1

Решение

Свяжем подвижные оси Oξζη с главными осями инерции волчка. Система *Oxyz* – неподвижная система координат. Главный момент количеств движения волчка (собственный кинетический момент)

$$L_0 = H = J_\zeta \omega = J\omega.$$

Сила тяжести **Mg** создает момент $M_O^e = Mg \cdot OC \cdot \sin\theta$ и заставляет ось *OA* волчка поворачиваться вокруг вертикальной оси *Oz* по часовой стрелке (прецессировать) с угловой скоростью ω_2, которую найдем из формулы

$$J\omega\omega_2 \sin\theta = Mg \cdot OC \cdot \sin\theta,$$

откуда

$$\omega_2 = \frac{Mg \cdot OC}{J\omega} = \frac{Mg \cdot OC}{M\rho^2\omega} = \frac{9,81 \cdot 0,3}{0,1^2 \cdot 600} = 0,49 \text{ с}^{-1}.$$

Заметим, что результат задачи не зависит от угла наклона оси волчка к вертикали (угла нутации θ).

ЗАДАЧА 27.2.2. Волчок, имея форму диска диаметра 30 см, вращается с угловой скоростью 80 рад/с вокруг своей оси симметрии. Диск насажен на ось длиной 20 см, расположенную вдоль оси симметрии волчка. Определить угловую скорость регулярной прецессии волчка, полагая, что его главный момент количеств движения равен *J*ω.

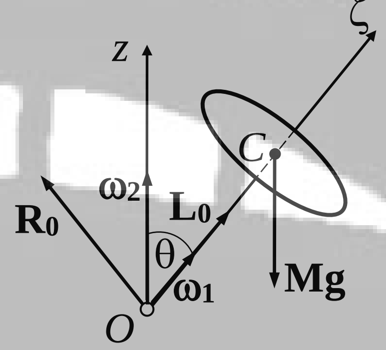


Рис. 27.2.2

Решение

Согласно формуле

$$J\omega_1\omega_2 \sin\theta = M_O^e$$

или

$$\frac{Mr^2}{2}\omega_1\omega_2 \sin\theta = Mg \cdot OC \cdot \sin\theta,$$

откуда

$$\omega_2 = \frac{2g \cdot OC}{r^2\omega_1} = \frac{2 \cdot 9,81 \cdot 0,2}{0,15^2 \cdot 80} = 2,18 \text{ с}^{-1}.$$

ЗАДАЧА 27.2.3. Турбина, вал которой параллелен продольной оси судна, делает 1500 об/мин. Масса вращающихся частей 6 т, радиус инерции $\rho = 0{,}7$ м. Определить гироскопические давления на подшипники, если судно описывает циркуляцию вокруг вертикальной оси, поворачиваясь на 10° в секунду. Расстояние между подшипниками $l = 2{,}7$ м.

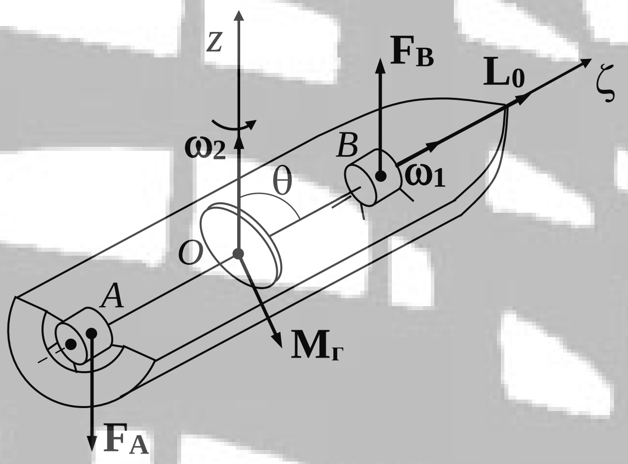


Рис. 27.2.3

Решение

Угловая скорость вращения турбины, которую принимаем за гироскоп, равна

$$\omega_1 = 1500 \cdot \frac{2\pi}{30} = 50\pi \text{ с}^{-1}.$$

Угловая скорость циркуляции судна вокруг вертикальной оси z, т. е. прецессии оси ζ турбины, равна

$$\omega_2 = \frac{10°}{180°}\pi = \frac{\pi}{18} \text{ с}^{-1}.$$

Угол нутации θ между осью турбины ζ и вертикальной осью z равен $\pi/2$. При повороте судна в подшипниках A и B возникают силы давления F_A и F_B, создающие гироскопический момент $M_г = F_A \cdot AB = F_A \cdot l$. С другой стороны, $M_г = \bar{L}_0 \times \bar{\omega}_2$. Поэтому $F_A l = J\omega_1\omega_2 \sin\theta$.

Отсюда

$$F_A = \frac{J\omega_1\omega_2 \sin\theta}{l} = \frac{M\rho^2\omega_1\omega_2 \sin\theta}{l} =$$

$$= \frac{6000 \cdot 0{,}7^2 \cdot 50\pi \cdot (\pi/18)}{2{,}7} = 30000 \text{ Н}.$$

ЗАДАЧА 27.2.4. Определить максимальные гироскопические давления на подшипники быстроходной турбины, установленной на корабле. Корабль подвержен килевой качке с амплитудой 9° и периодом 15 с вокруг оси, перпендикулярной оси ротора. Ротор турбины массой 3500 кг с радиусом инерции 0,6 м делает 3000 об/мин. Расстояние между подшипниками 2 м.

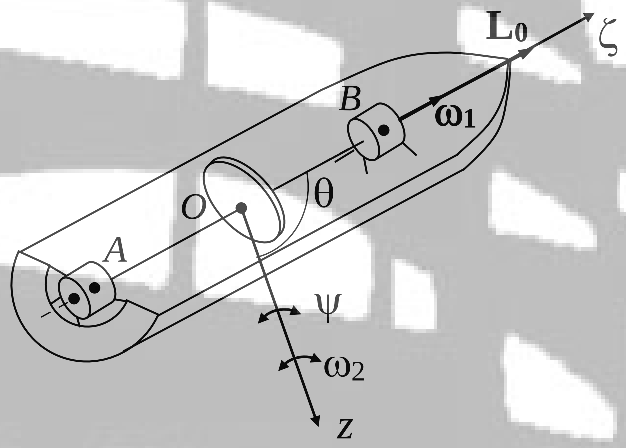


Рис. 27.2.4

Решение

Угловая скорость вращения ротора турбины равна

$$\omega_1 = 3000 \cdot \frac{2\pi}{60} = 100\pi \text{ с}^{-1}.$$

Закон изменения угла ψ (прецессии) при килевой качке

$$\psi = \frac{9°}{180°}\pi \sin\frac{2\pi}{15}t = \frac{\pi}{20}\sin\frac{2\pi}{15}t \text{ рад.}$$

Поэтому

$$\omega_2 = \dot{\psi} = \frac{\pi^2}{150}\cos\frac{2\pi}{15}t \text{ с}^{-1}.$$

При килевой качке в подшипниках A и B возникают гироскопические силы F_A и F_B. Гироскопический момент $M_г = F_A \cdot AB$.

С другой стороны, $M_г = \bar{L}_0 \times \bar{\omega}_2$. Поэтому $F_A l = J\omega_1\omega_2 \sin\theta$.

Отсюда

$$F_A = \frac{J\omega_1\omega_2 \sin\theta}{AB} = \frac{M\rho^2\omega_1\omega_2 \sin 90°}{AB} =$$

$$= \frac{3500 \cdot 0,36 \cdot 100\pi \cdot \dfrac{\pi^2}{150} \cos \dfrac{2\pi}{15} t}{2} = 13020 \cos \frac{2\pi}{15} t \text{, Н.}$$

Максимальное гироскопическое давление

$$F_{\text{Amax}} = F_{\text{Bmax}} = 13020 \text{ Н.}$$

ЗАДАЧА 27.2.5. Определить время T полного оборота оси симметрии артиллерийского снаряда вокруг касательной к траектории центра масс снаряда. Это движение происходит в связи с действием силы сопротивления воздуха F = 6,72 кН, приближенно направленной параллельно касательной и приложенной к оси снаряда на расстоянии h = 0,2 м от центра масс снаряда. Момент количества движения снаряда относительно его оси симметрии равен 1850 кг·м^2/с.

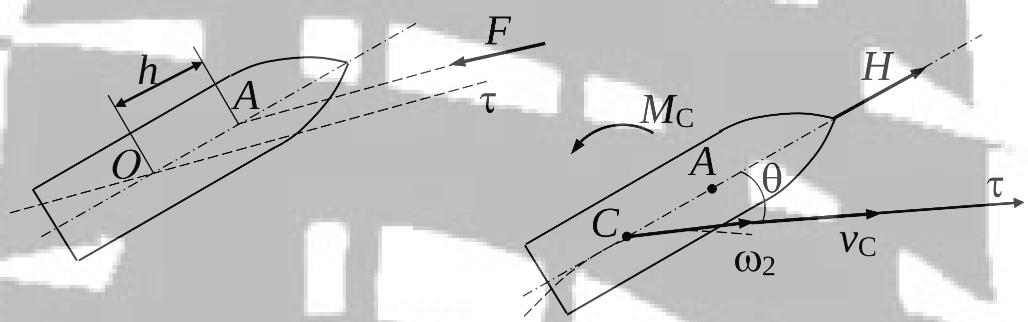


Рис. 27.2.5

Решение

H – момент количества движения снаряда относительно его оси симметрии (собственный кинетический момент снаряда); M_c – момент сил сопротивления воздуха относительно центра тяжести, вектор которого перпендикулярен плоскости, содержащей векторы **H** и $\mathbf{v}_c$. Этот момент сопротивления вызывает прецессию оси вращения снаряда вокруг направления касательной к траектории полета τ. Направление прецессии совпадает с направлением собственного вращения снаряда.

Имеем соотношение

$$M_c = H\omega_2 \sin\theta,$$

где

$$M_c = F \cdot AC \sin\theta = Fh \sin\theta.$$

Отсюда

$$\omega_2 = \frac{Fh}{H} = \frac{6720 \cdot 0,2}{1850} = 0,726 \text{ с}^{-1}.$$

Поэтому время полного оборота оси симметрии снаряда вокруг касательной к траектории его центра масс

$$T = \frac{2\pi}{\omega_2} = 8,66 \text{ с}.$$

ЗАДАЧА 27.2.6. Газотурбовоз приводится в движение турбиной, ось которой параллельна оси колес и вращается в ту же сторону, что и колеса, делая 1500 об/мин. Момент инерции вращающихся частей турбины относительно оси вращения $J = 200$ кг·м^2. Как велика добавочная сила давления на рельсы, если газотурбовоз идет по закруглению радиусом 250 м со скоростью 15 м/с? Ширина колеи 1,5 м.

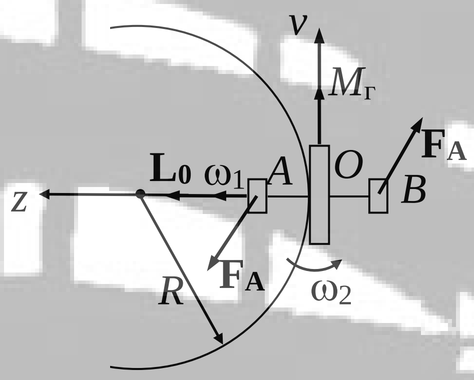


Рис. 27.2.6

Решение

Ось Oz – ось вращения турбины. Угловая скорость собственного вращения турбины

$$\omega_1 = 1500 \cdot \frac{2\pi}{60} = 50\pi \text{ с}^{-1}.$$

Угловая скорость

$$\omega_2 = \frac{v}{R} = \frac{15}{250} = 0,06 \text{ с}^{-1}.$$

Возникающий при повороте газотурбовоза гироскопический момент

$$\bar{M}_г = \bar{L}_0 \times \bar{\omega}_2.$$

Добавочная сила давления на подшипники A и B за счет поворота

$$F_A = F_B = \frac{M_{\text{г}}}{AB} = \frac{L_0 \omega_2 \sin 90^\circ}{AB} = \frac{J\omega_1\omega_2}{AB} =$$

$$= \frac{200 \cdot 50\pi \cdot 0{,}06}{1{,}5} = 1256 \text{ Н.}$$

Следовательно, на один рельс добавочная сила давления действует вниз и равна 1256 Н, а на другой рельс действует вверх и равна также 1256 Н.

ЗАДАЧА 27.2.7. В дробилке с бегунами каждый бегун имеет массу M = 1200 кг, радиус инерции относительно его оси ρ = 0,4 м, радиус R = 0,5 м, мгновенная ось вращения бегуна проходит через середину линии касания бегуна с дном чаши. Определить силу давления бегуна на горизонтальное дно чаши, если переносная угловая скорость вращения бегуна вокруг вертикальной оси соответствует n = 60 об/мин.

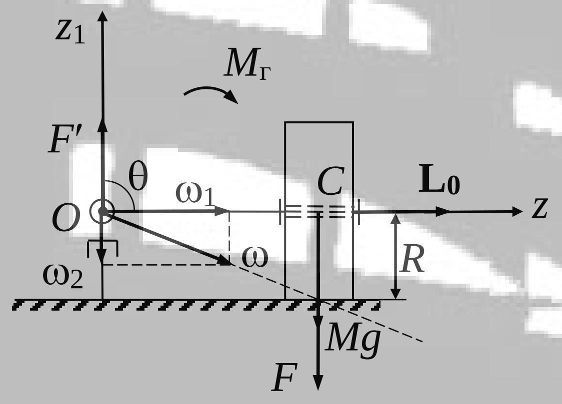


Рис. 27.2.7

Решение

По условию

$$\omega_1 = n \cdot \frac{\pi}{30} = 60\frac{\pi}{30} = 2\pi \text{ с}^{-1}.$$

С такой угловой скоростью бегун (гироскоп с осью собственного вращения Oz) прецессирует вокруг неподвижной оси Oz_1.

Угловую скорость собственного вращения найдем из подобия треугольников для угловых скоростей и линейных величин:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{OC}{R}, \qquad \omega_1 = \omega_2 \frac{OC}{R}.$$

Гироскопический момент. С другой стороны $\bar{M}_г = \overline{OC} \times \bar{F}$.

Приравнивая величины векторных произведений, получим

$J\omega_1\omega_2 \sin\theta = OC \cdot F \cdot \sin\theta$.

Отсюда

$$F = \frac{J\omega_1\omega_2}{OC} = \frac{M\rho^2\omega_2 \dfrac{OC}{R}\omega_2}{OC} = \frac{1200 \cdot 0{,}16 \cdot 4\pi^2}{0{,}5} = 15160 \text{ Н}.$$

В результате, сила давления бегуна на горизонтальное дно чаши складывается из силы гироскопического давления F в силы тяжести бегуна Mg

$$F_{давл} = F + Mg = 15160 + 1200 \cdot 9{,}81 = 26900 \text{ Н}.$$

Направлен вектор $\bar{F}_{давл}$ вниз.

ЗАДАЧА 27.2.8. Колесный скат массой M = 1400 кг, радиусом a = 75 см и с радиусом инерции относительно своей оси $\rho = \sqrt{0{,}55}\ a$ движется равномерно со скоростью v = 20 м/с по закруглению радиусом R = 200 м, лежащему в горизонтальной плоскости. Определить силу давления ската на рельсы, если расстояние между рельсами l = 1,5 м.

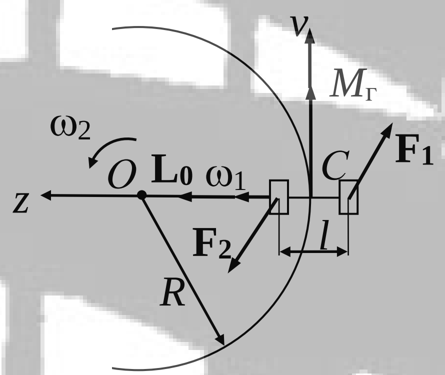


Рис. 27.2.8

Решение

Ось прецессии направлена перпендикулярно рис. 27.2.8, собственный кинетический момент H колесного ската (гироскопа) направлен по его оси влево по ходу движения.

В этом случае возникает гироскопический момент $M_г$, стремящийся совместить векторы H и ω_2 и направленный перпендикулярно оси колесного ската, вперед по ходу ее движения. Этот момент нагружает внешний и разгружает внутренний рельсы (по отношению к траектории движения ската), реализуется как пара сил давления, приложенных к рельсам.

Тогда

$$F_1 l = H\omega_2 \sin 90^\circ,$$

откуда

$$F_1 = \frac{H\omega_2}{l} = \frac{M\rho^2\omega_1\omega_2}{l}.$$

Угловая скорость вращения колес $\omega_1 = v/a$; угловая скорость вынужденной прецессии от искривления пути $\omega_2 = v/R$.

Поэтому

$$F_1 = \frac{H\omega_2}{l} = \frac{M\rho^2 \dfrac{v}{a}\dfrac{v}{R}}{l} = \frac{M \cdot 0{,}55a^2 \dfrac{v^2}{aR}}{l} =$$

$$= \frac{1400 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}75 \cdot 400}{200 \cdot 1{,}5} = 770 \text{ Н}.$$

Так как у ската два колеса, то сила давления его на рельсы следующая:

– на внутренний рельс сила давления равна

$$\frac{1}{2}Mg - F_2 = 700 \cdot 9{,}81 - 770 = 6090 \text{ Н};$$

– на внешний рельс

$$\frac{1}{2}Mg - F_1 = 700 \cdot 9{,}81 + 770 = 7630 \text{ Н}.$$

ЗАДАЧА 27.2.9. На рис. 27.2.9 изображен узел поворотной части разводного моста. Вал *AB* с шарнирно прикрепленными к нему под углом α стержнями *CD* и *CE* вращается с угловой скоростью ω_0. При этом конические шестерни *K* и *L*, свободно насаженные на стержни *CD* и *CE*, катятся без скольжения по неподвижной плоской горизонтальной шестерне. Определить силу дополнительного динамического давления шестерен *K* и *L* массой *M* каждая на неподвижную горизонтальную шестерню, если радиусы всех шестерен равны *r*. Подвижные шестерни считать сплошными однородными дисками.

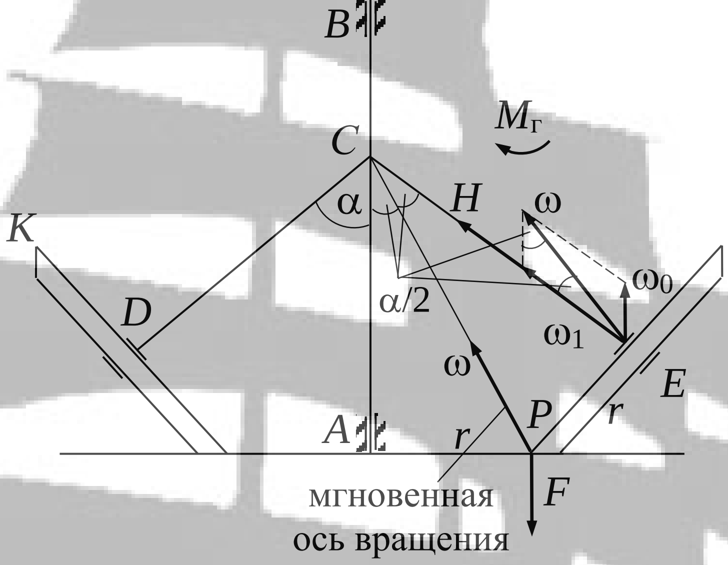


Рис. 27.2.9

Решение

Рассмотрим одну из шестерен. Так как она катится без скольжения, то вектор ее мгновенной угловой скорости ω лежит на прямой *CP*, причем

$$\omega = \omega_0 + \omega_1,$$

где ω_0 – переносная угловая скорость (угловая скорость прецессии); ω_1 – угловая скорость собственного вращения шестерни, направленная по ее оси симметрии (вдоль стержня *CE*). Величину ω_1 найдем из векторного параллелограмма угловых скоростей. Нетрудно убедиться, что полученный параллелограмм есть ромб. Поэтому $\omega_1 = \omega_0$.

Тогда за счет вынужденной прецессии с угловой скоростью ω_0 возникает гироскопический момент

$$\bar{M}_г = \bar{H} \times \bar{\omega}_0,$$

который реализуется в виде момента дополнительной реакции *F* (силы гироскопического давления) в точке *P* относительно неподвижной точки *C*

$$H\omega_0 \sin\alpha = Fr,$$

откуда

$$F = \frac{H\omega_0 \sin\alpha}{r} = \frac{\frac{Mr^2}{2}\omega_1\omega_0 \sin\alpha}{r} = \frac{Mr\omega_0^2 \sin\alpha}{2}.$$

ЗАДАЧА 27.2.10. Квадратная рама со стороной a = 20 см вращается вокруг вертикальной оси AB с угловой скоростью ω_1 = 2 рад/с. Вокруг оси ED, совмещенной с диагональю рамы, вращается диск M радиусом r = 10 см с угловой скоростью ω = 300 рад/с. Определить отношение дополнительных сил бокового давления на опоры A и B к соответствующим статическим давлениям. Массой рамы пренебречь. Массу диска считать равномерно распределенной по ободу

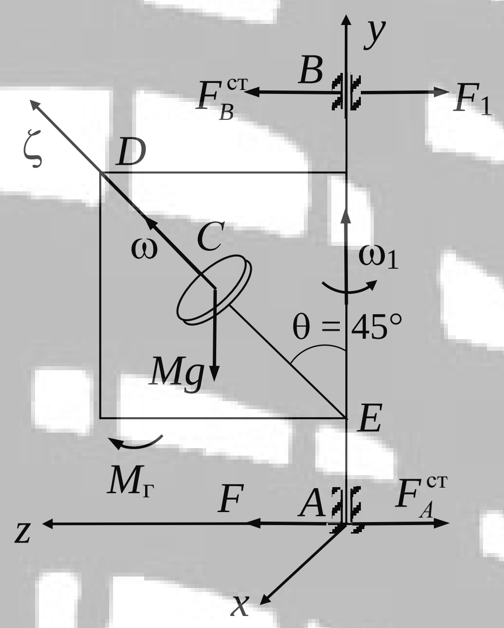


Рис. 27.2.10

Решение

Зададим для определенности направления вращения рамки с угловой скоростью ω_1 и диска с угловой скоростью ω. По условию $\omega >> \omega_1$. Поэтому диск рассматриваем как гироскоп, ось ζ которого прецессирует вокруг вертикальной оси y. Собственный кинетический момент

$$H = J\omega = Mr^2\omega.$$

Гироскопический момент $M_г$ стремится совместить векторы H и ω_1

$$\bar{M}_г = \bar{H} \times \bar{\omega}_1.$$

Вектор $\mathbf{M_г}$ направлен перпендикулярно рамке противоположно ее движению. $\mathbf{M_г}$ есть момент пары сил дополнительного бокового давления на опоры A и B за счет вращения с угловой скоростью ω_1:

$$\bar{M}_г = \overline{AB} \times \bar{F}_1 = \overline{BA} \times \bar{F}.$$

Поэтому имеем соотношение

$$Mr^2\omega\omega_1 \sin 45° = AB \cdot F .$$

Отсюда

$$F = F_1 = \frac{Mr^2\omega\omega_1 \sin 45°}{AB} .$$

Определим теперь статические боковые давления в опорах A и B. Для этого составим уравнения равновесия системы (при отсутствии вращения рамки и диска)

$$\sum_k F_{kz} = 0 ,$$

$$\sum_k M_{Ax}(\bar{F}_k) = 0 .$$

Получим:

$$F_A'^{\text{ст}} - F_B'^{\text{ст}} = 0 ,$$

$$-F_A'^{\text{ст}} \cdot AB + \frac{1}{2} Mga = 0 .$$

Заметим, что

$$F_A^{\text{ст}} = -F_A'^{\text{ст}}; \qquad F_B^{\text{ст}} = -F_B'^{\text{ст}} .$$

Силы со штрихом – это реакции со стороны подшипников на систему. Следовательно,

$$F_A^{\text{ст}} = F_B^{\text{ст}} = \frac{Mga}{2 \cdot AB} .$$

Получим отношение дополнительных сил бокового давления к соответствующим статическим давлениям в опорах A и B

$$\frac{F}{F_A^{\text{ст}}} = \frac{F_1}{F_B^{\text{ст}}} = \frac{Mr^2\omega\omega_1 \sin 45° \cdot 2 \cdot AB}{AB \cdot Mga} =$$

$$= \frac{0{,}1^2 \cdot 300 \cdot 2 \cdot 0{,}707 \cdot 2 \cdot AB}{AB \cdot Mga} = 4{,}3.$$

ЗАДАЧА 27.2.11. Колесо радиусом a и массой $2M$ вращается вокруг горизонтальной оси AB с постоянной угловой скоростью ω_1; ось AB вращается вокруг вертикальной оси OD, проходящей через центр колеса, с постоянной угловой скоростью ω_2; направления вращений показаны стрелками. Найти силы давления N_A и N_B на подшипники A и B, если $AO = OB = h$; масса колеса равномерно распределена по его ободу.

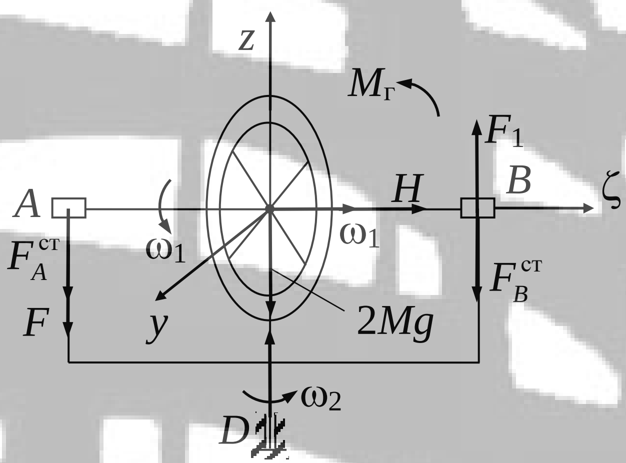


Рис. 27.2.11

Решение

Собственный кинетический момент колеса (гироскопа) равен

$$H = J\omega_1 = 2Ma^2\omega_1.$$

Ось колеса ζ прецессирует с угловой скоростью ω_2 вокруг неподвижной вертикальной оси z. Возникает гироскопический момент $\bar{M}_г = \bar{H} \times \bar{\omega}_2$, перпендикулярный плоскости $O\zeta z$ и направленный на нас. В результате в подшипниках A и B возникает пара дополнительных сил гироскопического давления F и F_1. Определим их

$$2Ma^2\omega_1\omega_2 \sin 90° = F \cdot AB,$$

откуда

$$F = F_1 = \frac{2Ma^2\omega_1\omega_2 \sin 90°}{AB} = \frac{Ma^2\omega_1\omega_2}{h}.$$

Найдем силы статического давления на подшипники, для этого составим уравнения равновесия системы (вращения отсутствуют):

$$\sum_k F_{kz} = 0;$$

$$\sum_k M_{Oy}(\bar{F}_k) = 0.$$

Заметим, что на рис. 27.2.11 в точках A и B изображены силы давления на подшипники A и B. В уравнения равновесия войдут реакции, действующие на вал AB со стороны подшипников, которые удовлетворяют условиям

$$F_A'^{\text{ст}} = -F_A^{\text{ст}},\ F_B'^{\text{ст}} = -F_B^{\text{ст}}.$$

Итак, уравнения равновесия

$$F_A'^{\text{ст}} + F_B'^{\text{ст}} - 2Mg = 0 \quad \text{и} \quad -F_A'^{\text{ст}} \cdot h + F_B'^{\text{ст}} \cdot h = 0.$$

Из них получаем $F_A^{\text{ст}} = F_A^{\text{ст}} = Mg$.

Суммарные силы давления на подшипники A и B:

$$N_A = F + F_A^{\text{ст}} = \frac{Ma^2\omega_1\omega_2}{h} + Mg = Mg\left(1 + \frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right);$$

$$N_B = -F + F_B^{\text{ст}} = -\frac{Ma^2\omega_1\omega_2}{h} + Mg = Mg\left(1 - \frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right).$$

ЗАДАЧА 27.2.12. Простейший гиротахометр состоит из гироскопа, рамка которого соединена двумя пружинами, прикрепленными к корпусу прибора. Момент инерции гироскопа относительно оси собственного вращения равен J, угловая скорость гироскопа равна ω. Определить угол α, на который повернется ось гироскопа вместе с его рамкой, если прибор установлен на платформе, вращающейся с угловой скоростью ω_1 вокруг оси x, перпендикулярной оси y вращения рамки. Коэффициенты жесткости пружин равны c; угол α считать малым; расстояние от оси вращения рамки до пружин равно a.

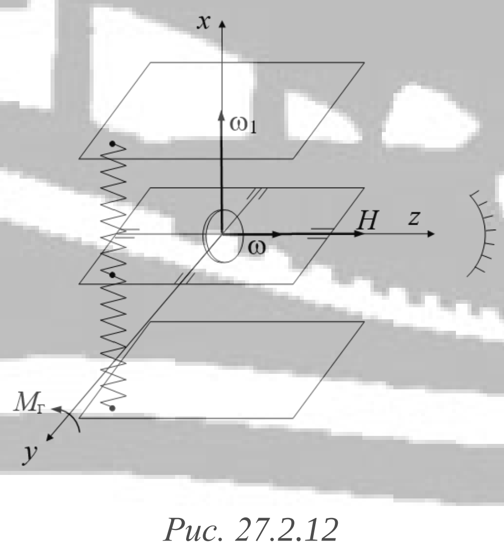


Рис. 27.2.12

Решение

Ось гироскопа прецессирует *z* с угловой скоростью вокруг вертикальной оси *x*. Согласно правилу Жуковского, вынужденная прецессия вызывает гироскопический момент $\bar{M}_{г} = \bar{H} \times \bar{\omega}_1$, стремящийся сделать ось гироскопа *z* параллельной оси прецессии *x*, т. е. поворачивающий рамку гироскопа вокруг оси *y* против часовой стрелки. В данном случае гироскопический момент реализуется в виде момента, противодействующего моменту сил упругости двух одинаковых пружин.

Поэтому

$$H\omega_1 \sin 90° = 2F_{упр} a .$$

Сила упругости каждой пружины $F_{упр} = c\Delta$, где $\Delta = \alpha a$ – деформация при малых α. Поэтому стрелка (ось *z*) отклоняется вверх на угол

$$\alpha = \frac{H\omega_1 \sin 90°}{2a\Delta} = \frac{J\omega\omega_1}{2ca^2} .$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: учебное пособие. – 35-е изд., перераб. / Под ред. Н.В. Бутенина, А.И. Лурье, Д.Р. Меркина, И.В. Челпанова. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 480 с.

2. Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие для вузов / Бражниченко Н.А., Кан В.Л., Минцберг Б.Л. и др. – Изд. 3-е, перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1974. – 520 с.

3. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: Учебник для техн. вузов. – 7-е изд. стереотипное. – (Серия «Учебники для вузов. Специальная литература»). – СПб.: Издательство «Лань», 1999. – 768 с.

4. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. I, II / Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1968.

5. Прикладная механика: Учеб. пособие / А.Т. Скойбеда, А.А. Миклашевич, Е.Н. Левковский и др.; Под общ. ред. А.Т. Скойбеды. – Мн.: Выш. шк., 1997. – 522 с.

6. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие для технических вузов / Яблонский А.А. и др. – 7-е изд., исправленное. – М.: Интеграл-Пресс, 2001. – 384 с.

7. Von H. Neuber. Lösungen zur Aufgabensammlung Mestcherski. Veb Deutscher der Wissenschaften. Berlin, 1963. – 464 с. Режим доступа: www. exir.ru/termeh/mesherskij/

Короткая Елена Ивановна

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА В РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧ

ЧАСТЬ 27

ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ ГИРОСКОПА

Сборник задач
для курсантов и студентов
инженерных специальностей
всех форм обучения

Ведущий специалист
по редактированию М.Б. Априянц

Редактор Г.В. Деркач

Специалист по компьютерной
правке И.В. Леонова

Подписано в печать 14.04.2022 г.
Усл. печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,5.

Лицензия № 021350 от 28.06.99.

Печать офсетная.

Формат 60 x 90 1/16.

Заказ № 1749. Тираж 50 экз.
1-й завод 40 экз.

Доступ к архиву публикации и условия доступа к нему:
https://bgarf.ru/akademia/#biblioteka

БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»

Издательство БГАРФ,
член Издательско-полиграфической ассоциации высших учебных заведений
236029, Калининград, ул. Молодежная, 6.