Федеральное агентство по рыболовству
БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»
Калининградский морской рыбопромышленный колледж

Утверждаю
Заместитель начальника колледжа
по учебно-методической работе
А.И. Колесниченко

Подписано цифровой подписью:
Колесниченко Андрей Игоревич
Причина: Я являюсь автором этого документа
Дата: 21 Август 2025 г. 11:49:06
DN: E=uc_fk@roskazna.ru, S=77 Москва, ИНН ЮЛ=7710568760, ОГРН=1047797019830, STREET="Большой Златоустинский переулок, д. 6, строение 1", L=г. Москва, C=RU, O=Казначейство России, CN=Федеральное казначейство

ОП.09 МАТЕМАТИКА

Методическое пособие для выполнения самостоятельных работ
по специальности

26.02.05 Эксплуатация судовых энергетических установок

МО–26 02 05-ОП.09. СР

РАЗРАБОТЧИК	Учебно-методически центр
ЗАВЕДУЮЩИЙ ОТДЕЛЕНИЕМ	Никишин М.Ю.
ГОД РАЗРАБОТКИ	2025

Содержание

Введение

Методическое пособие по выполнению самостоятельной внеаудиторной работы составлено в соответствии с рабочей программой дисциплины «Математика» по специальности 26.02.05 «Эксплуатация судовых энергетических установок».

Самостоятельная работа – это деятельность обучающихся в процессе обучения и во внеаудиторное время, выполняемая по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

На самостоятельную внеаудиторную работу по дисциплине «Математика» отведено 6 академических часов.

Цель внеаудиторной самостоятельной работы;

- закрепить знания и умения по темам и разделам дисциплины;

- расширить знания по отдельным темам;

- формировать умения самостоятельного изучения элементов дисциплины, пользоваться дополнительной и учебной литературой, интернетом;

- развитие самостоятельности, организованности, ответственности;

- работать над формированием общих и профессиональных компетенций, необходимых для работы в данной специальности.

Освоение программы дисциплины предусматривает формирование элементов общих компетенций: ОК 01, ОК 02, ОК 04, ОК 05, ОК 07, ОК 09, ПК 1.1, ПК 2.1, ПК 3.1.

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях.

ОК.09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

ПК 1.1. Обеспечивать техническую эксплуатацию главных энергетических установок судна, вспомогательных механизмов и связанных с ними систем управления.

ПК 2.1 Организовывать мероприятия по обеспечению транспортной безопасности.

ПК 3.1. Планировать работу структурного подразделения.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется в отдельных тетрадях в виде конспекта (реферата, презентации).

Критериями оценки результатов самостоятельной работы являются:

- уровень усвоения учебного материала;
- умение использовать теоретические знания при выполнении практических задач в повседневной жизни;
- обоснованность и чёткость изложения ответа;
- оформление материала в соответствии с требованиями.

Итоговая оценка по дисциплине выставляется с учётом результатов выполнения самостоятельной внеаудиторной работы.

Перечень самостоятельных работ

№ п/п	**Тема самостоятельной работы**	**Кол-во часов**
1	Численное интегрирование и дифференцирование	2
2	Решение задач повышенной сложности по вычислению интегралов	4
	ИТОГО:	**6**

Самостоятельная работа 1. Численное интегрирование и дифференцирование

Задание: написать реферат на тему «Использование метода трапеций, парабол для приближенных вычислений»

Курсант должен

знать: суть основных вопросов, изложенных в реферате по выбранной теме; основные понятия этой темы;

уметь: работать с разнообразными источниками информации.

Инструкция по выполнению самостоятельной работы

Реферат – краткое изложение в письменном виде или в форме публичного доклада содержания научного труда или трудов, обзор литературы по теме. Изложение материала носит проблемно-тематический характер, показываются различные точки зрения, а также собственные взгляды на проблему. Содержание реферата должно быть логичным. Объём реферата, как правило, от 5 до 15 машинописных страниц. Перед началом работы над рефератом следует наметить план и подобрать литературу. Прежде всего, следует пользоваться литературой, рекомендованной учебной программой, а затем расширить список источников, включая и использование специальных журналов, где имеется новейшая научная информация.

Структура реферата:

- Титульный лист.
- Оглавление.
- Введение (дается постановка вопроса, объясняется выбор темы, её значимость и актуальность, указываются цель и задачи реферата, даётся характеристика используемой литературы).
- Основная часть (состоит из глав и подглав, которые раскрывают отдельную проблему или одну из её сторон и логически являются продолжением друг друга).
- Заключение (подводятся итоги и даются обобщённые основные выводы по теме реферата, делаются рекомендации).
- Список литературы. В списке литературы должно быть не менее 8–10 различных источников. Допускается включение таблиц, графиков, схем, как в основном тексте, так и в качестве приложений.

Критерии оценки реферата:

- соответствие теме; глубина проработки материала;
- правильность и полнота использования источников;
- владение терминологией и культурой речи;
- оформление реферата.

Рефераты могут быть представлены на теоретических занятиях в виде выступлений.

Работа над введением

Введение – одна из составных и важных частей реферата. При работе над введением необходимо опираться на навыки, приобретенные при написании изложений и сочинений. В объеме реферата введение, как правило, составляет 1-2 машинописные страницы. Введение обычно содержит вступление, обоснование актуальности выбранной темы, формулировку цели и задач реферата, краткий обзор литературы и источников по проблеме, историю вопроса и вывод.

Вступление – это 1-2 абзаца, необходимые для начала. Желательно, чтобы вступление было ярким, интригующим, проблемным, а, возможно, тема реферата потребует того, чтобы начать, например, с изложения какого-то определения, типа «политические отношения – это…».

Обоснование актуальности выбранной темы - это, прежде всего, ответ на вопрос: «почему я выбрал(а) эту тему реферата, чем она меня заинтересовала?». Можно и нужно связать тему реферата с современностью.

Краткий обзор литературы и источников по проблеме – в этой части работы над введением необходимо охарактеризовать основные источники и литературу, с которой автор работал, оценить ее полезность, доступность, высказать отношение к этим книгам.

История вопроса – это краткое освещение того круга представлений, которые сложились в науке по данной проблеме и стали автору известны.

Вывод – это обобщение, которое необходимо делать при завершении работы над введением.

Требования к содержанию реферата

Содержание реферата должно соответствовать теме, полно ее раскрывать. Все рассуждения нужно аргументировать. Реферат показывает личное отношение автора к излагаемому. Следует стремиться к тому, чтобы изложение было ясным, простым, точным и при этом выразительным. При изложении материала необходимо соблюдать общепринятые правила: — не рекомендуется вести повествование от первого лица единственного числа (такие утверждения лучше выражать в безличной форме); — при упоминании в тексте фамилий обязательно ставить инициалы перед фамилией; — каждая глава (параграф) начинается с новой строки; — при изложении различных точек зрения и научных положений, цитат, выдержек из литературы, необходимо указывать источники, т.е. приводить ссылки.

Правила оформления ссылок

В реферате сведения об использованной литературе приводятся чаще всего в скобках после слов, к которым относятся. В скобках сначала указывается номер книги в списке литературы, а затем через запятую страница. Если ссылка оформляется на цитату из многотомного сочинения, то после номера книги римской цифрой указывается номер тома, а потом номер страницы. Примеры: (1,145); (4,II,38).

Работа над заключением

Заключение – самостоятельная часть реферата. Оно не должно быть переложением содержания работы. Заключение должно содержать:

- основные выводы в сжатой форме;
- оценку полноты и глубины решения тех вопросов, которые вставали в процессе изучения темы.

Объем 1-2 машинописных или компьютерных листа формата А4.

Оформление приложения

Приложение помещается после заключения и включает материалы, дополняющие основной текст реферата. Это могут быть таблицы, схемы, фрагменты источников, иллюстрации, фотоматериалы, словарь терминов, афоризмы, изречения, рисунки и т.д.

Примеры оформления:

Приложение 1. Терминологический словарь “Тригонометрические функции”.

Приложение 2. Алгоритм решения дифференциального уравнения.

Приложение 3. Инструкционная карта по правилам исследования функции.

В тексте реферата необходимо делать примечания. Пример: (см. приложение 1, С.21). Приложение является желательным, но не обязательным элементом реферата.

Правила оформления библиографических списков

Список литературы помещается в конце реферата и пронумеровывается. Сведения о книгах в списке литературы излагаются в алфавитном порядке. Сведения о книге даются в следующем порядке:

- автор (фамилия, инициалы);
- название, подзаголовок;
- выходные данные (место издания, издательство и год издания).

Пример: Григорьев В.П., Дубинский Ю.А., Элементы высшей математики. Учебник для среднего профессионального образования. – М.: Академия, 2008.

Если речь идет о статье, напечатанной в сборнике, журнале или газете, то после автора и названия публикации указываются:

- название сборника, журнала, газеты;
- место издания и год издания (если сборник);
- год, номер журнала или дата выхода газеты, страница.

Пример: Пленков О.Ю. Развитие математики в России // Математические ведомости. – 2012. - №1. – С.10- 16.

В библиографическом описании не разрешается сокращать фамилии авторов, а также заглавия книг и статей. Сокращаются только названия городов: Москва (М.), Санкт-Петербург (СПб.). Названия остальных городов пишутся без сокращений. Если книга издавалась параллельно в двух городах, названия их приводятся через точку с запятой.

Требования к оформлению реферата

Текст работы пишется разборчиво на одной стороне листа (формата А4) с широкими полями слева, страницы пронумеровываются. При изложении материала нужно четко выделять отдельные части (абзацы), главы и параграфы начинать с новой страницы, следует избегать сокращения слов. Если работа набирается на компьютере, следует придерживаться следующих правил (в дополнение к вышеуказанным): набор текста реферата необходимо осуществлять стандартным 12 шрифтом; заголовки следует набирать 14 шрифтом (выделять полужирным);

межстрочный интервал полуторный; разрешается интервал между абзацами; отступ в абзацах 1-2 см.; поле левое 2,5 см., остальные 2 см.; нумерация страницы снизу или сверху посередине листа; объем реферата 20-24 страницы.

Подготовка к защите и порядок защиты реферата

Необходимо заранее подготовить тезисы выступления (план-конспект). Порядок защиты реферата:

1. Краткое сообщение, характеризующее задачи работы, ее актуальность, полученные результаты, вывод и предложения.
2. Ответы студента на вопросы преподавателя.
3. Отзыв руководителя-консультанта о ходе выполнения работы.

Советы студенту при защите реферата:

На всю защиту реферата отводится чаще всего около 15 минут. При защите постарайтесь соблюсти приведенные ниже рекомендации.

- Вы должны вспомнить материал максимально подробно, и это должно найти отражение в схеме Вашего ответа. Но тут же необходимо выделить главное, что наиболее важно для понимания материала в целом, иначе Вы сможете проговорить все 15 минут и не раскрыть существа вопроса. Особенно строго следует отбирать примеры и иллюстрации.
- Вступление должно быть очень кратким. Строго следите за точностью своих выражений и правильностью употребления терминов.
- Не пытайтесь рассказать побольше за счет ускорения темпа, но и не мямлите.
- Не демонстрируйте излишнего волнения и не напрашивайтесь на сочувствие.
- Будьте особенно внимательны ко всем вопросам преподавателя, не бойтесь дополнительных вопросов – чаще всего преподаватель использует их как один из способов помочь Вам или сэкономить время.
- Прежде чем отвечать на дополнительный вопрос, необходимо сначала правильно его понять. Для этого нужно хотя бы немного подумать, иногда переспросить, уточнить: правильно ли Вы поняли поставленный вопрос. И при ответе следует соблюдать тот же принцип экономности мышления, а не высказывать без разбора все, что Вы можете сказать.
- Будьте доброжелательны и тактичны.

План-график работы над рефератом

Этапы работы	Содержание работы студента	Форма отчетности студента	Содержание работы преподавателя
1. Вводный	Выбор темы реферата, поиск и ознакомление с литературой, формулирование цели и задач работы, составление плана	Вариант плана, цель и задачи работы, список литературы	Консультация, коррекция деятельности, проверка плана реферата и списка литературы
2.Основной	Работа над основным содержанием и заключением реферата	Краткие тезисы, подробный план работы, черновые записи	Устное собеседование, индивидуальная консультация, коррекция
3. Заключительный	Оформление реферата	Завершенный реферат	Проверка, рецензирование работы, возврат реферата
4. Защита реферата	Подготовка к защите	Защита реферата	Принятие защиты реферата

Самостоятельная работа 2. Решение задач повышенной сложности по вычислению интегралов

Инструкция по выполнению самостоятельной работы

1) Изучить теоретический материал:

Несобственные интегралы. Примеры решений

К изучению несобственных интегралов лучше приступать в последнюю очередь в ходе изучения интегрального исчисления функции одной переменной. Необходимо хорошо изучить материал о неопределенных интегралах, определенных интегралах, уметь находить площадь плоской фигуры с помощью определенного интеграла. Кроме того, потребуются знания простейших пределов и графиков элементарных функций..

Образно говоря, несобственный интеграл – это «продвинутый» определенный интеграл, и на самом деле сложностей с ними не так уж и много, к тому же у несобственного интеграла есть очень хороший геометрический смысл.

Что значит вычислить несобственный интеграл? Вычислить несобственный интеграл – это значит, найти ЧИСЛО (точно так же, как в определенном интеграле), или доказать, что он расходится (то есть, получить в итоге бесконечность вместо числа).

Несобственные интегралы бывают двух видов.

1. Несобственный интеграл с бесконечным пределом (ами) интегрирования

Иногда такой несобственный интеграл еще называют *несобственным интегралом первого рода*. В общем виде несобственный интеграл с бесконечным пределом чаще всего выглядит так: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. В чем его отличие от определенного интеграла? В верхнем пределе. Он бесконечный: $b = +\infty$.

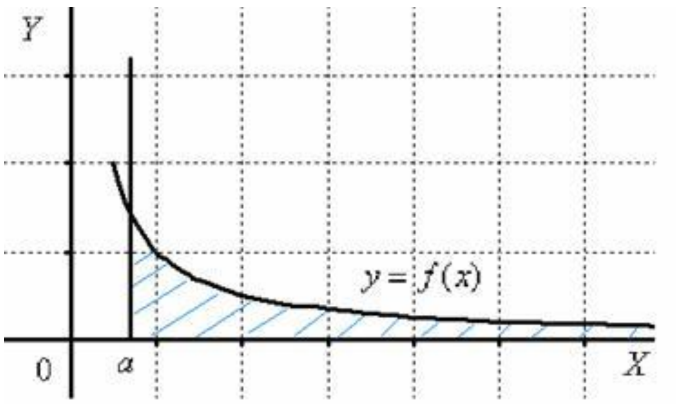
Реже встречаются интегралы с бесконечным нижним пределом $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ или с двумя бесконечными пределами: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Мы рассмотрим самый популярный случай $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Техника работы с другими разновидностями – аналогична, и в конце параграфа будет ссылка на такие примеры.

Всегда ли существует несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$? Нет, не всегда. Подынтегральная функция $f(x)$ должна быть непрерывной на промежутке $[a;+\infty)$

Справка: строго говоря, утверждение неверно: если есть разрывы функции, то в ряде случаев можно разбить полуинтервал на несколько частей и вычислить *несколько несобственных интегралов. Для простоты здесь и далее будем говорить, что несобственного интеграла не существует.*

Изобразим на чертеже график подынтегральной функции $f(x)$. Типовой график и криволинейная трапеция для данного случая выглядит так:



В данном случае подынтегральная функция $f(x)$ <u>непрерывна</u> на полуинтервале $[a;+\infty)$, а, значит, несобственный интеграл существует. Обратите внимание, что криволинейная трапеция у нас – *бесконечная* (не ограниченная справа) фигура.

Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ численно равен площади заштрихованной фигуры, при этом возможны два случая:

1) Первое, мысль, которая приходит в голову: «раз фигура бесконечная, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty$», иными словами, площадь тоже бесконечна. Так быть может. В этом случае говорят, что, что несобственный интеграл расходится.

2) Но. Как это ни парадоксально прозвучит, площадь бесконечной фигуры может равняться… конечному числу! Например: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = 2$. Может ли так быть? Да! Во втором случае несобственный интеграл сходится.

В каких случаях несобственный интеграл расходится, а в каком сходится? Это зависит от подынтегральной функции $f(x)$, и конкретные примеры мы очень скоро рассмотрим.

А что будет, если бесконечная криволинейная трапеция расположена ниже оси? В этом случае, несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx = -\infty$ (расходится) либо равен конечному отрицательному числу.

Несобственный интеграл может быть отрицательным.

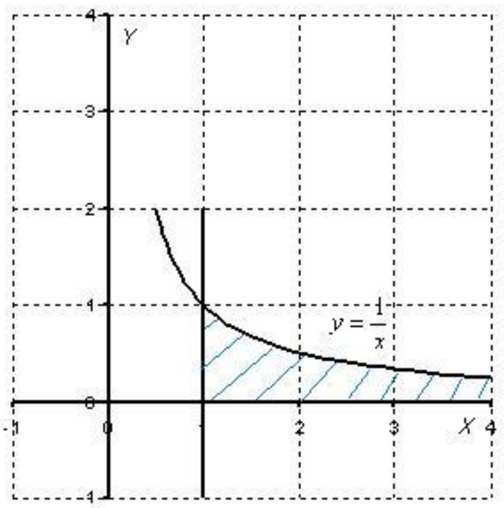
Важно! Когда Вам для решения предложен ЛЮБОЙ несобственный интеграл, то, вообще говоря, ни о какой площади речи не идет и чертежа строить не нужно. Ваша задача найти ЧИСЛО либо доказать, что несобственный интеграл расходится. Геометрический смысл несобственного интеграла мы рассмотрели только для того, чтобы легче было понять материал.

Коль скоро, несобственный интеграл очень похож на определенный интеграл, то вспомним формулу Ньютона- Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. На самом деле формула применима и к несобственным интегралам, только ее нужно немного модифицировать. В чем отличие? В бесконечном верхнем пределе интегрирования: $b = +\infty$. Наверное, многие догадались, что это уже попахивает применением теории пределов, и формула запишется так: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(X)\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty}(F(b) - F(a))$.

В чем отличие от определенного интеграла? Да ни в чем особенном! Как и в определенном интеграле, нужно уметь находить первообразную функцию $F(X)$ (неопределенный интеграл), уметь применять формулу Ньютона-Лейбница. Единственное, что добавилось – это вычисление предела. Тем, кто забыл этот материал, придется повторить материал занятия «Пределы функций».

Рассмотрим два классических примера:

Пример 1



Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$$

Для наглядности построим чертеж.

Подынтегральная функция $y = \frac{1}{x}$ непрерывна на полуинтервале $[1;+\infty)$, значит, всё нормально и несобственный интеграл можно вычислить «штатным» методом.

Применение нашей формулы $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(X)\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty}(F(b)-F(a))$ и решение задачи выглядит так:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}(\ln|x|)\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}(\ln b^{\to+\infty} - \ln 1) = +\infty - 0 = +\infty$$

То есть, несобственный интеграл расходится, и площадь заштрихованной криволинейной трапеции равна бесконечности.

В рассмотренном примере у нас простейший табличный интеграл и такая же техника применения формулы Ньютона-Лейбница, как в определенном интеграле. Но применятся эта формула под знаком предела. Вместо привычной буквы x «динамической» переменной выступает буква «бэ». Это не должно смущать или ставить в тупик, потому что любая буква ничем не хуже стандартного «икса».

Если Вам непонятно почему $\ln b \to +\infty$ при $b \to +\infty$, то это очень плохо, либо Вы не понимаете простейшие пределы (и вообще не понимаете, что такое предел), либо не знаете, как выглядит график логарифмической функции. При решении несобственных интегралов очень важно знать, как выглядят графики основных элементарных функций!

Чистовое оформление задания должно выглядеть примерно так:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = (*)$$

Подынтегральная функция непрерывна на $[1;+\infty)$

$$(*) = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}(\ln|x|)\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}(\ln b^{\to+\infty} - \ln 1) = +\infty - 0 = +\infty$$

Несобственный интеграл расходится.

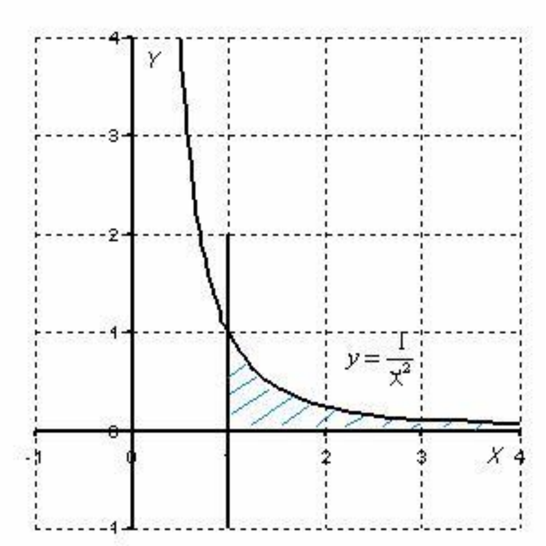
! При оформлении примера всегда прерываем решение, и указываем, что происходит с подынтегральной функцией. Этим мы идентифицируем тип несобственного интеграла.

Всегда смотрим и записываем, является ли подынтегральная функция непрерывнойна интервале интегрирования.

Пример 2

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость. $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$

Выполним чертеж:



Во-первых, замечаем следующее: подынтегральная функция $y=\frac{1}{x^2}$ непрерывна на полуинтервале $[1;+\infty)$.

Решаем с помощью формулы $\int_{a}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}F(X)\Big|_a^b=\lim_{b\to+\infty}(F(b)-F(a))$:

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\overset{(1)}{=}-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b\overset{(2)}{=}-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b}^{\to 0}-\frac{1}{1}\right)\overset{(3)}{=}-(0-1)=1$$

(1) Берем простейший интеграл от степенной функции (этот частный случай есть во многих таблицах). Минус лучше сразу вынести за знак предела, чтобы он не путался под ногами в дальнейших вычислениях.

(2) Подставляем верхний и нижний пределы по формуле Ньютона-Лейбница.

(3) Указываем, что $\frac{1}{b}^{\to 0}$ при $b\to+\infty$ (Господа, это уже давно нужно понимать) и упрощаем ответ.

Вот здесь площадь бесконечной криволинейной трапеции равна конечному числу! Невероятно, но факт.

Чистовое оформление примера должно выглядеть примерно так:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=(*)$$

Подынтегральная функция непрерывна на $[1;+\infty)$

$$(*)\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b=-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b}^{\to 0}-\frac{1}{1}\right)=-(0-1)=1$$

Пример 3

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

$$\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{x^4+1}$$

Подынтегральная функция непрерывна на $[0;+\infty)$.

Сначала попытаемся найти первообразную функцию $F(X)$ (неопределенный интеграл). Если нам не удастся этого сделать, то несобственный интеграл мы, естественно, тоже не решим.

$$\int\frac{xdx}{x^4+1}$$

На какой из табличных интегралов похожа подынтегральная функция? Напоминает она арктангенс: $\int\frac{dx}{1+x^2}=arctgx+C$. Из этих соображений напрашивается мысль, что неплохо бы в знаменателе получить квадрат. Делается это путем замены.

$$\int\frac{xdx}{x^4+1}=\int\frac{xdx}{(x^2)^2+1}=(*)$$

Проведем замену: $t=x^2$

$$dt=2xdx\Rightarrow xdx=\frac{dt}{2}$$

$$(*)=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{2}arctgt=\frac{1}{2}arctg(x^2)$$

Неопределенный интеграл найден, константу C в данном случае добавлять не имеет смысла.

На черновике всегда полезно выполнить проверку, то есть продифференцировать полученный результат:

$$\left(\frac{1}{2}arctg(x^2)\right)' = \frac{1}{2}(arctg(x^2))' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+(x^2)^2}\cdot(x^2)' = \frac{1}{2(1+x^4)}\cdot 2x = \frac{x}{1+x^4}$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, неопределенный интеграл найден правильно.

Теперь находим несобственный интеграл:

$$\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{x^4+1} \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}(arctg(x^2))\Big|_0^b \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(arctg(b^2)^{\to\frac{\pi}{2}} - arctg(0^2)\right) \overset{(3)}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{\pi}{4}$$

(1) Записываем решение в соответствии с формулой $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(X)\Big|_a^b$. Константу лучше сразу вынести за знак предела, чтобы она не мешалась в дальнейших вычислениях.

(2) Подставляем верхний и нижний пределы в соответствии с формулой Ньютона-Лейбница. Почему $arctg(b^2) \to \frac{\pi}{2}$ при $b \to +\infty$? Смотрите график арктангенса в уже неоднократно рекомендованной статье.

(3) Получаем окончательный ответ. Тот факт, что $arctg0 = 0$ полезно знать наизусть.

Продвинутые курсанты могут не находить отдельно неопределенный интеграл, и не использовать метод замены, а использовать метод подведения функции под знак дифференциала и решать несобственный интеграл «сразу». В этом случае решение должно выглядеть примерно так:

$$\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{x^4+1} = (*)$$

Подынтегральная функция непрерывна на $[0;+\infty)$.

$$(*) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{d(x^2)}{(x^2)^2+1} = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}(arctg(x^2))\Big|_0^b =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(arctg(b^2)^{\to\frac{\pi}{2}} - arctg(0^2)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{\pi}{4}$$

2. Несобственные интегралы от неограниченных функций

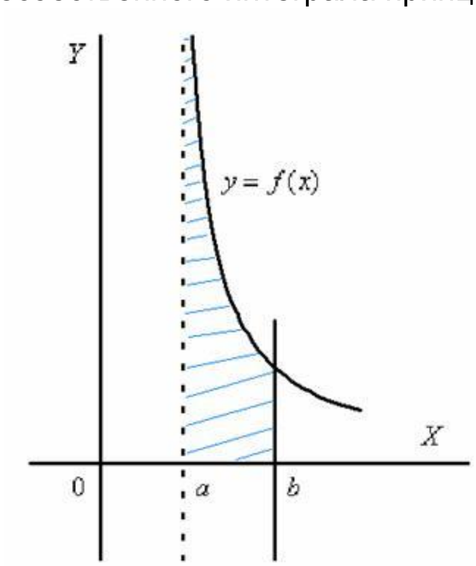
Иногда такие несобственные интегралы называют *несобственными интегралами второго рода*. Несобственные интегралы второго рода коварно «шифруются» под обычный определенный интеграл и выглядят точно так же: $\int_a^b f(x)dx$. Но, в отличие от определенного интеграла, подынтегральная функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв (не существует): 1) в точке $x=a$, 2) или в точке $x=b$, 3) или в обеих точках сразу, 4) или даже на отрезке интегрирования.

Если подынтегральной функции не существует в точке $x=a$

Сразу пример, чтобы было понятно: $\int_{3/4}^{1}\frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$. Вроде бы это определенный интеграл. Но на самом деле – это несобственный интеграл второго рода, если мы подставим в подынтегральную функцию значение нижнего предела $x=a=\frac{3}{4}$, то знаменатель у нас обращается в ноль, то есть подынтегральной функции просто не существует в этой точке!

Вообще при анализе несобственного интеграла всегда нужно подставлять в подынтегральную функцию оба предела интегрирования. В этой связи проверим и верхний предел: $\frac{1}{\sqrt[5]{3-4\cdot 1}}=\frac{1}{\sqrt[5]{-1}}=\frac{1}{-1}=-1$. Здесь всё хорошо.

Криволинейная трапеция для рассматриваемой разновидности несобственного интеграла принципиально выглядит так:



Здесь почти всё так же, как в интеграле первого рода. Наш интеграл численно равен площади заштрихованной криволинейной трапеции, которая не ограничена сверху. При этом могут быть два варианта: несобственный интеграл расходится (площадь бесконечна) либо несобственный интеграл равен конченому числу (то есть, площадь бесконечной фигуры – конечна!).

Осталось только модифицировать формулу Ньютона-Лейбница. Она тоже модифицируется с помощью предела, но предел стремится уже не к бесконечности, а к значению a справа. Легко проследить по чертежу: по оси OX мы должны бесконечно близко приблизиться к точке разрыва справа.

Посмотрим, как это реализуется на практике.

Пример 6

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость. $\int_{3/4}^{1}\frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$

Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке $a=\frac{3}{4}$ (не забываем устно или на черновике проверить, всё ли нормально с верхним пределом!)

Сначала вычислим неопределенный интеграл:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}=(*)$$

Замена: $t=3-4x\Rightarrow dt=-4dx\Rightarrow dx=-\frac{dt}{4}$

$$(*)=-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\sqrt[5]{t}}=-\frac{1}{4}\int t^{-\frac{1}{5}}dt=-\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{4}t^{\frac{4}{5}}=-\frac{5}{16}\sqrt[5]{(3-4x)^4}$$

Вычислим несобственный интеграл:

$$\int_{3/4}^{1}\frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}\overset{(1)}{=}-\frac{5}{16}\lim_{a\to\frac{3}{4}+0}\sqrt[5]{(3-4x)^4}\Big|_a^1\overset{(2)}{=}-\frac{5}{16}\lim_{a\to\frac{3}{4}+0}(1-\sqrt[5]{(3-4a)^4}^{\to 0})\overset{(3)}{=}-\frac{5}{16}(1-0)=-\frac{5}{16}$$

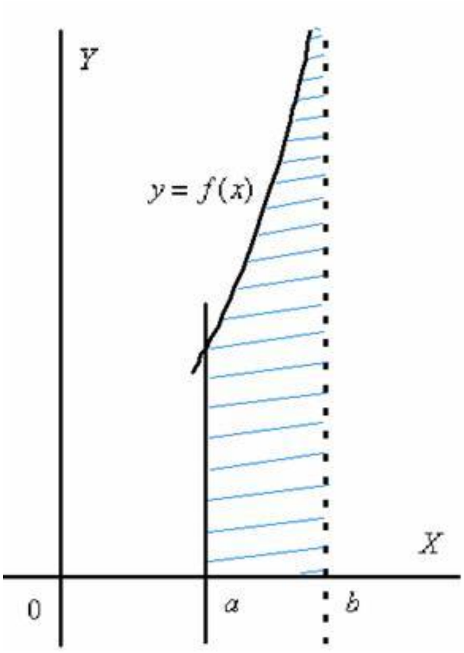
(1) Что здесь нового? По технике решения практически ничего. Единственное, что поменялось, это запись под значком предела: $a\to\frac{3}{4}+0$. Добавка $+0$ обозначает, что мы стремимся к значению $\frac{3}{4}$ справа (что логично – см. график). Такой предел в теории пределов называют *односторонним пределом*. В данном случае у нас *правосторонний предел*.

(2) Подставляем верхний и нижний предел по формуле Ньютона Лейбница.

(3) Разбираемся с $\sqrt[5]{(3-4a)^4}$ при $a \to \frac{3}{4}+0$. Как определить, куда стремиться выражение? Грубо говоря, в него нужно просто подставить значение $a=\frac{3}{4}$, подставляем три четверти и указываем, что $\sqrt[5]{(3-4a)^4}^{\to 0}$. Причесываем ответ.

В данном случае несобственный интеграл равен отрицательному числу. В этом никакого криминала нет, просто соответствующая криволинейная трапеция расположена под осью OX.

Если подынтегральной функции не существует в точке $x=b$



Бесконечная криволинейная трапеция для такого несобственного интеграла принципиально выглядит следующим образом:

Здесь всё абсолютно так же, за исключением того, что предел у нас стремится к значению b слева. По оси OX мы должны бесконечно близко приблизиться к точке разрыва слева.

Пример 9

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^5}} = (*)$$

Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке $b=3$ (устно проверяем, что с другим пределом интегрирования всё нормально!).

Решим этот интеграл сразу – методом подведения функции под знак дифференциала. Те, кому трудно, могут сначала найти неопределенный интеграл по уже рассмотренной схеме.

$$(*) = \int_1^3 (x-3)^{-\frac{5}{3}} d(x-3) = -\frac{3}{2}\lim_{b\to 3-0}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}\right)\Big|_1^b = -\frac{3}{2}\lim_{b\to 3-0}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(b-3)^2}}^{\to +\infty} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = (*)$$

Добавка -0 обозначает, что предел у нас *левосторонний*, и к точке $b=3$ мы приближаемся по оси OX слева.

Разбираемся, почему дробь $\frac{1}{\sqrt[3]{(b-3)^2}} \to +\infty$ (это лучше делать устно или на черновике).

Подставляем под корень предельное значение $b=3-0$:

$\sqrt[3]{(3-0-3)^2} = \sqrt[3]{(-0)^2} = \sqrt[3]{+0} = +0$ и тогда $\frac{1}{+0} \to +\infty$

Окончательно:

$$(*) = -\frac{3}{2}\left(+\infty - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = -\infty$$

Несобственный интеграл расходится.

Знак минус обозначает, что соответствующая криволинейная трапеция расположена под осью OX. Будьте очень внимательны в знаках. Да, конечно, несобственный интеграл расходится, но $-\infty$ и $+\infty$ – это разные вещи, разные жанры, и если Вы недосмотрите за знаками, то, строго говоря, допустите серьезную ошибку.

2) <u>Выполнить задание:</u>

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

<u>Пример 1</u>

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$$

<u>Пример 2</u>

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$$

<u>Пример 3</u>

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}}$$

<u>Пример 4</u>

$$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x \ln^4 x}$$

Пример 5

$$\int_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

Пример 6

$$-\int_{0,5}^1 \frac{dx}{x \ln^3 x}$$

Рекомендуемая литература

1.Башмаков, М. И. Математика: учебник / М. И. Башмаков. - Москва: КноРус, 2024. - on-line :. - (Среднее проф. образование)

2.Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике: учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. - 11-е изд., испр. и доп. - Москва : Юрайт, 2024. - 571 on-line.

3.Башмаков, М. И. Математика: практикум : учебно-практическое пособие / М. И. Башмаков, С. Б. Энтина. - Москва : КноРус, 2023. - 294 on-line