Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

И. П. Корнева

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины
для студентов направления подготовки
26.03.01 Управление водным транспортом
и гидрографическое обеспечение судоходства

Калининград
Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ»
2023

УДК 51(075)

Рецензент:
кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет»
Н. Н. Авдеева

Корнева, И. П.
Математика: учеб.-метод. пособие по изучению дисциплины для студентов направления подготовки 26.03.01 Управление водным транспортом и гидрографическое обеспечение судоходства / И. П. Корнева. – Калининград: Изд-во ФГБОУ ВО «КГТУ». – 2023. – 106 с.

Учебно-методическое пособие является руководством по изучению дисциплины «Математика» для студентов очной и заочной форм обучения направления подготовки 26.03.01 Управление водным транспортом и гидрографическое обеспечение судоходства. Содержит характеристику дисциплины (цель и планируемые результаты изучения дисциплины, место дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы, описание видов и процедур текущего контроля и промежуточной аттестации), тематический план с описанием для каждой темы форм проведения занятия, вопросов для изучения, методических материалов к занятию, методических указаний по выполнению самостоятельной работы, а также задание на контрольные работы студентам заочной формы обучения и методические указания по их выполнению.
Табл. 4, рис. 6, список лит. – 10 наименований

Учебно-методическое пособие рассмотрено и одобрено в качестве локального электронного методического материала на заседании кафедры прикладной математики и информационных технологий Института цифровых технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» 21 апреля 2023 г., протокол № 4

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины рекомендовано к использованию в учебном процессе в качестве локального электронного методического материала методической комиссией Института цифровых технологий 1 июня 2023 г., протокол № 6

УДК 51(075)

Оглавление

Введение

Учебно-методическое пособие представляет комплекс систематизированных материалов для самостоятельного изучения дисциплины «Математика» для студентов очной и заочной форм обучения направления подготовки 26.03.01 Управление водным транспортом и гидрографическое обеспечение судоходства.

Целью освоения дисциплины является получение систематизированных знаний об основных закономерностях и особенностях математической области знаний и ее технического приложения с акцентом на изучение прикладных математических аспектов технического направления, о проблемах, связанных с областью будущей профессиональной деятельности; выработка навыков получения, анализа и обобщения информации.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

знать: основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, аналитической геометрии, теории дифференциальных уравнений, а также теории скалярных и векторных полей, применяемых для решения прикладных и профессиональных задач; математические модели, применяемые в решении задач организации, планирования и управления технической и коммерческой эксплуатацией транспортных систем.

уметь: оперировать понятийным аппаратом при решении профессиональных задач с использованием алгоритмов; применять математические методы при решении технических и технологических задач эксплуатации транспортных систем, строить простейшие их математические модели, выбирать оптимальный метод решения задачи, оценивать полученный результат.

владеть: математической символикой, основными способами представления математической информации; методами построения простейших математических моделей технических и технологических процессов эксплуатации транспортных систем; математическими методами их решения, а также методами интерпретации полученных результатов.

Место дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы

Дисциплина Б1.О.03.01 «Математика» относится к Математическому и естественнонаучному модулю Б1.О.03 основной профессиональной образовательной программы высшего образования по направлению 26.03.01 Управление водным транспортом и гидрографическое обеспечение судоходства.

При изучении дисциплины используются знания, умения и навыки довузовской подготовки по математике.

Дисциплина является базой при изучении дисциплин математического и естественнонаучного модуля, инженерно-технического модуля.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 8 зачетных единиц (з.е.), т.е. 288 академических часов контактной и самостоятельной учебной работы студента; работы, связанной с текущей и промежуточной (заключительной) аттестацией по дисциплине.

Таблица 1 – Объем (трудоемкость освоения) в очной форме обучения и структура дисциплины

Наименование	**Семестр**	**Форма контроля**	**з.е.**	**Акад. часов**	**Контактная работа**					**СРС**	Подготовка и аттестация в период сессии
					Лек	Лаб	Пр	РЭ	КА		
Математика	1	Эк, К	4	144	32		16	16	2,55	43,7	33,75
	2	Эк, К	4	144	34	17	34	2	2,55	20,7	33,75
ИТОГО:			8	288	66	17	50	18	5,1	64,4	67,5

Таблица 2 – Объем (трудоемкость освоения) в заочной форме обучения и структура дисциплины

Наименование	**Семестр**	**Форма контроля**	**з.е.**	**Акад. часов**	**Контактная работа**					**СРС**	Подготовка и аттестация в период сессии
					Лек	Лаб	Пр	РЭ	КА		
Математика	1	Эк, К	4	144	2		4	2	2,75	126,5	6,75
	2	Эк, К	4	144	2	4	4	2	2,75	122,5	6,75
ИТОГО:			8	288	4	4	8	4	5,5	249	13,5

Основными видами аудиторных учебных занятий по дисциплине являются: лекции, лабораторные и практические занятия.

Формирование знаний обучающихся обеспечивается проведением лекционных занятий.

Изучение отдельных разделов тематического плана сопровождается лабораторными и практическими занятиями, в ходе которых происходит закрепление теоретических знаний, формирование и совершенствование умений, навыков и компетенций.

В ходе изучения дисциплины предусматривается применение эффективных методик обучения, которые предполагают постановку вопросов проблемного характера с разрешением их как непосредственно в ходе занятий, так и в ходе самостоятельной работы.

Контроль знаний в ходе изучения дисциплины осуществляется в виде текущего контроля, а также промежуточной аттестации в форме экзаменов в первом и втором учебных семестрах в соответствии с рабочим планом для очной и заочной форм обучения.

Текущий контроль (защита лабораторных работ, контроль выполнения заданий на самостоятельную работу) предназначен для проверки хода и качества усвоения студентами учебного материала и стимулирования их учебной работы. Он может осуществляться в ходе всех видов занятий в форме, избранной преподавателем или предусмотренной рабочей программой дисциплины.

Текущий контроль предполагает постоянный контроль преподавателем качества усвоения учебного материала, активизацию учебной деятельности студентов на занятиях, побуждение их к самостоятельной систематической работе. Он необходим обучающимся для самоконтроля на разных этапах обучения. Их результаты учитываются выставлением преподавателем оценок в журнале учета успеваемости и в ходе ежемесячной аттестации.

При текущем контроле успеваемости учитывается:

- выполнение обучающимся всех работ и заданий, предусмотренных рабочей программой дисциплины, а именно выполнение и защита лабораторных работ, выполнение заданий на практических занятиях, для которых срок выполнения и защиты приходится на отчетный период;
- самостоятельная работа обучающихся;
- посещаемость аудиторных занятий (занятий с применением ДОТ).

Результаты текущего контроля успеваемости оцениваются по пятибалльной шкале:

оценка **«отлично» (5)** – график самостоятельной работы (график выполнения курсовой работы и т.д.) и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся на 100% и более (с опережением);

оценка **«хорошо» (4)** – график самостоятельной работы (график выполнения курсовой работы и т.д.) и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся на 75% и более;

оценка **«удовлетворительно» (3)** – график самостоятельной работы (график выполнения курсовой работы и т.д.) и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся на 50% и более;

оценка **«неудовлетворительно» (2)** – график самостоятельной работы (график выполнения курсовой работы и т.д.) и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся менее чем на 50%.

Шкала оценивания результатов выполнения контрольной работы обучающимся заочной формы основана двухбалльной системе.

Оценка **«зачтено»** выставляется в случае, если для решаемых задач приведено полное теоретическое обоснование решения, расчеты выполнены по правильным формулам и алгоритмам и без существенных ошибок, выводы приведены полностью и по существу, студент понимает и может пояснить ход решения и привести экспликацию любой формулы, работа оформлена в соответствии с требованиями.

Оценка **«не зачтено»** выставляется в случае, если теоретическое обоснование при решении задач приведено формально и излишне кратко или не приведено вовсе, расчеты выполнены с использованием неправильных алгоритмов и формул, контрольная работа оформлена с нарушениями требований, выводы приведены не полностью или не приведены вовсе, студент плохо понимает (или не понимает вовсе) и не может пояснить ход решения.

К экзамену (зачету с оценкой) допускаются студенты, имеющие по всем текущим контролям положительные оценки.

Экзамен проводится в соответствии с перечнем вопросов к экзамену, размещенному в ЭИОС БГАРФ.

Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса и три задачи. Выбор экзаменационных вопросов для включения в билет осуществляется из принципа равной сложности всех билетов и наибольшего охвата каждым билетом учебного материала.

Подготовка к экзамену ведется по конспекту лекций, по рекомендуемым к изучению в начале курса учебникам и учебным пособиям. В ходе подготовки к экзамену преподаватель проводит консультацию, на которой доводится порядок проведения экзамена и даются ответы на вопросы, вызвавшие затруднения у студентов в процессе подготовки.

Экзамен проводится в день, указанный в расписании занятий.

Студент, прибывший для сдачи экзамена, докладывает экзаменатору, принимающему экзамен, сдает ему зачетную книжку, получает билет на бланке установленной формы и занимает указанное ему место для подготовки. После получения билета в течение 40 мин. студент имеет право готовиться к ответу. На ответ по билету отводится до 15 мин.

Готовясь к ответу, обучающийся все доказательства, формулы, структурные схемы, графики и т.д. записывает и изображает на полученном листе в форме, удобной для использования при устном ответе экзаменатору.

Ответ обучающегося должен быть четким, конкретным и кратким. После ответа преподаватель задает вопросы, помогающие ему выявить ход мыслей, логику рассуждений и способность применять полученные знания в практической деятельности. Если требуется уточнить оценку или степень знаний обучающегося по тому или иному вопросу, задаются дополнительные вопросы.

Студентам, пользующимся на экзамене материалами, различного рода записями, техническими средствами, не указанными в перечне разрешенных, выставляется оценка «**неудовлетворительно**», о чем докладывается заведующему кафедрой.

Знания, умения и навыки студентов определяются оценками «**отлично**», «**хорошо**», «**удовлетворительно**», «**неудовлетворительно**». Общая оценка объявляется курсанту СРАЗУ после окончания его ответа на билет экзамена.

Положительная оценка («**отлично**», «**хорошо**», «**удовлетворительно**») заносится в ведомость и зачетную книжку по окончании экзамена (зачета с оценкой). Оценка «**неудовлетворительно**» выставляется только в ведомость.

1 Тематический план

1.1 Тематический план для студентов очной формы обучения

Форма промежуточной аттестации по дисциплине для очной формы обучения – экзамены (1-й, 2-й семестры).

Таблица 3 – Трудоемкость освоения дисциплины по очной форме обучения

№ п/п	Раздел (модуль) дисциплины	Контактная работа с преподавателем					СРС	Подготовка и аттестация в период сессии
		ЛК	ЛР	ПР	РЭ	КА		
1	Элементы линейной алгебры	4	2	4			4	6
2	Векторная алгебра	4	2	4			4	6
3	Элементы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве	6		4			4	10
4	Комплексные числа	2		2			2	2
5	Введение в математический анализ	6	2	4			4	6
6	Дифференциальное исчисление функции одной переменной	12	2	5			6	8
7	Функции нескольких переменных	2		2			4	2
8	Неопределенный интеграл. Методы вычисления	6	3	5			8	10
9	Определенный интеграл	4		4			4	4
10	Дифференциальные уравнения	8	4	6			8	
11	Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Векторный анализ	8	2	6			10	8
12	Ряды	4		4			6,4	5,5
ИТОГО:		**66**	**17**	**50**	**18**	**5,1**	**64,4**	**67,5**

1.2 Тематический план для студентов заочной формы обучения

Форма промежуточной аттестации по дисциплине для заочной формы обучения - контрольная работа, зачет.

Таблица 4 – Трудоемкость освоения дисциплины по заочной форме обучения

№ п/п	**Раздел (модуль) дисциплины**	**Контактная работа с преподавателем**					**СРС**	**Подготовка и аттестация в период сессии**
		ЛК	**ЛР**	**ПР**	**РЭ**	**КА**		
1	Элементы линейной алгебры		2				17	2
2	Векторная алгебра						17	1
3	Элементы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве			2			18	2
4	Комплексные числа						19	
5	Введение в математический анализ						23	
6	Дифференциальное исчисление функции одной переменной	2		2			24	2
7	Функции нескольких переменных						20	
8	Неопределенный интеграл. Методы вычисления	2					22	
9	Определенный интеграл			2			16	1
10	Дифференциальные уравнения			2			22	2
11	Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Векторный анализ		2				26	1,5
12	Ряды						25	2
ИТОГО:		**4**	**4**	**8**	**4**	**5,5**	**249**	**13,5**

2 Содержание и методические указания по изучению дисциплины

2.1 Раздел 1. Элементы линейной алгебры

Вопросы для изучения

1. Матрица. Определение. Частные виды матриц. Единичная матрица. Транспонирование матриц. Сложение матриц. Умножение матриц на число. Умножение матриц. Обратная матрица.

2. Определители второго и третьего порядков. Их вычисление. Свойства определителей. Понятие об определителях любого конечного порядка.

3. Системы линейных уравнений.

4. Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера.

5. Решение систем линейных уравнений средствами матричного исчисления.

6. Однородные системы.

7. Понятие о ранге матрицы. Теорема Кронекера - Капелли.

Методические указания

Важно хорошо усвоить свойства определителей, так как без их применения практически невозможно вычислять определители высших порядков (выше третьего). Умение вычислять определители пригодится последующих тем. Понятие матрицы тесно связано с исследованием и решением систем линейных уравнений.

Рекомендуемые источники по теме: *в предлагаемой литературе [1] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.*

Основные теоретические сведения

Матрицей размера n×m называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из n строки m столбцов.

Матрица записывается в виде

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если m=*n*, то матрица называется ***квадратной.***

Элементы матрицы А обозначаются a_{ij}, где *i* - номер строки, в которой находится элемент, *j* - номер столбца.

Главной диагональю матрицы называется диагональ, проведённая из левого верхнего угла матрицы в правый нижний угол

Побочной диагональю матрицы называется диагональ, проведённая из левого нижнего угла матрицы в правый верхний угол.

Единичная матрица – это диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами

1. Сложение

Формальная модель	Наглядно-эмпирическая модель
Суммой матриц А и В одинаковой размерности называется матрица С той же размерности, m×n каждый элемент которой равен сумме элементов матриц А и В, стоящих на тех же местах	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$ то $A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}$

2. Произведение матрицы на число

Формальная модель	Наглядно-эмпирическая модель
Произведением матрицы на число называется матрица той же размерности, что и исходная, все элементы которой равны элементам исходной матрицы, умноженным на данное число	$k \cdot A = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$

3. Произведение матриц

Формальная модель	Наглядно-эмпирическая модель
Произведением матрицы А размерности m×p и матрицы В размерности p×n называется матрица С размерности m× n каждый элемент которой c_{ij} определяется формулой $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}, i = 1,..., m, j = 1,..., n.$ Таким образом, элемент c_{ij} представляет собой сумму произведений элементовi-йстроки матрицы А на соответствующие элементы j-го столбца матрицы В	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + b_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$

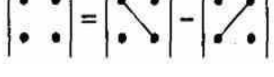
Определители

Определителем или детерминантом квадратной матрицы А называется число, которое ставится в соответствие этой матрице и может быть вычислена по её элементам.

Обозначается |**A**|, det **A**, или Δ.

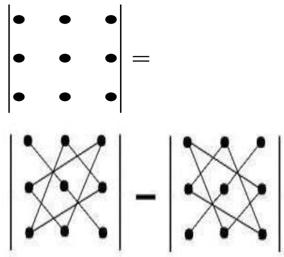
Вычисление определителей второго порядка

Определителем второго порядка называется число равное разности произведений элементов главной и второй диагонали.

Аналитическая модель	Графическая модель
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$	

Вычисление определителей третьего порядка

Определитель третьего порядка вычисляется следующим образом: со знаком плюс идут произведения троек чисел, расположенных на главной диагонали матрицы, и в вершинах треугольников с основанием параллельным этой диагонали и вершиной противоположного угла матрицы. Со знаком минус идут тройки из второй диагонали и из треугольников, построенных относительно этой диагонали.

Математическая Модель	Графическая модель
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$ $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$ $- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$	

Свойства определителей

1. Определитель единичной матрицы равен единице: $\det(E) = 1$

2. Определитель матрицы с двумя равными строками (столбцами) равен нулю.

3. Определитель матрицы с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю.

4. Определитель матрицы, содержащий нулевую строку (столбец), равен нулю.

5. Определитель матрицы равен нулю если две (или несколько) строк (столбцов) матрицы линейно зависимы.

6. При транспонировании значение определителя матрицы не меняется: $\det(A) = \det(A^T)$.

7. Определитель матрицы не изменится, если к какой-то его строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на некоторое число

8. Если поменять местами две строки (столбца) матрицы, то определитель матрицы поменяет знак.

9. Общий множитель в строке (столбце) можно выносить за знак определителя.

Обратная матрица

Обратной матрицей к квадратной матрице A называется такая матрица (обозначается A^{-1}), что $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$

Минором M_{ij} к элементу a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n-1)-го, полученный из исходного вычеркиванием i-той строки и j-того столбца (т.е. вычеркивается строка и столбец на пересечении которых находится элемент a_{ij}).

Наглядно-эмпирическая модель нахождения обратной матрицы	Формальная модель нахождения обратной матрицы
$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ где, $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ - союзная матрица, A_{ij} - алгебраические дополнения элементов $\boldsymbol{a_{ij}}$ исходной матрицы	Правило нахождения обратной матрицы на примере матрицы $\boldsymbol{A}$. 1. Находим определитель матрицы. Если $\Delta \neq 0$, то матрица A^{-1} существует. 2. Составим матрицу В алгебраических дополнений элементов исходной матрицы A. Т.е. в матрице B элементом i - ой строки и j - го столбца будет алгебраическое дополнение A_{ij} (элемента a_{ij} исходной матрицы). 3. Транспонируем матрицу B и получим B^T

Системы линейных уравнений. Формулы Крамера

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Если определитель Δ системы линейных алгебраических уравнений отличен от нуля, то система имеет единственное решение.

Наглядно-эмпирическая модель решения системы	Формальная модель решения системы
$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$ $\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}$.	Если определитель матрицы системы отличен от нуля, то система имеет решение и притом только одно. Это решение определяется формулами $x_k=\frac{\Delta_k}{\Delta}$, где Δ — определитель матрицы системы и Δ_k — определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой k-го столбца столбцом свободных членов

Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы

Систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

можно записать в матричном виде $A \cdot X = B$, где

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$-матрица системы,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$-столбец неизвестных,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$-столбец свободных членов.

Составим модели решения систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

Математическая модель	Формальная модель
$X = A^{-1} \cdot B$	Чтобы решить заданную систему надо: 1) найти обратную матрицу A^{-1} для матрицы A этой системы; 2) умножить матрицу A^{-1} на матрицу-столбец свободных членов *B*.

Решение типовых задач:

Решить систему уравнений следующими методами:

а) методом Крамера,

б) матричным методом.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases}$$

Решение:

а) Составим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

Для его вычисления воспользуемся свойством определителя о том, что величина определителя не изменится, если к элементам любой его строки (столбца) прибавить элементы любой другой строки (столбца), умноженной(го) на число.

(Первую строку умножаем на (-1) и прибавляем ко второй и к третьей строке.)

Получим: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix}$.

Применяя свойство о разложении определителя по элементам любой строки (столбца) (в данном случае по элементам первого столбца), получим:

$$\Delta = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2.$$

Составим вспомогательные определители и вычислим их аналогичным образом:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -17 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 2 \begin{vmatrix} -5 & -17 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-15 + 17) = 4$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 6 \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

x_1, x_2, x_3 вычисляются по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}.$$

$$x_1 = \frac{4}{2} = 2; \quad x_2 = \frac{6}{2} = 3; \quad x_3 = \frac{-2}{2} = -1.$$

б) Для решения системы матричным методом введем обозначения матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$AX = B \quad X = A^{-1}B. \quad (1)$$

Так как $\Delta = 2 \neq 0$, то для матрицы А существует обратная матрица $А^{-1}$. Найдем обратную матрицу. Для этого вычислим алгебраические дополнения всех элементов главного определителя Δ системы:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{31} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Союзной матрицей A* для матрицы A будет матрица:

$$A^* = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta = 2, \text{ то } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Учитывая равенство (1), имеем:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$x_1 = 2;\ x_2 = 3;\ x_3 = -1.$

2.2 Раздел 2. Векторная алгебра

Вопросы для изучения

1. Векторы. Основные определения. Линейные операции над векторами: сложение. Вычитание, умножение вектора на число. Условие коллинеарности векторов.
2. Проекция вектора на ось.
3. Линейная комбинация векторов. Линейно зависимые и линейно независимые векторы. Разложение вектора по базису.
4. Прямоугольная декартова система координат на плоскости и в пространстве. Разложение вектора по координатному базису. Координаты вектора.
5. Линейные операции над векторами, заданными своими координатами.
6. Координаты вектора, заданного двумя точками. Расстояние между двумя точками.
7. Направляющие косинусы вектора.
8. Деление отрезка в данном отношении.
9. Скалярное и векторное произведение векторов.

Методические указания

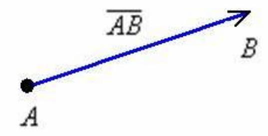
Понятие вектора в современной математике является довольно широким понятием, связанным с понятием линейных операций (сложением и умножением на число). Такие операции уже встречались, например, в арифметике, теории матриц. В каждом конкретном случае они определялись по-своему, в соответствии со спецификой тех множеств, для которых они рассматриваются (числа, матрицы). Но свойства этих операций одинаковы. Именно эта общность и сближает их. При решении задач следует учесть особенности применяемой терминологии. Пояснение всех терминов, используемых в задачах, найти в методических рекомендациях по изучению данной темы и рекомендуемой литературе.

Рекомендуемые источники по теме: *в предлагаемой литературе [1,3] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.*

Основные теоретические сведения

Основные понятия

Вектором называется направленный отрезок, для которого указано его начало и конец:



1) Чтобы вычислить ***координаты вектора*** $\vec{AB}$, зная координаты его начала A и координаты его конца B, нужно из координат конца вычесть координаты начала:

$\vec{AB}=(x_2-x_1; y_2-y_1;\ z_2-z_1)$, где $A(x_1, y_1, z_1),\ \ B(x_2, y_2, z_2)$.

2) Расстояние между началом и концом вектора называется его длиной

Если $\bar{a}=\{x, y\ , z\ \}$, то ***длина вектора*** вычисляется по формуле:

$|\bar{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

3) Сложение векторов

При сложении (вычитании) векторов складываются (вычитаются) их соответственные координаты.

Если $\bar{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\bar{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$, то $\bar{a}\ \pm\ \bar{b}=\{x_1\ \pm\ x_2,\ y_1 \pm y_2,\ z_1 \pm z_2\}$.

4) Умножение вектора на число

При умножении вектора на число каждая координата умножается на это число: $k\bar{a}=\{kx_1, ky_1, kz_1\}$.

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\,^\wedge\vec{b}) \Rightarrow \cos(\vec{a}\,^\wedge\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Выражение скалярного произведения через координаты

Скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных координат.

$\vec{a}\ (x_1;\ y_1;\ z_1),\ \vec{b}\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$, *то*

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2)$.

Тогда $\cos\varphi = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + z_1^{\ 2}} \cdot \sqrt{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2} + z_2^{\ 2}}}$.

Свойства скалярного произведения

Для произвольных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и любого числа λ справедливы следующие свойства:

1) $\overline{a}\,\overline{b} = \overline{b}\,\overline{a}$ – переместительный закон скалярного произведения.

2) $(\overline{a} + \overline{b})\overline{c} = \overline{a}\overline{c} + \overline{b}\,\overline{c}$ – распределительный закон скалярного произведения.

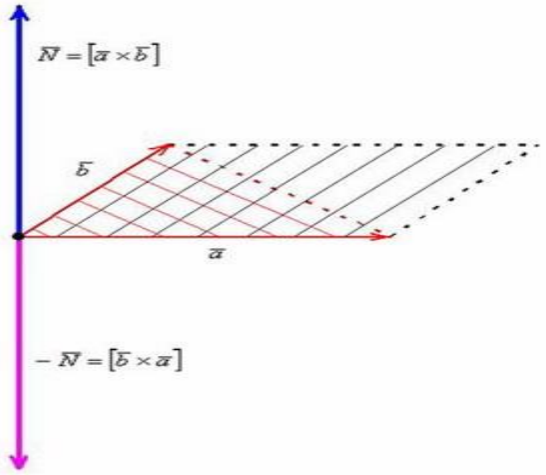
3) $(\lambda\overline{a}) \cdot \overline{b} = \lambda(\overline{a}\overline{b})$ – сочетательный закон скалярного произведения. (Константу можно вынести из скалярного произведения.)

Векторное произведение векторов

Векторным произведением $\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$ неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, взятых в данном порядке, называется вектор $\vec{N}$, длина которого численно равна площади параллелограмма, построенного на данных векторах:

$$\left|\overline{N}\right| = \left|\left[\overline{a} \times \overline{b}\right]\right| = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \sin\angle(\overline{a}; \overline{b})$$

Вектор $\vec{N}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направлен так, что базис $\left(\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{N}\right)$ имеет правую ориентацию:



Векторное произведение векторов в декартовых координатах

Если $\overline{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\overline{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, то

$$\overline{a} \times \overline{b} = \{y_1z_2 - y_2z_1;\ z_1x_2 - z_2x_1;\ x_1y_2 - x_2y_1\}, \text{ или}$$

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}, \text{ или}$$

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1z_2 - y_2z_1)\bar{i} + (z_1x_2 - z_2x_1)\bar{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\bar{k}.$$

Свойства векторного произведения векторов

Для произвольных векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ и произвольного числа λ справедливы следующие свойства:

1) $[\bar{a}\times\bar{a}]=\bar{0}$,

2) $[\bar{a}\times\bar{b}]=-[\bar{b}\times\bar{a}]$,

3) $[\lambda\bar{a}\times\bar{b}]=\lambda[\bar{a}\times\bar{b}]$, $[\bar{a}\times(\lambda\bar{b})]=\lambda[\bar{a}\times\bar{b}]$ – сочетательные

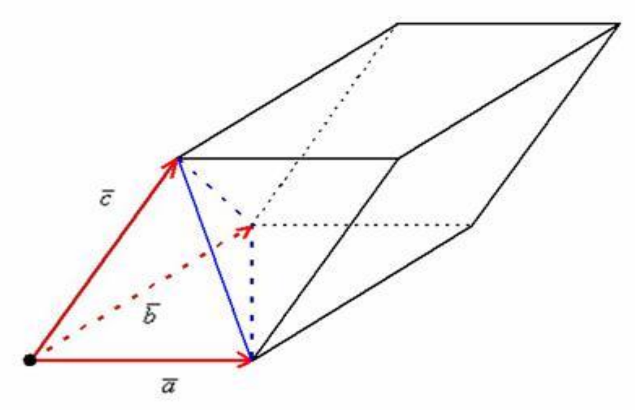
4) $[(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c}]=[\bar{a}\times\bar{c}]+[\bar{b}\times\bar{c}]$, $[\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})]=[\bar{a}\times\bar{b}]+[\bar{a}\times\bar{c}]$.

Смешанное произведение векторов

Определение: *Смешанным произведением* трех векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

Обозначение: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ или $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$.

Геометрический смысл **смешанного произведения – это объем параллелепипеда**, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ как на рёбрах.



Так как объём тетраэдра (треугольной пирамиды) равен одной шестой объёма параллелепипеда, то:

$$V_{тетраедра}=\frac{1}{6}(abc)$$

Смешанное произведение векторов в декартовых координатах

Если $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$, $\vec{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$, то

смешанное произведение вычисляется по формуле:

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение компланарных векторов

Если векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны, то их можно расположить в одной плоскости и тогда $(abc)=0$.

Решение типовых задач:

Задача 1. Выясните, образуют ли векторы $\vec{p}=(3;-1;0)$, $\vec{q}(2;3;1)$, $\vec{r}(-1;4;3)$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x}(2;3;7)$ по этому базису.

Решение:

Вычисляем $\vec{p}\vec{q}\vec{r}=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}=22\neq 0.$

Следовательно, векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ образуют базис и вектор $\vec{x}$ линейно выражается через базисные векторы: $\vec{x}=\alpha\ \cdot\vec{p}\ +\beta\ \cdot\vec{q}\ +\gamma\ \cdot\vec{r}$

или в координатной форме

$$\begin{cases} 3\alpha+2\beta-\gamma=2 \\ -\alpha+3\beta+4\gamma=3 \\ \qquad\beta+3\gamma=7 \end{cases}$$

Решаем полученную систему по формулам Крамера.

Находим: $\Delta=22,$

$$\Delta_\alpha=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}=66,\qquad \Delta_\beta=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix}=-44,\qquad \Delta_\gamma=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & 7 \end{vmatrix}=66.$$

$\alpha=\dfrac{\Delta_\alpha}{\Delta}=\dfrac{66}{22}=3,\qquad \beta=\dfrac{\Delta_\beta}{\Delta}=\dfrac{-44}{22}=-2,\qquad \gamma=\dfrac{\Delta_\gamma}{\Delta}=\dfrac{66}{22}=3,$ поэтому

$\vec{x}=(3;-2;3)$

$\vec{x}=3\ \cdot\vec{p}\ -2\ \cdot\vec{q}\ +3\ \cdot\vec{r}$.

2.3 Раздел 3. Элементы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве

Вопросы для изучения

1. Задание множеств точек уравнениями и неравенствами. Уравнение линии на плоскости.
2. Прямая на плоскости. Общее уравнение.
3. Угловой коэффициент прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
4. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
5. Уравнение прямой в отрезках.
6. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых.
7. Понятие о кривых второго порядка. Канонические уравнения эллипса, окружности, параболы, гиперболы.

8. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду в простейших случаях.

9. Общее уравнение плоскости. Уравнения прямой в пространстве.

Методические указания

Аналитическая геометрия - область математики, в которой геометрические задачи решаются алгебраическим способом. Важно научиться анализировать геометрические свойства линии на основе анализа их уравнений.

Рекомендуемые источники по теме: *в предлагаемой литературе [1,3] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.*

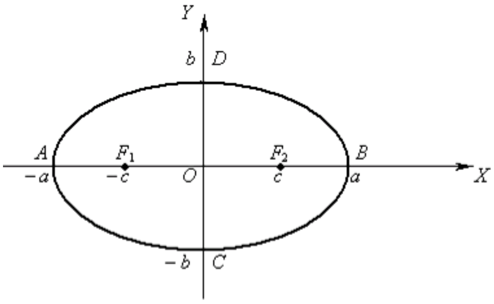
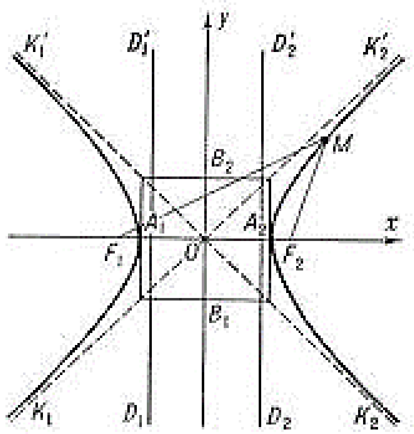
Основные теоретические сведения

Алгебраические уравнения первого порядка. Прямые и плоскости

Аналогии математических моделей для описания изучаемых геометрических образов отобразим в таблице

Геометрические образы и их модели / Способы задания	Математические модели		
	прямой на плоскости	прямой в пространстве	плоскости
1. Точкой и нормальным вектором	$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$	модели нет	$A(x-x_0) + B(y- y_0) + C(z - z_0) = 0$
2. Как следствие предыдущего	$Ax + By + C =0$	модели нет	$Ax + By + Cz +D =0$
3. Уравнение в отрезках	$\frac{x}{a}+\frac{y}{в}=1$	$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1,$ $\frac{y}{в}+\frac{z}{c}=1,$ $\frac{x}{a}+\frac{y}{в}=1$	$\frac{x}{a}+\frac{y}{в}+\frac{z}{c}=1$
4. Точкой и направляющим вектором			модели нет
5. Расстоянием от начала координат *p* и ортонормальным вектором	$x\cos\alpha+y\cos\beta-$ $-p=0$	модели нет	$x\cos\alpha+y\cos\beta+$ $z\cos\gamma-p=0$
6. Двумя точками	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=$ $=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=$ $=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$	модели нет

Алгебраические уравнения кривых и поверхностей второго порядка. Канонические уравнения

Модели	Эллипс	Гипербола
Математическая модель	Геометрическое место точек $M(x, y)$, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$ есть число, большее, чем расстояние между фокусами $F_1F_2 = 2c$	Геометрическое место точек $M(x, y)$, для каждой из которых разность расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$, есть число, меньшее чем расстояние между фокусами $F_1F_2 = 2c$
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
		

Решение типовых задач

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(4;4;10),\ A_2(4;10;2),\ A_3(2;8;4),\ A_4(9;6;4)$.

Найти:

1. Длину ребра A_1A_2, если

$A_1(4;4;10),\ A_2(4;10;2)$.

Решение:

$$d=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$$

$$d=\sqrt{(4-4)^2+(10-4)^2+(2-10)^2}=\sqrt{6^2+(-8)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$$

Ответ: $|A_1A_2|=10$.

2. Угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, если

$A_1(4;4;10),\ A_2(4;10;2),\ A_4(9;6;4)$.

Решение:

Найдем координаты векторов по формулам: $\{x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0\}$:

$\overrightarrow{A_1A_2} = (4-4;10-4;2-10)$

$\overrightarrow{A_1A_2} = (0;6;-8)$

$\overrightarrow{A_1A_4} = (9-4;6-4;4-10)$

$\overrightarrow{A_1A_4} = (5;2;-6)$.

Угол между векторами $\overrightarrow{A_1A_2} = (0;6;-8)$ и $\overrightarrow{A_1A_4} = (5;2;-6)$ вычисляется по формуле: $\cos\alpha = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

$$\cos\alpha = \frac{0\cdot 5 + 6\cdot 2 + (-8)\cdot(-6)}{\sqrt{0^2 + 6^2 + (-8)^2} \cdot \sqrt{5^2 + 2^2 + (-6)^2}} = \frac{60}{10\sqrt{65}} = \frac{6}{\sqrt{65}}$$

$\alpha = \arccos\left(\dfrac{6}{\sqrt{65}}\right)$.

Ответ: $\alpha = \arccos\left(\dfrac{6}{\sqrt{65}}\right)$.

3. Угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$.

$\overrightarrow{A_1A_4} = (5;2;-6)$,

$A_1(4;4;10)$, $A_2(4;10;2)$, $A_3(2;8;4)$.

Решение:

Найдем уравнение плоскости, содержащей точки A_1, A_2, A_3.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-4 & z-10 \\ 4-4 & 10-4 & 2-10 \\ 2-4 & 8-4 & 4-10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-4 & y-4 & z-10 \\ 0 & 6 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix} =$$

$= (-4)6(-6) + (y-4)(-8)(-2) + (z-10)0\cdot 4 - (z-10)6(-2) -$

$-(y-4)0(-6) - (x-4)4(-8) =$

$= -36x + 144 + 16y - 64 + 12z - 120 + 32x - 128 =$

$= -4x + 16y + 12z - 168 = 0$

$-4x + 16y + 12z - 168 = 0$

$x - 4y - 3z + 42 = 0$ – уравнение плоскости.

Вектор нормали к этой плоскости имеет координаты $\vec{n}(1;-4;-3)$.

Косинус угла между плоскостью и вектором равен синусу угла между этим вектором и вектором нормали.

$\vec{n}(1;-4;-3)$ $\overrightarrow{A_1A_4}=(5;2;-6)$.

$$\sin\alpha=\frac{1\cdot 5+(-4)\cdot 2+(-3)\cdot(-6)}{\sqrt{1^2+(-4)^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{5^2+2^2+(-6)^2}}=\frac{15}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{65}}=\frac{15}{13\sqrt{10}}.$$

$$\alpha=\arcsin\left(\frac{15}{13\sqrt{10}}\right).$$

Ответ: $\alpha=\arcsin\left(\frac{15}{13\sqrt{10}}\right)$.

4. Площадь грани $A_1A_2A_3$.

Решение:

Грань $A_1A_2A_3$ - треугольник, его площадь вычислим по формуле:

$S=\frac{1}{2}|a\times b|$, где $|a\times b|$ - модуль векторного произведения двух векторов (сторон треугольника), по определению он равен произведению длин двух векторов на синус угла между ними, т.е. $S=\frac{1}{2}|a||b|\sin(\alpha)$.

Найдем векторное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$:

$\overrightarrow{A_1A_2}=(0;6;-8)$,

$\overrightarrow{A_1A_3}=(2-4;8-4;4-10)$,

$\overrightarrow{A_1A_3}=(-2;4;-6)$,

$$\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 6 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix}=-36i+16j+12k+32i=-4i+16j+12k.$$

Результатом будет вектор с координатами $(-4;12;16)$, найдем его длину:

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\sqrt{(-4)^2+16^2+12^2}=\sqrt{416}=4\sqrt{26},$$

$$S=\frac{1}{2}4\sqrt{26}=2\sqrt{26},$$

Ответ: $S=2\sqrt{26}$.

5. Объем пирамиды.

Решение:

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right)\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right|,$$

$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right)\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right|$, где - $\left(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right)\cdot\overrightarrow{A_1A_4}$ - смешанное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}=(0;6;-8)$, $\overrightarrow{A_1A_3}=(-2;4;-6)$ и $\overrightarrow{A_1A_4}=(5;2;-6)$.

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right) \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \\ 5 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 6\cdot(-6)\cdot 5 + (-2)\cdot 2\cdot(-8) + 8\cdot 4\cdot 5 + 2\cdot(-6)\cdot 6 =$$

$$-180 + 32 + 160 - 72 = -60$$

$$V = \frac{1}{6}60 = 10$$

Ответ: $V = 10$.

6. Уравнение прямой A_1A_2.

Решение:

Каноническое уравнение прямой имеет вид:

$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$, где (x_1, y_1, z_1) - точка, принадлежащая прямой - $A_1(4;4;10)$, (a,b,c) - направляющий вектор этой прямой – $\overrightarrow{A_1A_2} = (0;6;-8)$.

$$\frac{x-4}{0} = \frac{y-4}{6} = \frac{z-10}{-8}.$$

Ответ: $\frac{x-4}{0} = \frac{y-4}{6} = \frac{z-10}{-8}$.

7. Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ (см. пункт 3).

$x - 4y - 3z + 42 = 0$ - уравнение плоскости.

Ответ: $x - 4y - 3z + 42 = 0$.

Уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

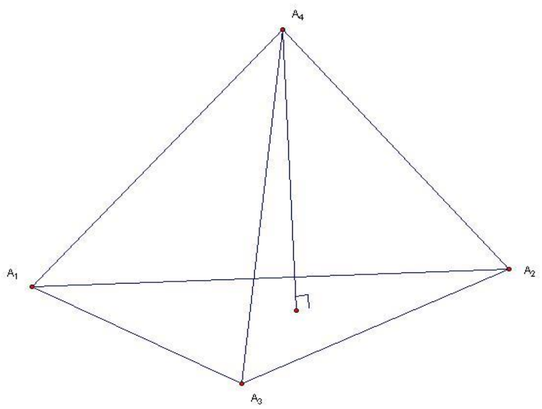
$A_4(9;6;4)$,

$x - 4y - 3z + 42 = 0$.

Вектор нормали к этой плоскости имеет координаты $\vec{n}(1;-4;-3)$, т.е. он и будет направляющим вектором высоты:

$$\frac{x-9}{1} = \frac{y-6}{-4} = \frac{z-4}{-3}.$$

Ответ: $\frac{x-9}{1} = \frac{y-6}{-4} = \frac{z-6}{-3}$.



Задача 2. Даны две вершины $A(2;-2)$ и $B(3;-1)$ и точка $P(1;0)$ пересечения медиан треугольника АВС. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной через третью вершину С.

Решение:

а) Найдем точку пересечения стороны *AB* с медианой, проведенной к ней.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$x_M = \frac{3+2}{2} = 2,5 \quad y_M = \frac{-1-2}{2} = -1,5$$

$$M\left(2,5;-1,5\right)$$

б) Найдем координаты точки *C* исходя из того факта, что медианы точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины.

Обозначим координаты (x, y).

$$\frac{x-1}{1-2,5} = \frac{2}{1}$$

$$x = -2$$

$$\frac{y-0}{0+1,5} = \frac{2}{1} \qquad y = 3$$

в) Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$:

$A(2;-2)$ и $B(3;-1)$,

$\overrightarrow{AB}(1;1)$.

Направляющим вектором высоты, проведенной к стороне АВ, будет вектор, перпендикулярный найденному, т.е., например:

(-1;1),

С(-2;3).

$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{1}$$

$$y = -x + 1$$

Эта прямая совпадает с прямой, содержащей медиану АМ.

Ответ: y = -x+1.

2.4 Раздел 4. Комплексные числа

Вопросы для изучения

1. Комплексные числа. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Мнимая единица.
3. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.
4. Возведение в натуральную степень и извлечение корня из комплексного числа (формула Муавра – Лапласа).

Методические указания

Комплексные числа обладают рядом замечательных свойств, выделяющих их из ряда других полей. В отличие от поля вещественных чисел, комплексные числа образуют алгебраически замкнутое поле. Это означает, что любой многочлен произвольной степени n (n - любое натуральное число) с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней (основная теорема алгебры). Они также нашли значительное применение в анализе: теория функций комплексного переменного оказалась намного более богата, чем теория функций вещественного переменного, комплексные числа также играют важную роль при рассмотрении представлений функций в виде рядов: при комплексной записи вещественных рядов появляется возможность полностью решить вопрос о сходимости каждого ряда.

Применение комплексных чисел позволяет удобно и компактно сформулировать многие математические модели, применяемые в математической физике и в естественных науках. Поэтому комплексные числа имеют широкое применение как в самой математике, так и в приложениях: в электротехнике, гидродинамике, картографии, квантовой механике, теории колебаний и многих других.

Рекомендуемые источники по теме: *в предлагаемой литературе [1] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.*

Основные теоретические сведения

Комплексным числом z *называется упорядоченная пара действительных чисел (x; y), первое из которых x называется его действительной частью, а второе число y - мнимой частью.*

Обозначение: $z = x + iy$. Символ i называется *мнимой единицей.*

Если $x=0$, то число называется *чисто мнимым,* если $y=0$, то число $z = x + i \cdot 0 = x$ отождествляется с действительным числом x, а это означает, что множество R действительных чисел является подмножеством множества C всех комплексных чисел, т.е. $R \subset C$.

Число x называется действительной частью комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, а y – мнимой частью, $y = \operatorname{Im} z$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными,* если равны их действительные мнимые части, т.е. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$.

Сопряженными называются два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся только знаком мнимой части.

Геометрическое изображение комплексных чисел

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной* плоскостью (ее также обозначают C). Ось абсцисс называется *действительной осью,* а ось ординат – *мнимой* (рисунок 1).

Комплексное число $z = x + iy$ *можно изобразить точкой* $M(x; y)$ плоскости XOY такой, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ или с помощью радиус-вектора $\vec{r} = \overline{OM}(x; y)$ (см. рисунок 2).

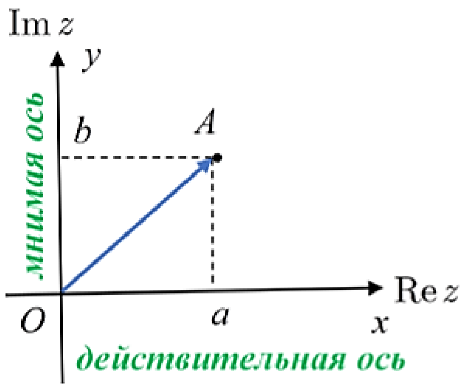


Рисунок 1

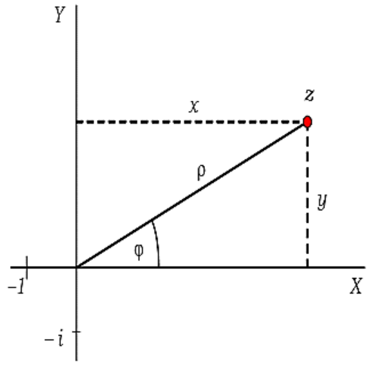


Рисунок 2

Длина вектора $\vec{r}$, изображающего комплексное число z, называется *модулем* этого числа и обозначается $|z|$ или $\vec{r}$. Модуль $\vec{r} = |z|$ определяется по формуле $\vec{r} = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\vec{r}$, изображающим комплексное число, называется *аргументом* этого числа, обозначается $Arg\ z$.

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ – величина многозначная: $Arg\ z = \arg z + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, где $\arg z = \varphi$ - *главное значение аргумента*, заключенное в промежутке $(-\pi; \pi]$, то есть $-\pi < \arg x \leq \pi$. Аргумент комплексного числа $z = 0 = 0 + i0$ не определен.

В качестве значения аргумента можно брать величину, принадлежащую промежутку $[0; 2\pi)$.

Формы записи комплексных чисел

Алгебраическая форма комплексного числа z записывается в виде $z = x + iy$. *Тригонометрическая форма записи* числа z имеет вид:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Аргумент φ вычисляется по формулам: $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Аргумент z можно найти, используя формулу $tg\varphi = \frac{y}{x}$, так как $-\pi < \arg z \leq \pi$, то из формулы $tg\varphi = \frac{y}{x}$ находим:

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, \text{ при } x>0; \\ arctg\,\dfrac{y}{x}+\pi, \text{ при } x<0, y>0; \\ arctg\,\dfrac{y}{x}-\pi, \text{ при } x<0, y<0; \end{cases}$$

Запись числа z

Показательная (или экспоненциальная) *форма* комплексного числа имеет вид: $z = re^{i\varphi}$ или $z = |z|e^{i\arg z}$.

Действие над комплексными числами

Основные действия над комплексными числами $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, заданные в *алгебраической форме*:

сложение - $z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$;

вычитание - $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$;

умножение - $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$;

деление - $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\dfrac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$.

Из формулы вычитания следует, что модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа на плоскости, т.е. $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Из формулы умножения вытекает, что

$i^2 = -1$.

При умножении комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, заданных в *тригонометрической форме*, их модули перемножаются, а аргументы складываются, т.е.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Отсюда следует *формула Муавра для возведения комплексных чисел* в натуральную степень:

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, осуществляется по формуле:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Корень n-й степени из комплексного числа имеет n различных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}),$$

где $k=0,1,2,3,...,n-1.$

Пример 1

Найти $z_1+z_2, z_1-z_2, z_1\cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}$, если $z_1=1+2i, z_2=2-i$.

Решение

Используя формулы действий над комплексными числами находим:

$z_1+z_2=(1+2i)+(2-i)=3+i$;

$$z_1-z_2=(1+2i)-(2-i)=-1+3i;$$

$$z_1\cdot z_2=(1+2i)\cdot(2-i)=2-i+4i-2i^2=4+3i;$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{5i}{5}=i.$$

Пример 2

Найти $(-1-i\sqrt{3})^{15}$.

Решение

Запишем число $z=-1-i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме:

$$|z|=r=\sqrt{1+3}=2, \arg z=\varphi=tg\frac{(-\sqrt{3})}{(-1)}-\pi=-\frac{2}{3}\pi, \text{ т.е.}$$

$$-1-i\sqrt{3}=2(\cos(-\frac{2}{3}\pi)+i\sin(-\frac{2}{3}\pi)).$$

По формуле Муавра имеем:

$$(-1-i\sqrt{3})^{15}=\left[2(\cos(-\frac{2}{3}\pi)+i\sin(-\frac{2}{3}\pi))\right]^{15}=$$

$$=2^{15}\cdot(\cos(-10\pi)+i\sin(-10\pi))=2^{15}=32768$$

Решение типовых задач

Задача 1. Дано комплексное число $z=\frac{1}{1+i}$. Записать это число в алгебраической и тригонометрической формах.

Решение:

Чтобы записать число z в алгебраической форме $z=x+iy$, умножим числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю:

$$z=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i}{1-i^2}=\frac{1-i}{1+1}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-i\frac{1}{2}.$$

Итак, алгебраическая форма числа $z=\frac{1}{2}-i\frac{1}{2}$.

Запишем данное число в тригонометрической форме. Имеем: $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$. Получим:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \ \cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0; \ \sin\varphi = \frac{y}{r} = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0.$$

Угол, для которого косинус положителен, а синус отрицателен, находится в четвертой четверти. Следовательно, $\varphi = \frac{7\pi}{4}$. Число z в тригонометрической форме запишется в виде: $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$.

2.5 Раздел 5. Введение в математический анализ

Вопросы для изучения

1. Функция и способы ее задания. Область определения функции.
2. Основные элементарные функции и их графики.
3. Понятие предела функции.
4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
5. Основные теоремы о пределах.
6. Понятие о неопределенных выражениях. Раскрытие неопределенностей.
7. Первый и второй замечательный пределы.
8. Непрерывность функции. Понятие о точках разрыва функции.

Методические указания

Понятие функции – одно из наиболее важных в математике и ее приложениях. В самом общем понимании функция – это зависимость между двумя переменными. В курсе математического анализа изучают главным образом числовые функции. Наглядное представление о числовой функции дает ее график – некоторое множество точек на координатной плоскости, обычно – некоторая линия. Задать функцию означает указать область определения функции и описать правило, позволяющее по данному значению аргумента находить соответствующее значение функции. Наиболее употребительными являются три способа задания функции: табличный, аналитический, графический. Наиболее простые приложения математического анализа ограничиваются кругом так называемых элементарных функций. Это: степенные функции, показательные функции, тригонометрические функции, обратные тригонометрические.

Важно усвоить понятия предела функции, бесконечно малых и бесконечно больших функций и методы вычисления приделов. Изучив эту главу, студент будет готов к восприятию понятий производной и интеграла.

Рекомендуемые источники по теме: *в предлагаемой литературе [1,2] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.*

Основные теоретические сведения

Предел функции. Основные понятия

Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to a$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|f(x) - A| < \varepsilon$. В этом случае пишут:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Аналогично, $\lim_{x \to a} f(x) = A$, если $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > N$

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, если $|f(x)| > M$ при $|x - a| < \delta$,

где М – произвольное сколь угодно большое положительное число. В этом случае $f(x)$ называется *бесконечно большой* величиной при $x \to a$.

Если $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, то функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* величиной при $x \to a$.

Практическое вычисление пределов основывается на следующих теоремах.

Если существуют $\lim_{x \to a} f(x)$ и $\lim_{x \to a} \varphi(x)$, то

1. $\lim_{x \to a}\big(f(x) + \varphi(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} \varphi(x)$.
2. $\lim_{x \to a}\big(f(x) \cdot \varphi(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} \varphi(x)$.
3. $\lim_{x \to a} k \cdot f(x) = k \lim_{x \to a} f(x)$.
4. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} \varphi(x)}$, если $\lim_{x \to a} \varphi(x) \neq 0$.
5. $\lim_{x \to a}\big(f(x)\big)^{\varphi(x)} = A^B$, где $A = \lim_{x \to a} f(x)$, $B = \lim_{x \to a} \varphi(x)$.

Пример 1. Найти предел

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1}$$

Запись читается так: «Предел функции при икс стремящемся к единице».

Для решения данного примера надо просто подставить единицу в функцию, стоящую под знаком предела:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 5}{1 + 1} = \frac{-6}{2} = -3$$

<u>Правило 1</u>.***В данный предел сначала просто подставляем число в функцию.***

Пределы с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$ и методы их решения

Пример 2

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1}$$

Решение

По правилу 1сначала попробуем подставить (-1) в дробь:

$$\frac{2(-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 5}{-1 + 1} = \frac{0}{0}.$$

Получили неопределенность $\frac{0}{0}$.

***<u>Правило 2</u>. Если в числителе и знаменателе находятся многочлены и имеется неопределенность вида $\frac{0}{0}$, то для ее раскрытия надо* разложить числитель и знаменатель на множители.**

Для этого чаще всего нужно решить квадратное уравнение или использовать формулы сокращенного умножения.

Итак, решаем наш предел:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{0}{0}=(*).$$

Разложим числитель и знаменатель на множители.

Для того чтобы разложить числитель на множители, нужно решить квадратное уравнение:

$$2x^2-3x-5=0.$$

1) Находим дискриминант:

$$D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-5)=9+40=49$$

и квадратный корень из него: $\sqrt{D}=\sqrt{49}=7$.

2) Вычисляем корни:

$$x_1=\frac{-(-3)-7}{2\cdot 2}=\frac{3-7}{4}=\frac{-4}{4}=-1,$$

$$x_2=\frac{-(-3)+7}{2\cdot 2}=\frac{3+7}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}.$$

3) Получаем разложение числителя на множители:

$$2x^2-3x-5=2(x-(-1))\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)=2(x+1)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)=(x+1)\cdot(2x-5)$$

$$(*)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1}=(*)$$

4) Сокращаем дробь на (x+1):

$$(*)=\lim_{x\to -1}(2x-5)=(*)$$

5) Подставляем (-1) в выражение, которое осталось под знаком предела:

$$=2\cdot(-1)-5=-2-5=-7.$$

Пример 3

$$\lim_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}$$

Решение

$$\lim_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}=\frac{0}{0}=(*)$$

1) Разложим числитель и знаменатель на множители.

Формула разности квадратов:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

Числитель:

$$8-2x^2=2(4-x^2)=2(2-x)(2+x)$$

Знаменатель:

$$x^2+4x-12=0$$

$$D=16+48=64$$

$$\sqrt{D}=8$$

$$x_1=\frac{-4-8}{2}=-6 \quad x_2=\frac{-4+8}{2}=2$$

$$x^2+4x-12=(x+6)(x-2)$$

$$(*)=\lim_{x\to 2}\frac{2(2-x)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=2\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=2\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=$$

$$=-2\lim_{x\to 2}\frac{(2+x)}{(x+6)}=-2\cdot\frac{4}{8}=-1$$

<u>Замечание 1.</u> Если в пределе можно вынести число за скобку, то целесообразно выносить его за знак предела.

Пример 4

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}.$$

Решение

Применяем Правило 1. Подставляем число 3 в выражение под знаком предела:

$$\frac{\sqrt{3+6}-\sqrt{10\cdot 3-21}}{5\cdot 3-15}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{9}}{15-15}=\frac{0}{0}.$$

Получена неопределенность вида $\frac{0}{0}$, от которой необходимо избавиться.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}=\frac{0}{0}=(*).$$

<u>Правило 3.</u> *Когда в числителе (знаменателе) находится разность корней (или корень минус какое-нибудь число), то для раскрытия неопределенности* $\frac{0}{0}$ ***умножаем числитель и знаменатель на сопряженное*** **числителю** ***выражение*:**

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=(*)$$

Умножили.

Теперь в числителе применяем формулу разности квадратов:

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

Получим:

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6})^2-(\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-(10x-21)}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-10x+21}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=(*).$$

Если подставить число 3 в числитель и знаменатель, то увидим, что неопределенность $\frac{0}{0}$ не пропала.

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{3+6}+\sqrt{10\cdot 3-21})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{9}+\sqrt{9})}=\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(3+3)}=$$

Разложим числитель и знаменатель на множители, учитывая что согласно Замечанию 1 числовой общий множитель лучше вынести за знак предела.

$$(*)=\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9(x-3)}{5(x-3)}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9}{5}=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{-9}{5}\right)=-\frac{3}{10}.$$

Пример 5

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2}$$

Сначала попробуйте решить его самостоятельно.

Решение

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель на множители:

$x^2+x-2=0$

$D=1+8=9$

$\sqrt{D}=3$

$x_1=\frac{-1-3}{2}=-2$

$x_2=\frac{-1+3}{2}=1$

$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение к знаменателю:

$$(*) = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x+6}+2)}{(\sqrt{x+6}-2)(\sqrt{x+6}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x+6}^{\to 2}+2)}{x+6-4} = 4\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)}{x+2} =$$

$$= 4\lim_{x\to -2}(x-1) = 4\cdot(-3) = -12$$

Пределы с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$ и метод их решения

<u>Правило 4</u>. Для того чтобы раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$***, необходимо разделить числитель и знаменатель на X в старшей степени.***

Пример 6

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$$

Решение

1) Определяем старшую степень x в числителе – она равна двум. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$.

2) Определяем старшую степень x в знаменателе – она равна двум. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$.

Получили, что старшая степень числителя и знаменателя в данном примере совпадает.

3) Разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$(*) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{1+x+3x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x^2}^{\to 0}+\frac{1}{x}^{\to 0}+3} = \frac{2}{3}$$

Замечание 2. *В пределе желательно помечать, что и куда стремится. Когда работа оформляется от руки, удобнее это сделать так:*

$$\frac{2-\overset{0}{\frac{3}{x}}-\overset{\to 0}{\frac{5}{x^2}}}{\overset{0}{\frac{1}{x^2}}+\underset{\to 0}{\frac{1}{x}}+3}$$

Пример 7. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}.$$

Решение

1) В числителе и знаменателе находим x в старшей степени: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$.

Максимальная степень в числителе: 3.

Максимальная степень в знаменателе: 4.

2) Выбираем **наибольшее** значение, в данном случае это четыре.

Согласно нашему алгоритму, для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ делим числитель и знаменатель на x^4:

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{x^4}}{\frac{5x^4+6x^2-3x-4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}^{\to 0}+\frac{15}{x^2}^{\to 0}+\frac{9}{x^3}^{\to 0}+\frac{1}{x^4}^{\to 0}}{5+\frac{6}{x^2}^{\to 0}-\frac{3}{x^3}^{\to 0}-\frac{4}{x^4}^{\to 0}}=$$

$$=\frac{0+0+0+0}{5+0-0-0}=\frac{0}{5}=0$$

Пример 8. Найти предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}.$$

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=(*).$$

Максимальная степень x в числителе: 2.

Максимальная степень x в знаменателе: 1.

Для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на x^2.

Разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x}^{\to 0}+\frac{1}{x^2}^{\to 0}}=\frac{2}{0}=\infty$$

Под записью $\frac{2}{0}$ подразумевается не деление на ноль (делить на ноль нельзя), а деление на бесконечно малое число.

Таким образом, при раскрытии неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ у нас может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.

Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ – первый замечательный предел.

Нередко функции могут быть расположены по-другому, это ничего не меняет:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1.$$

2. Следствия из первого замечательного предела

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha, \alpha \in R$.

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1$.

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$.

4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{arctgx}{x} = 1$.

Пример 9

Найти предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{3x}.$$

Решение

Согласно Правилу 1 сначала подставляем 0 в выражение, стоящее под знаком предела:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{3x} = \frac{0}{0}.$$

Получили неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Для применения первого замечательного предела знаменатель искусственно умножается в данном случае на 7 и делится на 7:

$$(*) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{3 \cdot \frac{1}{7} \cdot 7x} = \frac{1}{\frac{3}{7}} = \frac{7}{3}$$

(1-й замечательный предел)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{3 \cdot \frac{1}{7} \cdot 7x} = \frac{1}{\frac{3}{7}} = \frac{7}{3}$$

Пример 10

Решение

$$\lim_{x \to 0} \frac{5x^2}{\sin^2 \frac{x}{2}}$$

1) Подставляем в числитель и знаменатель ноль:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}$$

Получили неопределенность $\frac{0}{0}$, значит надо попытаться организовать первый замечательный предел. Для этого разложим числитель и знаменатель на множители – степени мы представим в виде произведения (множителей):

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

Далее по уже знакомой схеме организовываем первые замечательные пределы. Под синусами у нас $\frac{x}{2}$, значит в числителе тоже нужно получить $\frac{x}{2}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

Аналогично предыдущему примеру обводим карандашом замечательные пределы (здесь их два) и указываем, что они стремятся к единице:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

Собственно, ответ готов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=5\cdot 2\cdot 2=20$$

Пример 11

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}$$

Решение

По Правилу 1 подставляем ноль в выражение под знаком предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}=\frac{0}{0}$$

Получена неопределенность $\frac{0}{0}$, которую нужно раскрывать. Если в пределе есть тангенс, то надо использовать тригонометрическую формулу $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

В данном случае:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2\cdot\cos 2x}.$$

Косинус нуля равен единице, и от него легко избавиться (не забываем пометить, что он стремится к единице):

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2\cdot(\cos 2x)^{\to 1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\frac{1}{0}=\infty$$

В итоге получена бесконечность.

Пример 12

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}$$

Начинаем с Правила 1, подставить ноль в числитель и знаменатель:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}.$$

Получена неопределенность $\frac{0}{0}$ (помним, что косинус нуля равен единице).

Используем тригонометрическую формулу

$$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x}=$$

$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{\frac{1}{2}\cdot 2x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}\cdot 2\lim_{x\to 0}(\sin 2x)^{\to 0}=\frac{4}{5}\cdot 0=0$$

Пример 13

$$\lim_{x\to 0}\frac{ctgx\cdot(1-\cos^2 3x)}{(x^2+5x)}$$

Этот пример сложнее, попробуйте разобраться самостоятельно:

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{ctgx\cdot(1-\cos^2 3x)}{(x^2+5x)}=\frac{\infty\cdot 0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot(1-\cos^2 3x)}{\sin x\cdot(x^2+5x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^{\to 1}\cdot(1-\cos^2 3x)}{\sin x\cdot(x^2+5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{\sin x\cdot(x^2+5x)}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin x\cdot x\cdot(x+5)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin x\cdot x\cdot(x^{\to 0}+5)}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin x\cdot x}=$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\sin 3x}{\sin x\cdot x}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin 3x\cdot\sin 3x}{\sin x\cdot 3x\cdot 3x\cdot\frac{1}{9}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\frac{1}{9}}=\frac{9}{5}$$

3. Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \text{ или } \lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^x = e.$$

Замечание 3. *В качестве параметра α может выступать не только переменная x, но и сложная функция.* ***Важно лишь, чтобы она стремилась к бесконечности.***

Следствия из второго замечательного предела

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

Пример 14

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}.$$

Замечание 4. *Когда выражение под знаком предела находится в степени – это первый признак того, что нужно попытаться применить второй замечательный предел.*

Решение

Сначала, как всегда, пробуем подставить бесконечно большое число в выражение $\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{4x}$. Нетрудно заметить, что при $x\to\infty$ основание степени $\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)\to 1$, а показатель – $4x\to\infty$, то есть имеется неопределённость вида 1^∞ : $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^\infty$.

Данная неопределенность раскрывается с помощью второго замечательного предела.

В данном примере параметр $\alpha = 3x$, значит, в показателе нам тоже нужно организовать $3x$. Для этого возводим основание в степень $3x$ и, чтобы выражение не изменилось, возводим в степень $\dfrac{1}{3x}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^\infty = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}}_{\text{e (2-ой замечательный предел)}}\right)^{\frac{1}{3x}4x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{3x}} = e^{\frac{4}{3}}$$

Пример 15

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}$$

Решение

Имеем неопределенность вида: 1^{∞}.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}$$

Теперь можно почленно разделить числитель на знаменатель:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3} = 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3} = 1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right)^{\frac{-3}{x+1}\cdot(2x+3)}$$

$$= e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+1}} = e^{\frac{\infty}{\infty}} = e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x+3}{x}}{\frac{x+1}{x}}} = e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\left(\frac{3}{x}\right)^{\to 0}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{\to 0}}} = e^{-3\cdot 2} = e^{6}.$$

Решение типовых задач

Задача 1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$, *б)* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}$,

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x-3}{2x^3+4x+3}$, *г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+3x^3+4}{3x^2-4x+2}$, *д)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+6x-2}{7x^3+8x^2-4}$, *е)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+6x-2}{7x^3+8x^2-4}$.

ж) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi^2-x^2}$,

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$.

Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия разложим квадратные трехчлены на линейные множители по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Имеем:

$$\lim_{x\to-2}\frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}=\lim_{x\to-2}\frac{5(x+2)\left(x+\frac{3}{5}\right)}{3(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)}.$$

Сократив общий множитель $(x+2)$, получим:

$$\lim_{x\to-2}\frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}=\lim_{x\to-2}\frac{5x+3}{3x-4}=\frac{7}{10}=0{,}7.$$

б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}$.

Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия умножим и числитель, и знаменатель данной дроби на выражение, сопряженное числителю (знаменателю), а именно: $\sqrt{21+x}+5$. Имеем:

$$\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{21+x}-5)(\sqrt{21+x}+5)}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)}=$$

Для упрощения числителя воспользуемся формулой:
$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, где $a=\sqrt{21+x}-5$, $b=\sqrt{21+x}+5$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{21+x})^2-5^2}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)}=\lim_{x\to4}\frac{21+x-25}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)}=$$

Разложим первый сомножитель знаменателя по формуле:
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, где $a=x,\quad b=4$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)}{(x-4)(x^2+8x+16)(\sqrt{21+x}+5)}=$$

$$\lim_{x\to4}\frac{1}{(x^2+8x+16)(\sqrt{21+x}+5)}=\frac{1}{480}$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x-3}{2x^3+4x+3}$.

Если числитель и знаменатель дроби представляют собой алгебраические многочлены и имеется неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, то для ее раскрытия и числитель, и знаменатель делят на x в старшей степени. В данном случае старшая степень 3, поэтому и числитель, и знаменатель делим на x^3, имеем:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{10x}{x^3}-\dfrac{3}{x^3}}{\dfrac{2x^3}{x^3}+\dfrac{4x}{x^3}+\dfrac{3}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{10}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}}{2+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}=$$

(по теореме о пределе частного, имеем)

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{10}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}\right)}=$$

(по теореме о пределе суммы, имеем)

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{10}{x^2}-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x^3}}{\lim\limits_{x\to-\infty}2+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x^2}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x^3}}=\frac{0}{2}=0$$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+3x^3+4}{3x^2-4x\ \ +2}$.

Имеем также неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Старшая степень x равна 5. Поэтому делим и числитель, и знаменатель на x^5. Имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^5}{x^5}+\dfrac{3x^3}{x^5}+\dfrac{4}{x^5}}{\dfrac{3x^2}{x^5}+\dfrac{4x}{x^5}+\dfrac{2}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{4}{x^5}\right)}{\left(\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{4}{x^4}+\dfrac{2}{x^5}\right)}=\infty,$$

так как предел числителя равен 2, а знаменателя 0.

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+6x-2}{7x^3+8x^2-4}$.

Для вычисления данного предела и числитель, и знаменатель дроби делим на x^3, имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+6x-2}{7x^3+8x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\dfrac{6}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}}{7+\dfrac{8}{x}-\dfrac{4}{x^3}}=\frac{5}{7}.$$

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+6x-2}{7x^3+8x^2-4}$.

Имеем неопределенность вида: 1^{∞}.

Для ее раскрытия воспользуемся вторым замечательным пределом:

$\lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^u=e$ или $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3+3}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x-3}+\frac{3}{2x-3}\right)^{2-5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-3}{3}}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x-3}{3}}\right)^{\frac{2x-3}{3}}\right)^{\frac{3}{2x-3}\cdot(2-5x)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3}{2x-3}\cdot(2-5x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2-5x)\cdot 3}{2x-3}}=e^{-\frac{15}{2}}.$$

ж) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi^2-x^2}$.

Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Для ее раскрытия будем использовать первый замечательный предел: $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\sin u}=1$.

Для этого сделаем следующие преобразования:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi^2-x^2}=\left|\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right|==\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)}{(\pi-x)(\pi+x)}=\left|1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi-x}{4}\right)}{(\pi-x)(\pi+x)}=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin\left(\frac{\pi-x}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi-x}{4}\right)}{(\pi-x)(\pi+x)}=$$

$$=2\lim_{x\to\pi}\frac{\sin\left(\frac{\pi-x}{4}\right)}{\frac{\pi-x}{4}\cdot 4}\cdot\lim_{x\to\pi}\sin\left(\frac{\pi-x}{4}\right)\cdot\lim_{x\to\pi}\frac{1}{\pi+x}=$$

$$=\left|\lim_{x\to\pi}\frac{\sin\left(\frac{\pi-x}{4}\right)}{\frac{\pi-x}{4}\cdot 4}=1;\quad \lim_{x\to\pi}\frac{1}{\pi+x}=\frac{1}{2\pi};\quad \lim_{x\to\pi}\sin\left(\frac{\pi-x}{4}\right)=0\right|=$$

$$=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot 0=0$$

2.6 Раздел 6. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Вопросы для изучения

1. Определение производной. Ее механический и геометрический смысл. Уравнение касательной к графику функции.

2. Свойства производной. Основные правила нахождения производных.

3. Таблица производных основных элементарных функций.

4. Производные высших порядков.

5. Дифференциал функции. Геометрический смысл. Использование в приближенных вычислениях.

6. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей.

7. Признаки возрастания и убывания функций в интервале.

8. Экстремум функции. Необходимые и достаточные условия экстремума функции.

9. Направление выпуклости и точки перегиба графика функции.

10. Схема исследования функции и построения ее графика.

Методические указания

Понятие производной – одно из основных понятий математического анализа. Всякий процесс или явление, протекающее во времени, характеризуются наряду с другими показателями такой важной характеристикой, как скорость. Можно говорить о задаче нахождения скорости неравномерного движения, химической реакции, нагревания и остывания нагретого тела, производительности труда и т.д. Все эти задачи приводят к однотипным вычислениям, результат которых называют производной.

Важно усвоить понятие производной, способы ее вычисления, а также научиться применять это понятие при решении прикладных задач.

Рекомендуемые источники по теме: *в предлагаемой литературе [1,2] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.*

Основные теоретические сведения

Производная функции, правила и формулы дифференцирования

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точках x_1, x_2, и $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$

$y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, тогда разность $\Delta x = x_2 - x_1$ называется приращением аргумента, а $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$ - приращением функции.

Производной функции $y = f(x)$в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю и этот предел существует. Обозначается

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Вычисление производной называется *дифференцированием функции.*

Механический смысл производной

Скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути S по времени t: $V = S'(t)$.

Геометрический смысл производной

Производная представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции в точке с абсциссой x, т.е. $y' = tg\alpha$.

Таблица производных основных элементарных функций

Простые		**Сложные**	
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = U^a$	$y' = aU^{a-1}U'$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	$y = \frac{1}{U}$	$y' = \frac{U'}{U^2}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{U}$	$y' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \sin U$	$y' = (\cos U) \cdot U'$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \cos U$	$y' = (-\sin x) \cdot U'$
$y = tgx$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = tgU$	$y' = \frac{U'}{\cos^2 U}$
$y = ctgx$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$y = ctgU$	$y' = -\frac{U'}{\sin^2 U}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	$y = a^U$	$y' = a^u \ln a \cdot U'$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^U$	$y' = e^U \cdot U'$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$y = \log_a U$	$y' = \frac{U'}{U \ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln U$	$y' = \frac{U'}{U}$
$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$y = \arccos U$	$y' = -\frac{U'}{\sqrt{1 - U^2}}$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$y = \arcsin U$	$y' = \frac{U'}{\sqrt{1 - U^2}}$
$y = arctgx$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$	$y = arctgU$	$y' = \frac{U'}{1 + U^2}$
$y = shx$	$y' = chx$	$y = shU$	$y' = chU \cdot U'$
$y = chx$	$y' = shx$	$y = chU$	$y' = shU \cdot U'$
$y = thx$	$y' = \frac{1}{ch^2x}$	$y = thU$	$y' = \frac{U'}{ch^2U}$
$y = cthx$	$y' = -\frac{1}{sh^2x}$	$y = cthU$	$y' = -\frac{U'}{sh^2U}$

Основные правила дифференцирования

1. Производная постоянной равна нулю:

$y = C$; $y' = 0$.

2. Производная функции $y = x$ равна единице:

$x' = 1$.

3. Производная суммы равна сумме производных:

$(u + v)' = u' + v'$.

4. Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$(Cy)' = C \cdot y'$.

5. Производная произведения: $(uv)' = u'v + uv'$.

6. Производная частного: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{(u'v - uv')}{v^2}$.

7. Производная сложной функции.

Пусть $y = f(u), u = u(x)$, т. е. $y = f\big(u(x)\big)$, где $f(u), u(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда

$y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)$.

8. Логарифмическая производная

$y' = (\ln y)' \cdot y$.

9. Производная показательно-степенной функции

$(u^v)' = u^v \ln u \, \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$

10. Производная функции заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

11. Производная неявно заданной функции $F(x, y) = 0$.

Для нахождения производной y' необходимо продифференцировать обе части данного уравнения по x, считая y функцией от x. Из полученного равенства выразить y'.

Применяя формулы и правила дифференцирования, найти производные следующих функций:

Пример 1

$y = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 4$.

Решение

$y' = \left(2x^3\right)' - \left(5x^2\right)' + \left(7x\right)' + \left(4\right)' = 2\left(x^3\right)' - 5\left(x^2\right)' + 7x' + 4' =$

$= 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 + 0 = 6x^2 - 10x + 7$.

Пример 2

$y = x^2 e^x$.

Решение

Применяем формулу производной произведения$(uv)' = u'v + uv'$.

Получим:

$$y' = x^2\left(e^x\right)' + e^x\cdot\left(x^2\right)' = x^2e^x + 2xe^x = xe^x\left(x+2\right).$$

Пример 3

$y = x^3\operatorname{arc}tgx$.

Решение

$$y' = x^3(\operatorname{arc}tgx)' + \operatorname{arc}tgx\cdot\left(x^3\right)' = x^3\frac{1}{1+x^2} + 3x^2\operatorname{arc}tgx = \frac{x^3}{1+x^2} + 3x^2\operatorname{arc}tgx .$$

Пример 4

Найти производную от дроби $y = \frac{\cos x}{x}$.

Решение

По формуле производной частного $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{(u'v - uv')}{v^2}$

получаем:

$$y' = \left(\frac{\cos x}{x}\right) = \frac{\left(\cos x\right)' x - \cos x\left(x\right)'}{\left(x\right)^2}$$

Учитываем, что $\left(\cos x\right)' = -\sin x$.

Тогда:

$$y' = \frac{-x\sin x - \cos x}{x^2} = \frac{x\sin x + \cos x}{x^2}$$

Пример 5

Найти производную сложной функции $y = \sin(3x-5)$.

Решение

Применим формулу $y'(x) = y'(u)\cdot u'(x)$, тогда

$$y' = (\sin(3x-5))' = \cos(3x-5)\cdot(3x-5)' = \cos(3x-5)\cdot(3-0) = 3\cos(3x-5) .$$

Пример 6

Найти производную от показательно-степенной функции.

Решение

В данном примере основание и показатель степени зависят от x . Логарифмируя, получим $\ln y = x^2\ln x$.

Продифференцируем обе части последнего равенства по x . Так как y является функцией от x , то $\ln y$ есть сложная функция x и $\left(\ln y\right)' = \frac{1}{y}\cdot y'$. Следовательно,

$$\frac{y'}{y} = x^2\cdot\frac{1}{x} + 2x\ln x ,$$

$\frac{y'}{y} = x(1+2\ln x)$, т.е.

$y' = xy(1+2\ln x) = xx^{x^2}(1+2\ln x) = x^{x^2+1}(1+2\ln x)$.

Пример 7

Найти y'_x, если функция задана параметрически

$$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases}$$

Решение

Для вычисления производной функции, заданной параметрически, воспользуемся формулой:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Найдем $x'_t = 3t^2 + 3$, $y'_t = 15t^4 + 15t^2$. Следовательно,

$$y'_x = \frac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = 5t^2.$$

Пример 8

Найти производную y'_x неявно заданной функции $x^2 + y^2 = 4$.

Решение

Так как y является функцией от x, то будем рассматривать y^2 как сложную функцию от x.

Следовательно, $\left(y^2\right)' = 2yy'$. Продифференцировав по x обе части данного уравнения, получим $2x + 2yy' = 0$, т.е.

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Решение типовых задач

Задача 1. Найти производные следующих функций:

а) $y = \sqrt{5+2x^2} + \frac{4}{(x^2-4x+5)^3}$

б) $y = \sin^5(3x+1) \cdot \arccos\sqrt{x}$

в) $y = \frac{\cos^2(3x+2)}{x^2-2x}$

г) $y = (\sin x)^{\sqrt{x+1}}$

Решение:

а) $y = \sqrt{5+2x^2} + \frac{4}{(x^2-4x+5)^3}$.

При нахождении производной данной функции воспользуемся следующими формулами: $(u \pm v)' = u' \pm v'$,

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$.

Имеем:

$$y' = \left(\left(5+2x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)' + \left(4\left(x^2-4x+5\right)^{-3}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\left(5+2x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4x - 12\left(x^2-4x+5\right)^{-4}\left(2x-4\right)$$

$$y' = 2x\left(5+2x^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{12\left(2x-4\right)}{\left(x^2-4x+5\right)^4}$$

б) $y = \sin^5(3x+1) \cdot \arccos\sqrt{x}$.

При вычислении производной данной функции воспользуемся формулой: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Имеем:

$$y' = (\sin^5(3x+1))' \cdot \arccos\sqrt{x} + \sin^5(3x+1)(\arccos\sqrt{x}) \qquad (*)$$

При вычислении производной первого сомножителя воспользуемся формулой $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$, где

$$u = \sin(3x+1) \Rightarrow (\sin^5(3x+1))' =$$

$$= 5\sin^4(3x+1) \cdot \cos(3x+1) \cdot 3 = 15\sin^4(3x+1) \cdot \cos(3x+1)$$

При вычислении производной второго сомножителя воспользуемся следующей формулой: $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

$$(\arccos\sqrt{x})' = -\frac{1}{\sqrt{1-(x^{\frac{1}{2}})^2}} \cdot (x^{\frac{1}{2}})' = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} .$$

Подставляя вычисленные производные в равенство (*), имеем:

$$y' = 15\sin^4(3x+1) \cdot \cos(3x+1) \cdot \arccos\sqrt{x} - \sin^5(3x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} .$$

в) $y = \frac{\cos^2(3x+2)}{x^2-2x}$.

В данном случае сначала воспользуемся формулой:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} .$$

$$y' = \frac{(\cos^2(3x+2))' \cdot (x^2-2x) - \cos^2(3x+2) \cdot (x^2-2x)'}{(x^2-2x)^2} .$$

Производную числителя и знаменателя вычисляем, используя формулу $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$.

$$(\cos^2(3x+2))' = 2\cos(3x+2) \cdot (-\sin(3x+2)) \cdot 3 = -3\sin(2(3x+2)) ,$$

так как $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha$.

$$(x^2-2x)' = 2x-2 .$$

В результате:

$$y' = \frac{-3\sin(6x+4) \cdot (x^2-2x) - \cos^2(3x+2) \cdot (2x-2)}{(x^2-2x)^2} .$$

2.7 Раздел 7. Функции нескольких переменных

Вопросы для изучения

1. Функции двух переменных. Область определения. Линии уровня. Понятие о функциях трех и более переменных.

2. Предел функции. Непрерывность.

3. Частные производные. Их геометрический и механический смысл.

4. Полный дифференциал, его приложение к приближенным вычислениям.

5. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков.

6. Экстремумы функции двух переменных. Необходимые условия. Понятие о достаточных условиях экстремума.

Методические указания

В данной теме рассматриваются переменные величины, зависящие от нескольких других переменных величин. Необходимость изучения такого вида зависимостей вызваны тем, что во многих процессах и явлениях, встречающихся в природе, технике, в практической деятельности человека, числовые значения одной величины определяются набором из двух, трех и большего количества независимых переменных. При изучении этих явлений используют понятие функции нескольких переменных.

Рекомендуемые источники по теме: *в предлагаемой литературе [1,2] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.*

Основные теоретические сведения

Частные производные первого порядка

Если каждой паре действительных чисел (x,y) из непустого множества D(область определения функции) по некоторому правилу ставится в соответствие определенный элемент z из множества U(множество значений функции), то говорят, что на множестве D задана функция двух переменных, которую обозначают $z = f(x, y)$.

Независимые переменные x, y называют аргументами функции z

Аналогично определяется функция любого числа переменных:

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Частными производными от функции$z = f(x, y)$по переменным x и y называются пределы вида:

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Для нахождения частных производных используют правила и формулы дифференцирования функции одной переменной в предположении, что одна из переменных x или y – постоянная величина.

Пример 1.

$u = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1$. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Решение

1) При нахождении частной производной по x рассматриваем y как постоянную величину, получим $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3y - 1$.

2) При нахождении частной производной по y рассматриваем x как постоянную величину, получим $\frac{\partial u}{\partial y} = -3x - 8y + 2$.

Пример 2.

$z = e^{x^2+y^2}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^2}(x^2+y^2)'_x = 2xe^{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y^2}(x^2+y^2)'_y = 2ye^{x^2+y^2}$$

Полный дифференциал

Полным приращением функции $z = f(x,y)$ в точке $M(x,y)$ называется разность

$$\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x,y),$$

где $\Delta x, \Delta y$ – приращения аргументов.

Функция $z = f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке $M(x,y)$, если ее полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \gamma,$$

Где γ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Полным дифференциалом функции $z = f(x,y)$ называется главная часть ее полного приращения, линейная относительно $\Delta x, \Delta y$, т.е.

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями:

$$dx = \Delta x;$$

$$dy = \Delta y$$

Полный дифференциал функции $z = f(x,y)$ находят по формуле:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy.$$

Пример 3.

$z = arctg\frac{x+y}{x-y}$. Найти полный дифференциал функции dz.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{-2y}{(x-y)^2}=-\frac{y}{x^2+y^2};.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{2x}{(x-y)^2}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

Следовательно, $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$.

Частные производные второго порядка

Частными производными второго порядка от функции $z=f(x,y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка:

$$(z'_x)'_x=z'_{xx};\ (z'_x)'_y=z''_{xy};$$
$$(z'_y)'_x=z''_{yx};\ (z'_y)'_y=z''_{yy}.$$

Аналогично определяются и обозначаются производные третьего и высших порядков.

Если частные производные высшего порядка непрерывны, то так называемые «смешанные» производные, отличающиеся друг от друга лишь последовательностью дифференцирования, равны между собой т.е. $z''_{xy}=z''_{yx}$.

Пример 4

Найти частные производные второго порядка функции $z=x^4-2x^2y^3+y^5+1$.

Решение

Так как $z'_x=4x^3-4xy^3$ и $z'_y=-6x^2y^2+5y^4$, то

$$z''_{xy}=(4x^3-4xy^3)'_y=-12xy^2$$

$$z''_{yx}=(-6x^2y^2+5y^4)'_x=-12xy^2$$

Получим $z''_{xy}=z''_{yx}$.

Решение типовых задач

Задача 1. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=\ln\sin\frac{x+a}{\sqrt{y}}$.

Решение:

Считая y постоянной (тогда и $\sqrt{y=}$ const), находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sin\frac{x+a}{\sqrt{y}}}\cos\frac{x+a}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{y}}ctg\,\frac{x+a}{\sqrt{y}}$$

Считая x постоянной, имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sin\frac{x+a}{\sqrt{y}}}\cos\frac{x+a}{\sqrt{y}}\cdot\left(\frac{x+a}{\sqrt{y}}\right)'_y=\frac{-(x+a)}{2y\sqrt{y}}\cdot ctg\,\frac{x+a}{\sqrt{y}}.$$

2.8 Раздел 8. Неопределенный интеграл. Методы вычисления

Вопросы для изучения

1. Первообразная функция. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных интегралов.

2. Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование, замена переменной, интегрирование по частям.

3. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование.

4. Правильные и неправильные рациональные дроби. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие. Интегрирование дробно-рациональных функций.

5. Интегрирование некоторых видов тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка. Интегралы вида:

6. $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$.

7. Интегрирование некоторых видов иррациональных выражений. Тригонометрические подстановки.

Методические указания

В предыдущих разделах мы изучали производную функции и ее приложения к решению практических задач.

В этом разделе рассматривается второе основное понятие математического анализа – понятие интеграла. Интегрирование – действие, обратное нахождению производной. Важно усвоить основные формулы интегрирования и методы интегрирования, так как понятие интеграла пронизывает не только всю современную математику, но и физику, химию и многие общетехнические и специальные дисциплины.

Рекомендуемые источники по теме: *в предлагаемой литературе [1,2] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.*

Основные теоретические сведения

Неопределенный интеграл. Основные понятия

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на интервале (a;b), если для любого x в каждой точке этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех её первообразных.

Обозначение: $\int f(x)dx = F(x) + C,$ где

$\int -$ знак интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования; C – произвольная постоянная.

Из определения неопределённого интеграла вытекают свойства:

1. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx,$

2. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),$

3. $\int dF(x) = F(x) + C,$

4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx\, , k - \textit{число},$

5. $\int\big(f(x)dx \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

Таблица простейших интегралов

1	$\int dx = x + C,$
2	$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq 1,$
3	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C,$
4	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,$
5	$\int e^x\, dx = e^x + C,$
6.	$\int \sin x dx = -\cos x + C,$
7	$\int \cos x dx = \sin x + C,$
8	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C,$
9	$\int \dfrac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C,$
10	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C,$
11	$\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + C,$
12	$\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert + C,$
13	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + a}\right\rvert + C,$
3	$\int \cos kx dx = \dfrac{1}{k}\sin kx + C$
4	$\int \sin kx dx = -\dfrac{1}{k}\cos kx + C$
5	$\int \dfrac{dx}{kx+b} = \dfrac{1}{k}\ln\lvert kx+b\rvert + C$

Основные методы интегрирования

1. Метод непосредственного интегрирования

Путем тождественных преобразований подынтегральной функции и свойств неопределенного интеграла вычисляемый интеграл сводится к табличному.

Пример 1

Найти интеграл $\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)dx$.

Решение

Используя свойства 4 и 5, получаем

$$\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4} - 5 \cdot \frac{x^3}{3} + 7 \cdot \frac{x^2}{2} - 3x + C = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 3x + C.$$

Пример 2

$$\int \frac{dx}{x^5} = \int x^{-5}dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C.$$

Пример 3

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{x^{-\frac{1}{2}}} = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C.$$

2. Внесение под знак дифференциала

С помощью преобразования подынтегрального выражения интеграл приводится к табличному. При этом используются свойства дифференциала функции:

1. $dx = \frac{1}{k}d(kx + b)$,
2. $x^n dx = \frac{1}{n+1}d(x^{n+1})$,
3. $\sin x dx = -d(\cos x)$,
4. $\cos x dx = d(\sin x)$,
5. $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(tgx)$,
6. $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$.

Этот метод применим, когда интеграл имеет вид

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x).$$

Пример 4

Вычислить интеграл

$$\int (3x - 5)^{10}dx.$$

Данный пример можно решить двумя способами.

1) решаем методом внесения под знак дифференциала:

$$\int (3x - 5)^{10}dx = \frac{1}{3}\int (3x - 5)^{10}d(3x - 5) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-5)^{11}}{11} + C.$$

Пример 5

$$\int \frac{\ln^4 x}{x}dx = \int \ln^4 x\, d\ln x = \frac{\ln^5 x}{5} + C.$$

3. Замена переменной

***Пример* 6**

$$\int \frac{dx}{4+\sqrt{x}} = \left|\begin{matrix} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{matrix}\right| = \int \frac{2tdt}{4+t} = 2\int \frac{(4+t)-4}{4+t}dt = 2\left(\int dt - 4\int \frac{dt}{4+t}\right) =$$

$$= 2(t - 4\ln|4+t|) + C = 2\left(\sqrt{x} - 4\ln\left|4+\sqrt{x}\right|\right) + C.$$

4. Метод интегрирования по частям

Пусть производные функций *u(x)* и *v(x)* существуют и непрерывны на заданном интервале. Тогда

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

называется формулой интегрирования по частям.

С помощью этой формулы нахождение интеграла $\int udv$ сводится к вычислению интеграла $\int vdu$. Применение этой формулы целесообразно в тех случаях, кода интеграл $\int vdu$ более прост для нахождения, чем исходный, либо подобен ему. При этом в качестве u берут такую функцию, которая при дифференцировании упрощается, а в качестве dv – ту часть подынтегрального выражения, интеграл от которого известен или может быть найден. Формула может применяться неоднократно.

***Пример* 7.** Найти неопределенный интеграл

$\int \ln x dx$

.

Решение

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Используем формулу интегрирования по частям:

В интегралах рассматриваемого типа за *u* **всегда обозначается логарифм,** а за dv – **оставшаяся часть** подынтегрального выражения.

Интегрируем по частям: $\int udv = uv - \int vdu$

$u = \ln x \Rightarrow du = (\ln x)'dx = \dfrac{dx}{x}$

$dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x$

$(*) = x\ln x - \int x \cdot \dfrac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C,$ *где* $C = const$

Итак, если это все записать без объяснения, то получим:

$$\begin{bmatrix} u = \ln x & \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = dx & \Rightarrow v = x \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$\int \ln x\,dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x \cdot \ln x - x + C\,.$$

Пример 8

Найти $\int (2x+1)e^{3x}dx$.

Решение

Пусть $\begin{bmatrix} u = 2x+1 & \Rightarrow du = 2dx \\ dv = e^{3x}dx & \Rightarrow v = \int e^{3x}dx = \dfrac{1}{3}e^{3x} \end{bmatrix}$(можно положить $C = 0$). Следовательно, по формуле интегрирования по частям:

$$\int (2x+1)e^{3x}dx = (2x+1) \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}2dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C.$$

Решение типовых задач

Задача 1. Найти неопределенные интегралы.

а) $\int \cos(\ln x)\dfrac{dx}{x}$.

Решение:

Так как $\dfrac{dx}{x} = d(\ln x)$, то

$$\int \cos(\ln x)\frac{dx}{x} = \int \cos(\ln x)d(\ln x) = \sin(\ln\ x) + C$$

Проверка:

$$d(\sin(\ln\ x) + C = \cos(\ln x)\frac{1}{x}dx\,,$$

$\acute{a})$ $\int \ln xdx.$

Решение:

Положим $u = \ln x \quad dv = dx.$

Найдем $du = \dfrac{dx}{x}; \quad v = \int dx = x.$

Применяя формулу интегрирования по частям: $\int udv = u \cdot v - \int v \cdot du$,

$$\int \ln xdx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C\,.$$

$\hat{a})$ $\int \dfrac{x^3 + x + 1}{x \cdot (x^2 + 1)}dx$.

Решение:

Данная подынтегральная дробь – неправильная, поэтому сначала выделим целую часть $\frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}=\frac{x^3+x+1}{x^3+x}=1+\frac{1}{x^3+x}$.

Представим дробь $\frac{1}{x^3+x}$ в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+D}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+x(Bx+D)}{x(x^2+1)}=\frac{Ax^2+Bx^2+A+Dx}{x(x^2+1)}=$$

$$\frac{x^2(A+B)+Dx+A}{x(x^2+1)}$$

Тогда $A+B=0, D=0, A=1$, следовательно $A=1, B=-1, D=0$.

Получим

$$\int\frac{x^3+x+1}{x\cdot(x^2+1)}dx=\int\left(1+\frac{1}{x}+\frac{-x}{x^2+1}\right)dx=\int dx+\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=x+\ln|x|+\ln|x^2+1|+C$$

ã) $\int\cos^4 x dx$.

Решение:

Применим формулу понижения степени:

$$2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$$

$$\int(\cos^2 x)^2 dx=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left(x+\sin 2x+\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx\right)=\frac{1}{4}\left(x+\sin 2x+\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)\right)+C$$

2.9 Раздел 9. Определенный интеграл

Вопросы для изучения

1. Геометрический смысл определенного интеграла.
2. Основные свойства определенного интеграла.
3. Формула Ньютона – Лейбница.
4. Замена переменной в определенном интеграле.
5. Формула интегрирования по частям для определенного интеграла.
6. Несобственные интегралы (случай бесконечных пределов интегрирования).
7. Несобственные интегралы (интегралы от разрывных функций).
8. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых координатах.
9. Вычисление площади фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически.
10. Вычисление площади криволинейного сектора в полярных координатах.
11. Вычисление длин дуг плоских кривых.
12. Вычисление объемов тел вращения.
13. Вычисление площади поверхности тел вращения.

Методические указания

К понятию определенного интеграла приводит задача вычисления площади криволинейной трапеции. Важное значение имеет формула Ньютона – Лейбница. Эта формула устанавливает связь между двумя основными понятиями интегрального исчисления: неопределенным и определенным интегралами. Она позволяет вычислять определенные интегралы путем нахождения первообразных.

Геометрические приложения определенного интеграла многочисленны. Это вычисление: площадей плоских фигур, объема тел вращения, длин дуг.

Многие задачи механики, например вычисление давления жидкости на пластину; вычисление работы переменной силы на прямолинейном отрезке пути; вычисление работы по выкачиванию жидкости из резервуара, можно решить, используя методы интегрирования.

Рекомендуемые источники по теме: *в предлагаемой литературе [1,2] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.*

Основные теоретические сведения

Определенный интеграл. Основные понятия

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n произвольных отрезков точками $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Обозначим $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. В каждом из отрезков разбиения $[x_i x_{i+1}]$ выберем произвольную точку c_i и вычислим в ней значение функции $f(c_i)$. *Интегральной суммой* для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется сумма вида

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Если существует конечный предел интегральной суммы при максимальном значении Δx_i, стремящемся к нулю, который не зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$и выбора точек c_i, то он называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Геометрический смысл определенного интеграла

Определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции (фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ох, прямыми $x = a, x = b$).

Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, где k - число.

2. $\int\limits_a^b \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$.

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

4. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

5. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, $c \in (a,b)$.

6. *Теорема о среднем.* Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то найдется такое значение$c \in (a, b)$, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

7. Если функция $y = f(x)$ – четная, то

$$\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx.$$

8. Если функция $y = f(x)$ – нечетная, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

9. *Формула Ньютона – Лейбница:*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

$F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Основные методы интегрирования

1. Метод непосредственного интегрирования

Интегралы вычисляются, используя таблицу интегралов и формулу Ньютона – Лейбница.

Пример 1

Вычислить $\int\limits_1^4 x^2 dx$.

Решение

Подынтегральная функция $f(x) = x^2$ на отрезке $[1; 4]$ имеет первообразную $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$. Тогда по формуле $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ имеем:

$\int\limits_1^4 x^2 dx = \left. \dfrac{x^3}{3} \right|_1^4 = \dfrac{4^3}{3} - \dfrac{1^3}{3} = 21.$

2. Интегрирование подстановкой (замена переменной)

При вычислении определённого интеграла часто используется метод интегрирования подстановкой или замены переменной интегрирования. Для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции $f(x)$ сделана подстановка $x=\varphi(t)$ – функция, непрерывная вместе со своей производной на отрезке $[\alpha;\beta]$, причём $\varphi(\alpha)=a$ и $\varphi(\beta)=b$, то справедлива формула, которая называется формулой интегрирования подстановкой:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$$

Пример 2

Вычислить интеграл $\int_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}}$ с помощью замены переменных.

Решение

Применим подстановку $\sqrt{x}=t$. Тогда $x=t^2$, $dx=2t\,dt$. Находим новые пределы интегрирования:

x	1	9
$t=\sqrt{x}$	1	3

.

Применяя формулу, получим:

$$\int_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}} = \int_1^3 \frac{2t\,dt}{5+2t} = \int_1^3 \frac{2t+5-5}{2t+5}dt =$$

$$= \int_1^3 (1-\frac{5}{2t+5})dt = t\Big|_1^3 - 5\cdot\frac{1}{2}\ln|2t+5|\Big|_1^3 =$$

$$= 3-1-\frac{5}{2}(\ln 11-\ln 7) = 2-\frac{5}{2}\ln\frac{11}{7}.$$

Пример 3

При помощи замены переменной вычислить интеграл

$$\int_2^3 x(3-x)^7 dx.$$

Решение

Полагая $t=3-x$,

x	2	3
t	1	0

получим: $x=3-t$, $dx=-dt$, тогда

$$\int_2^3 x(3-x)^7 dx = \int_1^0 (3-t)t^7(-dt) = \int_1^0 (t^8-3t^7)dt = \left(\frac{t^9}{9}-\frac{3}{8}t^8\right)\Bigg|_1^0 = -\frac{1}{9}+\frac{3}{8} = \frac{19}{72}.$$

3. Интегрирование по частям определенного интеграла

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемые функции на отрезке$[a; b]$, то имеет место формула интегрирования по частям.

$$\int_a^b u\,dv = uv|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Пример 4

Вычислить $\int_0^1 xe^{3x}dx$.

Решение

Воспользуемся методом интегрирования по частям. Положим $u = x$, $dv = e^{-x}dx$, откуда $du = dx$, $v = -e^{-x}$. Тогда

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -2e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e}.$$

Пример 5

Вычислить интеграл $\int_1^e (x+1)\ln x dx$.

Решение

Применим формулу интегрирования по частям.

Положим $u = \ln x$, $dv = (x+1)dx$. Тогда $du = \frac{1}{x}dx$, $v = \frac{x^2}{2} + x$.

Получим:

$$\int_1^e (x+1)\ln x dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{e^2}{2} + e - 0 - \left(\frac{x^2}{4} + x\right)\Bigg|_1^e = \frac{e^2}{2} + e - \frac{e^2}{4} - e + \frac{1}{4} + 1 = \frac{e^2+5}{4}.$$

Несобственные интегралы

1. Несобственный интеграл I рода (интеграл с бесконечным промежутком интегрирования)

Пусть функция $y = f(x)$ задана на бесконечном промежутке $[a, +\infty)$. *Несобственным интегралом I рода* называется интеграл вида:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx.$$

Если предел, стоящий в правой части равенства, существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся; если же предел не существует или равен бесконечности – расходящимся.

Аналогично:

$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{t\to+\infty} \int_{t}^{b} f(x)dx$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \int_{c}^{b} f(x)dx$$

где с – произвольное число.

Пример 6

Вычислить несобственный интеграл $\int_{0}^{+\infty} \cos x dx$ (или установить его расходимость).

Решение

Имеем: $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \cos x dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \sin x\Big|_{0}^{b} = \lim\limits_{b\to+\infty} (\sin b - \sin 0) = \lim\limits_{b\to+\infty} \sin b$,

т. е. предел не существует. Следовательно, несобственный интеграл расходится.

Пример 7

Вычислить $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$.

Решение

Найдем

$$\lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to-\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_{a}^{-1} = \lim_{a\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{a}\right) = 1,$$

т. е. несобственный интеграл сходится.

Пример 8

Найти $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение

Подынтегральная функция – четная, поэтому $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. Тогда

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} arctg\ x\Big|_{0}^{b} = \lim_{b\to+\infty} arctg\ b = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$, т. е. несобственный интеграл сходится.

2. Несобственный интеграл II рода (интеграл от разрывной функции)

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a, b)$ и в точке $x = b$ имеет бесконечный разрыв. *Несобственным интегралом II рода* называется

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если предел, стоящий в правой части равенства, существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*; в противном случае – *расходящимся*.

Аналогично можно определить несобственный интеграл на полуинтервале $(a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Если функция $y = f(x)$ имеет бесконечный разрыв во внутренней точке $c \in (a, b)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Оба интеграла в правой части равенства являются несобственными.

Пример 9

Найти $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение

Подынтегральная функция $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ имеет бесконечный разрыв в точке $x = 1$. Поэтому

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin x|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0) =$$

$$= \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Решение типовых задач

Задача 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x + 2, \quad y = 2x - \frac{x^2}{2} + 6$.

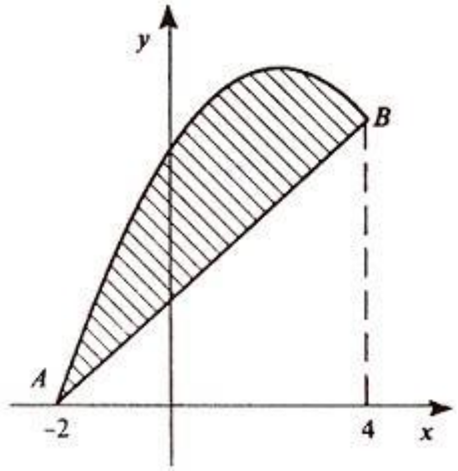
Решение:

Найдем абсциссы точек пересечения прямой с параболой, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x + 2, \\ y = 2x - \dfrac{x^2}{2} + 6. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $x_1 = -2, \quad x_2 = 1$. Это и будут пределы интегрирования.

Итак, данные линии пересекаются в точках A(-2; 0), B(4; 6).



Эти линии образуют замкнутую фигуру, площадь которой равна:

$$S = \int_{-2}^{4}\left(2x - \frac{x^2}{2} + 6 - x - 2\right)dx = \int_{-2}^{4}\left(x - \frac{x^2}{2} + 4\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x\right)\Bigg|_{-2}^{4} =$$

$$\frac{16}{2} - \frac{64}{6} + 16 - \frac{4}{2} - \frac{8}{6} + 8 = 18$$

2.10 Раздел 10. Дифференциальные уравнения первого порядка

Вопросы для изучения

1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Общее и частное решения. Задача Коши. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

2. Интегрирование простейших типов дифференциальных уравнений первого порядка. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

5. Дифференциальные уравнения высших порядков. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

6. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

7. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Однородные уравнения. Свойства их решений. Фундаментальная система решений.

8. Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения.

9. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

10. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Теорема о структуре общего решения.

11. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

12. Понятие о системах линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Методические указания

Многочисленные задачи естествознания, техники, механики, биологии, химии и других отраслей знаний сводятся к тому, что по заданным свойствам некоторого процесса или явления необходимо найти математическую модель самого процесса в виде формулы, связывающей переменные величины, т.е. в виде функциональной зависимости.

При изучении таких задач используют дифференциальные уравнения. В данной теме рассмотрены обыкновенные дифференциальные уравнения.

Рекомендуемые источники по теме: *в предлагаемой литературе [1,2] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.*

Основные теоретические сведения

Основные понятия и определения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производную.

Дифференциальное уравнение первого порядка можно записать в виде

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

Если уравнение (1) можно разрешить относительно y', то его записывают в виде:

$$y' = f(x; y). \tag{2}$$

В дифференциальной форме уравнение (1.2) записывается в виде

$$dy = f(x; y)dx \text{ или } P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0. \tag{3}$$

Дифференциальное уравнение имеет бесконечное число различных решений. Каждое из таких решений называется частным решением. Совокупность всех частных решений называется общим решением дифференциального уравнения. Общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную константу C и имеет вид $y = \varphi(x; c)$. Это значит, что при любом значении $C = C_0$ функция $y(x, c_0)$ является решением, и любое частное решение можно найти из общего, подобрав соответствующее значение константы C. Если задано дополнительное начальное условие: $y(x_0) = y_0$, то, как привило, можно найти единственное частное решение, удовлетворяющее ему.

Задача отыскания решения дифференциального уравнения первого порядка (1.3), удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$ или $y\big|_{x=x_0} = y_0$, называется задачей Коши. Рассмотрим основные типы дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решения.

Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Дифференциальные уравнения вида (1) называют уравнениями с разделенными переменными.

$$P(x)\cdot dx + Q(y)\cdot dy = 0\,. \qquad (1)$$

Проинтегрировав почленно уравнение (1), получаем его общий интеграл.

Дифференциальные уравнения вида (2) и (3) называют уравнениями с разделяющимися переменными

$$y' = f(x)\cdot g(y) \qquad (2)$$

$$P_1(x)\cdot Q_1(y)\cdot dx + P_2(x)\cdot Q_2(y)\cdot dy = 0 \qquad (3)$$

Для решения уравнения (2) необходимо представить производную как отношение дифференциалов и разделить переменные, т.е. с одной стороны от знака равенства собрать выражение содержащее только x, с другой – только y.

Уравнение (3) путем деления на произведение $P_2(x)\cdot Q_1(y)$ приводится к уравнению с разделенными переменными.

Представим методы решения данных уравнений в таблице.

Основные методы решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

$y' = f(x)\cdot g(y)$	$P(x)\cdot dx + Q(y)\cdot dy = 0$	$P_1(x)\cdot Q_1(y)\cdot dx + P_2(x)\cdot Q_2(y)\cdot dy = 0$
$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$; $\frac{dy}{g(y)} = f(x)\cdot dx$; $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\cdot dx$	$P(x)\cdot dx = -Q(y)\cdot dy$; $\int P(x)\cdot dx = -\int Q(y)\cdot dy$	$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\cdot dx + \frac{Q_1(y)}{Q_2(y)}\cdot dy = 0$; $\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\cdot dx + \int \frac{Q_1(y)}{Q_2(y)}\cdot dy = 0$

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка:

$$\left(1+e^x\right)ydy = e^x dx\left(1+y^2\right).$$

Решение

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, так как коэффициент при dx представляет собой произведение двух сомножителей: e^xзависит только от x, а $(1+y^2)$ – только от y. Аналогично, коэффициент при dy тоже является произведением двух сомножителей: $(1+e^x)$ зависит только от x, а второй сомножитель – y.

Чтобы привести его к виду с разделенными переменными, разделим все члены уравнения на $(1+e^x)(1+y^2)$, в результате получим: $\frac{ydy}{1+y^2} = \frac{e^x dx}{1+e^x}$.

Решим это уравнение. (Заметим, что постоянную C можно записывать как $\frac{C}{2},\ 2C,\ \ln C,\ \sin C$.) Здесь произвольную постоянную удобнее взять в виде $\ln C$.

$$\int \frac{ydy}{1+y^2} = \int \frac{e^x dx}{1+e^x} + \ln C,$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln(1+e^x) + \ln C,$$

$$\ln\sqrt{1+y^2} = \ln C(1+e^x),$$

$\sqrt{1+y^2} = C(1+e^x)$ – это общий интеграл исходного уравнения.

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения:

$(xy^2 + y^2)dx + (x^2 - x^2 y)dy = 0, \quad y(1) = 1$.

Решение

Преобразуем левую часть уравнения:

$y^2(x+1)dx + x^2(1-y)dy = 0$.

Разделим переменные, поделив на x^2y^2:

$$\frac{x+1}{x^2}dx + \frac{1-y}{y^2}dy = 0.$$

Интегрируя, получаем общий интеграл:

$$\int \frac{x+1}{x^2}dx + \int \frac{1-y}{y^2}dy = 0; \quad \int \frac{dx}{x} + \int x^{-2}dx + \int y^{-2}dy - \int \frac{dy}{y} = 0.$$

$$\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \ln|y| = c; \quad \ln\left|\frac{x}{y}\right| - \frac{x+y}{xy} = c.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что $x = 0$ и $y = 0$ являются решениями данного дифференциального уравнения.

Найдем частный интеграл, подставив в общий значения $x = 1$ и $y = 1$, получим $\ln 1 - 2 = c, \quad c = -2$. Таким образом $\ln\left|\frac{x}{y}\right| - \frac{x+y}{xy} = -2$.

Однородные дифференциальные уравнения

Функция $z = f(x;y)$ называется однородной функцией порядка k если $f(\lambda \cdot x; \lambda \cdot y) = \lambda^k \cdot f(x;y)$.

Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x;y)$ называется однородным, если функция $f(x;y)$ есть однородная функция нулевого порядка.

Однородное дифференциальное уравнение можно записать в виде $y' = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$.

Или в дифференциальной форме:

$$P(x;y) \cdot dx + Q(x;y) \cdot dy = 0.$$

Методы решения данных уравнений представим в таблице.

Основные методы решения однородных дифференциальных уравнений

<table>
<tr><td>$y' = \varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$</td><td>$P(x;y)\cdot dx + Q(x;y)\cdot dy = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Преобразуются в уравнения с разделяющимися переменными при помощи замены переменной (подстановки) $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \quad u = u\cdot x$, тогда</td></tr>
<tr><td>$y' = u'\cdot x + u$</td><td>$dy = x\cdot du + u\cdot dx$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Полученные уравнения в новых переменах являются уравнениями с разделяющимися переменными. Найдя их решения и заменив обратно u на $\dfrac{y}{x}$, получим общее решение исходного уравнения</td></tr>
</table>

***Пример 3*.** Найти общее решение дифференциального уравнения**:**

$$y' = \frac{x+2y}{2x-y}.$$

Решение

$$y' = \frac{1+2\frac{y}{x}}{2-\frac{y}{x}},$$

введем замену $\dfrac{y}{x} = u$. Тогда $y = ux$, а $y' = u + u'x$.

Заданное уравнение принимает вид:

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1+2u}{2-u},$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{2-u},$$

$$\frac{2-u}{1+u^2}du = \frac{dx}{x},$$

$$\int\left(\frac{2}{1+u^2} - \frac{u}{1+u^2}\right)du = \int\frac{dx}{x},$$

$$2arctgu - \frac{1}{2}\ln\left|1+u^2\right| = \ln|x| + \ln C.$$

Возвращаясь к замене $\dfrac{y}{x} = u$, получим:

$$2arctg\,\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{y^2}{x^2}\right| = \ln|x| + \ln C.$$

Пример 4. Решить дифференциальное уравнение:

$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

Решение

Разрешим уравнение относительно y':

$$y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}.$$

Уравнение однородное, сделаем замену: $u = \frac{y}{x}$ или $y = ux$, тогда $y' = xu' + u$.

Подставив в уравнение выражения для y и y', получим:

$xu' = \sqrt{1 - u^2}$.

Получим уравнение с разделяющимися переменными.

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{dx}{x},$$

$\arcsin u = \ln|c| \cdot |x|$ или, возвращаясь к функции y, будем иметь: $\arcsin \frac{y}{x} = \ln|cx|$.

Так как $\left|\ln|cx|\right| \le \frac{\pi}{2}$, т.е. $e^{-\frac{\pi}{2}} \le |cx| \le e^{\frac{\pi}{2}}$, или $y = \sin \ln|cx|$.

Непосредственно проверим, что $x = 0$ не является решением уравнения. Множитель $\sqrt{1-u^2} = 0$ дает решения $u = \pm 1$, т.е. $y = \pm x$, которые являются решением. Это подтверждает непосредственная проверка.

Линейные дифференциальные уравнения. Уравнения Бернулли

Линейные дифференциальные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида

$$y' + p(x) \cdot y = g(x),$$

где $p(x)$, $g(x)$– непрерывные (на данном интервале) функции, в частности постоянные.

Характерный признак уравнений: функция y и её производная y' содержатся в уравнении в первой степени и не перемножаются между собой.

Если функция $g(x) \equiv 0$, то уравнение (3.1) принимает вид $y' + p(x) \cdot y = 0$ и называется линейным однородным ЛОДУ. Иначе уравнение называется линейным неоднородным ЛНДУ.

Существует несколько методов решения уравнений данных видов: метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа), метод интегрирующего множителя, метод Бернулли, которые представлены в таблице.

Основные методы решения линейных дифференциальных уравнений

Метод Бернулли	Метод Лагранжа
Линейное уравнение решается с помощью замены неизвестной функции и ее производной по формулам: $y = u \cdot v;\quad y' = u' \cdot v + v' \cdot u$, где $u = u(x),\ v = v(x)$- неизвестные функции. Проведя замену, уравнение $y' + p(x) \cdot y = g(x)$ записывается следующим образом: $u' \cdot v + v' \cdot u + p(x) \cdot u \cdot v = g(x)$ или $u' \cdot v + u(v' + p(x) \cdot v) = g(x)\quad (*)$. Функцию $v = v(x)$ выбираем таким образом, чтобы она обращала в ноль выражение, стоящее в скобках левой части равенства $(*)$: $v' + p(x) \cdot v = 0 \Rightarrow \dfrac{dv}{dx} = -p(x) \cdot v$. Решаем полученное для функции v ДУ с разделяющимися переменными: $\dfrac{dv}{v} = -p(x) \cdot dx;$ $\int \dfrac{dv}{v} = -\int p(x) \cdot dx;$ $v = e^{-\int p(x)} dx$. Следует подставить в уравнение $(*)$, которое стало эквивалентно уравнению с разделяющимися переменными и приняло вид $u' \cdot v = g(x)$. В результате получим для неизвестной функции $u(x)$ уравнение с разделяющимися переменными. Его решение позволяет найти исходную неизвестную функцию y по формуле $y = u \cdot v$. Окончательно общий интеграл линейного дифференциального уравнения примет вид $y = v(x) \cdot u(x;C)$	Метод состоит в следующем: решим вместо уравнения $y' + p(x) \cdot y = g(x)$ уравнение $y' + p(x) \cdot y = 0$, решение которого записывается в виде: $y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}$. Положим, что $C = C(x)$и подставим решение уравнения с нулевой правой частью в исходное. Получим уравнение для $C(x)$: $C'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} - C(x) \cdot p(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} +$ $+ C(x) \cdot p(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} = g(x)$ Откуда $C'(x) = g(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \Leftrightarrow$ $C(x) = \int g(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$, решение исходного уравнения $y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$

Уравнения Бернулли

Уравнение Бернулли отличается от линейного уравнения $y' + p(x) \cdot y = g(x)$ тем, что в правой части есть множитель в виде степени неизвестной функции и оно имеет вид:

$$y' + p(x)\cdot y = g(x)\cdot y^n,\ \ n\in R,\ \ n\neq 0,\ \ n\neq 1.$$

Уравнение Бернулли решается по той же схеме, что и линейное уравнение. Оно приводится к линейному уравнению с помощью подстановки $z = y^{-n+1}$.

Пример 5. Решить дифференциальное уравнение $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

Решение

Заданное уравнение является ЛНДУ. Будем искать решение уравнения в виде произведения двух функций: $y = u\cdot v \Rightarrow y' = u'v + v'u$. После этой подстановки данное уравнение примет вид: $u'v + v'u + 2xuv = xe^{-x^2}$.

Вынесем за скобки u: $u'v + u(v' + 2xv) = xe^{-x^2}$ $(*)$.

Найдем *одну* из функций v, такую, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль: $v' + 2xv = 0$. Это уравнение будет с разделяющимися переменными. Решим его.

$$\frac{dv}{dx} + 2xv = 0,$$

$$dv = -2xvdx,$$

$$\frac{dv}{v} = -2xdx,$$

$$\ln|v| = -x^2$$

$$v = e^{-x^2}$$

Подставим найденную функцию в уравнение $(*)$.

$$u'e^{-x^2} = xe^{-x^2},$$

$$u' = x,$$

$$\frac{du}{dx} = x,$$

$$du = xdx,$$

$$u = \frac{x^2}{2} + C$$

Так как $y = uv$, то $y = (\frac{x^2}{2} + C)\cdot e^{-x^2}$ - общее решение данного уравнения.

Пример 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$xy' + y = y^2\ln x.$$

Решение

Это уравнение Бернулли. Воспользуемся подстановкой:

$$y = uv;\quad y' = u'v + uv'.$$

Подставим y и y' в исходное уравнение:

$$xu'v + xuv' + uv = u^2v^2\ln x \quad \text{или} \quad xu'v + u(xv' + v) = u^2v^2\ln x.$$

Потребуем, чтобы $xv' + v = 0$, тогда

$\frac{xdv}{dx} - v = 0$ или $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$.

Интегрируя, получим: $\ln v = -\ln x, \quad v = \frac{1}{x}$.

Подставим найденное значение v в уравнение, получим:

$u' = u^2 \frac{\ln x}{x^2}$ или $\frac{du}{u^2} = \frac{\ln xdx}{x^2}$.

Интегрируя, получим: $\frac{1}{u} = \frac{1}{x}(\ln x + 1 + cx)$ или $u = \frac{x}{\ln x + 1 + cx}$.

Так как $y = uv$, то $y = \frac{1}{\ln x + 1 + cx}$.

Кроме того, очевидно, что решением уравнения будет $y = 0$.

Решение типовых задач

Задача 1. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка:

$a)\ \left(1 + e^x\right)ydy = e^x dx\left(1 + y^2\right)$.

Решение:

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, так как коэффициент при dx представляет собой произведение двух сомножителей: e^x зависит только от x, а $(1+y^2)$ – только от y. Аналогично, коэффициент при dy тоже является произведением двух сомножителей: $(1+e^x)$ зависит только от x, а второй сомножитель – y.

Чтобы привести его к виду с разделенными переменными, разделим все члены уравнения на $(1+e^x)(1+y^2)$, в результате получим: $\frac{ydy}{1+y^2} = \frac{e^x dx}{1+e^x}$.

Решим это уравнение. (Заметим, что постоянную С можно записывать как $\frac{\tilde{N}}{2},\ 2C,\ \ln C,\ \sin C$.) Здесь произвольную постоянную удобнее взять в виде $\ln C$.

$$\int \frac{ydy}{1+y^2} = \int \frac{e^x dx}{1+e^x} + \ln C,$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln(1+e^x) + \ln C,$$

$$\ln\sqrt{1+y^2} = \ln C(1+e^x),$$

$\sqrt{1+y^2} = C(1+e^x)$ - это общий интеграл исходного уравнения.

$\acute{a})\ y' = \frac{x+2y}{2x-y}$;

Решение:

$$y' = \frac{1+2\dfrac{y}{x}}{2-\dfrac{y}{x}},$$

Введем замену $\dfrac{y}{x} = u$. Тогда $y = ux,$ а $y' = u + u'x.$

Заданное уравнение принимает вид:

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1+2u}{2-u},$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{2-u},$$

$$\frac{2-u}{1+u^2}du = \frac{dx}{x},$$

$$\int\left(\frac{2}{1+u^2} - \frac{u}{1+u^2}\right)du = \int\frac{dx}{x},$$

$$2arctgu - \frac{1}{2}\ln\left|1+u^2\right| = \ln|x| + \ln C.$$

Возвращаясь к замене $\dfrac{y}{x} = u$, получим:

$$2arctg\,\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{y^2}{x^2}\right| = \ln|x| + \ln C.$$

â) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;

Решение:

Заданное уравнение является ЛНДУ. Будем искать решение уравнения в виде произведения двух функций: $y = u\cdot v \Rightarrow y' = u'v + v'u$. После этой подстановки данное уравнение примет вид: $u'v + v'u + 2xuv = xe^{-x^2}$.

Вынесем за скобки *u*:

$$u'v + u(v' + 2xv) = xe^{-x^2} \qquad (*)$$

Найдем *одну* из функций *v*, такую, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль: $v' + 2xv = 0$. Это уравнение будет с разделяющимися переменными. Решим его.

$$\frac{dv}{dx} + 2xv = 0,$$

$$dv = -2xvdx,$$

$$\frac{dv}{v} = -2xdx,$$

$$\ln|v| = -x^2$$

$$v = e^{-x^2}$$

Подставим найденную функцию в уравнение (*).

$u'e^{-x^2} = xe^{-x^2}$,

$u' = x,$

$\frac{du}{dx} = x,$

$du = xdx,$

$u = \frac{x^2}{2} + C$

Так как $y = uv$, то $y = (\frac{x^2}{2} + C) \cdot e^{-x^2}$ - общее решение данного уравнения.

Задача 2. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка:

$a)\ y''' = x + \sin x$

Общее решение этого уравнения находим последовательным трехкратным интегрированием. Имеем:

$$y'' = \int (x + \sin x)dx = \frac{x^2}{2} - \cos x + c_1,$$

$$y' = \int \left(\frac{x^2}{2} - \cos x + c_1 \right) dx = \frac{x^3}{6} - \sin x + c_1 x + c_2,$$

$$y = \int \left(\frac{x^3}{6} - \sin x + c_1 x + c_2 \right) dx = \frac{x^4}{24} + \cos x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3.$$

$\acute{a})\ xy^{(IV)} - y''' = 0$

Полагаем $y''' = p$, тогда $y^{(IV)} = p'$ и уравнение примет вид:

$$xp' - p = 0, \quad \frac{xdp}{dx} = p, \quad \frac{dx}{x} = \frac{dp}{p}.$$

Интегрируя, получим: $\ln|x| = \ln|p \cdot c|$, $x = p \cdot c$.

Следовательно, $y''' = \frac{x}{c}$.

Интегрируя последовательно три раза, получим:

$$y'' = \int \frac{x}{c} dx = \frac{x^2}{2c} + c_1$$

$$y' = \int \left(\frac{x^2}{2c} + c_1 \right) dx = \frac{x^3}{6c} + c_1 x + c_2$$

$$y = \int \left(\frac{x^3}{6c} + c_1 x + c_2 \right) dx = \frac{x^4}{24c} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3.$$

$\hat{a}$) $yy'' - y'^2 = 0$

Полагаем $y' = p(y)$, тогда

$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p' \cdot p$.

Уравнение примет вид: $yp'p - p^2 = 0$.

Решая его, получим:

$y\frac{dp}{dy} = p, \quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}, \quad \ln|p| = \ln|yc_1|, \quad p = yc_1$,

$y' = yc_1$ или $\frac{dy}{dx} = yc_1$, $\frac{dy}{y} = c_1 dx, \quad \ln|y| = c_1 x + c_2$ или $y = e^{c_1 x + c_2}$.

Решая уравнение, мы делили его на y и на p.

Но $y = 0$ и $p = 0$ могут быть включены в общее решение, если считать, что c_1 и c_2 могут принимать значение «ноль».

Задача 3. Решить задачу Коши:

$y'' - 4y' + 13y = 0 \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = -2$.

Решение:

Характеристическое уравнение: $k^2 - 4k + 13 = 0$ имеет корни $k = 2 \pm 3i$.

Корни характеристического уравнения комплексные сопряженные, им соответствуют частные решения $e^{2x}\cos 3x$; $e^{2x}\sin 3x$.

Следовательно, общее решение: $y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$.

Подставляя начальные условия в найденное общее решение и его производную:

$y' = 2e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + e^{2x}(-3C_1\sin 3x + 3C_2\cos 3x)$,

получим систему: $\begin{cases} 1 = C_1 \\ -2 = 2C_1 + 3C_2 \end{cases}$.

Решая ее, получим: $C_1 = 1. \quad C_2 = -\frac{4}{3}$.

Тогда частное решение примет вид: $y = e^{2x}(\cos 3x - \frac{4}{3}\sin 3x)$.

2.11 Раздел 11. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Векторный анализ

Вопросы для изучения

1. Задачи, приводящие к двойным интегралам. Двойной интеграл.
2. Свойства двойного интеграла.

3. Вычисление двойного интеграла в прямоугольных декартовых координатах.

4. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах.

5. Приложения двойного интеграла.

6. Тройной интеграл.

7. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах.

8. Приложения тройного интеграла.

9. Задачи, приводящие к понятию криволинейного интеграла. Криволинейный интеграл первого рода.

10. Криволинейный интеграл второго рода. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода.

11. Приложения криволинейных интегралов. Формула Грина.

12. Формула Стокса. Формула Остроградского.

13. Дивергенция векторного поля.

14. Ротор векторного поля.

15. Поток векторного поля.

16. Работа векторного поля.

17. Потенциальные и соленоидальные поля.

Методические рекомендации

При изучении физики, механики и при решении разнообразных инженерных задач часто возникает необходимость наряду с интегралами от действительной функции одного переменного рассматривать интегралы от функций многих переменных. Эти интегралы приходится вычислять по двумерным, трехмерным областям, по кривым и поверхностям. Такие интегралы играют важную роль при исследовании скалярных и векторных полей, задаваемых в пространстве действительными и векторными функциями векторного аргумента, составляющими предмет изучения теории поля и векторного анализа.

Примерами векторных полей являются поле скоростей текущей жидкости, поле скоростей точек твердого тела, вращающегося с угловой скоростью или вокруг данной оси, поле электрической или магнитной напряженности и другие.

Рекомендуемые источники по теме: *в предлагаемой литературе [1,2] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.*

Основные теоретические сведения

Теория поля – крупный раздел физики, механики, математики, в котором изучаются скалярные, векторные, тензорные поля.

Определение. Полем называется область V пространства, в каждой точке которой определено значение некоторой величины. Если каждой точке М этой области соответствует некоторое число, то говорят, что задано **скалярное поле**.

Иными словами: скалярная функция $u = f(x, y, z)$ вместе с областью своего определения образует скалярное поле.

Пример. Скалярным полем является поле температур некоторого тела, поле плотности массы тела, поле плотности электрических зарядов.

Если же в каждой точке М области V задан вектор $\vec{a} = \vec{a}(M)$, то говорят, что задано ***векторное поле***. Векторное поле задают векторной функцией скалярного аргумента: $\vec{R} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$.

Пример. Векторным полем является поле силы тяжести, поле скоростей частиц движущейся жидкости, магнитное поле, характеризующееся вектором электромагнитной индукции, и т.д.

<u>Определение.</u> Если функции $u = f(x, y, z)$ и $\vec{R}$ не зависят от времени, то поле называется *стационарным*.

Скалярное поле и его характеристики

Рассмотрим основные характеристики скалярного поля.

1) Поверхности и линии уровня

Рассмотрим скалярное поле $u = u(x, y, z)$.

Для его наглядного представления используют поверхности уровня.

<u>Определение</u>. *Поверхностью уровня называется множество точек пространства, в которых функция $u = u(x, y, z)$ принимает постоянное значение.*

Уравнение поверхности уровня: $u(x, y, z) = u_0$.

Для плоского поля определяют линии уровня.

Пример 1. Функция $u(x, y, z) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}$ определяет скалярное поле при $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, т.е. в части пространства, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Поверхностями уровня будет семейство концентрических сфер: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 - u_0^2$.

Пример 2. Потенциал электростатического поля, образованного точечным зарядом, помещенным в начало координат, определяется формулой $u = \frac{q}{r}$, где q – величина заряда, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – расстояние точки до начала координат. Указанная формула определяет скалярное поле во всех точках пространства, кроме начала координат. Уравнение поверхностей уровня этого поля имеет вид:

$$u_0 = \frac{q}{r} \Rightarrow u_0 = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{q}{u_0}\right)^2.$$

2) Производная в данном направлении

Для характеристики скорости изменения поля в данном направлении введем понятие производной в этом направлении. Для наглядности рассмотрим плоское поле $u = u(x, y)$. В области задания поля возьмем произвольную точку ***M***. В направлении вектора $\vec{l} = \{cos\alpha, \cos\beta\}$ выберем точку M_1 (рисунок 3).

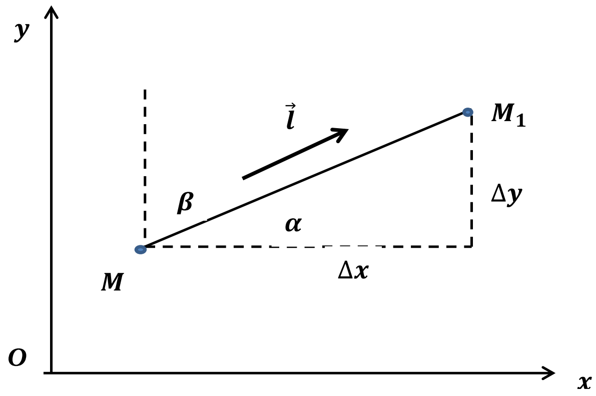


Рисунок 3. Производная в данном направлении

При переходе от первой точки ко второй функция получит приращение $\Delta u = u(M_1) - u(M)$, которое назовем приращением функции в данном направлении. Длину отрезка $|MM_1| = \Delta l$ назовем перемещением.

<u>Определение.</u> *Производной функции* $u = u(x, y)$ *в направлении вектора* $\vec{l} = \{cos\alpha, \cos\beta\}$ *называется предел отношения приращения функции в данном направлении к величине перемещения при условии, что последнее стремится к нулю и предел существует.*

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{M_1 \to M} \frac{u(M_1) - u(M)}{|MM_1|} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l}.$$

Напомним, что $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta$.

Для поля $u = u(x, y, z)$ производную вычисляют по формуле: $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$.

Итак, производная функции $u = u(x, y, z)$ в направлении вектора $\vec{l}$ определяет скорость изменения поля в направлении этого вектора. Модуль производной равен величине скорости, а знак производной определяет характер изменения функции.

Пример. Найти производную поля $u = x^2 + y^2 - 4yz$ в точке $M(0,1,2)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $M_1(2,3,3)$.

Решение. Определим координаты вектора $\vec{MM_1}$ и его направляющие косинусы. $\vec{MM_1}=\{2,2,1\}$; $\cos\alpha=\frac{x}{\left|\vec{MM_1}\right|}=\frac{2}{3}$; $\cos\beta=\frac{2}{3}$; $\cos\gamma=\frac{1}{3}$.

Найдем частные производные данной функции и вычислим их значение в точке *M*. $\frac{\partial u}{\partial x}=2x, \frac{\partial u}{\partial x}(M)=0; \frac{\partial u}{\partial y}=2y-4z, \frac{\partial u}{\partial y}(M)=-6; \frac{\partial u}{\partial z}=-4y, \frac{\partial u}{\partial z}(M)=-4.$

Определим искомую производную:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

$$\frac{\partial u}{\partial l}=0\cdot\frac{2}{3}-6\cdot\frac{2}{3}-4\cdot\frac{1}{3}=-\frac{16}{3}.$$

Так как производная отрицательна, функция убывает в заданном направлении.

3) Градиент скалярного поля и его свойства

<u>Определение.</u> *Градиентом функции* $u=u(x,y,z)$ *в точке M называется вектор, координатами которого являются значения частных производных этой функции в точке M.*

$$gradu=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Говорят, что скалярное поле порождает векторное поле градиентов.

Легко видеть, что производная в направлении вектора $\vec{l}$ равна скалярному произведению градиента на орт вектора $\vec{l}$.

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=gradu\cdot\vec{l}^{\,0}=\text{Пр}_{\vec{l}^{0}}gradu=\left|gradu\right|\cdot\cos\varphi.$$

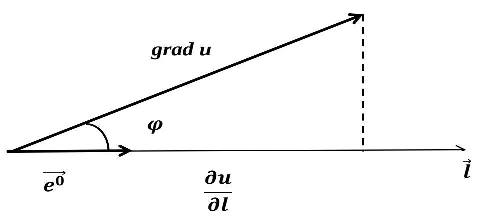


Рисунок 4. Градиент

Производная функции $u=u(x,y,z)$ в направлении вектора $\vec{l}$ равна проекции градиента на вектор $\vec{l}$. Поэтому она достигает наибольшего значения, когда $\cos\varphi=1\Rightarrow\varphi=0$. Это означает, что градиент указывает направление наибыстрейшего возрастания функции. Наибольшая скорость изменения функции в точке *M* равна модулю градиента:

$$\left|gradu\right| = \sqrt{(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial u}{\partial z})^2}\ .$$

Пример 1. Найти наибольшую скорость возрастания функции $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ в точке *A(-1,1,-1).*

Решение. Найдем градиент функции в произвольной точке и определим его в точке *A*:

$$gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = (\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2})\vec{i} + (-\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z})\vec{j} + (-\frac{y}{z^2} + \frac{1}{x})\vec{k}\ ,$$

$$gradu(A) = (1+1)\vec{i} + (1-1)\vec{j} + (-1-1)\vec{k} = 2\vec{i} - 2\vec{k}\ .$$

Наибольшая скорость возрастания функции в точке *A* равна

$$\left|gradu\right| = \sqrt{(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial u}{\partial z})^2} = \sqrt{4+0+4} = 2\sqrt{2}\ .$$

Пример 2. Определить градиент потенциала электростатического поля, образованного точечным зарядом, помещенным в начало координат.

Решение. Потенциал электростатического поля, образованного точечным зарядом, помещенным в начало координат, определяется формулой $u = \frac{q}{r}$, где q – величина заряда, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$$gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = -\frac{q}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i} - \frac{q}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j} - \frac{q}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k} =$$

$$= -\frac{q}{r^2}(\frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k}) = -\frac{q}{r^3}(x\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}) = -\frac{q}{r^3}\cdot\tilde{r}\ ,$$

где $\tilde{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ - радиус-вектор точки *M(x,y,z),* $\frac{\tilde{r}}{r}$ - единичный вектор в направлении радиуса-вектора $\vec{r}^{\,0}$. Тогда $gradu = -\frac{q}{r^2}\cdot\vec{r}^{\,0}$.

Вектор $\vec{E} = \frac{q}{r^2}\cdot\vec{r}^{\,0}$ называется вектором напряженности рассматриваемого электростатического поля в точке *M*.

Таким образом, $gradu = -\vec{E}$.

Отметим важные свойства градиента

1) градиент направлен по нормали к поверхности уровня, проведенной через данную точку,

2) $grad(u+v) = gradu + gradv$,

3) $grad(uv) = v\cdot gradu + u\cdot gradv$,

4) $grad(\frac{u}{v}) = \frac{v \cdot gradu - u \cdot gradv}{v^2}$,

5) $gradF(u) = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot gradu$.

Векторное поле и его характеристики

Рассмотрим основные характеристики векторного поля.

1) Векторные линии поля

Определение. *Векторной линией поля называется линия, касательная к которой в каждой точке М имеет направление соответствующего вектора поля.*

Для конкретных полей векторные линии имеют следующий смысл.

В поле скоростей движущейся жидкости векторными линиями будут линии, по которым движутся частицы жидкости (линии тока).

Для магнитного поля векторными (силовыми) линиями будут линии, выходящие из северного полюса и оканчивающиеся в южном полюсе.

Определение. Совокупность векторных линий, проходящих через некоторую замкнутую кривую, называется *векторной трубкой.*

Найдем систему дифференциальных уравнений, определяющую векторные линии поля.

Пусть $\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ - радиус-вектор произвольной точки векторной линии. Тогда вектор $d\vec{R} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ направлен по касательной к ней (Рисунок 5).

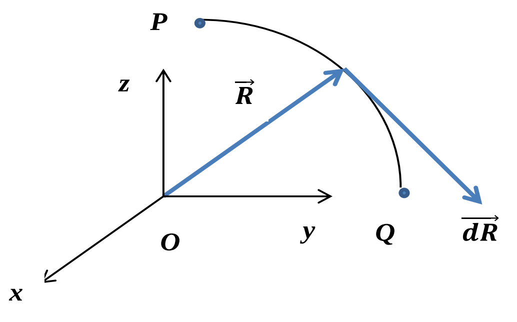


Рисунок 5. Радиус-вектор произвольной точки. Векторная линия

По определению векторной линии векторы поля $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ вектор $d\vec{R} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ должны быть коллинеарны, откуда следует пропорциональность их координат. Следовательно, система дифференциальных уравнений векторных (силовых) линий имеет вид:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Пример 1. Пусть некоторое тело вращается вокруг оси *Oz* с угловой скоростью $\vec{\omega} = \{0, 0, \omega\}$. Обозначим $\vec{r} = \{x, y, z\}$ радиус - вектор произвольной точки тела (Рисунок 6).

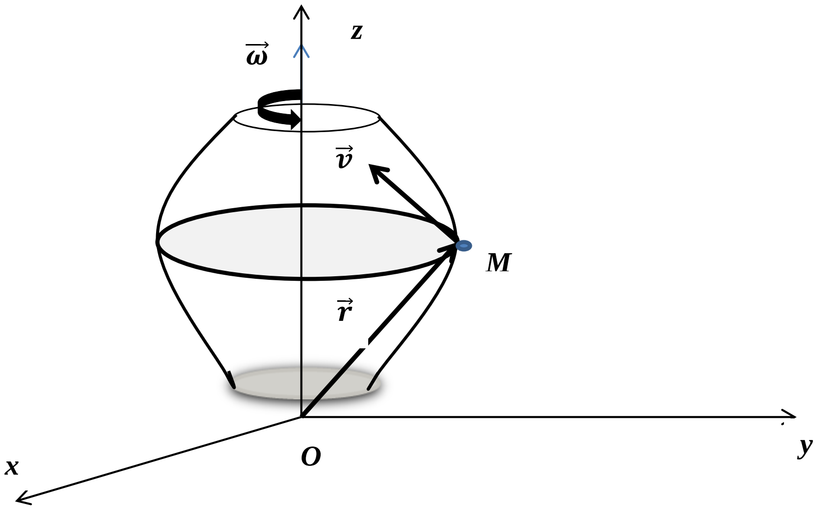


Рисунок 6. Тело вращения

Из физики известно, что поле линейных скоростей такого тела можно найти по формуле:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ y & z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ x & z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{vmatrix} = -y\omega\vec{i} + x\omega\vec{j}.$$

Составим уравнения векторных линий поля линейных скоростей точек вращающегося вокруг оси Oz тела:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \Rightarrow \frac{dx}{-y\omega} = \frac{dy}{x\omega} = \frac{dz}{0} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{-y\omega} = \dfrac{dy}{x\omega} \\ \dfrac{dy}{x\omega} = \dfrac{dz}{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xdx = -ydy \\ dz = 0 \end{cases}.$$

Решая полученную систему дифференциальных уравнений, получим:

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + \frac{c_1^2}{2}; z = c_2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = c_1^2 \\ z = c_2 \end{cases}.$$

Векторными линиями рассматриваемого векторного поля будут окружности, лежащие в плоскости, параллельной плоскости *XoY*.

Пример 2. Найти векторные линии напряженности магнитного поля, образованного постоянным электрическим током силы I, текущим по бесконечно длинному прямолинейному проводу.

Решение. Рассмотрим систему прямоугольных координат. За ось oZ примем провод. Известно, что вектор напряженности магнитного поля выражается формулой: $\vec{H} = \frac{2I}{\rho^2}(-y \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j})$, где ρ - расстояние точки М от провода.

Таким образом, координаты вектора напряженности имеют вид:

$$X = -\frac{2I}{\rho^2}y, Y = \frac{2I}{\rho^2}x, Z = 0.$$

Получим уравнения векторных линий.

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} \Rightarrow \frac{dx}{\frac{-2I}{\rho^2}y} = \frac{dy}{\frac{2I}{\rho^2}x} = \frac{dz}{0}.$$

Эту систему можно представить в виде системы двух уравнений:

$$1)\ \frac{dx}{\frac{-2I}{\rho^2}y} = \frac{dy}{\frac{2I}{\rho^2}x},$$

$$2)\ \frac{dy}{\frac{2I}{\rho^2}x} = \frac{dz}{0},$$

или

$$\begin{cases} \frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} \\ \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xdx = -ydy \\ dz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = C, \\ z = C1. \end{cases}$$

Таким образом, векторные линии напряженности рассматриваемого магнитного поля представляют собой окружности.

2) Поток векторного поля

<u>Определение.</u> *Потоком векторного поля* $\vec{F} = \{P, Q, R\}$ *через поверхность* σ *называется поверхностный интеграл*

$$\Pi = \iint_\sigma (P\cos\alpha + Qcos\beta + R\cos\gamma)d\sigma = \iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}^0 d\sigma.$$

Физический смысл потока зависит от физического смысла функции $\vec{F} = \{P, Q, R\}$.

Поток поля скоростей движущейся жидкости равен объему жидкости, протекающей через поверхность σ в единицу времени.

Особый интерес представляет случай, когда поверхность является замкнутой. В этом случае за направление нормали обычно берут ее внешнее направление и говорят о потоке изнутри поверхности. Если рассматривать поле скоростей текущей жидкости, то поток П через замкнутую поверхность дает разность между количеством жидкости, вытекающей из области, ограниченной поверхностью σ, и втекающей в нее за единицу времени.

3) Дивергенция (расходимость) векторного поля

Пусть поле $\vec{F} = \{P, Q, R\}$ определено в некоторой пространственной области. Выберем в этой области замкнутую поверхность σ, ограничивающую область *V*. Вычислим поток поля через поверхность σ и найдем его отношение к объему *V:*

$$\frac{\Pi}{V} = \frac{1}{V}\oiint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma .$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $V \to 0$.

$$\lim_{V \to 0}\frac{\Pi}{V} = \lim_{V \to 0}\frac{1}{V}\oiint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma$$

Доказано, что, если функции *P,Q,R* непрерывны вместе со своими частными производными, этот предел существует. Он называется *дивергенцией (расходимостью)* векторного поля $\vec{F} = \{P, Q, R\}$ и обозначается $div\vec{F}$.

С помощью формулы Остроградского

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \oiint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma .$$

Можно показать, что $div\vec{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$.

Итак, в каждой точке векторного поля определено число – дивергенция поля в этой точке.

Выясним физический смысл дивергенции. Рассмотрим поле скоростей несжимаемой жидкости. Движение жидкости может быть обусловлено наличием источников – точек, производящих жидкость, или стоков – точек, поглощающих жидкость. Поток поля через замкнутую поверхность дает количество жидкости, протекающей в единицу времени с внутренней стороны поверхности на внешнюю. Эта величина равна количеству жидкости, вырабатываемой в единицу времени всеми источниками в области *V*, т. е. равна мощности источников в этой области. Отношение $\frac{\Pi}{V}$ тогда характеризует среднюю плотность мощности источников в области *V*, а его предел есть плотность мощности источников в данной точке.

Если $\vec{F} = \{P, Q, R\}$ - поле вектора напряженности, создаваемое электрическими зарядами, то дивергенция характеризует плотность распределения зарядов в данной точке.

Пользуясь определением дивергенции, формулу Остроградского можно переписать в виде: $\oiint\limits_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iiint\limits_{V} div\vec{F}\, dV$.

Если $div\vec{F}$ =0, то и поток $\Pi = \oiint\limits_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iiint\limits_{V} div\vec{F}\, dV = 0$. Это означает, что в области, ограниченной поверхностью σ, отсутствуют источники (или стоки). Возможно, что источники и стоки уравновешивают друг друга.

Исходя из физического смысла потока можно сказать: если $div\vec{F}(M) \succ 0$, то точка *M* представляет собой источник; если $div\vec{F}(M) \prec 0$, то точка *M* представляет собой сток, поглощающий жидкость.

Векторные поля, у которых $div\vec{F}$ =0, называются *соленоидальнми* (или трубчатыми). Такие поля не могут иметь ни источников, ни стоков, а значит и точек, где начинаются или кончаются векторные линии. Векторные линии соленоидального поля либо замкнуты, либо начинаются и кончаются у границ поля.

Пример 3. Найти дивергенцию поля линейных скоростей точек вращающегося вокруг оси *Oz* тела.

Решение. Мы показали ранее, что интересующее нас поле имеет вид:

$$\vec{V} = -y\omega\vec{i} + x\omega\vec{j} + 0\vec{k}.$$

Дивергенция этого поля равна: $div\vec{V} = \frac{\partial}{\partial x}(-\omega y) + \frac{\partial}{\partial y}(\omega x) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = 0$.

Поле $\vec{V}$ - соленоидальное.

Пример 4. Найти дивергенцию и поток вектора напряженности электростатического поля через любую замкнутую поверхность.

Решение. $\vec{E} = \frac{e}{r^3} \cdot \vec{r} = \frac{e}{r^3}(x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k})$.

Координаты вектора напряженности равны: $P = \frac{e}{r^3}x$; $Q = \frac{e}{r^3}y$; $R = \frac{e}{r^3}z$.

$div\vec{E} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{e\cdot r^3-e\cdot x\cdot 3r^2\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x}}{r^6}=\left|\begin{array}{l} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{r}\end{array}\right|=e\cdot\frac{r^2-3x^2}{r^5}.$$

Аналогично получим, что $\dfrac{\partial P}{\partial y}=e\cdot\dfrac{r^2-3y^2}{r^5}$; $\dfrac{\partial R}{\partial z}=e\cdot\dfrac{r^2-3z^2}{r^5}$.

Тогда $div\vec{E}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=e\cdot\dfrac{3r^2-3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=\dfrac{3r^2-3r^2}{r^5}=0$.

Таким образом, дивергенция вектора напряженности электростатического поля равна нулю всюду, за исключением начала координат, где помещен заряд и вектор напряженности обращается в бесконечность. Если замкнутая поверхность не содержит внутри себя заряда, то внутри нее дивергенция вектора напряженности равна нулю. По теореме Остроградского – Гаусса поток вектора напряженности через эту поверхность равен нулю.

($\Pi=\oiint\limits_{\sigma}\vec{F}\cdot\vec{n}d\sigma=\iiint\limits_{v}div\vec{F}d\sigma$).

Иначе обстоит дело с объемным зарядом Q, распространенным по всему объему, ограниченному поверхностью S. Плотностью заряда Q в точке P называется $\lim\limits_{\Delta v\to 0}\dfrac{\Delta Q}{\Delta v}=\rho$, Δv – объем, включающий точку *P*.

В теории пространственного потенциала доказывается, что поток электростатического поля, образованного объемным зарядом, через произвольную замкнутую поверхность зависит исключительно от части заряда, находящегося внутри этой поверхности и равен $4\pi\Delta$Q. Тогда дивергенция вектора напряженности электростатического поля, образованного объемным зарядом Q, определяется пределом $\lim\limits_{\Delta v\to 0}\dfrac{4\pi\Delta Q}{\Delta v}=4\pi\rho$. Вне заряда дивергенция равна нулю.

Пример 5. Найти дивергенцию вектора напряженности *H* магнитного поля, создаваемого постоянным током *I*, текущим по бесконечному проводу.

Решение. Известно, что вектор напряженности рассматриваемого магнитного поля $\vec{H}=\dfrac{2I}{r^2}(-y\cdot\vec{i}+x\cdot\vec{j}+0\cdot\vec{k})$, где r - расстояние точки от провода.

Координаты этого вектора равны:

$$P=\frac{-2I}{r^2}y;\ Q=\frac{2I}{r^2}x;\ R=0,$$

$$div\vec{H}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=-2I\frac{\partial}{\partial x}(\frac{y}{r^2})+2I\frac{\partial}{\partial y}(\frac{x}{r^2}),$$

$$div\vec{H} = -2I\frac{-2r\frac{\partial r}{\partial x}y}{r^4} + 2I\frac{-2r\frac{\partial r}{\partial y}x}{r^4} = \left| \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \end{array} \right| = .$$

$$= 4I\frac{r\frac{x}{r}y}{r^4} - 4I\frac{r\frac{y}{r}x}{r^4} = 0.$$

Максвелл автоматически перенес результаты, полученные в примерах 2 и 3, на случай электромагнитного поля.

4) Циркуляция векторного поля

Пусть задано векторное поле $\vec{F} = \{P, Q, R\}$. Выберем в этом поле замкнутую кривую L и выберем на ней определенное направление.

<u>Определение.</u> *Циркуляцией векторного поля* $\vec{F} = \{P, Q, R\}$ *вдоль замкнутого контура* L *называется криволинейный интеграл второго рода*: $Ц = \oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$.

Циркуляция имеет простой физический смысл: в силовом поле циркуляция равна работе сил поля при перемещении материальной точки вдоль замкнутого контура L.

Пример 6. Найти циркуляцию поля линейных скоростей точек вращающегося вокруг оси Oz тела вдоль окружности $x = a\cos t, y = a\sin t, z = c$.

Решение. Интересующее нас поле имеет вид $\vec{V} = -y\omega\vec{i} + x\omega\vec{j} + 0\vec{k}$.

Циркуляция

$$Ц = \oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \oint\limits_L -\omega ydx + \omega xdy + 0dz = \omega\int\limits_0^{2\pi} -a\sin t(-a\sin t)dt + a\cos ta\cos tdt =$$

$$= \omega a^2\int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi\omega a^2 = 2\omega S, где\, S = \pi a^2.$$

5) Ротор (вихрь) векторного поля

<u>Определение.</u> *Ротором (вихрем) векторного поля* $\vec{F} = \{P, Q, R\}$ *называется вектор, обозначаемый символом* $\mathrm{rot}\vec{F}$ *и определяемый формулой*

$$rot\vec{F} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\vec{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\vec{k}.$$

Эту формулу можно записать в виде условного определителя

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Чтобы понять физический смысл ротора, рассмотрим пример.

Пример 7. Найти ротор поля линейных скоростей точек вращающегося вокруг оси Oz тела.

Решение. Интересующее нас поле имеет вид $\vec{V} = -y\omega\vec{i} + x\omega\vec{j} + 0\vec{k}$.

$$rot\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(\frac{\partial}{\partial y}0 - \frac{\partial}{\partial z}(\omega x)) - \vec{j}(\frac{\partial}{\partial x}0 - \frac{\partial}{\partial z}(-\omega y)) + \vec{k}(\frac{\partial}{\partial x}(\omega x) - \frac{\partial}{\partial y}(-\omega y)) =$$

$$= \vec{i}\cdot 0 + \vec{j}\cdot 0 + \vec{k}\cdot 2\omega = 2\omega\vec{k} .$$

Таким образом, ротор поля направлен по оси вращения. Его модуль равен удвоенной угловой скорости вращения.

Пример 8. Найти вихрь вектора напряженности H магнитного поля, создаваемого постоянным током I, текущим по бесконечному прямолинейному проводу.

Решение

$$\vec{H} = \frac{2I}{r^2}(-y\cdot\vec{i} + x\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k}),$$

где $r^2=x^2+y^2$.

$$rot\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-2iy}{x^2+y^2} & \frac{2Ix}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix},$$

$$rot\vec{H} = \vec{i}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{2Ix}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{-2Iy}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{-2Iy}{x^2+y^2} & \dfrac{2Ix}{x^2+y^2} \end{vmatrix},$$

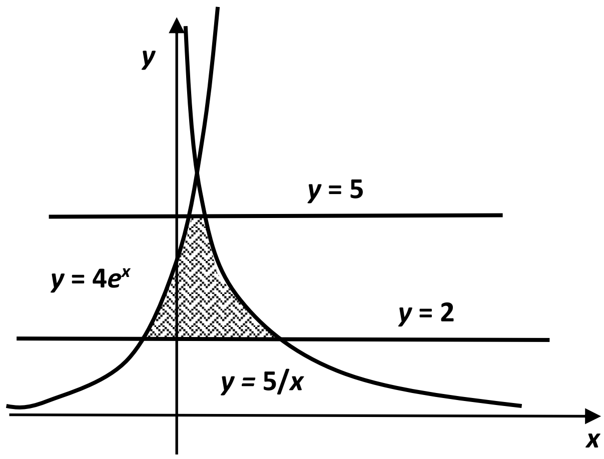
$$rot\vec{H} = 0\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 2I\left(\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\cdot\vec{k} = 0\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k}.$$

Таким образом, $rot\vec{H} = 0$ везде, кроме оси oZ.

Решение типовых задач:

С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры D, ограниченной линиями $y = \frac{1}{5}x, \quad y = 2, \quad y = 5 = 0 \quad y = 4e^x$.

Решение:



Эту площадь удобно вычислять, считая y внешней переменной. Тогда границы области задаются уравнениями $y = \frac{1}{5}x, \quad x = \ln\frac{y}{4}$ и

$$S = \int_2^5 dy \int_{\ln\frac{y}{4}}^{\frac{5}{y}} dx = \int_2^5 \left(x \Big|_{\ln\frac{y}{4}}^{\frac{5}{y}} \right) dy = \int_2^5 \left(\frac{5}{y} - \ln\frac{y}{4} \right) dy = 5\ln y \Big|_2^5 - \int_2^5 \ln\frac{y}{4}dy,$$

где $\int_2^5 \ln\frac{y}{4}dy$ вычисляется с помощью интегрирования по частям:

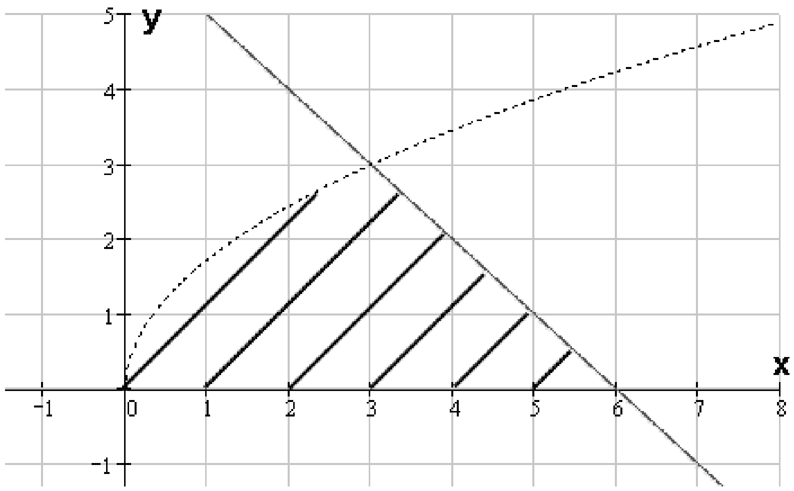
$$\int_2^5 \ln\frac{y}{4}dy = \begin{vmatrix} u = \ln\dfrac{y}{4} & dv = dy \\ du = \dfrac{1}{y}dy & v = y \end{vmatrix} = y\ln\frac{y}{4}\Big|_2^5 - \int_2^5 dy = 5\ln\frac{5}{4} - 2\ln\frac{1}{2} - 3 = 5\ln 5 - 8\ln 2 - 3$$

Следовательно, $S = 5\ln 5 - 5\ln 2 - 5\ln 5 + 8\ln 2 + 3 = 5\ln 2 + 3.$

С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x+y=6, y=\sqrt{3x}, z=4y, z=0.$ Сделать чертеж проекции данного тела на плоскость *Oxy*.

Решение:

Найдем проекцию тела на плоскость *Oxy*



$$V=\int_0^3 dy\int_{\frac{1}{3}y^2}^{6-y}dx\int_0^{4y}dz=\int_0^3 dy\int_{\frac{1}{3}y^2}^{6-y}4ydx=\int_0^3\left(24y-4y^2-\frac{4}{3}y^3\right)dy=\left(12y^2-\frac{4}{3}y^3-\frac{1}{3}y^4\right)\Bigg|_9^3=45.$$

Вычислить криволинейный интеграл второго рода:

$\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$ вдоль дуги L дуга параболы $y=x^2$ от точки $A(1;-1)$ до точки $B(1;1)$. Сделать чертеж.

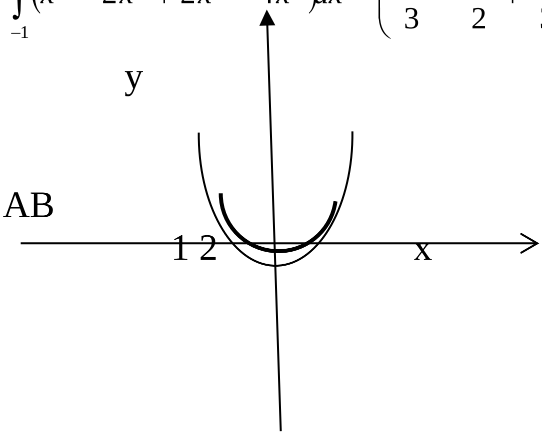
Решение:

Воспользуемся формулой:

$$\int_L P(x;y)dx+Q(x;y)dy=\int_a^b\left[P(x;y(x))+Q(x;y(x))\cdot y'(x)\right]\,dx$$

$$\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy=\int_{-1}^1\left(x^2-2xx^2+2x\left(x^4-2xx^2\right)\right)\,dx=$$

$$\int_{-1}^1\left(x^2-2x^3+2x^5-4x^4\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{4x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^1=-\frac{4}{15}$$



Даны векторное поле $\vec{F} = (3x + 4y + 2z)\vec{j}$ и плоскость (α): $x + y + 2z - 4 = 0$, которая совместно с координатными плоскостями образует пирамиду V. Пусть σ - основание пирамиды, принадлежащее плоскости α; λ - контур, ограничивающий σ; n - нормаль к σ, направленная вне пирамиды V. Вычислить:

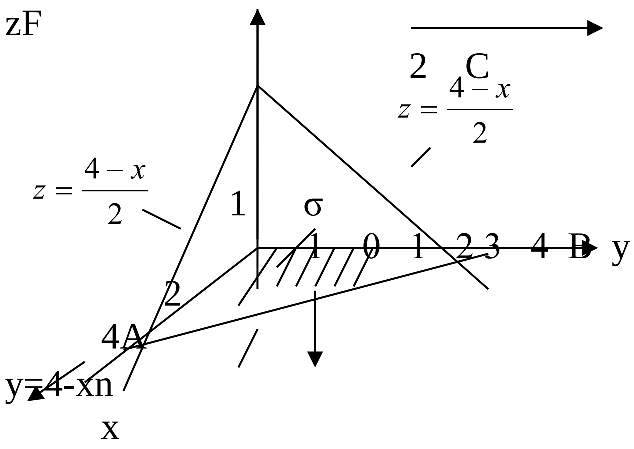
1) поток векторного поля $\vec{F}$ через поверхности σ в направлении нормали n;

2) циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ по замкнутому контуру λ непосредственно и применив формулу Стокса к контуру λ и ограниченной им поверхности σ с нормалью n;

3) поток векторного поля $\vec{F}$ через полную поверхность пирамиды V в направлении внешней нормали к ее поверхности непосредственно и по формуле Остроградского. Сделать чертеж.

Решение:

$\vec{F} = (3x + 4y + 2z)\vec{j}$; (α): $x + y + 2z - 4 = 0$,



Векторная функция $\vec{F}$ направлена вдоль оси Oy.

1) Поток векторного поля $\vec{F}$ через поверхности σ вычисляется по формуле:

$$\hat{O} = \iint_{\sigma} (Ðdydz + Qdzdx + Rdxdy).$$

Подставляем:

$$\hat{O} = \iint_{\sigma} F_y dxdz = -\int_0^4 dx \int_0^{4-x} (3x + 4y + 2z)dz$$

Так как вектор нормали $\vec{n} \perp \vec{F}$, то поток равен нулю: $\hat{O} = 0$;

2) Циркуляция векторного поля $\vec{F}$ по замкнутому контуру λ.

Непосредственное вычисление

$$C = \oint_{\lambda} (Pdx + Qdy + Rdz) = \oint_{\lambda} (3x + 4y + 2z)dy$$

Контур λ состоит из трех отрезков: *OA, AB* и *BO*:

$$C = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO}$$

1. Отрезок OA

$z=0;\ y=0;$

$\int\limits_{OA} 3xdy = 0$.

2. Отрезок AB

$z=0.$

$$\int\limits_{AB} = \int\limits_0^4 (3x+4y)dy = \int\limits_0^4 (3(4-y)+4y)dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 (12+y)dy = \left[\frac{y}{2}\left(12+\frac{1}{2}y^2\right)\right]\Bigg|_0^4 = 48+8=56$$

3. Отрезок BO

$\int\limits_{BO} = \int\limits_0^4 4ydy = -32$;

$C = 0+56-32 = 24.$

4. Циркуляция С. Теорема Стокса

$$C = \oint\limits_{\lambda} (Pdx + Qdy + Rdz) = \iint\limits_S (\vec{n}, rot\,\vec{F})dS\ .$$

Вычисляем $rot\,\vec{F}$:

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 3x+4y+2z & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 3\vec{j}\ .$$

$$C = \iint\limits_S (rot\,\vec{F})_x\, dydz + \left(rot\,\vec{F}\right)_y dxdz + \left(rot\,\vec{F}\right)_z dxdy\ .$$

Поток векторного поля $\vec{F}$ через поверхность σ :

$C = 3\iint\limits_{Dxy} dxdy$, где Dxy – область интегрирования, проекции поверхности S на плоскость Oxy.

$$C = 3\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{4-x} dy = 3\left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^4 = 3(16-8) = 24\ .$$

3) Поток векторного поля $\vec{F}$ через полную поверхность пирамиды V . Теорема Остроградского – Гаусса.

1. $\hat{O} = \iiint\limits_V div\vec{F}dV$

$$div\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 4\ .$$

$$\hat{O} = 4\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{4-x} dy \int\limits_0^{\frac{4-x-y}{2}} dz = \frac{1}{2}4\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{4-x} (4-x-y)dy = 2\int\limits_0^4 dx\left[(4-x)^2 - \frac{1}{2}(4-x)^2\right] = \int\limits_0^4 (4-x)^2 dx =$$

$$\frac{(4-x)^3}{3}\Bigg|_0^4 = \frac{64}{3}$$

2. Нахождение потока непосредственным вычислением

$$\hat{O} = \iint\limits_{\text{ÎÀÂ}} + \iint\limits_{\text{ÎÀÑ}} + \iint\limits_{\text{ÎÂÑ}} + \iint\limits_{\text{ÀÂÑ}} .$$

Поток вектора $\vec{F}$ через грани OBC и OAB равен нулю, поскольку вектора нормали $\vec{n} \perp \vec{F}$.

$$\hat{O}_1 = \iint\limits_{\text{ÎÀÑ}} = \iint\limits_{\text{ÎÀÑ}} Qdxdz = \int_0^4 dx \int_0^{\frac{4-x}{2}} (3x + 2z)dz = \int_0^4 dx\left(3xz + z^2\right)\Bigg|_0^{\frac{4-x}{2}} = \frac{1}{2}\int_0^4 \left(3x(4-x) + \frac{(4-x)^2}{2}\right)dx =$$

$$\frac{1}{4}\left(16x + 8x^2 - \frac{5}{3}x^3\right)\Bigg|_0^4 = \frac{64}{3}$$

2.12 Раздел 12. Ряды

Вопросы для изучения

1. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости ряда.
2. Теоремы сравнения.
3. Признаки Даламбера и Коши.
4. Интегральный признак сходимости ряда.
5. Теорема Лейбница. Оценка остатка знакочередующегося ряда.
6. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов.
7. Понятие равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса.
8. Теорема о непрерывности суммы функционального ряда.
9. Теоремы о почленном интегрировании и почленном дифференцировании функционального ряда.
10. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.
11. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. Непрерывность суммы ряда.
12. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
13. Разложение функции в степенной ряд. Ряд Тейлора.
14. Разложение по степеням x бинома $(1+x)^m$.
15. Условия разложимости функции в ряд Тейлора.
16. Разложение по степеням x функций $e, \cos x, \sin x, \ln(1+x)$.

Методические указания

Ряды являются обобщением обычных сумм и многочленов на бесконечное число слагаемых. Для изучения рядов используется частный случай функций: функций натурального аргумента – последовательностей – и их пределов при n→∞, понятие о которых дается в курсе дифференциального исчисления. Введение рядов позволяет изучать функции, не являющиеся элементарными, находить интегралы, которые невозможно вычислить методами, описанными в курсе интегрального исчисления. В дальнейшем ряды находят применение в курсе теории вероятностей.

Рекомендуемые источники по теме: *в предлагаемой литературе [1,2] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.*

Основные теоретические сведения

Основные понятия. Необходимый признак сходимости

Выражение вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ называется ***числовым рядом***,

где $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ - числа.

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ называются *членами ряда*; выражение a_n называется *общим членом ряда.*

Сумма n первых членов ряда:

$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ называется *n-й частичной суммой ряда.*

Ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n .$$

Число S называется *суммой ряда*. Если конечного предела последовательности частичных сумм не существует, то ряд называется *расходящимся.*

Необходимое условие сходимости ряда (но недостаточное)

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то предел его общего члена стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Выполнение условия $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ не означает сходимости ряда: ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

В качестве примера рассмотрим ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$, называемый *гармоническим.*

Необходимый признак сходимости выполнен:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Однако доказано (и мы дальше докажем), что этот ряд расходится.

Достаточное условие расходимости ряда

Если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - *расходится.*

Признаки сходимости знакоположительных рядов

Если все члены ряда $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ – положительные числа, то числовой ряд называется *знакоположительным.*

1-й признак сравнения

Пусть для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ выполняется условие $a_n \le b_n$ при любом n. Тогда

1) если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

2) если расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

2-ой признак сравнения

Пусть для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ выполняется условие:

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \ne 0$,

то ряды сходятся или расходятся одновременно.

Ряд, с которым сравнивается исследуемый ряд, называют *эталонным.* Наиболее часто в качестве эталонного ряда используют гармонический ряд, либо ряд Дирехле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (который сходится при $p \le 1$ и расходится при $p>1$), либо геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ (сходится при $|q|<1$ и расходится при $|q|\ge 1$).

Признак Даламбера

Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$.

Тогда при $l<1$ ряд сходится, при $l>1$ряд расходится, при $l = 1$ ряд может сходиться или расходиться и в этом случае требуется дополнительное исследование.

Замечание. Если $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, то ряд расходится.

Радикальный признак Коши

Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

Тогда при $l<1$ряд сходится; при $l>1$ ряд расходится, при $l = 1$– требуется дополнительное исследование.

Интегральный признак Коши

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Пусть функция $f(x)$– не возрастающая при $x \ge 1$ и $f(n) = a_n$. Тогда если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$– сходится; если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$– расходится.

Знакочередующиеся ряды

Рассмотрим ряд с членами произвольного знака $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ряд с членами произвольного знака *называется абсолютно сходящимся*, если сходится как он сам, так и ряд, составленный из абсолютных величин его членов $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Ряд называется условно сходящимся, если сам он сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Если ряд сходится абсолютно, то он сходится и условно.

Знакочередующимся называется ряд вида

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$, где $a_n > 0$.

Признак Лейбница

Если выполняются условия:

1) $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

то знакочередующийся ряд сходится, и его сумма не превосходит первого члена ряда: $S < u_1$.

Степенные ряды

Степенным рядом называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots,$$

числа $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ называются коэффициентами степенного ряда.

Множество всех значений *x*, при которых соответствующий числовой ряд сходится называется *областью сходимости* ряда. Степенной ряд всегда сходится в точке $x = x_0$.

Число *R*– такое, что при $|x| < R$ степенной ряд сходится, а при $|x| > R$ - расходится, называется *радиусом сходимости* степенного ряда. Интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда. Радиус сходимости степенного ряда может быть найден по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|.$$

Заметим, что вопрос о сходимости степенного ряда на границах интервала сходимости исследуется для каждого ряда отдельно.

Решение типовых задач

Задача 1. Исследовать на сходимость следующие ряды:

$à)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n}$

Вычислим:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right)^{-1}=$(используя второй замечательный предел) $=\dfrac{1}{e}\neq 0$.

Ряд расходится.

$á)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n n!}{n^n}$;

Имеем по признаку Даламбера: $u_n=\dfrac{3^n n!}{n^n},\quad u_{n+1}=\dfrac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$.

Вычислим:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3^{n+1}(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot 3^n n!}=\frac{3n^n}{(n+1)^n}=\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{3}{e}>1.$$

Ряд расходится.

$â)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^n}$;

Для данного ряда по радикальному признаку Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0<1$$

Следовательно, ряд сходится.

$ã)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{1+n^2}$;

Для применения интегрального признака рассмотрим несобственный интеграл:

$$\int_1^{\infty}\frac{2}{1+x^2}dx=2\lim_{b\to\infty}\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\lim_{b\to\infty}arctgx\Big|_1^{\infty}=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Несобственный интеграл сходится, а значит сходится ряд.

Задача 2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)^3}.$$

Проверим условия теоремы Лейбница для знакочередующегося ряда:

1) его члены монотонно убывают $\left(1>\dfrac{1}{2^3}>\dfrac{1}{4^3}>\ldots\right)$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(2n)^3} = 0$.

Следовательно, этот ряд сходится.

Этот ряд сходится абсолютно, так как сходится ряд из абсолютных величин членов данного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^3}$.

Этот ряд сходится по признаку сравнения (сравнить его с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, который сходится).

Задача 3. Найти радиус сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^n}.$$

Решение:

Радиус сходимости вычислим по формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Имеем:

$$a_n = \frac{1}{n \cdot 10^n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1) \cdot 10^{n+1}}.$$

Поэтому

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) \cdot 10^{n+1}}{n \cdot 10^n} = 10 \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 10.$$

Значит, данный ряд сходится при значениях удовлетворяющих неравенству: $|x| < 10$ или $-10 < x < 10$.

Исследуем поведение ряда на концах промежутка. Подставляя в данный ряд $x = 10$, получим гармонический расходящийся ряд : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

При $x = -10$ получим числовой, знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, который сходится условно.

Таким образом, данный степенной ряд сходится при всех значениях x, удовлетворяющих неравенствам $-10 \le x < 10$.

Задача 4. Разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию $f(x) = 1 + |x|$, если $x \in (-1;1)$

Данная функция является четной на интервале $(-1;1)$. Поэтому $b_n = 0$.

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\int_0^1 (1+x)dx = 2\left(x + \tfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 2\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3;$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x dx = 2\int_0^1 (1+x)\cos n\pi x dx = \begin{vmatrix} u = x & dv = \cos n\pi x dx \\ du = dx & v = \dfrac{1}{n\pi}\sin n\pi x \end{vmatrix} =$$

$$2\int_0^1 \cos n\pi x dx + 2\left(\left(\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x\right)\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x dx \right) =$$

$$\frac{2}{n\pi}\sin n\pi x\Bigg|_0^1 + 2\left(\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Bigg|_0^1\right) =$$

$$\frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right).$$

Разложение в ряд Фурье имеет вид: $f(x) = \dfrac{3}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos n\pi x.$

Вычислить $\int\limits_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x}\cdot e^x dx$ с точностью до 0,001.

Имеем $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$

Умножив все члены ряда на $\sqrt{x}$, получим функциональный ряд:

$$\sqrt{x}e^x = \sqrt{x} + x\sqrt{x} + \frac{x^2\sqrt{x}}{2!} + \ldots + \frac{x^n\sqrt{x}}{n!} + \ldots$$

Почленно проинтегрируем:

$$\int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x}e^x dx = \int_0^{\frac{1}{9}} \left(\sqrt{x} + x\sqrt{x} + \frac{x^2\sqrt{x}}{2!} + \ldots + \frac{x^n\sqrt{x}}{n!} + \ldots\right)dx =$$

$$= \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + \frac{2x^3\sqrt{x}}{2!7} + \ldots + \frac{2x^{n-1}\sqrt{x}}{n!(2n+3)} + \ldots\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{9}} =$$

$$= \frac{2}{3\cdot 3^3} + \frac{2}{5\cdot 3^5} + \frac{2}{2!7\cdot 3^7} + \ldots + \frac{2}{n!(2n+3)\cdot 3^{2n+3}} + \ldots$$

Выясним, сколько членов числового ряда необходимо взять для вычисления интеграла с точностью до 0,001.

Оценим остаточный член:

$$R_n = \frac{2}{n!(2n+3)\cdot 3^{2n+3}} + \frac{2}{(n+1)!(2n+5)\cdot 3^{2n+5}} + \ldots <$$

$$< \frac{2}{n!(2n+3)\cdot 3^{2n+3}}\left[1 + \frac{1}{n\cdot 3^2} + \frac{1}{n^2\cdot 3^4} + \ldots\right] = \frac{2}{n!(2n+3)\cdot 3^{2n+3}}\cdot\frac{1}{1 - \dfrac{1}{n\cdot 3^2}} =$$

$$= \frac{2}{(n-1)!(2n+3)\cdot 3^{2n+1}\cdot(3^2 n - 1)}$$

Очевидно, что для вычисления интеграла с точностью до 0,001 достаточно взять два члена полученного числового ряда.

$$R_2 < \frac{2}{7 \cdot 3^5 \cdot 17} < 6 \cdot 10^{-5}$$

Производя вычисления с точностью до 0,001, будем иметь:

0,0242+0,0016=0,0258.

Таким образом,

$$\int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x} \cdot e^x dx \approx 0{,}026$$

3 Методические указания по самостоятельной работе

Внеаудиторная самостоятельная работа в рамках данной дисциплины включает в себя:

- подготовку к аудиторным занятиям (лекциям, практическим занятиям, лабораторным работам) и выполнение соответствующих заданий;
- самостоятельную работу над отдельными темами учебной дисциплины в соответствии с тематическим планом;
- подготовку к текущему контролю в виде контрольных срезов по разделам дисциплины;
- выполнение контрольных работ;
- подготовку к экзамену.

Подготовка к лекционным занятиям

При подготовке к лекции рекомендуется повторить ранее изученный материал, что дает возможность получить необходимые разъяснения преподавателя непосредственно в ходе занятия. Рекомендуется вести конспект, главное требование к которому быть систематическим, логически связанным, ясным и кратким.

Подготовка к практическим занятиям

Подготовка к практическим занятиям предусматривает:

- изучение теоретических положений, лежащих в основе решения типовых задач и выполнения практических заданий;
- проработку учебного материала, рекомендованной литературы и методической разработки на предстоящее занятие.

Подготовка к лабораторным работам

При подготовке к лабораторным занятиям необходимо получить у преподавателя лабораторное задание на лабораторную работу согласно имеющимся методическим указаниям, уяснить тему, цели, учебные вопросы, повторить теоретический материал, изучить меры безопасности при отработке учебных вопросов занятия и при работе с контрольно-измерительными приборами и вычислительной техникой. Разобраться в форме отчетности и подготовиться к ней.

Самостоятельная работа над отдельными темами учебной дисциплины:

При организации самостоятельного изучения ряда тем лекционного курса обучаемый работает в соответствии с указаниями, выданными преподавателем. Указания по изучению теоретического материала курса составляются дифференцированно по каждой теме и включают в себя следующие элементы: название темы; цели и задачи изучения темы; основные вопросы темы; характеристику основных понятий и определений, необходимых обучаемому для усвоения данной темы; список рекомендуемой литературы; наиболее важные фрагменты текстов рекомендуемых источников, в том числе таблицы, рисунки, схемы и т.п.; краткие выводы, ориентирующие обучаемого на определенную совокупность сведений, основных идей, ключевых положений, систему доказательств, которые необходимо усвоить; контрольные вопросы, предназначенные для самопроверки знаний.

Подготовка к экзамену (зачету с оценкой)

При подготовке к экзамену (зачету с оценкой) большую роль играют правильно подготовленные заранее записи и конспекты. В этом случае остается лишь повторить пройденный материал, учесть, что было пропущено, восполнить пробелы, закрепить ранее изученный материал.

В ходе самостоятельной подготовки к экзамену при анализе имеющегося теоретического и практического материала курсанту (студенту) также рекомендуется проводить постановку различного рода задач по изучаемой теме, что поможет в дальнейшем выявлять критерии принятия тех или иных решений, причины совершения определенного рода ошибок. При ответе на вопросы, поставленные в ходе самостоятельной подготовки, обучающийся вырабатывает в себе способность логически мыслить, искать в анализе событий причинно-следственные связи.

Методические указания по выполнению контрольной работы

Контрольные работы выполняется по разделам:

- линейная алгебра и аналитическая геометрия;
- математический анализ.

Образцы типовых вариантов контрольных работ приведены в ФОС по дисциплине.

Методические указания по выполнению контрольных работ студентами заочной формы обучения

Учебным планом предусмотрено выполнение двух контрольных работ.

Формулировки и перечень задач представлены в пособии: Бокарев М.Ю. Математика. Элементы линейной и векторной алгебры. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве. Основы математического анализа: учебное пособие для курсантов, обучающихся по специальностям: 26.05.05 «Судовождение»;

26.05.06 «Эксплуатация судовых энергетических установок»; 26.05.07 «Эксплуатация судового электрооборудования и средств автоматики»; 25.05.03 «Техническая эксплуатация транспортного радиооборудования» / М.Ю. Бокарев, В.М. Усатова. – Калининград: Издательство БГАРФ, 2021. – 156 с.

Библиографический список

Основные источники

1. Баврин, И.И. Высшая математика: учебник для студентов высших учебных заведений / И.И. Баврин, В.Л. Матросов. – Москва: Владос, 2004.
2. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учебное пособие для студентов вузов / Г.Н. Берман. – 22-е изд., перераб. – Санкт-Петербург: Профессия, 2001.
3. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии: учебное пособие для студентов втузов / Д.В. Клетеник. – изд. 15. – Москва: Наука, Физматлит, 1998.

Дополнительные источники

4. Авдеева, Н.Н. Высшая математика. Векторный анализ и элементы теории поля: учебное пособие / Н.Н. Авдеева, А.И. Руденко. – Калининград, Изд-во БГАРФ, 2020. – 83 с.
5. Бокарев, М.Ю. Математика. Элементы линейной и векторной алгебры. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве. Основы математического анализа: учебное пособие для курсантов, обучающихся по специальностям: 26.05.05 «Судовождение»; 26.05.06 «Эксплуатация судовых энергетических установок»; 26.05.07 «Эксплуатация судового электрооборудования и средств автоматики»; 25.05.03 «Техническая эксплуатация транспортного радиооборудования» / М.Ю. Бокарев, В.М. Усатова. – Калининград: Издательство БГАРФ, 2021. – 156 с.
6. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах, в 2-х ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – Москва: Высшая школа, 1999.
7. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.1: учебное пособие для втузов / под общ. ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва: Физматлит, 2001. – 288 с.
8. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч.2: учебное пособие для втузов / под общ. ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва: Физматлит, 2001. – 432 с.
9. Скоробогатых, Е.Ю. Высшая математика: компьютерный практикум в среде Mathcad: учебно-методическое пособие по выполнению лабораторных работ (лабораторный практикум) / Е.Ю. Скоробогатых. – Калининград: Локальный электронный методический материал. – 2023.
10. Шипачев, В.С. Высшая математика / В.С. Шипачев. – Москв, Высшая школа, 2001.

Локальный электронный методический материал

Ирина Петровна Корнева

МАТЕМАТИКА

Редактор М. А. Дмитриева

Уч.-изд. л. 4,8. Печ. л. 6,6.

Издательство федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Калининградский государственный технический университет».
236022, Калининград, Советский проспект, 1