

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»**

**Н. А. Елисеева**

## **ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА**

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины  
для студентов бакалавриата по направлению подготовки  
09.03.01 Информатика и вычислительная техника,  
профиль программы  
«Промышленная информатика и системы управления»

Калининград  
Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ»  
2025

УДК 590.6

Рецензент

кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной математики  
и информационных технологий ФГБОУ ВО  
«Калининградский государственный технический университет»  
И. Г. Булан

Елисеева, Н. А.

Высшая математика: учебно-методическое пособие по изучению дисциплины для студентов бакалавриата по направлению подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, профиль программы «Промышленная информатика и системы управления» / Н. А. Елисеева. – Калининград: Изд-во ФГБОУ ВО «КГТУ». – 2025. – 107 с.

Учебно-методическое пособие служит руководством для освоения дисциплины «Высшая математика». В нем представлены ожидаемые результаты изучения курса, место дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы, а также описание видов и процедур текущего контроля и промежуточной аттестации. Пособие включает тематический план с подробным описанием форм проведения занятий по каждой теме, перечень вопросов для изучения, методические материалы, рекомендации по выполнению самостоятельных заданий, а также тесты, контрольные работы и материалы для подготовки к экзамену.

Табл. 2, рис. 2, список лит. – 25 наименований

Учебно-методическое пособие рассмотрено и одобрено в качестве локального электронного методического материала на заседании кафедры прикладной математики и информационных технологий института цифровых технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» 18.09.2025 г., протокол № 7

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины рекомендовано к использованию в учебном процессе в качестве локального электронного методического материала методической комиссией ИЦТ от 23.09.2025 г., протокол № 6

УДК 590.6

© Федеральное государственное  
бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Калининградский государственный  
технический университет», 2025 г.  
© Елисеева Н. А., 2025 г.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|   |    |
|---|----|
| ВВЕДЕНИЕ .....  | 4  |
| 1. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ<br>ДИСЦИПЛИНЫ .....                                | 7  |
| 2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ .....  | 11 |
| Раздел 1. Элементы линейной алгебры.....  | 11 |
| Раздел 2. Аналитическая геометрия .....   | 18 |
| Раздел 3. Введение в математический анализ .....  | 28 |
| Раздел 4. Дифференциальное исчисление функций одной<br>действительной<br>переменной.....    | 33 |
| Раздел 5. Дифференциальное исчисление функций нескольких<br>действительных переменных ..... | 35 |
| Раздел 6. Неопределенный интеграл.....  | 36 |
| Раздел 7. Определенный интеграл. Несобственные интегралы .....                              | 38 |
| Раздел 8. Дифференциальные уравнения .....  | 40 |
| Раздел 9. Кратные и криволинейные интегралы.....  | 43 |
| Раздел 10. Ряды.....  | 44 |
| Раздел 11. Теория вероятностей .....  | 46 |
| Раздел 12. Математическая статистика.....   | 52 |
| 3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К<br>ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ .....                 | 56 |
| 4. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ ...                                      | 65 |
| 5. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕЙ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ<br>АТТЕСТАЦИИ .....                       | 67 |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....  | 71 |
| ПРИЛОЖЕНИЯ .....  | 73 |

## ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие представляет комплекс систематизированных материалов для изучения дисциплины «Высшая математика» для студентов по направлению подготовки в бакалавриате 09.03.01 Информатика и вычислительная техника.

**Цели и задачи дисциплины.** Основная цель курса «Высшая математика» – обеспечить прочную базовую подготовку будущих специалистов в ключевых разделах математики, таких как линейная алгебра, аналитическая геометрия, математический анализ, теория вероятностей и математическая статистика. В рамках курса студенты изучают основы классической и современной алгебры, а также аналитической геометрии, знакомятся с основными направлениями и методами алгебраических исследований. Особое внимание уделяется демонстрации практического применения этих методов в различных областях математики и её приложений.

Курс направлен на формирование у студентов навыков чтения и понимания научной литературы по математике и прикладным дисциплинам, где активно используется язык математического анализа. Также важной задачей является развитие умения применять методы математического анализа в других естественно-научных областях и в будущей исследовательской деятельности. Студенты овладевают современными математическими инструментами, которые пригодятся им в практических приложениях. Кроме того, обучение включает построение математических моделей случайных процессов, изучаемых в естественных науках, физико-технических и инженерных дисциплинах, а также анализ этих моделей. Студенты приобретают навыки интерпретации теоретико-вероятностных конструкций как внутри математики, так и в смежных областях. Курс формирует понимание формальных основ теории вероятностей и развивает вероятностную интуицию, необходимую для осознанного перехода от неформальных стохастических задач к их строгому математическому описанию.

В процессе обучения ставятся задачи развития интеллектуальных и творческих способностей студентов, а также познавательных процессов. Курс способствует формированию ключевых компетенций, необходимых для профессиональной деятельности. Кроме того, важной целью является формирование у студентов личного осознания роли математики как части мировой культуры и универсального языка науки.

**Результаты обучения.** В результате освоения дисциплины «Высшая математика» обучающийся должен:

**знать:**

- теоретические основы элементов линейной алгебры, векторной алгебры;
- определение и представление комплексных чисел и действия над ними;
- теоретические основы и методы аналитической геометрии;

- теоретические основы дифференциального и интегрального исчисления функций одной действительной переменной;
- теоретические основы дифференциального и интегрального исчисления функций нескольких действительных переменных;
- основные понятия и методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений;
- теоретические основы числовых и функциональных рядов;
- основные понятия и инструменты теории вероятностей и математической статистики;
- статистические методы обработки экспериментальных данных;
- простейшие приложения линейной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики в профессиональных дисциплинах;

**уметь:**

- использовать методы линейной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики при решении типовых задач;
- использовать математический аппарат в профессиональной деятельности;
- производить расчеты на основе построенных математических моделей;
- переводить на математический язык простейшие проблемы, поставленные в терминах других предметных областей;

**владеть:**

- методами исследования и навыками решения задач линейной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики;
- навыком использования математической символики для выражения количественных и качественных отношений объектов;
- навыками применения математического аппарата для решения прикладных задач.

**Место дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы.** Дисциплина «Высшая математика» относится к естественнонаучному и инженерному модулю обязательной части основной профессиональной образовательной программы высшего образования по направления подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, профиль программы «Промышленная информатика и системы управления».

При изучении дисциплины «Высшая математика» используются знания, умения и навыки, полученные на довузовском этапе обучения по математике.

Эта дисциплина является фундаментальной для освоения предметов естественнонаучного и инженерного модулей, а также общепрофессиональных дисциплин.

Общая трудоемкость курса составляет 18 зачетных единиц, что соответствует 648 академическим часам, включающим как контактные занятия, так и самостоятельную работу студентов, а также выполнение заданий, связанных с текущей и промежуточной аттестацией.

Основными формами аудиторных занятий являются лекции и практические занятия. В процессе обучения применяются эффективные методики, предусматривающие постановку проблемных вопросов и их решение как во время занятий, так и в ходе самостоятельной работы.

Контроль знаний осуществляется посредством текущего контроля и промежуточной аттестации в форме экзамена. Текущий контроль направлен на оценку процесса и качества усвоения материала студентами, а также на стимулирование их учебной активности. Он может проводиться на всех видах занятий в формах, выбранных преподавателем (контрольные работы, тесты, коллоквиумы). Такой контроль обеспечивает постоянное отслеживание преподавателем уровня усвоения материала, активизацию учебного процесса и мотивацию к самостоятельной систематической работе. Кроме того, он помогает студентам осуществлять самоконтроль на разных этапах обучения. Результаты текущего контроля фиксируются в журнале успеваемости и учитываются при ежемесячной аттестации.

При оценке текущей успеваемости учитывается выполнение всех заданий, предусмотренных рабочей программой дисциплины, включая практические работы, самостоятельную работу студентов и посещаемость аудиторных занятий (в том числе с использованием дистанционных образовательных технологий).

В дальнейшем пособии представлены методические материалы для изучения дисциплины, включающие тематический план занятий с перечнем вопросов, рекомендованной литературой и методическими указаниями. Также приведены рекомендации по подготовке к практическим занятиям. В разделе «Оценочные средства» содержатся образцы типовых контрольных работ по разделам дисциплины, типовые вопросы для коллоквиумов, материалы для подготовки к экзаменам (вопросы и задачи за 1, 2 и 3-й семестры), а также типовые варианты тестов.

Помимо данного пособия, студентам следует использовать материалы, размещенные в соответствующем данной дисциплине разделе ЭИОС, в которые более оперативно вносятся изменения для адаптации дисциплины под конкретную группу.

# **1. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Общие методические рекомендации** по изучению дисциплины «Высшая математика» включают следующие ключевые моменты:

## **1. Организация учебного процесса**

- Изучение курса должно сочетать теоретическую подготовку и практические занятия, включая решение задач и самостоятельную работу.
- В начале каждого практического занятия проверяется теоретическая подготовка студентов, а в конце – проводится анализ и обсуждение решения задач коллективно.

## **2. Подходы к изучению материала**

- Основной акцент следует делать на понимании ключевых понятий и методов, а не на механическом заучивании формул и теорем.
- Материал лучше усваивается через решение разнообразных задач и примеров, что способствует развитию навыков самостоятельного поиска решений.
- Важно постоянно анализировать свои ошибки, чтобы выявлять причины неправильных решений и избегать их в будущем.

## **3. Самостоятельная работа**

- При выполнении самостоятельной работы следует пользоваться методическими указаниями, которые содержат тематический план, контрольные вопросы, образцы контрольных работ и тесты для самоподготовки, список рекомендуемой литературы.
- Рекомендуется разделять материал на небольшие блоки для последовательного изучения и закрепления.
- Самостоятельная работа включает выполнение заданий с последующей проверкой и анализом результатов.

## **4. Общие советы**

- Регулярная практика – залог успешного освоения дисциплины.
- Не бояться ошибок, а воспринимать их как часть процесса обучения.
- Использовать компьютерные учебники и интерактивные материалы для более наглядного и удобного изучения.

Таким образом, эффективное изучение высшей математики строится на сочетании теории и практики, систематической самостоятельной работе, анализе ошибок и активном использовании разнообразных методических материалов.

**Рекомендации для эффективной подготовки к лекционным занятиям.** Для успешного усвоения материала и повышения качества обучения студенту рекомендуется придерживаться следующих этапов подготовки к лекциям.

1. Повторение ранее изученного материала.

Перед каждой лекцией важно освежить в памяти пройденные темы, чтобы лучше воспринимать новую информацию и видеть взаимосвязи между разделами.

2. Регулярное ведение конспектов во время лекции.

- Конспект должен быть систематизированным, логически структурированным и понятным.
- Записи рекомендуется делать краткими, но при этом включать основные положения, ключевые идеи и важные детали, чтобы облегчить последующее повторение.
- Используйте аббревиатуры, схемы и выделения для повышения наглядности и удобства восприятия.

3. Доработка конспектов после занятия.

- В течение дня после лекции необходимо повторить сделанные записи, чтобы закрепить материал в памяти.
- Дополнить конспект можно на основе изучения рекомендованной литературы, методических пособий или дополнительных источников.
- Такая работа помогает углубить понимание темы и выявить возможные пробелы в знаниях.

4. Изучение дополнительных материалов.

- Активное использование рекомендованной литературы, учебных пособий и других ресурсов способствует более глубокому и всестороннему освоению учебного материала.
- Рекомендуется также обращаться к научным статьям, видеолекциям и интерактивным платформам для расширения кругозора и развития критического мышления.

5. Активное участие и постановка вопросов.

- Во время лекций и после них важно задавать вопросы преподавателю и обсуждать сложные моменты с однокурсниками.
- Это способствует лучшему пониманию материала и развитию навыков коммуникации.

**Основные разделы дисциплины и трудоемкость их освоения по семестрам представлены в таблице 1.**

Таблица 1 –Трудоемкость освоения дисциплины «Высшая математика» по очной форме обучения.

| №<br>п/п         | Раздел дисциплины  | Объем аудиторной<br>работы, ч |           | Объем<br>СРС, ч |
|------------------|--|-------------------------------|-----------|-----------------|
|                  |  | Л                             | ПЗ        |                 |
| <b>1 семестр</b> |  |                               |           |                 |
| 1                | Элементы линейной алгебры  | 12                            | 12        | 14              |
| 2                | Аналитическая геометрия  | 12                            | 12        | 14              |
| 3                | Введение в математический анализ   | 8                             | 8         | 10              |
| 4                | Дифференциальное исчисление функций одной действительной переменной      | 8                             | 8         | 10              |
| 5                | Дифференциальное исчисление функций нескольких действительных переменных | 8                             | 8         | 10              |
|                  | Подготовка к экзамену  |                               |           | 15,7            |
|                  | <b>Итого за 1 семестр</b>  | <b>48</b>                     | <b>48</b> | <b>73,7</b>     |
| <b>2 семестр</b> |  |                               |           |                 |
| 6                | Неопределенный интеграл  | 10                            | 10        | 10              |
| 7                | Определенный интеграл. Несобственные интегралы                           | 8                             | 8         | 14              |
| 8                | Дифференциальные уравнения   | 12                            | 12        | 14              |
| 9                | Кратные и криволинейные интегралы  | 8                             | 8         | 10              |
| 10               | Ряды   | 10                            | 10        | 10              |
|                  | Подготовка к экзамену  |                               |           | 15,7            |
|                  | <b>Итого за 2 семестр</b>  | <b>48</b>                     | <b>48</b> | <b>73,7</b>     |
| <b>3 семестр</b> |  |                               |           |                 |
| 11               | Теория вероятностей  | 24                            | 24        | 29              |
| 12               | Математическая статистика  | 24                            | 24        | 29              |
|                  | Подготовка к экзамену  |                               |           | 15,7            |

|  |                           |            |            |              |
|--|---------------------------|------------|------------|--------------|
|  | <b>Итого за 3 семестр</b> | <b>48</b>  | <b>48</b>  | <b>73,7</b>  |
|  | <b>Итого</b>              | <b>144</b> | <b>144</b> | <b>221,1</b> |

*L – лекции, ПЗ – практические занятия, СРС – самостоятельная работа студентов.*

## 2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### Раздел 1. Элементы линейной алгебры

#### Тема 1.1. Матрицы и действия над ними. Определители

Перечень изучаемых вопросов

Понятие матрицы. Виды матриц. Операции над матрицами: сложение, умножение на число, произведение матриц, транспонирование. Свойства операций. Понятие определителя 1, 2, 3-го порядков. Свойства определителей. Минор и алгебраическое дополнение элемента определителя. Теорема о разложении определителя по элементам строки (столбца).

*Методические указания*

Матричный язык широко используется в различных областях современной математики и ее приложениях. Понятие матрицы тесно связано с исследованием и решением систем линейных уравнений. Матрицы применяются в программировании, 3D моделировании, анализе данных, теории графов, теории вероятностей, статистике, экономике, механике, теоретической электротехнике, и многих других областях.

Матрицей размера  $m \times n$  называется прямоугольная таблица чисел, содержащая  $m$  строк и  $n$  столбцов. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 14 & 0 & 32 \\ 4 & 8 & 7 & 1 \\ 12 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ – прямоугольная матрица размера } 3 \times 4;$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 12 \\ 4 & 0 & 11 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \text{ – квадратная матрица размера } 3 \times 3;$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ – матрица-столбец или вектор;}$$

$$D = (2 \quad 4 \quad 3) \text{ – матрица-строка или вектор.}$$

Рассмотрим несколько примеров, где возникают матрицы и используется матричный аппарат для решения задач. Сразу оговоримся, что для облегчения понимания и изучения, ограничимся лишь малыми размерами матриц. В реальных ситуациях размеры матриц большие.

1. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} 12x_1 - 9x_2 + 15x_3 = 18, \\ 17x_1 + 18x_2 - 7x_3 = 28, \\ -5x_1 + 16x_2 + 18x_3 = 29. \end{cases}$$

В курсе будет показано, что данную систему можно записать в виде матричного уравнения  $AX = B$ , где  $A, X, B$  – это матрицы вида

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -9 & 15 \\ 17 & 18 & -7 \\ -5 & 16 & 18 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 18 \\ 28 \\ 29 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $A$  – это матрица из коэффициентов перед неизвестными,  $X$  – матрица-столбец из неизвестных,  $B$  – матрица столбец из свободных членов системы.

В этом случае матричные методы будут использоваться для определения наличия решений у системы линейных уравнений, а также для нахождения этого решения.

2. Матрицы в разработке 3D приложений. Рассмотрим простейший пример. Как выполнить последовательность преобразований над некоторым объектом, например: сдвиг, поворот, увеличение размера (рисунок 1)?

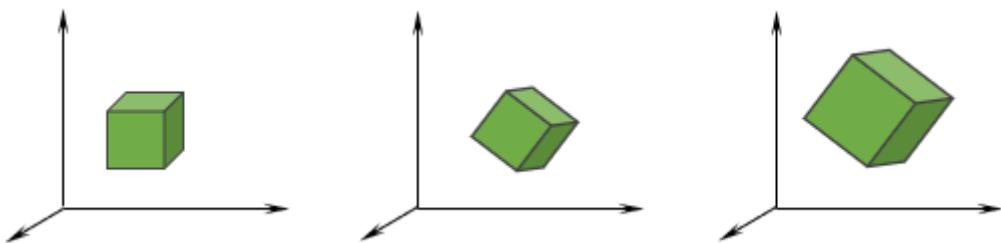


Рисунок 1 – Преобразования объекта

Для этого надо умножить матрицу, задающую соответствующее преобразование на однородные координаты точки объекта.

$$T(d_x, d_y, d_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ – матрица переноса (сдвига) в 3D.}$$

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ – матрица масштабирования (увеличения, уменьшения) в 3D.}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ – матрица поворота относительно оси } Oz$$

на угол  $\theta$  в 3D.

Необходимый поворот может быть представлен композицией трёх поворотов относительно осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , заданных соответствующими матрицами.

3. Одним из математических инструментов представления и анализа социальных сетей является ориентированный граф. Пусть в группе из четырех человек (Дима, Оля, Глеб, Настя) выявлена следующая структура общения: Дима выбирает Олю и Глеба, но не Настю; Оля выбирает Глеба, но не Диму и не Настю; Глеб общается со всеми; Настя выбирает только Глеба. Ориентированный граф в этом случае будет иметь вид (рисунок 2).

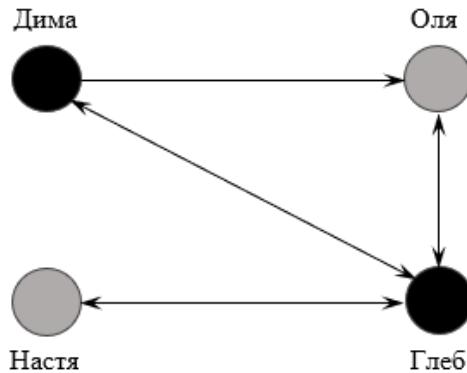


Рисунок 2 – Ориентированный граф структуры общения в группе

Для представления графа в компьютерных программах, в случае, когда он неразрежен и имеет большое число ребер, используют матрицу смежности. Матрица смежности является одной из структур данных, это программная единица, позволяющая хранить и обрабатывать однотипные данные.

Матрица смежности для графа на рисунке 2 имеет вид

|       | Дима | Оля | Глеб | Настя |
|-------|------|-----|------|-------|
| Дима  | 0    | 1   | 1    | 0     |
| Оля   | 0    | 0   | 1    | 0     |
| Глеб  | 1    | 1   | 0    | 1     |
| Настя | 0    | 0   | 1    | 0     |

Здесь данные бинарного выбора представлены нулями и единицами, указывающими на наличие или отсутствие каждой логически возможной связи между парами субъектов.

С понятием матрицы тесно связано понятие определителя – числовой характеристики матрицы. Понятие определителя вводится для квадратных матриц. Определители применяются при решении систем линейных уравнений, нахождении обратной матрицы, вычислении векторного и смешанного произведения векторов, задании плоскости и т. д.

При изучении темы 1.1 студент должен усвоить понятие матрицы и научиться выполнять действия над ними. Важно запомнить правила вычисления определителей 2 и 3-го порядков, для наглядности приведены правила треуголь-

ников и Саррюса. Следует внимательно изучить и уметь применять свойства определителей, позволяющие упрощать вычисления. С помощью свойств и теоремы о разложении определителя по элементам строки (столбца) студент должен научиться вычислять определители четвертого порядка и понимать, что данный способ является универсальным для нахождения определителя любого порядка.

Изучение темы не требует предварительных знаний, достаточно уметь выполнять арифметические операции над действительными числами.

#### *Контрольные вопросы*

1. Сформулируйте определение матрицы, запишите матрицу в общем виде.
2. Сформулируйте определения равных матриц, единичной и нулевой матриц.
3. Сформулируйте определения треугольной, трапециевидной (ступенчатой) матриц.
4. Как производятся операции сложения матриц, умножения матрицы на число? Какими свойствами обладают эти операции?
5. Как производятся операция умножения матриц и операция транспонирования? Какими свойствами обладают эти операции?
6. Дайте определения определителей 1, 2 и 3-го порядков.
7. Сформулируйте правило треугольников и правило Саррюса вычисления определителя 3-го порядка.
8. Перечислите свойства определителей.
9. Дайте определения минора и алгебраического дополнения элемента определителя.
10. Сформулируйте теорему о разложении определителя по элементам строки (столбца).

#### *Рекомендуемая литература*

В предлагаемой литературе [1, 8, 10] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу. Материалы практических занятий и задания для самостоятельного решения изложены в [23], раздел 1, параграфы 1.1, 1.2.

### **Тема 1.2. Обратная матрица. Ранг матрицы**

#### *Перечень изучаемых вопросов*

Понятие обратной матрицы. Условие существования обратной матрицы. Правило нахождения обратной матрицы. Свойства обратных матриц. Простейшие матричные уравнения и их решения. Минор матрицы. Ранг матрицы. Нахождение ранга матрицы методом окаймляющих миноров. Элементарные преобразования над строками матриц. Нахождение ранга матрицы при помощи элементарных преобразований.

### *Методические указания*

Для успешного изучения темы следует повторить материал предыдущего занятия, а именно: вычисление определителей, нахождение алгебраического дополнения элемента определителя, виды матриц, операции умножения матриц и ее свойства, транспонирования матриц.

Студент должен обратить внимание, что обратные матрицы можно находить только для невырожденных матриц. Следует выучить формулу нахождения обратной матрицы и уметь правильно ее применять. С помощью обратной матрицы обучающийся должен отработать методику решения простейших матричных уравнений.

Изучение темы ранга матрицы начинается с понятия минора матрицы, не следует путать с понятием минора элемента определителя матрицы. Нужно выучить определение ранга матрицы и понимать его свойства. Студент должен освоить два метода вычисления ранга матрицы: окаймляющих миноров и с помощью элементарных преобразований. Последний позволит в дальнейшем исследовать системы линейных уравнений.

### *Контрольные вопросы*

1. Сформулируйте определения невырожденной матрицы и обратной матрицы.

2. Какое условие существования обратной матрицы?

3. Запишите формулу для нахождения обратной матрицы.

4. Перечислите свойства обратных матриц.

5. Запишите простейшие матричные уравнения и их решения.

6. Дайте определение минора матрицы.

7. Сформулируйте определение ранга матрицы, перечислите свойства ранга матрицы.

8. Сформулируйте определение базисного минора матрицы.

9. Как определять ранг матрицы методом окаймляющих миноров?

10. Перечислите элементарные преобразования над строками (столбцами) матрицы.

11. Как определять ранг матрицы с помощью элементарных преобразований?

### *Рекомендуемая литература*

В предлагаемой литературе [1, 8, 10] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 1, параграфы 1.3, 1.4 пособия [23].

## **Тема 1.3 Решение систем линейных уравнений**

### *Перечень изучаемых вопросов*

Понятие системы линейных уравнений. Матричная форма записи. Совместная (несовместная), определенная (неопределенная), однородная системы линейных уравнений. Решение системы. Эквивалентные (равносильные) системы. Критерий совместности систем линейных уравнений.

Теоремы о количестве решений совместной системы. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера. Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

### *Методические указания*

Решение систем линейных алгебраических уравнений — одна из классических задач линейной алгебры, во многом определившая её объекты и методы. Кроме того, системы линейных уравнений и методы их решения играют важную роль во многих прикладных задачах.

При изучении этой темы обучающийся должен освоить перевод системы на матричный язык. Предварительно рекомендуется повторить понятия матрицы, обратной матрицы, действия над матрицами, определение ранга матрицы, способ нахождения ранга матрицы с помощью элементарных преобразований. Для исследования систем на совместность студент должен изучить критерий совместности (теорему Кронекера-Капелли).

Системы линейных уравнений, у которых количество уравнений совпадает с количеством неизвестных и определитель основной матрицы системы отличен от нуля, являются определенными. Студент должен научиться решать их методами Крамера и обратной матрицы. Для решения системы методом Крамера обучающемуся следует повторить вычисление определителей. Для матричного метода нужно вспомнить изученный ранее алгоритм решения матричного уравнения.

Для практического решения систем с большим числом уравнений и неизвестных методы обратной матрицы и Крамера неудобны. В случае же когда число уравнений в системе не совпадает с количеством неизвестных, эти методы применять нельзя. Универсальным способом решения систем линейных уравнений является метод Гаусса, в основе которого лежит принцип последовательного исключения неизвестных. Большинству первокурсников хорошо знаком этот метод для решения систем линейных уравнений 2-го порядка. Цель занятий заключается в освоении матричной реализации этого метода на примере систем произвольного числа уравнений с произвольным количеством неизвестных. Студенту следует обратить внимание, что алгоритм преобразования матрицы в трапециевидную совпадает с первым этапом алгоритма метода Гаусса. В рамках этого занятия обучающийся должен освоить вторую часть алгоритма метода Гаусса и уметь правильно записывать общее решение системы. В заключении рассматривается реализация метода Гаусса на примере однородных систем. Студент должен понимать особенности использования метода для однородных систем и уметь находить фундаментальный набор (систему) решений.

### *Контрольные вопросы*

1. Дайте понятие системы линейных уравнений. Запишите основную, расширенную матрицы системы и столбец свободных членов. Запишите матричную форму системы линейных уравнений.

2. Сформулируйте определения совместной (несовместной), определенной (неопределенной), однородной системы линейных уравнений.
3. Что такое решение системы, Эквивалентные (равносильные) системы?
4. Сформулируйте критерий совместности системы линейных уравнений.
5. Сформулируйте теоремы о количестве решений совместной системы.
6. Как найти решение системы линейных уравнений по формулам Крамера?
7. Как найти решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы?
8. В чем состоит метод Гаусса решения систем линейных уравнений?
9. В чем состоит метод Гаусса решения однородных систем линейных уравнений?
10. Дайте понятие фундаментального набора решений однородной системы.

#### *Рекомендуемая литература*

В предлагаемой литературе [1, 8, 10] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 1, параграфы 1.5–1.7 пособия [23].

### **Тема 1.4. Линейные векторные пространства**

#### *Перечень изучаемых вопросов*

Понятие линейного векторного пространства, примеры. Вектор в  $n$ -мерном пространстве. Линейная зависимость и независимость векторов. Размерность и базис векторного пространства. Линейные операторы. Собственные числа и векторы линейного оператора.

#### *Методические указания*

В данной теме вектор вводится аксиоматически, как элемент векторного (линейного) пространства. Свойства векторов и операций над ними описываются системой аксиом векторного пространства. Линейное пространство обобщает понятие пространства векторов на плоскости или в трехмерном пространстве и действия над ними. Студент должен владеть понятиями: линейное пространство, подпространство; линейно-зависимая и линейно-независимая система векторов; базис пространства; евклидово пространство; линейный оператор, собственные числа и векторы линейного оператора.

#### *Контрольные вопросы*

1. Сформулируйте определение линейного пространства.
2. Что такое  $n$ -мерный вектор? Перечислите линейные операции с  $n$ -мерными векторами.
3. Что такое линейная комбинация векторов?

4. Сформулируйте определение линейной зависимости и независимости векторов.
5. Перечислите свойства линейно зависимых векторов.
6. Как на практике определить линейную зависимость (независимость) векторов? Сформулируйте соответствующие теоремы.
7. Что такое размерность векторного пространства?
8. Что такое базис векторного пространства?
9. Сформулируйте теорему о разложении вектора по базису. Что такое координаты вектора?
10. Сформулируйте понятие линейного оператора. Что такое матрица линейного оператора?
11. Что такое собственный вектор и собственное число линейного оператора?
12. Как найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора?

*Рекомендуемая литература*

В предлагаемой литературе [1, 8, 10] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

## **Раздел 2. Аналитическая геометрия**

### **Тема 2.1 Векторы**

#### *Перечень изучаемых вопросов*

Векторы, основные понятия. Линейные операции над векторами и их свойства. Проекция вектора на ось, свойства. Декартовы координаты вектора на плоскости и в пространстве. Направляющие косинусы вектора. Линейные операции над векторами в координатах. Условия коллинеарности и компланарности векторов. Координаты точки. Задача о делении отрезка в данном соотношении.

#### *Методические указания*

Векторная алгебра – это раздел, в котором изучаются векторы, линейные операции над векторами (сложение векторов и умножение вектора на число) и различные произведения векторов (скалярное, векторное, смешанное). Вектор является фундаментальным понятием курсов линейной алгебры, линейного программирования и многих других математических дисциплин; без него невозможно представить современное изложение механики, теории относительности, теоретической физики т.д.

По итогам изучения темы учащиеся должны знать: определение вектора (геометрического и свободного) и основные понятия, связанные с ним; линейные операции над векторами и их свойства. Следует обратить внимание, что такие операции уже встречались ранее, например, в арифметике, теории матриц. В каждом конкретном случае они определялись по-своему, в соответствии со спецификой тех множеств, для которых они рассматриваются (числа, матрицы). Но свойства этих операций одинаковы. Именно эта общность и сближает их. При решении задач студенту следует учесть особенности применяемой терминологии.

Важной составляющей математического аппарата векторной алгебры является разложение вектора по базису, что позволяет сводить действия над векторами к соответствующим операциям над их координатами. Подобный подход оказывается весьма продуктивным и широко применяется для решения задач линейной алгебры, теории дифференциальных уравнений и математического анализа. В рамках этой темы студент должен научиться: вычислять длину вектора и направляющие косинусы; вычислять проекцию вектора; выполнять действия над векторами, заданными координатами; проверять коллинеарность (сопараллельность) и компланарность векторов по их координатам; определять орт вектора; раскладывать вектор по базису, определять координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении.

Перед изучением темы студенту нужно повторить вычисление определителей и методы решения систем линейных уравнений.

### *Контрольные вопросы*

1. Сформулируйте определение геометрического вектора.
2. Сформулируйте определения коллинеарных, сонаправленных, противоположно направленных и компланарных векторов.
3. Что такое орт вектора?
4. Дайте определение равных векторов.
5. Что такое свободный вектор?
6. В чем состоит операция сложения векторов по правилу треугольника и правилу параллелограмма? Перечислите свойства операции сложения векторов. В чем состоит правило сложения  $n$  векторов?
7. Как определяется операция умножения вектора на число? Перечислите ее свойства.
8. Как определить разность двух векторов?
9. Дайте определение проекции вектора на ось. Как вычислить проекцию вектора на ось по известной длине вектора и углу между вектором и осью?
10. Перечислите свойства проекций векторов на ось.

11. Как вводится прямоугольная декартова система координат на плоскости и в пространстве? Запишите формулу разложение вектора по координатному базису. Как определяются координаты вектора?

12. Как вычислить направляющие косинусы вектора?

13. Как выполнять действия над векторами в координатах?

14. Запишите условие коллинеарности векторов в координатах.

15. Запишите условие компланарности векторов в координатах.

16. Что такое радиус-вектор точки? Как определить координаты вектора по координатам его начала и конца?

17. Как определить точку, делящую отрезок в данном соотношении?

#### *Рекомендуемая литература*

В предлагаемой литературе [1, 4, 8, 10] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 2, параграфы 2.1–2.3 пособия [24].

## **Тема 2.2 Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов**

### *Перечень изучаемых вопросов*

Определение скалярного произведения векторов и его свойства. Координатное представление скалярного произведения. Геометрический и физический смысл скалярного произведения. Определение векторного произведения и его свойства. Координатное представление векторного произведения. Геометрический и физический смысл векторного произведения. Определение смешанного произведения векторов и его свойства. Координатное представление смешанного произведения. Геометрический смысл смешанного произведения.

### *Методические указания*

Тема «Скалярное произведение векторов» изучается в рамках школьной программы по геометрии, поэтому как правило не вызывает затруднений у обучающихся. Однако перед изучением векторного и смешанного произведения полезно повторить эту тему и разобрать ряд задач, которые ранее не встречались в школе. Студент должен уметь вычислять: скалярное произведение векторов по определению и применять его свойства; скалярное произведение векторов, заданных координатами; угол между векторами; проекцию вектора на вектор, используя скалярное произведение векторов; а также проверять перпендикулярность векторов; применять скалярное произведение при решении физических задач.

Перед изучением темы «Векторное и смешанное произведения векторов» студенту рекомендуется вспомнить правила вычисления определителей второго

и третьего порядков, теорему о разложении определителя по элементам строки. На практических занятиях студент должен научиться: определять ориентацию тройки векторов в пространстве; вычислять векторное и смешанное произведение векторов по определению и в случае, когда векторы заданы своими координатами с учетом свойств этих произведений; применять соответствующие произведения при решении геометрических и физических задач.

По итогам изучения этой темы студент должен освоить различные виды произведений векторов, понимать их свойства и различать их между собой.

#### *Контрольные вопросы*

1. Сформулируйте определение скалярного произведения и его связь с проекциями векторов.
2. Перечислите свойства скалярного произведения.
3. Запишите координатное представление скалярного произведения.
4. Как вычислить угол между векторами через их скалярное произведение?
5. Как вычислить проекцию вектора на вектор и длину вектора через скалярное произведение?
6. В чем состоит геометрический смысл скалярного произведения векторов?
7. В чем состоит физический смысл скалярного произведения векторов?
8. Дайте понятия правой и левой тройки векторов.
9. Сформулируйте определение векторного произведения.
10. Перечислите свойства векторного произведения.
11. Запишите координатное представление векторного произведения.
12. В чем состоит геометрический смысл векторного произведения?
13. В чем состоит физический смысл векторного произведения?
14. Определение смешанного произведения векторов.
15. Перечислите свойства смешанного произведения векторов.
16. Запишите условие компланарности тройки векторов.
17. Запишите формулу смешанного произведения в координатах.
18. В чем состоит геометрический смысл смешанного произведения?

#### *Рекомендуемая литература*

В предлагаемой литературе [1, 4, 8, 10] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 2, параграфы 2.4–2.6 пособия [24].

### **Тема 2.3 Уравнение линии на плоскости. Прямая на плоскости**

#### *Перечень изучаемых вопросов*

Уравнение линии на плоскости. Основные виды уравнения прямой: общее уравнение, каноническое и параметрические уравнения, уравнение прямой по двум точкам, уравнение прямой «в отрезках», уравнения с угловым коэффициентом. Угол между прямыми на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости. Расстояние от точки до прямой.

#### *Методические указания*

Аналитическая геометрия – область математики, в которой геометрические объекты изучаются средствами алгебры (линейной и векторной). Важно научиться анализировать геометрические свойства линии на основе анализа их уравнений.

По итогам изучения данной темы студент должен

- знать: способы задания прямой на плоскости; формулы для вычисления угла между прямыми; формулу расстояния между точкой и прямой;
- уметь: составлять уравнение геометрического места точек на плоскости; узнавать прямую по ее общему, каноническому, параметрическому и т.д. уравнениям; записывать уравнение прямой для любого способа ее задания; исследовать взаимное расположение прямых на плоскости; определять угол между прямыми на плоскости, точку их пересечения; определять расстояние между точкой и прямой на плоскости; определять точку, симметричную относительно данной прямой.

Для успешного освоения этой темы следует повторить тему векторы.

#### *Контрольные вопросы*

1. Как определяется линия на плоскости, уравнение линии (кривой) на плоскости?
2. Запишите уравнение прямой по точке и нормальному вектору. Что такое нормальный вектор прямой?
3. Запишите общее уравнение прямой и его частные случаи.
4. Запишите канонические и параметрическое уравнение прямой. Что такое направляющий вектор прямой?
5. Запишите уравнение прямой «в отрезках».
6. Запишите уравнение прямой с угловым коэффициентом; уравнение прямой, проходящей через точку с заданным угловым коэффициентом.

7. Как определить угол между двумя прямыми?
8. Запишите условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
9. Как определить расстояние от точки до прямой? Запишите формулу.

#### *Рекомендуемая литература*

В предлагаемой литературе [1, 4, 8, 10] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 3, параграфов 3.1, 3.2 пособия [24].

### **Тема 2.4 Кривые второго порядка**

#### *Перечень изучаемых вопросов*

Уравнение линии второго порядка в общем виде. Окружность: определение, каноническое уравнение. Эллипс: определение, каноническое уравнение, эксцентриситет, директрисы. Гипербола: определение, каноническое уравнение, асимптоты, эксцентриситет, директрисы, сопряженные гиперболы. Пара-  
бola: определение, каноническое уравнение. Уравнения линий второго порядка с осями симметрии, параллельными координатным осям.

#### *Методические указания*

В данной теме кривые второго порядка определяются как геометрическое место точек, обладающих некоторым свойством. Изучение кривых второго порядка имеет весьма важное как теоретическое, так и прикладное значение. Знания, полученные по теме «Кривые второго порядка», применяются при изучении математического анализа, физики, теоретической механики и т.д.

По итогам изучения данной темы студент должен

- знать: определения окружности, эллипса, гиперболы, параболы; канонические уравнения этих кривых; геометрический смысл параметров, входящих в уравнение, и соотношения между ними;
- уметь: приводить уравнение линии второго порядка к каноническому виду; по уравнению кривой сделать чертёж.

#### *Контрольные вопросы*

1. Запишите уравнение линии второго порядка в общем виде.
2. Дайте определение окружности, запишите каноническое уравнение.
3. Сформулируйте определение эллипса, запишите каноническое уравнение эллипса, перечислите основные элементы. Исследуйте форму эллипса по его уравнению. Определите эксцентриситет и директрисы эллипса.

4. Сформулируйте определение гиперболы, запишите каноническое уравнение гиперболы, перечислите основные элементы. Исследуйте форму гиперболы по его уравнению.

5. Сформулируйте определение параболы, запишите каноническое уравнение. Исследуйте форму параболы по ее уравнению.

6. Запишите уравнения линий второго порядка (эллипс, гипербола, парабола) с осями симметрии, параллельными координатным осям.

#### *Рекомендуемая литература*

В предлагаемой литературе [1, 4, 8, 10] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 3, параграф 3.3 пособия [24].

## **Тема 2.5. Плоскость**

### *Перечень изучаемых вопросов*

Уравнения плоскости в пространстве: уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору; нормальный вектор плоскости; общее уравнение плоскости; частные случаи общего уравнения плоскости; уравнение плоскости, проходящей через три данные точки; уравнение плоскости в отрезках. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Расстояние от точки до плоскости.

### *Методические указания*

Плоскость в пространстве  $Oxyz$  можно задать разными способами. Каждому из них соответствует определенный вид ее уравнения. По итогам работы над темой студент должен

– знать: различные виды уравнения плоскости в пространстве; формулу для нахождения угла между плоскостями; формулу для нахождения расстояния от точки до плоскости;

– уметь: составлять уравнение плоскости по исходным данным; определять расположение плоскости по ее уравнению; вычислять расстояние от точки до плоскости; вычислять угол между плоскостями; определять взаимное расположение плоскостей; решать основные задачи на плоскость.

Перед изучением темы студенту рекомендуется вспомнить правила вычисления определителей, теорему о разложении определителя по элементам строки, темы: векторы, скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.

### *Контрольные вопросы*

1. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку перпендику-

лярно вектору. Что называют нормальным вектором плоскости?

2. Запишите общее уравнение плоскости. Рассмотрите частные случаи общего уравнения плоскости.

3. Из какого свойства векторов следует уравнение плоскости, проходящей через три точки? Запишите его.

4. Запишите уравнение плоскости «в отрезках».

5. Как определить угол между плоскостями? Запишите формулу.

6. Запишите условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

7. Как определить расстояние от точки до плоскости? Запишите формулу.

#### *Рекомендуемая литература*

В предлагаемой литературе [1, 4, 8, 10] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 3, параграф 3.3 пособия [24].

### **Тема 2.6. Прямая в пространстве**

#### *Перечень изучаемых вопросов*

Основные виды уравнения прямой в пространстве: канонические уравнения прямой; параметрическое уравнение прямой; общее уравнение прямой. Угол между прямыми в пространстве. Взаимное расположение прямых в пространстве.

#### *Методические указания*

При переходе к трехмерному пространству с заданной декартовой прямоугольной системой координат происходит естественное обобщение уравнений прямой на плоскости на трехмерный случай. Студенту следует обратить внимание, что некоторые уравнения прямой на плоскости можно получить из соответствующих уравнений прямой в пространстве, полагая аппликату равной нулю.

По итогам работы над темой студент должен

– знать: различные виды уравнения прямой в пространстве; формулу для нахождения угла между прямыми;

– уметь: составлять уравнение прямой в пространстве по исходным данным; определять положение прямой в пространстве по ее уравнению; вычислять угол между прямыми в пространстве; определять взаимное расположение прямых в пространстве; вычислять расстояние от точки до прямой в пространстве.

Перед изучением темы студенту рекомендуется вспомнить правила вычисления определителей, теорему о разложении определителя по элементам строки, темы: векторы, скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.

### *Контрольные вопросы*

1. Запишите канонические уравнения прямой в пространстве. Перейдите от них к параметрическим уравнениям. Как определяется направляющий вектор прямой в пространстве?
2. Запишите уравнения прямой, проходящей через две точки.
3. Как перейти к каноническим уравнениям прямой, если она задана, как линия пересечения двух плоскостей?
4. Как вычислить угол между прямыми в пространстве? Запишите формулу.
5. Запишите условия перпендикулярности двух прямых в пространстве; условия параллельности и совпадения двух прямых в пространстве.
6. Запишите условия пересечения и скрещивания двух прямых в пространстве. Как они получены?
7. Как вычислить расстояние от точки до прямой? Запишите формулу.

### *Рекомендуемая литература*

В предлагаемой литературе [1, 4, 8, 10] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 3, параграф 3.3 пособия [24].

## **Тема 2.7. Прямая и плоскость в пространстве**

### *Перечень изучаемых вопросов*

Угол между прямой и плоскостью. Взаимное расположение прямой и плоскости.

### *Методические указания*

Перед изучением темы студенту рекомендуется вспомнить правила вычисления определителей, теорему о разложении определителя по элементам строки, темы: векторы, скалярное, векторное и смешанное произведения векторов; уравнения плоскости; уравнения прямой в пространстве.

После изучения этой темы студент должен уметь: вычислять угол между прямой и плоскостью; определять взаимное расположение прямой и плоскости; определять точку пересечения прямой и плоскости; определять проекцию точки на плоскость.

*Контрольные вопросы:*

1. Как вычислить угол между прямой и плоскостью? Запишите формулу, объясните наличие синуса.
2. Запишите условия параллельности прямой и плоскости, условия перпендикулярности прямой и плоскости.
3. Как найти координаты точки пересечения прямой с плоскостью?
4. Запишите условие принадлежности прямой плоскости.

В предлагаемой литературе [1, 4, 8, 10] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 4, параграф 4.3 пособия [24].

В качестве самостоятельной работы студента предлагается выполнение индивидуального практического задания по разделу 4. Задания приведены в пособии [24].

**Тема 2.8. Поверхности второго порядка**

*Перечень изучаемых вопросов*

Цилиндрические поверхности: эллиптический цилиндр, круговой цилиндр, параболический цилиндр, гиперболический цилиндр. Поверхности вращения. Конические поверхности. Эллипсоид, однополостный гиперболоид, двуполостный гиперболоид, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид, конус второго порядка.

*Методические указания*

Данная тема выносится на самостоятельное изучение студентами.

Начните изучение темы с цилиндрических поверхностей. Запишите определение цилиндрической поверхности (цилиндра), её направляющей и образующей. Сделайте рисунок. Запишите общее уравнение цилиндра, образующие которого параллельны оси  $Oz$ . Запишите уравнение и сделайте чертеж для эллиптического цилиндра, кругового цилиндра, параболического цилиндра, гиперболического цилиндра. Теперь переходите к поверхностям вращения и коническим поверхностям (запишите определение, сделайте схематический чертеж). Для поверхностей второго порядка: эллипсоид, однополостный гиперболоид, двуполостный гиперболоид, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид, конус второго порядка запишите каноническое уравнение, сделайте чертеж, исследуйте геометрический вид поверхности, применяя метод сечений поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям (или самими координатными плоскостями).

## *Контрольные вопросы*

1. Дайте определение цилиндрической поверхности, её направляющей и образующей.
2. Запишите уравнение и сделайте чертеж для эллиптического цилиндра, кругового цилиндра, параболического цилиндра, гиперболического цилиндра.
3. Сформулируйте понятия поверхности вращения и конической поверхности.
4. Что такое эллипсоид? Запишите каноническое уравнение, сделайте чертеж. Что получится в сечении плоскостью  $z=h$ ?
5. Что такое однополостный гиперболоид? Запишите каноническое уравнение, сделайте чертеж. Какие линии получаются в сечениях плоскостями  $z=h$ ,  $x=h$ ,  $y=h$ ?
6. Что такое двуполостный гиперболоид? Запишите каноническое уравнение, сделайте чертеж. Какие линии получаются в сечениях плоскостями  $z=h$ ,  $x=h$ ,  $y=h$ ?
7. Сформулируйте определение эллиптического параболоида. Запишите каноническое уравнение, сделайте чертеж. Какие линии получаются в сечениях плоскостями  $z=h$ ,  $x=h$ ,  $y=h$ ?
8. Сформулируйте определение гиперболического параболоида. Запишите каноническое уравнение, сделайте чертеж. Какие линии получаются в сечениях плоскостями  $z=h$ ,  $x=h$ ,  $y=h$ ?
9. Что такое конус второго порядка? Запишите каноническое уравнение, сделайте чертеж. Какие линии получаются в сечениях плоскостями  $z=h$ ,  $x=0$ ,  $y=0$ ?

## *Рекомендуемая литература*

В предлагаемой литературе [1, 4, 8, 10] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

## **Раздел 3. Введение в математический анализ**

### **Тема 3.1. Комплексные числа**

#### *Перечень изучаемых вопросов*

Множества, основные понятия. Числовые множества. Натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа.

Комплексное число. Мнимая единица. Множество комплексных чисел и множество действительных чисел. Действительная часть и мнимая часть комплексного числа. Алгебраическая форма записи комплексного числа. Действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме (сложение, вычитание, умножение, деление). Вычисление степеней мнимой единицы. Ре-

шение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом на множестве комплексных чисел. Геометрическое изображение комплексных чисел. Комплексная плоскость. Модуль и аргумент комплексного числа. Переход от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической. Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме (умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня). Показательная форма комплексного числа. Действия над комплексными числами, заданными в показательной форме (умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня).

#### *Методические указания*

При изучении данного раздела и всех последующих разделов математического анализа обязательно используются знания, умения и навыки довузовской подготовки по математике. А именно, умение проводить алгебраические преобразования, решать уравнения и неравенства, знание основных тригонометрических формул, умение проводить тригонометрические преобразования и решать тригонометрические уравнения и неравенства, понимание функции, графика функции и основных ее свойств, знание графиков и свойств основных элементарных функций.

Самостоятельная работа студента при изучении данного раздела включает: освоение теоретического учебного материала, подготовку к выполнению практических заданий, выполнение домашних заданий.

Изучение раздела «математический анализ» целесообразно начать с основных понятий теории множеств и затем перейти к понятию числового множества. Множества, элементами которых являются числа, называются числовыми. Примерами числовых множеств являются: множество натуральных чисел, множество целых чисел, множество рациональных чисел, множество иррациональных чисел, множество действительных чисел. Совокупность всех рациональных и иррациональных чисел называется множеством действительных (вещественных) чисел. Действительные числа можно изображать точками на числовой прямой. Но множества действительных чисел недостаточно для того, чтобы решить любое квадратное уравнение с действительными коэффициентами. Например, уравнения:  $x^2 + 1 = 0$ ,  $x^2 + a = 0$  ( $a > 0$ ) не имеют действительных корней. Решение таких уравнений приводит к необходимости рассмотрения множества комплексных чисел, подмножеством которого является множество действительных чисел. Помимо математики комплексные числа имеют применение в ряде разделов физики и техники (электротехнике, электронике, механике, гидродинамике, аэродинамике и др.).

#### *Контрольные вопросы*

1. Из каких чисел состоят множества натуральных, целых, рациональных, иррациональных и действительных чисел? Как эти множества связаны между собой?

2. Сформулируйте понятия комплексного числа, мнимой единицы, множества комплексных чисел. Что такое действительная часть и мнимая часть комплексного числа?

3. Как записать комплексное число в алгебраической форме? Какие действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме, можно выполнять?

4. Как изобразить комплексное число на плоскости? Что такое модуль и аргумент комплексного числа?

5. Как перейти от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической?

6. Расскажите про действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме (умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня).

7. Как записать комплексное число в показательной форме?

8. Расскажите про действия над комплексными числами, заданными в показательной форме (умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня).

#### *Рекомендуемая литература*

В предлагаемой литературе [3, 7, 9] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

### **Тема 3.2. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности**

#### *Перечень изучаемых вопросов*

Числовая последовательность, способы задания; ограниченная, монотонная последовательности. Понятие предела последовательности, геометрическое истолкование. Свойства пределов. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их свойства. Признак существования предела последовательности.

#### *Методические указания*

В математических предложениях (формулировках определений, теорем и т.д.) часто повторяются отдельные слова и целые выражения. Поэтому при их записи удобно использовать логические символы. Запомните наиболее простые и часто употребляемые логические символы (кванторы):  $\exists$  - «существует»,  $\nexists$  - не существует,  $\forall$  - «любой».

Теме «Числовая последовательность. Предел последовательности» следует уделить особое внимание. Эта тема является основой для понимания и изучения следующей темы «Предел и непрерывность функции».

## *Контрольные вопросы*

1. Что такое числовая последовательность?
2. Сформулируйте определения ограниченной, возрастающей, убывающей последовательности.
3. Сформулируйте определение предела последовательности, дайте геометрическое истолкование. Что такое сходящаяся последовательность?
4. Перечислите свойства пределов.
5. Что такое бесконечно большая, бесконечно малая последовательности? Какими свойствами они обладают?
6. Всякая ли последовательность имеет предел?

## *Рекомендуемая литература по разделу*

В предлагаемой литературе [3, 7, 9] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

## **Тема 3.3. Предел и непрерывность функции**

### *Перечень изучаемых вопросов*

Предел функции в точке, два эквивалентных между собой определения предела функции в точке (по Гейне и по Коши), геометрический смысл. Односторонние пределы функции в точке. Бесконечно большая функция и бесконечно малая функция, свойства и связь. Основные теоремы о пределах. Первый и второй замечательные пределы. Вычисление пределов: виды неопределенностей и методы раскрытия основных неопределенностей. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация.

### *Методические указания*

Понятие функции является одним из основных математических понятий, при помощи которых моделируются многие естественные процессы и явления. Важнейшим является понятие предела функции, на нем основаны понятия непрерывности функции, производной, интеграла, сходимости ряда и т.д.

При изучении темы обязательно используются знания, умения и навыки, приобретенные при изучении предыдущих тем дисциплины и довузовской подготовке по математике. Перед началом изучения данной темы повторите понятие модуля, его свойства и решение неравенств с модулем.

Самостоятельная работа студента при изучении данного раздела включает: освоение теоретического учебного материала, подготовка к выполнению практических заданий, выполнение домашних заданий, а также подготовку к контрольной работе по теме «Предел и непрерывность функции одной переменной».

Изучение данной темы целесообразно начать с понятия окрестности точки. Затем перейдите к определению предела функции в точке. Вводится два эквивалентных между собой определения предела функции в точке: 1) определение «на языке последовательностей» или по Гейне; 2) определение «на языке  $\varepsilon - \delta$ » или по Коши. Разберите геометрический смысл предела функции в точке. Перейдите к понятию односторонних пределов, когда  $x$  стремится к  $x_0$ , оставаясь меньше (больше), чем  $x_0$ . Затем перейдите к понятию предела функции на бесконечности. При исследовании поведения функций и при вычислении их пределов огромную роль играют понятия бесконечно большой функции и бесконечно малой функции, их свойства и связь друг с другом. Выясните как связаны функция, ее предел и бесконечно малая функция. Изучите основные теоремы о пределах, которые облегчают их вычисление, а также первый и второй замечательные пределы. При подготовке к практическим занятиям выясните методы раскрытия основных видов неопределенностей, возникающих при вычислении пределов. Изучите понятие непрерывности функции, точек разрыва и основные теоремы о непрерывных функциях.

### *Контрольные вопросы*

1. Сформулируйте определение предела функции в точке (по Гейне и по Коши), дайте геометрическую интерпретацию.
2. Что такое односторонние пределы?
3. Сформулируйте определение предела функции на бесконечности.
4. Что такое ограниченная, бесконечно большая, бесконечно малая функции?
5. Перечислите основные свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.
6. Запишите первый и второй замечательные пределы. В каких случаях применяются эти формулы?
7. Что такое эквивалентные бесконечно малые функции? Запишите важнейшие эквивалентности, используемые при вычислении пределов.
8. Сформулируйте понятие непрерывной функции и основные теоремы о непрерывных функциях.
9. Запишите формулы приращения аргумента и приращения функции.
10. Дайте определение точек разрыва первого и второго рода.

### *Рекомендуемая литература по разделу*

В предлагаемой литературе [3, 7, 9] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

## **Раздел 4. Дифференциальное исчисление функций одной действительной переменной**

### *Перечень изучаемых вопросов*

Производная функции одной переменной: понятие, геометрический и физический смысл. Уравнения касательной и нормали к графику функции. Правила дифференцирования. Производная сложной функции. Таблица производных основных элементарных функций. Связь дифференцируемости и непрерывности функции. Дифференцирование обратных, неявных и параметрически заданных функций. Производные высших порядков. Механический смысл производной второго порядка. Дифференциал: определение, свойства, геометрический смысл. Применение дифференциала к приближенным вычислениям. Дифференциалы высших порядков. Правила Лопиталя (раскрытие неопределенности вида  $0/0$  и вида  $\infty/\infty$ ). Возрастание и убывание функций. Экстремумы функций. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Выпуклость графика функции; точки перегиба. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции и построения графика.

### *Методические указания*

Понятие производной является одним из фундаментальных понятий математического анализа. Производная широко используется при решении целого ряда задач математики, физики, экономики, других наук, в особенности при изучении скорости изменения функции, скорости протекания различных процессов. Так, например, скорость  $v$  прямолинейного движения есть производная от пути  $s$  по времени  $t$ ; скорость  $v$  химической реакции есть производная количества вещества  $m$  по времени  $t$ ; скорость роста популяции есть производная размера популяции  $p$  по времени  $t$ ; сила переменного тока  $I$  есть производная количества электричества  $q$  по времени  $t$  и т. д. При решении перечисленных задач возникала необходимость рассмотрения предела отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Такой предел и был назван производной данной функции в данной точке. Производная функции и некоторые ее приложения известны по школьному курсу математики. Теперь, ввиду огромной важности производной при изучении различных дисциплин, необходимо повторить и углубить имеющиеся знания, а также дополнить их новыми. Необходимо научиться вычислять производные сложной функции, обратной, неявно заданной функции, параметрической функции, применять логарифмическое дифференцирование, находить производные высших порядков (в том числе  $n$ -ю производную). Особое место в данном разделе занимает понятие дифференциала функции, тесно связанное с понятием производной, а также его применение при приближенных вычислениях значений функции. Также необходимо научиться применять производную для вычисления пределов функций (правила Лопиталя) и для исследования поведения

функций (монотонность, экстремумы, выпуклость, точки перегиба, наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке).

При изучении раздела обязательно используются знания, умения и навыки, полученные при изучении предыдущих тем дисциплины и довузовской подготовке по математике.

Самостоятельная работа студента при изучении раздела включает: освоение теоретического учебного материала, подготовку к выполнению практических заданий, выполнение домашних заданий, а также выполнение индивидуального расчетного задания и контрольной работы по теме «Дифференциальное исчисление функции одной переменной».

### *Контрольные вопросы*

1. Сформулируйте определение производной функции. Какие задачи приводят к понятию производной? Что такое дифференцирование?
2. В чем состоит геометрический и физический смысл производной? Напишите уравнения касательной и нормали к кривой в заданной точке.
3. Напишите по памяти правила дифференцирования и таблицу производных.
4. По каким правилам вычисляют производную сложной и обратной функции?
5. Сформулируйте правила дифференцирования неявных и параметрически заданных функций.
6. Что такое логарифмическое дифференцирование?
7. Что такое производные высших порядков? Сформулируйте механический смысл второй производной.
8. Дайте понятие дифференциала. Что такое главная часть приращения функции? В чем состоит геометрический смысл дифференциала функции?
9. Напишите правила вычисления дифференциала. В чем состоит инвариантность формы первого дифференциала?
10. Как применяется дифференциал к приближенным вычислениям? Сформулируйте понятие дифференциалов высших порядков.
11. В чем состоят правила Лопитала раскрытия неопределенностей?
12. Сформулируйте определение возрастающей (убывающей) функции. Как определить промежутки возрастания (убывания) функции?
13. Что такое экстремум функции? Сформулируйте необходимое, достаточное условия экстремума. Сформулируйте правило нахождения экстремумов функции.

14. Что такое наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке? Сформулируйте правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

15. Что такое точки перегиба? Сформулируйте правило нахождения промежутков выпуклости и точек перегиба функции.

16. Дайте понятие асимптоты графика функции. Какие бывают асимптоты? Как найти асимптоты кривой?

#### *Рекомендуемая литература по разделу*

В предлагаемой литературе [3, 7, 9] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

### **Раздел 5. Дифференциальное исчисление функций нескольких действительных переменных**

#### *Перечень изучаемых вопросов*

Функция нескольких переменных: понятие, область определения, множество значений, линии и поверхности уровня. Предел и непрерывность функции двух переменных. Частные и полное приращения функции двух переменных. Частные производные функции двух переменных, геометрический смысл. Частные и полный дифференциалы. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях. Градиент функции. Производная по направлению. Экстремум функции двух переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции в данной области.

#### *Методические указания*

До сих пор мы рассматривали функции одной действительной переменной. Но это понятие не охватывает все зависимости, существующие в природе. Даже в самых простых задачах встречаются величины, значения которых определяются совокупностью значений нескольких величин. Так, например, температура тела  $T$  в данный момент времени  $t$  может меняться от точки к точке. Каждая точка тела определяется тремя координатами  $x, y, z$ , поэтому температура тела зависит от трех переменных  $x, y, z$ . Если еще учесть, что температура тела  $T$  изменяется в разные моменты времени  $t$ , то ее значения будут определяться уже четырьмя переменными, то есть  $T = T(t, x, y, z)$ . Другой пример. Площадь прямоугольника со сторонами  $x$  и  $y$  определяется значениями двух переменных  $x, y$ . Объем прямоугольного параллелепипеда с измерениями  $x, y, z$  определяется значениями переменных  $x, y$  и  $z$ . Таких примеров можно привести много. Данный раздел посвящен изучению такого рода зависимостей. Здесь будет введено понятие функции нескольких переменных и дан аппарат для изучения поведения таких функций: линии и поверхности уровня, предел и непрерывность функции двух переменных, частные и полное приращения функции двух переменных, частные производные функции двух переменных, частные и

полный дифференциалы, градиент функции, производная по направлению, экстремум функции двух переменных, наибольшее и наименьшее значения функции в данной области.

При изучении данного раздела обязательно используются знания, умения и навыки, приобретенные при изучении предыдущих разделов, а именно, предел, непрерывность, производная функции одной действительной переменной.

Самостоятельная работа студента при изучении раздела включает: освоение теоретического учебного материала, подготовку к выполнению практических заданий, выполнение домашних заданий, подготовку к коллоквиуму.

### *Контрольные вопросы*

1. Сформулируйте определения: функция двух переменных, область определения функции двух переменных, область изменения функции двух переменных, график функции двух переменных.

2. Сформулируйте определения: предел и непрерывность функции двух переменных.

3. Запишите следующие формулы: приращение аргументов  $x, y$ ; полное приращение функции двух переменных; частные приращения функции двух переменных.

4. Что такое частные производные функции двух переменных? В чем состоит их геометрический смысл?

5. Частные производные второго порядка (дайте понятие и запишите формулы).

6. Сформулируйте определения: полный дифференциал, частные дифференциалы функции двух переменных.

7. По какому правилу вычисляется производная сложной и неявной функции двух переменных.

8. Что такое экстремум функции двух переменных? Сформулируйте необходимое условие, достаточное условие.

9. Как определить наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области?

10. Что такое производная по направлению, градиент?

### *Рекомендуемая литература по разделу*

В предлагаемой литературе [3, 7, 9] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

## **Раздел 6. Неопределенный интеграл**

### *Перечень изучаемых вопросов*

Первообразная и неопределенный интеграл: понятие, свойства. Таблица неопределенных интегралов. Метод непосредственного интегрирования. Подведение переменной под знак дифференциала. Замена переменной в неопреде-

ленном интеграле. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен. Интегрирование дробно-рациональных функций. Интегрирование тригонометрических функций. Интегрирование простейших иррациональных функций. «Неберущиеся» интегралы.

### *Методические указания*

В данном разделе будет рассматриваться задача, обратная к задаче нахождения производной функции одной действительной переменной. Задача состоит в следующем: дана функция  $f(x)$ , являющаяся производной некоторой функции  $F(x)$ , требуется найти функцию  $F(x)$ . К такой математической задаче приводят многие физические, химические и другие задачи. Например, нахождение закона движения точки, если известна скорость движения  $v = v(t)$ . В этом случае искомой функцией  $s = s(t)$  будет такая, для которой  $s'(t) = v(t)$ . Нахождение функции по ее производной называется интегрированием. Интегрирование – это действие, обратное дифференцированию.

При изучении данного раздела используются знания, умения и навыки, приобретенные при изучении предыдущих разделов, а именно, предел и производная функции одной действительной переменной, а также школьные знания по математике.

Изучение данного раздела следует начать с понятия первообразной функции. Затем изучите понятия: неопределенный интеграл, интегрирование. Перейдите к свойствам неопределенного интеграла, которые непосредственно вытекают из его определения. Так как интегрирование – это действие, обратное дифференцированию, то можно получить таблицу основных интегралов, используя таблицу производных (или дифференциалов). Эти интегралы называются табличными, их следует выучить наизусть. Все методы вычисления неопределенных интегралов сводятся к указанию приемов, приводящих заданный интеграл к табличному. Поэтому табличные интегралы надо помнить и уметь их узнавать. Докажите свойства неопределенного интеграла, они также используются при вычислении интегралов. Изучите, в чем состоят основные методы интегрирования: метод непосредственного интегрирования; подведение переменной под знак дифференциала; метод замены переменной; интегрирование по частям; интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен; интегрирование дробно-рациональных функций; интегрирование тригонометрических функций, интегрирование простейших иррациональных функций. Отработайте навык вычисления неопределенных интегралов на практике. Это умение будет необходимо вам для изучения следующих разделов «Определенный интеграл» и «Дифференциальные уравнения».

Самостоятельная работа студента при изучении раздела включает: освоение теоретического учебного материала, подготовку к выполнению практических заданий, выполнение домашних заданий, а также подготовку к контрольной работе по разделу «Неопределенный интеграл».

### *Контрольные вопросы*

1. Что такое первообразная?
2. Сформулируйте определение неопределенного интеграла и перечислите его свойства.
3. Запишите по памяти таблицу основных интегралов.
4. В чем состоит метод занесения переменной под знак дифференциала?
5. В чем состоит метод замены переменной?
6. В чем состоит метод интегрирования по частям в неопределенном интеграле?
7. Как интегрировать рациональные функции (дроби)?
8. Расскажите основные методы интегрирования тригонометрических функций.
9. Какие есть подходы при интегрировании иррациональных функций?
10. Что означает термин «неберущиеся» интегралы?

### *Рекомендуемая литература по разделу*

В предлагаемой литературе [3, 7, 9] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

## **Раздел 7. Определенный интеграл. Несобственные интегралы**

### *Перечень изучаемых вопросов*

Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Геометрический и физический смысл определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Основные свойства определенного интеграла. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям в определенном интеграле. Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах. Вычисление площадей плоских фигур. Вычисление длин дуг плоских кривых. Вычисление объемов тел. Вычисление площадей поверхностей вращения. Физические приложения определенного интеграла. Несобственный интеграл с бесконечным промежутком интегрирования (несобственный интеграл 1-го рода): определение, признаки сходимости. Несобственный интеграл от разрывной функции (несобственный интеграл 2-го рода): определение, признаки сходимости.

### *Методические указания*

При решении многих задач геометрии, физики и других дисциплин приходится суммировать бесконечно большое число бесконечно малых слагаемых, а затем вычислять предел этой суммы. Это приводит к одному из центральных понятий математического анализа, а именно, к понятию определенного интеграла. Сюда относятся задачи вычисления площадей, ограниченных кривыми,

длин дуг, объемов тел; работы, скорости, пути, массы, моментов инерции и т. д. Все эти задачи решаются по определенной схеме. Пусть требуется найти значение какой-либо геометрической или физической величины  $A$  (из перечисленных выше). Эта величина является непрерывной и аддитивной функцией  $A = f(x)$  переменной  $x \in [a; b]$ . Вид этой функции определяется из условия решаемой задачи. Точками  $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$  разбиваем отрезок  $[a; b]$  на  $n$  частей. При этом интересующая нас величина  $A$  разбивается на  $n$  «элементарных слагаемых»  $\Delta A_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ):  $A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \dots + \Delta A_n$ . Затем каждое «элементарное слагаемое» представляем в виде произведения значения функции  $f(x)$  в произвольной точке соответствующего частичного отрезка на его длину:  $\Delta A_i \approx f(c_i) \cdot \Delta x_i$ . Получаем приближенное значение величины  $A$  в виде суммы:  $A \approx f(c_1) \cdot \Delta x_1 + \dots + f(c_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i$ . Искомая величина  $A$  будет равна пределу этой суммы  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ . Указанный метод основан на представлении искомой величины  $A$  в виде суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых. Если полученный предел существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка  $[a; b]$  на частичные отрезки, ни от выбора точек  $c_i$  в них, то его называют определенным интеграломот функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ , то есть  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$ .

При изучении данного раздела обязательно используются знания, умения и навыки, приобретенные при изучении предыдущих разделов, а именно, неопределенный интеграл, предел и производная функции одной переменной.

Изучение раздела целесообразно начать с разбора задач, приводящих к понятию определенного интеграла. Затем ввести определение определенного интеграла, теорему о существовании определенного интеграла, геометрический и физический смысл определенного интеграла. Доказать формулу Ньютона-Лейбница, она дает удобный способ вычисления определенных интегралов. И рассмотреть основные свойства определенного интеграла. Далее необходимо на практике выработать навык вычисления определенных интегралов, применяя: формулу Ньютона-Лейбница, метод замены переменной в определенном интеграле, метод интегрирования по частям в определенном интеграле. Обратите внимание на интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах. Изучите понятия несобственных интегралов – интеграла с бесконечным промежутком интегрирования от непрерывной функции и интеграла с конечным промежутком интегрирования от функции, имеющей на нем бесконечный разрыв. Решите задачи на геометрические приложения определенного интеграла: вычисление площадей плоских фигур, вычисление объемов тел, вычисление длин дуг, вычисление площадей поверхностей вращения.

Самостоятельная работа студентов при изучении раздела включает: освоение теоретического учебного материала, подготовку к выполнению практических заданий, выполнение домашних заданий, а также выполнение индивиду-

ального расчетного задания по теме «Определенный интеграл. Несобственный интеграл».

### *Контрольные вопросы*

1. Сформулируйте понятие определенного интеграла, как предела интегральной суммы. Что такое интегральная сумма? Сформулируйте условие существования определенного интеграла.
2. В чем состоит геометрический и физический смысл определенного интеграла?
3. Запишите формулу Формула Ньютона–Лейбница.
4. Перечислите основные свойства определенного интеграла.
5. Какими методами можно вычислить определенный интеграл?
6. Как выполнить замену переменной в определенном интеграле?
7. Как выполнить интегрирование по частям в определенном интеграле?
8. Что такое несобственный интеграл первого рода? Дайте геометрическую интерпретацию.
9. Что такое несобственный интеграл второго рода? Дайте геометрическую интерпретацию.
10. Как вычислить площадь плоской фигуры с помощью определенного интеграла (в декартовой системе координат и для случая параметрического задания кривой)?
11. Как вычислить длину дуги кривой (в декартовой системе координат и для случая параметрического задания кривой)?
12. Как вычислить объем тела по известной площади поперечного сечения, объем тела вращения?
13. Как вычисление площадь поверхности вращения?

### *Рекомендуемая литература по разделу*

В предлагаемой литературе [3, 7, 9] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

## **Раздел 8. Дифференциальные уравнения**

### *Перечень изучаемых вопросов*

Дифференциальные уравнения 1-го порядка: понятие, интегральные кривые, общее и частное решения, начальное условие, задача Коши. Условия существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка. Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделя-

ющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Метод Бернулли. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Метод Лагранжа. Дифференциальные уравнения Бернулли. Дифференциальные уравнения высших порядков: основные понятия. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка: основные типы и методы интегрирования. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, метод вариации произвольных постоянных.

### *Методические указания*

Дифференциальное уравнение – это уравнение, связывающее независимую переменную  $x$ , неизвестную функцию  $y$  и ее производные или дифференциалы. Дифференциальные уравнения обычно возникают, когда зависимость между переменными величинами  $x$  и  $y$  непосредственно установить не получается, но возможно найти связь между дифференциалами этих переменных. Например, рассмотрим такую задачу. Найти кривую, проходящую через точку  $M_0(0; 1)$  и обладающую тем свойством, что в каждой её точке угловой коэффициент касательной равен удвоенной абсциссе точки касания. Для решения этой задачи обозначим искомую функцию  $y = f(x)$  и воспользуемся геометрическим смыслом производной, согласно которому производная функции в точке равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в этой точке. Согласно условию задачи можем записать, что  $y' = 2x$ . Мы получили дифференциальное уравнение, где неизвестная функция  $y$  стоит под знаком производной. Чтобы ее выразить надо проинтегрировать это уравнение:  $y = x^2 + C$ , где  $C$  – произвольная постоянная. Получили бесконечное множество решений дифференциального уравнения – множество парабол, полученных параллельным сдвигом параболы  $y = x^2$  вдоль оси  $Ox$  на  $C$  единиц. Все эти параболы удовлетворяют условию задачи: угловой коэффициент касательной равен удвоенной абсциссе точки касания. Выберем одну из них, которая проходит через точку  $M_0(0; 1)$ . Подставляя координаты точки, найдем  $C$ :  $1 = 0^2 + C$ ,  $C = 1$ . Таким образом, искомой кривой будет парабола  $y = x^2 + 1$ .

При рассмотрении данного примера мы сталкивались с основными понятиями теории дифференциальных уравнений: порядок дифференциального уравнения, общее решение, интегральные кривые, начальное условие, частное решение дифференциального уравнения. После изучения этих понятий укажите их по тексту решения этого примера. Рассмотрите основные типы дифференциальных уравнений первого и второго порядка и методы их решения. Выработайте навык их решения на практике.

При изучении данного раздела обязательно используются знания, умения и навыки, приобретенные при изучении предыдущих разделов, а именно, неопределенный интеграл и производная функции одной переменной.

Самостоятельная работа студента при изучении данного раздела включает: освоение теоретического учебного материала, подготовку к выполнению практических заданий, выполнение домашних заданий, а также выполнение индивидуального расчетного задания и контрольной работы по теме «Дифференциальные уравнения».

### *Контрольные вопросы*

1. Сформулируйте понятия: дифференциальное уравнение, порядок дифференциального уравнения.
2. Сформулируйте понятия: дифференциальное уравнение 1-го порядка, общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка, интегральные кривые дифференциального уравнения 1-го порядка, частное решение дифференциального уравнения 1-го порядка, начальное условие 1-го порядка. Сформулируйте задачу существования и единственности задачи Коши.
3. Как записывается и как решается уравнение с разделяющимися переменными?
4. Запишите общий вид однородного дифференциального уравнения первого порядка. Каким методом оно решается?
5. Запишите общий вид линейного дифференциального уравнения первого порядка. В чем состоит Метод Бернулли? Запишите уравнение Бернулли.
6. В чем состоит метод вариации произвольной постоянной для решения линейного дифференциального уравнения первого порядка?
7. Запишите общий вид дифференциального уравнения второго порядка. Сформулируйте понятия общего и частного решений дифференциального уравнения второго порядка.
8. Простейшие дифференциальные уравнения второго порядка (случаи понижения порядка), способы решения.
9. Запишите общий вид линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Расскажите метод решения таких уравнений, запишите формулы для нахождения общего решения.
10. Запишите общий вид линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Запишите формулу его общего решения. Как находить частное решение таких уравнений, если правая часть имеет специальный вид?

11. В чем состоит метод Лагранжа решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами?

*Рекомендуемая литература по разделу*

В предлагаемой литературе [3, 7, 9] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

## **Раздел 9. Кратные и криволинейные интегралы**

### *Перечень изучаемых вопросов*

Задачи, приводящие к двойным интегралам. Двойной интеграл. Геометрический и физический смысл двойного интеграла. Свойства двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла в прямоугольных декартовых координатах. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах. Приложения двойного интеграла. Тройной интеграл. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах. Приложения тройного интеграла. Задачи, приводящие к понятию криволинейного интеграла. Криволинейный интеграл первого рода: определение, основные свойства, способы вычисления, приложения в геометрии и физике. Криволинейный интеграл второго рода: определение, основные свойства, способы вычисления, формула Остроградского-Грина, условие независимости от пути интегрирования, приложения в геометрии и физике.

### *Методические указания*

При изучении физики, механики и при решении разнообразных инженерных задач часто возникает необходимость наряду с интегралами от действительной функции одного переменного рассматривать интегралы от функций многих переменных. Эти интегралы приходится вычислять по двумерным, трехмерным областям, по кривым и поверхностям. Такие интегралы играют важную роль при исследовании скалярных и векторных полей. Примерами векторных полей являются поле скоростей текущей жидкости, поле скоростей точек твердого тела, вращающегося с угловой скоростью или вокруг данной оси, поле электрической или магнитной напряженности и другие.

При изучении данного раздела обязательно используются знания, умения и навыки, приобретенные при изучении предыдущих разделов, а именно, неопределенный интеграл, определенный интеграл, функции нескольких переменных.

Самостоятельная работа студента при изучении данного раздела включает: освоение теоретического учебного материала, подготовку к выполнению практических заданий, выполнение домашних заданий.

### *Контрольные вопросы*

1. Сформулируйте определение двойного интеграла.
2. В чем состоит геометрический смысл двойного интеграла?
3. Как вычислить массу плоской пластинки, используя двойной интеграл?
4. Перечислите основные свойства двойного интеграла.
5. Какими способами вычисляют двойные интегралы?
6. Приведите примеры использования двойного интеграла в задачах геометрии и физики.
7. Сформулируйте определение и основные свойства тройного интеграла.
8. Какими способами вычисляют тройной интеграл?
9. Перечислите основные приложения тройного интеграла.
10. Сформулируйте определение и основные свойства криволинейного интеграла первого рода.
11. Какими способами вычисляют криволинейный интеграл первого рода?
12. Перечислите основные приложения криволинейного интеграла первого рода.
13. Сформулируйте определение и основные свойства криволинейного интеграла второго рода.
14. Какими способами вычисляют криволинейный интеграл второго рода?
15. Запишите и поясните формулу Остроградского-Грина.
16. Сформулируйте условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.
17. Перечислите основные приложения криволинейного интеграла второго рода.

### *Рекомендуемая литература по разделу*

В предлагаемой литературе [3, 7, 9] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

## **Раздел 10. Ряды**

### *Перечень изучаемых вопросов*

Числовой ряд с положительными членами (определение, частичные суммы ряда, сходящиеся и расходящиеся ряды). Свойства сходящихся рядов. Необходимый признак сходимости. Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами: признак сравнения, предельный признак сравнения, признак Даламбера, радикальный признак Коши, интегральный признак Коши. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды: определения; признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда; условная и абсолютная сходимость. Степенные ряды: определение; радиус и интервал сходимости, теорема

Абеля.Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций.Применения степенных рядов в приближенных вычислениях значений функций.Применения степенных рядов в приближенных вычислениях определенных интегралов. Тригонометрический ряд, ряд Фурье.

#### *Методические указания*

При изучении многих вопросов естествознания и техники применяется метод поэтапного исследования объекта, где на каждом этапе исследования уточняются характеристики изучаемого объекта. Одним из математических понятий, при помощи которых моделируются такие ситуации является понятие «суммы» бесконечного числа слагаемых, т. е. ряд. Теория рядов широко используется в теоретических исследованиях различных дисциплин и в приближенных вычислениях. С помощью рядов можно вычислять приближенные значения функций, значения интегралов, решать дифференциальные уравнения и т. д.

При изучении данного раздела используются знания, умения и навыки, приобретенные при изучении предыдущих разделов, а именно, предел и производная функции одной действительной переменной, интегралы.

Ряды с действительными членами можно разделить на две основные группы: числовые ряды и функциональные. Среди числовых рядов выделяют: ряды с положительными членами и знакопеременные ряды. Среди функциональных рядов особый интерес представляют степенные ряды и тригонометрические ряды.

Начать изучение данного раздела следует с числовых рядов. Выясните, что такое числовой ряд, частичные суммы ряда, сходящиеся и расходящиеся ряды, сумма ряда. Изучите свойства сходящихся рядов и необходимое условие сходимости ряда. Затем изучите признаки сходимости рядов с положительными членами (вопросы 3–5). После этого перейдите к изучению знакопеременных рядов, абсолютной и условной сходимости. Изучив числовые ряды, переходите к изучению функциональных рядов, а именно степенных рядов. Особое внимание уделите определению области сходимости степенного ряда и разложению функций в ряды Тейлора и Маклорена. Решите задачи на практическое применение рядов для приближенного вычисления значений функций и вычисления определенных интегралов. Вспомните, что такое периодические функции, какими свойствами они обладают. Повторите определения, свойства и графики функций  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ . Разберитесь, что такое периодический процесс на примере простого и сложного гармонического колебания. Выясните, что такое тригонометрический ряд, ряд Фурье.

Самостоятельная работа студента при изучении данного раздела включает: освоение теоретического учебного материала, подготовку к выполнению практических заданий, выполнение домашних заданий.

#### *Контрольные вопросы*

1. Что такое: числовой ряд, частичные суммы ряда, сходимость ряда?
2. Перечислите основные свойства рядов.
3. Сформулируйте необходимый признак сходимости ряда и следствие из него.
4. Сформулируйте признаки сходимости рядов с положительными членами: признаки сравнения рядов (назовите эталонные ряды), признак Даламбера, радикальный и интегральный признаки Коши.
5. Что такое знакочередующиеся и знакопеременные ряды? Сформулируйте признак Лейбница. Что такое абсолютная и условная сходимость?
6. Сформулируйте основные понятия для функциональных рядов (определение, точка сходимости, область сходимости, сумма, остаток).
7. Что такое степенной ряд? Сформулируйте теорему Абеля. Как определить интервал сходимости степенного ряда? Перечислите основные свойства степенных рядов.
8. Запишите общий вид ряда Тейлора и ряда Маклорена.
9. Запишите разложение в ряд Маклорена основных элементарных функций.
10. Что такое тригонометрический ряд?
11. Запишите формулы для коэффициентов Фурье. Что такое ряд Фурье?
12. Запишите условия разложения в ряд Фурье  $2\pi$ -периодических функций.

*Рекомендуемая литература по разделу*

В предлагаемой литературе [3, 7, 9] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

## **Раздел 11. Теория вероятностей**

### **Тема 11.1 Основные понятия теории вероятностей**

#### *Перечень изучаемых вопросов*

Случайные события, их классификация. Действия над событиями. Алгебра событий. Совместные и несовместные, зависимые и независимые события. Полная группа событий. Вероятностное пространство. Опыт с конечным числом исходов. Классическое определение вероятности. Непосредственный подсчет вероятностей. Элементы комбинаторики. Схема выбора с возвращением и без возвращения элементов. Частота, статистическое определение вероятности. Геометрическое определение вероятности. Аксиоматическое определение вероятности.

## *Методические указания*

Теория вероятностей – раздел математики, в котором изучают математические модели случайных экспериментов (испытаний, опытов, наблюдений и т.д.). Эксперимент считается случайным, если он может закончиться любым из совокупности известных исходов. При этом предполагается, что эксперимент может быть повторен любое число раз при неизменном комплексе условий, а исходы эксперимента обладают статистической устойчивостью. Любой исход опыта, который может произойти или не произойти называют случайным событием. Итак, основополагающим понятием теории вероятностей является понятие случного события. Дайте определения элементарному событию (исходу), достоверному и невозможному событию, множеству (пространству) элементарных исходов. Обратите внимание, что любое случайное событие есть подмножество множества элементарных исходов. Рассмотрите понятие совместных и несовместных событий. Для каждого понятия приведите примеры. Рассмотрите действия над событиями (сумму, произведение, разность событий; противоположное событие). События и действия над ними удобно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Для математического изучения случного события необходимо ввести его количественную оценку – вероятность события, то есть число, выражающее степень возможности его появления в рассматриваемом эксперименте. Существует несколько определений вероятности, которые дополняют и обобщают друг друга. Подробно изучите классическое определение вероятности, статистическое определение вероятности, геометрическое определение вероятности, аксиоматическое определение вероятности. Особое внимание уделите свойствам вероятности.

При решении ряда задач на нахождение вероятности события необходимо подсчитывать число исходов эксперимента и число исходов, благоприятствующих этому событию. Обычно это делают комбинаторными методами. Изучите основные правила комбинаторики - правило суммы и умножения, подсчет числа размещений, сочетаний, перестановок. Каждое понятие закрепите решением задачи.

Самостоятельная работа студента при изучении данного раздела включает: освоение теоретического учебного материала, подготовку к выполнению практических заданий, выполнение домашних заданий.

## *Контрольные вопросы*

1. Что называют суммой случайных событий? Произведением случайных событий?
2. Как интерпретировать дополнение случайного события до  $\Omega$ ?
3. Проиллюстрируйте с помощью кругов Эйлера совместные и несовместные события.

6. Сформулируйте классическое, статистическое, геометрическое, аксиоматическое определения вероятности.

7. В чем отличия классической и геометрической вероятностей? Какие меры множеств используются для вычисления геометрической вероятности?

8. Какие комбинаторные методы вам известны? Какие задачи решаются комбинаторными методами?

9. Запишите формулы для нахождения числа размещений, сочетаний, перестановок (без повторений и с повторениями).

*Рекомендуемая литература по теме*

[2] гл. 1, [19] гл. 1, 2.

## **Тема 11.2 Основные теоремы**

### *Перечень изучаемых вопросов*

Теоремы сложения вероятностей. Теоремы умножения вероятностей: условная вероятность, произвольные события, независимые события. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Независимые испытания, схема Бернулли. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли. Локальная и интегральная предельные теоремы. Теорема Пуассона.

### *Методические указания*

После изучения базовых понятий можно переходить к изучению основных теорем теории вероятностей. Сформулируйте и докажите теоремы сложения вероятностей для случаев несовместных и совместных событий. Дайте определение условной вероятности события, приведите примеры. Сформулируйте теорему умножения вероятностей произвольных событий. Дайте определение зависимым и независимым событиям. Как формулируется теорема о произведении вероятностей для независимых событий? Уделите достаточно времени для разбора формулы полной вероятности и связанной с ней формулой Байеса. В продолжение темы разберите доказательства и примеры применения схемы Бернулли, локальной и интегральной предельных теорем Муавра-Лапласа, теоремы Пуассона. Особое внимание уделите решению типовых задач.

Самостоятельная работа студента при изучении данного раздела включает: освоение теоретического учебного материала, подготовку к выполнению практических заданий, выполнение домашних заданий.

### *Контрольные вопросы*

1. Сформулируйте понятия совместных и несовместных событий, приведите примеры.

2. Сформулируйте понятия зависимых и независимых событий, приведите примеры.

3. Дайте формулировки всех обозначенных в теме 11.2 теорем.

4. Чему равна сумма попарно несовместных событий?

5. Чему равна сумма попарно несовместных событий, образующих полную группу?

6. Что значит независимые испытания? Приведите примеры.

7. В чем состоит схема Бернулли. Запишите формулу Бернулли.

8. Сформулируйте предельные теоремы в схеме Бернулли.

*Рекомендуемая литература по теме*

[2] гл. 1–5, [19] гл. 3.

### **Тема 11.3 Случайные величины**

#### *Перечень изучаемых вопросов*

Понятие случайной величины. Функция распределения случайной величины и ее свойства. Дискретные и непрерывные случайные величины. Плотность распределения непрерывной случайной величины и ее свойства. Биномиальное распределение. Распределение Пуассона. Геометрическое распределение. Равномерное распределение. Экспоненциальное распределение. Нормальное распределение. Распределение Вейбулла. Гамма-распределение. Распределение хи-квадрат. Числовые характеристики случайных величин и их свойства: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, moda, медиана, начальные и центральные моменты высших порядков. Понятие многомерной случайной величины. Совместная функция распределения. Независимые случайные величины. Многомерное нормальное распределение. Функции случайных величин.

#### *Методические указания*

Данная тема является достаточно объемной и потребует большой самостоятельной работы. Традиционно начать следует с изучения основных определений и понятий. Четко уясните понятия функции распределения. Известная функция распределения позволяет получить любую информацию о случайной величине, поэтому все усилия математической статистики, о которой пойдет речь дальше, связаны нахождением именно функции распределения или хотя бы установлением отдельных ее свойств. Случайные величины делятся на дискретные и непрерывные. Для дискретной случайной величины рассмотрите понятие закона распределения, как соответствие значения случайной величины вероятности появления этого значения. Для непрерывной – плотность распределения. Рассмотрите свойства биномиального распределения, распределения

Пуассона, геометрического распределения, равномерного распределения, экспоненциального распределения, нормального распределения, распределения Вейбулла, гамма-распределение и распределение хи-квадрат. Особое внимание уделите нормальному распределению. Уяснив понятие функции распределения перейдите к изучению числовых характеристик случайных величин. Целесообразно расчетные формулы характеристик изучать параллельно для дискретных и непрерывных случайных величин. Обратите внимание, что зачастую параметрами распределений являются именно значения числовых характеристик. Вам нужно знать следующие числовые характеристики и их свойства: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, мода, медиана. Рассмотрите обобщение числовых характеристик – центральные и начальные моменты высших порядков. До сих пор мы имели дело с одномерной случайной величиной, но зачастую на практике случайные величины многомерны. Далее переходим к обобщению – многомерным случайным величинам. Дайте определение многомерной случайной величины и совместной функции распределения. Отдельно изучите многомерное нормальное распределение. На практике придется столкнуться с понятием функция случайной величины, т.е. когда некоторая числовая величина является функцией от одной или нескольких случайных величин. В общем случае данная величина также является случайной, причем закон распределения этой новой случайной величины зависит как от законов распределения аргументов, так и от свойств самой функции. Рассмотрите задачи нахождения распределения такой величины, а также их числовых характеристик [3, разд. 6.7].

### *Контрольные вопросы*

1. Дайте определение случайной величине. Как связаны случайные величины и случайные события?
2. Докажите свойства функции распределения.
3. Как по известной функции распределения найти вероятность попадания случайной величины в интервал?
4. Как зная плотность распределения найти вероятность попадания случайной величины в интервал?
5. Приведите примеры дискретных случайных величин.
6. Перечислите и докажите свойства плотности распределения.
7. Как по известной плотности распределения найти функцию распределения?
8. Дайте характеристику равномерному закону распределения (плотность распределения, функция распределения, основные числовые характеристики).
9. Дайте характеристикуциальному закону распределения (плотность распределения, функция распределения, основные числовые характеристики).

10. Что такое функция Лапласа? Как по таблице значений функции Лапласа узнать вероятность попадания нормальной случайно величины в заданный интервал?

11. Дайте определение  $n$ -мерной случайной величине.

12. Дайте определение совместной функции распределения.

13. Что такое функция случайной величины?

*Рекомендуемая литература по теме*

[2] гл. 6–8, [19] гл. 4–8.

## **Тема 11.4 Предельные теоремы**

*Перечень изучаемых вопросов*

Последовательности случайных величин. Сходимость последовательности. Сходимость по вероятности. Сходимость функций распределения. Неравенства Чебышёва. Закон больших чисел в форме Чебышёва, в форме Бернулли. Центральная предельная теорема.

*Методические указания*

Завершая изучение теории вероятностей, мы обратимся к важной группе теорем, называемым предельными. Эти теоремы являются своеобразным мостом между теорией вероятностей и математической статистикой, объясняя предельное поведение относительной частоты событий. Дайте определение последовательности случайных величин и рассмотрите основные типы сходимости. Рассмотрите примеры. Далее переходите к изучению закона больших чисел. Предварительно рассмотрите с доказательством первое и второе неравенства Чебышёва. Дайте определение закону больших чисел, как критерия устойчивости средних арифметических случайных величин. Уясните его практический смысл, заключающийся в том, что при предельном росте числа испытаний средние арифметические случайных величин ведут себя как неслучайные и совпадают со своими средними значениями. Сформулируйте теоремы: закон больших чисел в форме Чебышёва и закон больших чисел в форме Бернулли. Переходите к формулированию центральной предельной теоремы. Эта теорема играет важную практическую роль, обосновывая использование нормального закона распределения для моделирования различного вида шумов и погрешностей, как суммарного результата воздействия большого количества случайных факторов. В завершении сформулируйте интегральную теорему Муавра–Лапласа.

*Контрольные вопросы*

1. Дайте определение основным типам сходимости. В чем их отличие?

2. Сформулируйте первое и второе неравенства Чебышёва. Приведите примеры.

3. Сформулируйте закон больших чисел в форме Чебышёва и закон больших чисел в форме Бернулли.

4. Сформулируйте центральную предельную теорему.

*Рекомендуемая литература по теме*

[19] гл. 9.

## **Раздел 12. Математическая статистика**

### **Тема 12.1 Основные понятия математической статистики**

*Перечень изучаемых вопросов*

Предмет математической статистики. Генеральная и выборочная совокупности. Выборка, объем выборки. Вариационный ряд, частоты, относительные частоты, статистический ряд. Эмпирическая функция распределения. Графическое изображение статистического распределения. Числовые характеристики статистического распределения: выборочная средняя, выборочная дисперсия, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленная выборочная дисперсия, мода и медиана вариационного ряда.

*Методические указания*

Математическая статистика – это раздел математики, который изучает методы сбора систематизации и обработки статистических данных для получения научно обоснованных выводов и принятия решений. Математическая статистика тесно связана с теорией вероятностей. Связующим звеном между ними являются предельные теоремы теории вероятностей. Математическая статистика изучает случайные величины по результатам наблюдений, по выборке. То есть сведения об изучаемом признаке всей совокупности объектов получают из обширной части должным образом отобранных из общей совокупности объектов. Изучите основные понятия математической статистики, перечисленные выше. Уделите время решению типовых задач.

*Контрольные вопросы*

1. Что изучает математическая статистика и как она связана с теорией вероятностей?

2. Что такое генеральная и выборочная совокупность?

3. Приведите примеры практических проблем, приводящих к статистическим задачам.

4. В чем отличие вариационного ряда от статистического?

5. Дайте определение эмпирической функции распределения.

6. Как можно графически изобразить статистическое распределение?
7. Перечислите основные числовые характеристики статистического распределения, запишите формулы их нахождения.

*Рекомендуемая литература по теме*

[2] гл. 15, [17] гл. 1.

## **Тема 12.2 Статистическое оценивание параметров распределения**

### *Перечень изучаемых вопросов*

Понятие оценки неизвестных параметров распределения. Свойства оценок: несмешенность, состоятельность, эффективность. Точечные оценки математического ожидания и дисперсии. Понятие интервального оценивания параметров. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения.

### *Методические указания*

Переходя к изучению данной темы, следует вспомнить такие понятия теории вероятностей как функция распределение и числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсия, мода, медиана. Далее дайте определение точечной оценке параметров распределения. Под оценкой следует понимать некоторую функцию от значений выборки, которая в некотором смысле приближает реальное значение параметра генеральной совокупности. Следует уяснить, что любая оценка, будучи функцией от случайной выборки есть случайная величина, поэтому, как и любая случайная величина, оценка имеет свой закон распределения и соответствующие числовые характеристики. Рассмотрите основные свойства точечных оценок: несмешенность, состоятельность, эффективность. Покажите, что выборочное среднее является несмешенной и состоятельной оценкой математического ожидания. Покажите, что исправленная выборочная дисперсия – несмешенная состоятельная оценка генеральной дисперсии. Далее рассмотрим интервальное оценивание параметров распределения. В отличие от точечного значения, интервальная оценка дает вероятностную оценку точности оценивания неизвестного параметра. То есть получаемая оценка представляет собой не конкретное (случайное) значение, а интервал, в который оцениваемый параметр попадает с заданной вероятностью. Дайте определение доверительному интервалу и надежности оценки. Постройте доверительные интервалы для параметров нормального распределения: доверительный интервал для математического ожидания при известной и неизвестной дисперсии, доверительный интервал для среднего квадратического отклонения. Уделите внимание решению типовых задач.

### *Контрольные вопросы*

1. Что называют статистической оценкой неизвестного параметра распре-

деления?

2. Какую оценку называют несмещенной, состоятельной, эффективной?
3. В чем отличие точечной и интервальной оценки?
4. Что является точечными оценками математического ожидания и дисперсии?
5. Какую статистику используют для построения интервальной оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестной дисперсии?

*Рекомендуемая литература по теме*

[2] гл. 16, [17] гл. 2-3.

### **Тема 12.3 Проверка статистических гипотез**

*Перечень изучаемых вопросов*

Понятие статистической гипотезы, виды гипотез. Статистический критерий. Ошибки первого и второго рода, уровень значимости критерия, мощность критерия. Методика проверки гипотез. Проверка гипотез о законе распределения, критерий Пирсона.

*Методические указания*

Предположим, что на основе некоторой априорной информации известно значение параметра распределения, или вид распределения наблюдаемых данных. На основе этой информации формируется гипотеза о том, что это значение совпадает с теоретическим. Такие гипотезы называются статистическими, а соответствующие методы проверки статистических гипотез позволяют определить, можно ли доверять полученным данным и следует ли принять выдвинутую гипотезу. Общая схема проверки гипотез заключается в построении некоторой функции – статистического критерия, распределение которой известно для случая, когда гипотеза верна. Тогда можно определить некоторое множество значений (критическую область) данного критерия, вероятность появления которого в случае, если гипотеза верна маловероятно и считать, что если значение критерия попадает в это множество, то гипотезу следует отвергнуть, а в противном случае принять.

*Контрольные вопросы*

1. В чем заключаются задачи статистической проверки гипотез?
2. Что понимают под статистической гипотезой?
3. Приведите примеры простых и сложных гипотез.
4. В чем состоят ошибки 1 и 2-го рода при проверке гипотез?
5. Что называют уровнем значимости критерия?

6. Что называют мощностью критерия?
5. Какие критерии называют критериями согласия?
6. В чем заключается критерий Пирсона проверки гипотезы о законе распределения?

*Рекомендуемая литература по теме*

[2] гл. 19, [17] гл. 4-5.

## **Тема 12.4 Факторный и корреляционный анализ**

*Перечень изучаемых вопросов*

Задачи корреляционного, регрессионного и дисперсионного анализа. Выборочный коэффициент корреляции, уравнение регрессии, однофакторный анализ.

*Методические указания*

Установление зависимостей между наблюдаемыми данными является важной частью науки и инженерной практики. Выделим основные задачи данного раздела: выявление наличия взаимосвязей между отдельными группами переменных (корреляционный анализ), установление аналитической зависимости вида  $Y=F(X)$ , когда переменные носят количественный характер (регрессионный анализ), анализ влияния некоторых качественных параметров  $X$  на некоторую величину  $Y$  (дисперсионный анализ). Вспомните определение понятия ковариация и корреляция, понятие зависимых и независимых случайных величин. Далее рассмотрите понятие корреляционного поля и корреляционной таблицы, дайте точечную и интервальную оценку коэффициента корреляции. Рассмотрите примеры данных, имеющих разные значения коэффициентов корреляции и интерпретацию результатов. Далее переходите к следующей задаче исследования зависимостей. Функцию описывающую зависимость условного среднего значения выходной переменной  $Y$  от заданных фиксированных значений входных переменных  $X$  называют функцией регрессии. Установление реального вида данной функции не всегда возможно, поэтому, как правило ограничиваются некоторым приближением, например, линейным. Изучите уравнение линейной регрессии. Рассмотрите метод наименьших квадратов как способ получения коэффициентов уравнения по имеющимся экспериментальным данным. Обзорно рассмотрите задачу проверки адекватности модели регрессии, значимости ее коэффициентов.

*Контрольные вопросы*

1. Перечислите задачи изучения статистических зависимостей.
2. Что такое парная регрессия?
3. Чем объясняется наличие в модели случайной ошибки  $\varepsilon$ ?

4. В чем заключается суть метода наименьших квадратов оценки параметров выборочного уравнения регрессии?
5. Как проверить тесноту линейной связи для уравнения регрессии с помощью выборочного коэффициента корреляции?
6. Что называют коэффициентом детерминации?
7. Оценка значимости уравнения регрессии в целом на основании F-критерия Фишера.
8. Оценка значимости параметров линейной регрессии и коэффициента корреляции с помощью t-критерия Стьюдента.

*Рекомендуемая литература по теме*

[2] гл. 20, [17] гл. 6–8.

### **3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ**

Подготовка к практическим занятиям по дисциплине «Высшая математика» включает в себя следующие этапы:

1. Предварительное изучение теоретического материала, который можно получить из различных источников: лекционных конспектов, учебников, учебно-методических пособий и справочников. Это позволяет сформировать прочную базу знаний для дальнейшей работы.
2. Проработка решений типовых задач, представленных в учебных материалах и методических пособиях. Такой подход помогает закрепить теоретические знания на практике и развить навыки решения стандартных задач.
3. Выполнение самостоятельных заданий, предложенных преподавателем по теме предыдущих занятий. Это способствует углублению понимания материала и развитию аналитического мышления.
4. Самопроверка уровня усвоения теории с помощью вопросов для самоконтроля, которые содержатся в методических указаниях к лекционным занятиям. Регулярная проверка помогает выявить пробелы в знаниях и своевременно их устранить.
5. Активное участие в обсуждениях и консультациях с преподавателем и однокурсниками, что способствует более глубокому пониманию сложных вопросов и развитию коммуникативных навыков.

Предусмотрено следующее планирование объема учебной работы на практических занятиях (таблица 2).

Таблица 2 –Тематический план практических занятий

| <b>№<br/>п/п</b> | <b>Раздел<br/>дисциплины</b> | <b>Темы практических занятий</b>   | <b>Объем<br/>аудитор-<br/>ной рабо-<br/>ты, ч</b> |
|------------------|------------------------------|--|---|
|                  |                              | <b>1 семестр</b>   |   |
| 1                | Элементы линейной алгебры    | <p><b>Практическое занятие 1.</b> Действия над матрицами: сложение матриц, умножение матрицы на число, умножение матриц</p> <p><b>Практическое занятие 2.</b> Вычисление определителей 2, 3, 4-го порядков. Вычисление миноров и алгебраических дополнений элементов определителя. Нахождение единственного решения системы n линейных уравнений с n неизвестными по формулам Крамера</p>  | 2   |
|                  |                              | <p><b>Практическое занятие 3.</b> Нахождение обратной матрицы. Решение матричных уравнений. Нахождение единственного решения системы n линейных уравнений с n неизвестными матричным методом</p> <p><b>Практическое занятие 4.</b> Решение систем линейных уравнений с n неизвестными методом Гаусса. Однородные системы уравнений, фундаментальные решения</p> <p><b>Практическое занятие 5.</b> Понятие линейного векторного пространства. Вектор в n-мерном пространстве. Линейная зависимость и независимость векторов. Размерность, базис векторного пространства</p> <p><b>Практическое занятие 6.</b> Нахождение собственных векторов и собственных чисел линейного оператора.<br/><b>Контрольная работа по разделу 1</b></p> | 2   |
| 2                | Аналитическая геометрия      | <p><b>Практическое занятие 7.</b> Решение задач по теме векторы (координаты вектора, модуль вектора, орт вектора, проекция вектора на ось, направляющие косинусы, действия над векторами). Решение задач на скалярное произведение векторов и его приложения</p> <p><b>Практическое занятие 8.</b> Решение задач на векторное произведение векторов и его приложения. Решение задач на смешанное произведение векторов и его приложения</p> <p><b>Практическое занятие 9.</b> Решение задач на составление уравнений прямой на плоскости. Определение взаимного расположения прямых на плоскости, нахождение угла между прямыми, расстояния от точки до прямой. Деление отрезка в заданном отношении</p>                             | 2   |

| <b>№<br/>п/п</b> | <b>Раздел<br/>дисциплины</b>  | <b>Темы практических занятий</b>   | <b>Объем<br/>аудитор-<br/>ной рабо-<br/>ты, ч</b> |
|------------------|---|--|---|
|                  |   | <b>Практическое занятие 10.</b> Решение задач на составление уравнений линий второго порядка (окружности, эллипса, гиперболы, параболы) по исходным данным. Определение по общему уравнению второго порядка вид линии. Определение по уравнению окружности, эллипса, гиперболы, параболы основных элементов  | 2   |
|                  |   | <b>Практическое занятие 11.</b> Решение основных задач на тему «Плоскость». Решение основных задач на тему «Прямая в пространстве»   | 2   |
|                  |   | <b>Практическое занятие 12.</b> Прямая и плоскость в пространстве (основные задачи).<br><b>Контрольная работа по разделу 2</b>   | 1<br>1  |
| 3                | Введение в математический анализ                                    | <b>Практическое занятие 13.</b> Действия над комплексными числами, записанными в алгебраической, тригонометрической, показательной форме. Переход от одной формы записи к другой. Вычисление степеней мнимой единицы. Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом на множестве комплексных чисел. Геометрическое изображение комплексных чисел | 2   |
|                  |   | <b>Практическое занятие 14.</b> Вычисление пределов числовых последовательностей.  | 2   |
|                  |   | <b>Практическое занятие 15.</b> Вычисление пределов функций. Раскрытие основных неопределенностей  | 2   |
|                  |   | <b>Практическое занятие 16.</b> Вычисление пределов функций. Замечательные пределы. Применение эквивалентных бесконечно малых  | 4   |
| 4                | Дифференциальное исчисление функций одной действительной переменной | <b>Практическое занятие 17.</b> Вычисление производной сложной функции   | 2   |
|                  |   | <b>Практическое занятие 18.</b> Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков  | 2   |
|                  |   | <b>Практическое занятие 19.</b> Вычисление производных. Вычисление дифференциалов. Применение дифференциала к приближенным вычислениям. Дифференциалы высших порядков. Правила Лопиталя  | 2   |
|                  |   | <b>Практическое занятие 20.</b> Исследование функции при помощи производной и построение графика.<br><b>Контрольная работа по разделам 3, 4</b>  | 1<br>1  |

| <b>№<br/>п/п</b> | <b>Раздел<br/>дисциплины</b>   | <b>Темы практических занятий</b>   | <b>Объем<br/>аудитор-<br/>ной рабо-<br/>ты, ч</b> |
|------------------|--|--|---|
| 5                | Дифференциальное исчисление функций нескольких действительных переменных | <b>Практическое занятие 21.</b> Вычисление частных производных<br><br><b>Практическое занятие 22.</b> Вычисление полного дифференциала, применение к приближенным вычислениям. Дифференцирование сложной и неявной функции | 2<br>2  |
|                  |  | <b>Практическое занятие 23.</b> Нахождение производной по направлению, градиента, экстремум функции нескольких переменных  | 2   |
|                  |  | <b>Практическое занятие 24.</b> Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области   | 2   |
|                  |  | <b>Итого за 1 семестр</b>  | <b>48</b>   |
|                  |  | <b>2 семестр</b>   |   |
| 6                | Неопределенный интеграл  | <b>Практическое занятие 1.</b> Непосредственное интегрирование. Метод подведения переменной под знак дифференциала   | 2   |
|                  |  |  |   |
|                  |  | <b>Практическое занятие 2.</b> Метод замены переменной, метод интегрирования по частям   | 2   |
|                  |  | <b>Практическое занятие 3.</b> Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен. Интегрирование рациональных функций   | 2   |
|                  |  | <b>Практическое занятие 4.</b> Интегрирование рациональных функций   | 2   |
|                  |  | <b>Практическое занятие 5.</b> Интегрирование тригонометрических функций. Интегрирование иррациональных функций  | 2   |
| 7                | Определенный интеграл. Несобственные интегралы                           | <b>Практическое занятие 6.</b> Вычисление определенного интеграла  | 2   |
|                  |  | <b>Практическое занятие 7.</b> Решение задач на геометрические и физические приложения определенного интеграла   | 2   |
|                  |  | <b>Практическое занятие 8.</b> Несобственные интегралы 1 и 2-го рода   | 2   |
|                  |  | <b>Практическое занятие 9.</b> Вычисление интегралов.<br>Контрольная работа по разделам 6, 7   | 1<br>1  |
| 8                | Дифференциальные уравнения   | <b>Практическое занятие 10.</b> Решение уравнений с разделяющимися переменными, однородных дифференциальных уравнений  | 2   |
|                  |  | <b>Практическое занятие 11.</b> Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка, уравнений Бернулли  | 2   |

| <b>№<br/>п/п</b> | <b>Раздел<br/>дисциплины</b>      | <b>Темы практических занятий</b>  | <b>Объем<br/>аудитор-<br/>ной рабо-<br/>ты, ч</b> |
|------------------|-----------------------------------|---|---|
|                  |                                   | <b>Практическое занятие 12.</b> Решение неполных дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами | 2   |
|                  |                                   | <b>Практическое занятие 13.</b> Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида   | 2   |
|                  |                                   | <b>Практическое занятие 14.</b> Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами методом вариации произвольных постоянных  | 2   |
|                  |                                   | <b>Практическое занятие 15.</b> Решение дифференциальных уравнений.<br><b>Контрольная работа по разделу 8</b>   | 1   |
| 9                | Кратные и криволинейные интегралы | <b>Практическое занятие 16.</b> Двойной интеграл  | 2   |
|                  |                                   | <b>Практическое занятие 17.</b> Тройной интеграл  | 2   |
|                  |                                   | <b>Практическое занятие 18.</b> Криволинейный интеграл первого рода   | 2   |
|                  |                                   | <b>Практическое занятие 19.</b> Криволинейный интеграл второго рода   | 2   |
| 10               | Ряды                              | <b>Практическое занятие 20.</b> Сходимость числовых рядов с положительными членами  | 2   |
|                  |                                   | <b>Практическое занятие 21.</b> Знакочередующиеся ряды, абсолютная и условная сходимость  | 2   |
|                  |                                   | <b>Практическое занятие 22.</b> Степенные ряды, область сходимости степенного ряда  | 2   |
|                  |                                   | <b>Практическое занятие 23.</b> Разложение функций в степенные ряды (ряды Тейлора и Маклорена). Приложения степенных рядов  | 2   |
|                  |                                   | <b>Практическое занятие 24.</b> Тригонометрический ряд, ряд Фурье   | 2   |
|                  |                                   | <b>Итого за 2 семестр</b>   | <b>48</b>   |
|                  |                                   | <b>3 семестр</b>  |   |
| 11               | Теория вероятностей               | <b>Практическое занятие 1.</b> Действия над событиями. Классическое, статистическое, геометрическое определение вероятности   | 2   |
|                  |                                   | <b>Практическое занятие 2.</b> Элементы комбинаторики. Вычисление вероятностей  | 2   |
|                  |                                   | <b>Практическое занятие 3.</b> Теоремы сложения и умножения вероятностей  | 2   |

| <b>№<br/>п/п</b> | <b>Раздел<br/>дисциплины</b> | <b>Темы практических занятий</b>  | <b>Объем<br/>аудитор-<br/>ной рабо-<br/>ты, ч</b> |
|------------------|------------------------------|---|---|
|                  |                              | <b>Практическое занятие 4.</b> Формула полной вероятности. Формулы Байеса   | 2   |
|                  |                              | <b>Практическое занятие 5.</b> Схема Бернулли. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли   | 2   |
|                  |                              | <b>Практическое занятие 6.</b> Предельные теоремы с схеме Бернулли (теорема Пуассона, локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа)  | 2   |
|                  |                              | <b>Практическое занятие 7.</b> Решение задач  | 1   |
|                  |                              | <b>Контрольная работапо теме «Случайные события»</b>  | 1   |
|                  |                              | <b>Практическое занятие 8.</b> Дискретные случайные величины  | 2   |
|                  |                              | <b>Практическое занятие 9.</b> Непрерывные случайные величины   | 2   |
|                  |                              | <b>Практическое занятие 10.</b> Законы распределения случайных величин  | 2   |
|                  |                              | <b>Практическое занятие 11.</b> Решение задач   | 2   |
|                  |                              | <b>Практическое занятие 12.</b> Система случайных величин   | 2   |
|                  |                              | <b>Практическое занятие 13.</b> Система случайных величин   | 2   |
|                  |                              | <b>Практическое занятие 14.</b> Функции случайных величин   | 2   |
|                  |                              | <b>Практическое занятие 15.</b> Закон больших чисел. Предельная теорема   | 2   |
|                  |                              | <b>Практическое занятие 16.</b> Контрольная работапо теме «Случайные величины»  | 2   |
| 12               | Математическая статистика    | <b>Практическое занятие 17.</b> Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма.Числовые характеристики статистического распределения | 2   |
|                  |                              | <b>Практическое занятие 18.</b> Точечные оценки параметров распределения  | 2   |
|                  |                              | <b>Практическое занятие 19.</b> Интервальные оценки параметров нормального распределения  | 2   |
|                  |                              | <b>Практическое занятие 20.</b> Проверка статистических гипотез   | 2   |
|                  |                              | <b>Практическое занятие 21.</b> Проверка гипотез о законе распределения   | 2   |

| <b>№<br/>п/п</b> | <b>Раздел<br/>дисциплины</b> | <b>Темы практических занятий</b>                               | <b>Объем<br/>аудитор-<br/>ной рабо-<br/>ты, ч</b> |
|------------------|------------------------------|--|---|
|                  |                              | <b>Практическое занятие 22.</b> Парная регрессия и корреляция. | 2   |
|                  |                              | <b>Практическое занятие 23.</b> Парная регрессия и корреляция  | 2   |
|                  |                              | <b>Практическое занятие 24.</b> Решение задач                  | 2   |
|                  |                              | <b>Итого за 3 семестр</b>                                      | <b>48</b>   |

### **Типовые задания для практических занятий по дисциплине**

Типовые задания по разделу 1 «Элементы линейной алгебры»

Из [15] № 1205, 1207, 1208, 1211, 1215, 1217, 1219, 1223, 1227, 1231, 1236, 1238, 1239, 1241, 1244, 1245, 1246, 1247, 1250, 1251, 1252, 1254, 1256.

Методические указания по выполнению и содержанию практических занятий по разделу «Элементы линейной алгебры» приведены в учебно-методическом пособии [23].

Типовые задания по разделу 2 «Аналитическая геометрия»

Тема 1 «Векторная алгебра»: из [15] № 761, 762, 766, 769, 776, 777, 778, 781, 782, 787, 788, 793, 795, 796, 800, 803, 805, 812, 815, 817, 818, 819, 820, 823, 828, 834, 843, 851, 853, 858, 862, 874, 875, 876, 878.

Тема 2 «Аналитическая геометрия на плоскости»: из [15] № 214, 215, 216, 219, 223, 226, 227, 230, 253, 260, 264, 266, 271, 302, 304, 322, 323, 331, 385, 387, 389, 444, 445, 447, 449, 465, 515, 516, 518, 519, 532, 583, 585, 587, 589, 603.

Тема 3 «Аналитическая геометрия в пространстве»: из [15] № 916, 919, 921, 926, 927, 928, 932, 940, 941, 942, 946, 947, 952, 960, 964 (1, 2, 3), 965, 971, 1009, 1012, 1015, 1019 (1, 2), 1023, 1025, 1032, 1035, 1040 (1, 2), 1042, 1043, 1052, 1063, 1075, 1083 (1).

Подробные указания по выполнению и содержанию практических занятий по разделам «Аналитическая геометрия» приведены в учебно-методическом пособии [23].

Типовые задания по разделу 3 «Введение в математический анализ»

Из [14] № 168, 171, 172, 173, 175, 177, 181, 182, 184, 188, 191, 192, 194, 195, 197, 198, 200, 201, 204, 207, 208, 211, 213, 218, 219, 221, 231, 235, 241, 245, 246, 248, 249, 252, 256, 296, 298, 317, 318, 320, 327.

Типовые задания по разделу 4 «Дифференциальное исчисление функций одной действительной переменной»

Из [14] № 368, 372, 374, 376, 377, 381, 384, 385, 387, 388, 392, 396, 399, 400, 411, 413, 415, 417, 423, 426, 428, 430, 432, 433, 439, 442, 445, 447, 450, 459, 473, 489, 567, 570, 572, 575, 579, 582, 583, 586, 589, 601, 602, 604, 613, 631, 635, 636, 667, 669, 671, 693, 694, 705, 706, 720, 723, 726, 733, 737, 743, 748, 752, 777, 780, 788, 795, 798, 916, 917, 926, 929, 946, 951.

Типовые задания по разделу 5 «Дифференциальное исчисление функций нескольких действительных переменных»

Из [14] № 1794 (а, б), 1797 (б, в), 1801, 1803, 1804, 1807, 1808, 1812, 1813, 1822, 1833, 1834, 1836, 1838, 1856, 1860, 1861, 1876, 1877, 1882, 1884, 1885, 1892, 1893, 1901, 1916, 1917, 1981, 2008, 2010, 2030.

Типовые задания по разделу 6 «Неопределенный интеграл»

Из [14] № 1031, 1033, 1043, 1045, 1046, 1050, 1051, 1058, 1064, 1066, 1072, 1074, 1078, 1083, 1085, 1088, 1093, 1095, 1097, 1119, 1125, 1129, 1145, 1148, 1152, 1154, 1157, 1192, 1193, 1195, 1201, 1202, 1211, 1213, 1215, 1216, 1223, 1227, 1232, 1234, 1255, 1257, 1259, 1262, 1265, 1272, 1280, 1283, 1284, 1286, 1294, 1315, 1318, 1319, 1321, 1338, 1339, 1343, 1365, 1367, 1372, 1373, 1375, 1376.

Типовые задания по разделу 7 «Определенный интеграл. Несобственные интегралы»

Из [14] № 1514, 1516, 1521, 1522, 1524, 1526, 1529, 1530, 1538, 1539, 1542, 1546, 1547, 1552, 1555, 1556, 1571, 1572, 1582, 1584, 1588, 1589, 1599, 1601, 1603, 1623, 1624, 1633, 1634, 1667, 1678, 1691, 1736.

Типовые задания по разделу 8 «Дифференциальные уравнения»

Из [14] № 2742, 2743, 2748, 2749, 2768, 2769, 2772, 2773, 2785, 2786, 2789, 2790, 2792, 2876, 2911, 2914, 2936, 2976, 2977, 2981, 2982, 2987, 2988, 2990, 2991, 2993, 2996, 2997, 2999, 3001, 3011, 3012, 3020, 3021, 3032, 3037.

Типовые задания по разделу 9 «Кратные и криволинейные интегралы»

Из [14] № 2113, 2114, 2117, 2127, 2136, 2137, 2141, 2142, 2145, 2146, 2148, 2149, 2152, 2165, 2166, 2175, 2180, 2240, 2241, 2244, 2245, 2247, 2248, 2294, 2310, 2311.

Типовые задания по разделу 10 «Ряды»

Из [14] № 2403, 2405, 2411, 2412, 2416, 2418, 2420, 2421, 2427, 2429, 2435, 2437, 2439, 2443, 2454, 2455, 2465, 2466, 2470, 2471, 2475, 2477, 2514, 2518, 2526, 2527, 2533, 2534, 2535, 2549, 2594, 2595, 26142653, 2654, 2671, 2672.

Типовые задания по разделу 11 «Теория вероятностей»

Тема 1 «Случайные события»: из [12] № 3, 5, 7, 11, 12, 14, 17, 18, 26, 28, 35, 39, 41, 42, 47, 50, 51, 60, 61, 64, 65, 66, 67, 69, 80, 81, 84, 85, 89, 91, 92, 94, 97, 98, 101, 106, 107, 111, 112, 115, 119-122, 125, 126, 129, 130, 131, 132, 135, 137, 142, 143, 145-148, 150, 151, 153, 156, 158.

Тема 2 «Случайные величины»: из [12] № 165, 166, 167, 168, 170, 171, 173, 176, 178, 180, 181, 183, 190, 191, 208, 209, 211, 215, 216, 219, 229, 231, 241-244, 253, 254, 256, 257, 262, 263, 267, 268, 275, 276, 280, 281, 285, 287, 297, 299, 305, 307-310, 322-329, 346, 347, 350, 351, 373-376, 400, 402, 408-410, 421, 422, 430.

Типовые задания по разделу 12 «Математическая статистика»

Из [12] № 440, 442, 444, 447, 449, 451, 454, 456, 459, 461, 464, 465, 467, 471, 472, 501, 502, 504, 506, 507, 509, 511, 513, 536, 541, 542, 548, 549, 555, 557, 560, 561, 574, 575, 599, 606, 610, 611, 613, 617, 618, 634-638, 640, 648, 652, 653, 662, 663.

## **4. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ**

Внеаудиторная самостоятельная работа в рамках данной дисциплины включает в себя:

- подготовку к аудиторным занятиям (лекциям, практическим занятиям) и выполнение соответствующих заданий;
- самостоятельную работу над отдельными темами учебной дисциплины в соответствии с тематическим планом;
- выполнение индивидуального домашнего задания;
- подготовку к экзамену.

### **4.1 Подготовка к лекционным занятиям**

При подготовке к лекции рекомендуется повторить ранее изученный материал. Рекомендуется вести конспект, главное требование к которому - быть систематическим, логически связанным, ясным и кратким. По окончанию занятия обязательно в часы самостоятельной подготовки, по возможности в этот же день, повторить изучаемый материал и доработать конспект.

### **4.2 Подготовка к практическим занятиям**

Подготовка к практическим занятиям предусматривает:

- изучение теоретических положений, лежащих в основе будущих расчетов или методики расчетов;
- детальную проработку учебного материала, рекомендованной литературы и методической разработки на предстоящее занятие.

### **4.3 Самостоятельная работа над отдельными темами учебной дисциплины**

При организации самостоятельного изучения ряда тем лекционного курса обучаемый работает в соответствии с указаниями, выданными преподавателем. Указания по изучению теоретического материала курса составляются дифференцированно по каждой теме и включают в себя следующие элементы: название темы; цели и задачи изучения темы; основные вопросы темы; характеристику основных понятий и определений, необходимых обучаемому для усвоения данной темы; список рекомендуемой литературы; наиболее важные фрагменты текстов рекомендуемых источников, в том числе таблицы, рисунки, схемы и т.п.; краткие выводы, ориентирующие обучаемого на определенную совокупность сведений, основных идей, ключевых положений, систему доказательств, которые необходимо усвоить; контрольные вопросы, предназначенные для самопроверки знаний.

#### **4.4Выполнение индивидуального домашнего задания**

Цель выполнения студентами индивидуального домашнего задания – выявить знания методологических основ дисциплины, умение производить расчеты, привить обучающимся навыки самостоятельной работы с применением математических методов.

В ходе выполнения индивидуального домашнего задания обучающийся должен проявить умение самостоятельно работать с учебной и научной математической литературой, применять математическую методологию в анализе конкретных данных.

Индивидуальное домашнее задание должно быть выполнено и представлено в срок, установленный графиком учебного процесса. Выполнение индивидуального домашнего задания включает следующие этапы: ознакомление с программой дисциплины, методическими рекомендациями по выполнению работы; проработку соответствующих разделов дисциплины по рекомендованной учебной литературе, конспектам лекций; выполнение расчетов с применением освоенных методов.

Завершенная работа представляется для проверки преподавателю в установленные учебным графиком сроки. Преподаватель проверяет качество работы, отмечает положительные стороны, недостатки работы и оценивает ее. Обучающиеся, не подготовившие работу, к экзамену не допускаются.

#### **4.5Подготовка к экзамену**

При подготовке к экзамену большую роль играют правильно подготовленные заранее записи и конспекты. В этом случае остается лишь повторить пройденный материал, учесть, что было пропущено, восполнить пробелы, закрепить ранее изученный материал.

В ходе самостоятельной подготовки к экзамену при анализе имеющегося теоретического и практического материала студенту также рекомендуется проводить постановку различного рода задач по изучаемой теме, что поможет в дальнейшем выявлять критерии принятия тех или иных решений, причины совершения определенного рода ошибок. При ответе на вопросы, поставленные в ходе самостоятельной подготовки, обучающийся вырабатывает в себе способность логически мыслить, искать в анализе событий причинно-следственные связи.

## **5. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕЙ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ**

### **5.1 Текущая аттестация**

**В первом семестре** в ходе изучения дисциплины студентам предстоит пройти следующие этапы текущей аттестации:

- выполнить задания по темам практических занятий;
- выполнить контрольную работу №1 по разделу «Элементы линейной алгебры»;
- выполнить контрольную работу №2 по разделу «Аналитическая геометрия»;
- выполнить контрольную работу №3 по разделам «Введение в математический анализ», «Дифференциальное исчисление функций одной действительной переменной»;
- выполнить и защитить индивидуальное домашнее задание №1 по разделу «Элементы линейной алгебры»;
- выполнить и защитить индивидуальное домашнее задание №2 по разделу «Аналитическая геометрия»;
- выполнить и защитить индивидуальное домашнее задание №3 по теме «Исследование функций с помощью производной и построение графиков»;
- сдать коллоквиум по разделам «Элементы линейной алгебры» и «Аналитическая геометрия».

**Во втором семестре** в ходе изучения дисциплины студентам предстоит пройти следующие этапы текущей аттестации:

- выполнить задания по темам практических занятий;
- выполнить контрольную работу №4 по разделам «Неопределенный интеграл» и «Определенный интеграл. Несобственные интегралы»;
- выполнить контрольную работу №5 по разделу «Дифференциальные уравнения»;
- выполнить и защитить индивидуальное домашнее задание №4 по разделам «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл. Несобственные интегралы»;
- выполнить и защитить индивидуальное домашнее задание №5 по разделу «Дифференциальные уравнения»;
- выполнить и защитить индивидуальное домашнее задание №6 по разделу «Ряды»;
- сдать коллоквиум по разделам «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл. Несобственные интегралы», «Дифференциальные уравнения».

**В третьем семестре** в ходе изучения дисциплины студентам предстоит пройти следующие этапы текущей аттестации:

- выполнить задания по темам практических занятий;

- выполнить контрольную работу №6 по теме «Случайные события» раздела «Теория вероятностей»;
- выполнить контрольную работу №7 по теме «Случайные величины» раздела «Теория вероятностей»;
- выполнить и защитить индивидуальное домашнее задание №7 по разделу «Теория вероятностей»;
- выполнить и защитить индивидуальное домашнее задание №8 по разделу «Математическая статистика»;
- сдать коллоквиум по разделу «Теория вероятностей».

## **5.2. Условия получения положительной оценки**

Промежуточная аттестация по дисциплине (первый, второй, третий семестры) проводится в форме экзамена.

Студенты очной формы обучения допускаются к экзамену при положительной аттестации по результатам текущего контроля, если:

- сдано более 60 % домашних заданий за семестр (по каждому разделу дисциплины);
- сданы все контрольные работы;
- сданы и защищены все индивидуальные домашние задания;
- сдан коллоквиум.

Образцы типовых контрольных работ и вопросы к коллоквиумам приведены в приложениях 1, 2.

**Экзамен за первый и второй семестры** проводится следующим образом. Экзаменационные материалы (см. приложение 3) компонуются в билеты по два теоретических вопроса и три практических задания, относящиеся к различным темам не менее чем двух разделов дисциплины. На усмотрение экзаменатора экзамен может быть проведен в письменной, устной или комбинированной форме. При наличии сомнений в отношении знаний и умений студента экзаменатор может (имеет право) задать дополнительные вопросы, а также дать дополнительное задание.

Шкала оценивания результатов освоения дисциплины на экзамене, основана на четырехбалльной системе.

Оценка «отлично» выставляется в случае, если студент исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно излагает ответы на вопросы билета, умеет делать обобщения и выводы, владеет основными терминами и понятиями, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, использовал в ответе

материал дополнительной литературы, дал правильные ответы на дополнительные вопросы.

Оценка «хорошо» выставляется в случае, если студент грамотно и по существу излагает ответ на вопросы билеты, не допуская существенных неточностей, но при этом его ответы были недостаточно обоснованы, владеет основными терминами и понятиями, правильно применяет теоретические положения при решении задач, использует в ответе материал только основной литературы; владеет основными умениями; при ответе на дополнительные вопросы допускал неточности и незначительные ошибки.

Оценка «удовлетворительно» выставляется в случае, если студент при ответе на вопросы продемонстрировал знания только основного материала, но допускал неточности, использовал недостаточно правильные формулировки, испытывает затруднения при решении задач; использовал при ответе только лекционный материал; при ответе на дополнительные вопросы допускал ошибки.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется в случае, если студент не смог объяснить смысл написанного им при подготовке к ответу текста; не ориентируется в терминологии дисциплины; не может ответить на дополнительные вопросы.

Компетенции в той части, в которой они должны быть сформированы в рамках изучения дисциплины, могут считаться сформированными в случае, если студент получил на экзамене положительную оценку.

**Экзамен за третий семестр** проводится в форме тестирования. Тестовые задания предназначены для оценки в рамках текущего контроля успеваемости знаний, приобретенных студентами на лекционных и практических занятиях. Содержание теста определяется в соответствии с содержанием дисциплины пропорционально учебному времени, отведенному на изучение разделов, перечисленных в тематическом плане. Время выполнения теста 40 мин. Типовые тестовые задания приведены в приложении 3.

Шкала оценивания результатов тестирования основана на четырехбалльной системе.

Оценка «отлично» выставляется при правильном выполнении не менее 90 % заданий.

Оценка «хорошо» выставляется при правильном выполнении не менее 80 % заданий.

Оценка «удовлетворительно» выставляется при правильном выполнении не менее 60 % заданий.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется при правильном выполнении менее 60 % заданий.

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

### **Основная литература**

1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник / Д. В. Беклемишев. – 12-е изд. – Москва: Физматлит, 2009. – 309 с.
2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 12-е изд. – Москва: Юрайт, 2014. – 478 с.
3. Гусак, А. А. Основы высшей математики[Электронный ресурс]: пособие для студентов вузов / А. А. Гусак, Е. А. Бричкова. – Минск: ТетраСистемс, 2012. – 205 с. (ЭБС «Университетская библиотека онлайн»).
4. Ефимов, Н. В. Краткий курс аналитической геометрии: учебник / Н. В. Ефимов. – 13- е изд., стер. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 240 с.
5. Общий курс высшей математики для экономистов: учебник / под ред. В. И. Ермакова. – Москва: ИНФРА-М, 2008. – 656 с.
6. Пискунов, И. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие: в 2 т. / И. С. Пискунов. – Изд. стер. – Москва: Интеграл-Пресс, 2002. – Т. 1, 2. – 415 с.
7. Шипачев, В. С. Основы высшей математики: учеб. пособие / В. С. Шипачев; ред. А. Н. Тихонов. – 6-е изд., стер. – Москва: Высшая школа, 2004. – 479 с.

### **Дополнительная литература**

8. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник / Д. В. Беклемишев. – 10-е изд., испр. – Москва: Физматлит, 2004. – 304 с.
9. Бермант, А. Ф. Краткий курс математического анализа: учебник / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – Москва: Наука, 1973. –720 с.
10. Бугров, Я. С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учебник / Я. С. Бугров; авт. С. М. Никольский. – 3-е изд., испр. и доп. – Москва: Наука, 1988. – 222 с.
11. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие / П. Е. Данко [и др.]. – 7-е изд., испр. – Москва: АСТ: Мир и Образование; Минск: Харвест, 2014. – 815 с.
12. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 11-е изд., перераб. и доп. – Москва: Юрайт, 2014. – 404 с.
13. Гусак, А. А. Пособие к решению задач по высшей математике / А. А. Гусак. – 3-е изд., стереотип. – Минск: БГУ, 1973. – 529 с.

14. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов: учеб. пособие / Б. П. Демидович [и др.]; под ред. Б. П. Демидовича. – Москва: Аст-рель: АСТ, 2004. – 495 с.

15. Клетеник, Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии: учеб. пособие / Д. В. Клетеник; ред. Н. В. Ефимов. – 17-е изд., стер. – СанктПетербург: Профессия, 2004. – 199 с.

16. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике: Типовые расчеты: учеб. пособие / Л. А. Кузнецов. – Изд. 11-е, стер. – Санкт-Петербург [и др.]: Лань, 2008. – 238 с.

17. Математическая статистика: учебник для вузов / В. Б. Горяинов, И. В. Павлов, Г. М. Цветкова, О. И. Тескин; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 424 с. (Сер. Математика в техническом университете; вып. XVII).

18. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учеб. пособие / под ред. В. И. Ермакова. – 2-е изд., испр. – Москва: ИНФРА-М, 2008. – 574 с.

19. Теория вероятностей: учеб. для вузов. – 3-е изд., испр. / А. В. Печинкин, О. И. Тескин, Г. М. Цветкова и др.; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 456 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XVI).

20. Общероссийский математический портал [Электронный ресурс]. URL: <http://www.mathnet.ru/>

21. Mathcad-справочник по высшей математике [Электронный ресурс]. URL: <http://www.exponenta.ru>

### **Учебно-методические пособия**

22. Антипов, Ю. Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебно-методическое пособие / Ю. Н. Антипов, Ж. И. Виницкая, Т. А. Кутузова. – Калининград: Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ», 2016. – 78 с.

23. Вялова, А. В. Алгебра и геометрия: учеб.-метод. пособие по практическим занятиям/ А. В. Вялова, Н. А. Елисеева, Т. В. Ермакова. – Калининград: Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ», 2021 – 188 с.

24. Вялова, А. В. Матрицы и системы линейных уравнений: учеб. пособие для студ. вузов техн. спец./ А. В. Вялова. – Калининград: ФГОУ ВПО «КГТУ», 2009. – 63 с.

25. Вялова, А. В. Элементы векторной алгебры: учеб.-метод. пособие по дисциплине «Алгебра и аналит. Геометрия» для студ. вузов техн. спец. / А. В. Вялова; ФГОУ ВПО «КГТУ». – Калининград: ФГОУ ВПО «КГТУ», 2011. – 70 с.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### Приложение 1

**Образцы типовых вариантов контрольных работ по разделам дисциплины для студентов очной формы обучения**

#### Контрольная работа № 1 по разделу «Элементы линейной алгебры»

1. Вычислить произведение матриц  $AB, BA$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -9 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -6 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Решить систему линейных уравнений тремя методами: 1) по формулам Крамера; 2) методом обратной матрицы; 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - y - z = 4, \\ 3x + 4y - 2z = 11, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$$

#### Контрольная работа № 2 по разделу «Аналитическая геометрия»

1. Дан треугольник с вершинами  $A(1; 2), B(5; 3), C(-1; 1)$ . Найти  $\angle ABC$ . Составить уравнения стороны  $AC$  и высоты, проведенной из вершины  $A$ .

2. Даны координаты вершин пирамиды  $A_1(1, 2, 5), A_2(3, 2, 2), A_3(5, 7, -1), A_4(2, 1, 0)$ . Найти

1) объём пирамиды;

2) площадь грани  $A_1A_3A_4$ ;

3) уравнение плоскости  $A_1A_2A_3$ ;

4) расстояние от вершины  $A_4$  до противоположной грани.

3. Установить, какая линия определяется уравнением и сделать чертеж

$$5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0.$$

**Контрольная работа № 3 по разделам «Введение в математический анализ», «Дифференциальное исчисление функций одной действительной переменной»**

1. Вычислить пределы:

a)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{3x^2 + 10x + 3}$ ,

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+4}{x+8} \right)^{-3x}$ ,

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x}$ ,

д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}$ ,

в)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}$ .

2. Найти производные заданных функций.

а)  $y = ctg^7 \frac{x+3}{5-2x^2}; \quad y', dy - ?$

б)  $xy = \ln \sin(x+y)$ ;

в)  $y = (\sin x)^{\lg x}$ ;

г)  $x = \sin^2 \frac{t}{3}, \quad y = \frac{1+t}{1-t}$ .

3. Вычислить приближенно  $f(1,05)$ , если  $f(x) = e^{0,1x(1-x)}$ .

4. Написать уравнение касательной и нормали к линии  $y = \ln x$  в точке  $x_0 = 1$

**Контрольная работа № 4 по разделам «Неопределенный интеграл»,  
«Определенный интеграл. Несобственные интегралы»**

1. Вычислить интегралы:

а)  $\int \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}, \quad$  б)  $\int \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

2. Вычислить интегралы:

а)  $\int_1^2 x \ln x \, dx; \quad$  б)  $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{5-4x}}$ .

3. Вычислить интеграл:

$$\int \frac{x^2 - 3x - 12}{x(x-4)(x-3)} dx$$

4. Вычислить интегралы:

a)  $\int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}$ , б)  $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$ .

5. Исследовать на сходимость несобственный интеграл:

$$\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}.$$

### Контрольная работа № 5 по разделу «Дифференциальные уравнения»

Решить уравнения:

1.  $(xy^2 + x)dx + (y + x^2)ydy = 0$ .

2.  $2x^2y' - 4xy - y^2 = 0$ .

3.  $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$ .

4.  $\frac{y}{x}dx + (3y^2 + \ln x)dy = 0$ .

5.  $xy'' - y' = 0$ .

6.  $y'' - 8y' + 12y = -65\cos 4x$ .

### Контрольная работа № 6 по разделу «Теория вероятностей (случайные события)»

1. В партии из 80 банок 6 оказалось нестандартными. Найти вероятность того, что две взятые подряд банки окажутся нестандартными.

2. В ящике 10 заклепок: 5 железных, 3 латунных и 2 медных. Взяли наудачу 2 заклепки. Какова вероятность того, что обе они из одного материала.

3. Вероятность того, что телевизор в течение гарантийного срока потребует ремонта, равна 0,2. Найти вероятность того, что из 6 проданных телевизоров в течение гарантийного срока А – потребуют ремонта не более одного, Б – хотя бы один не потребует ремонта.

4. Посажено 900 семян кукурузы. Вероятность прорастания отдельного семени равна 0,8. Найти вероятность того, что взойдет не менее 700 ростков кукурузы.

5. Произведено 200 независимых испытаний. Вероятность наступления события А в каждом из которых равна 0,6. Какова вероятность того, что событие осуществится: а) ровно 200 раз, б) от 180 до 190 раз, в) не менее 200 раз.

**Контрольная работа № 7 по разделу «Теория вероятностей  
(случайные величины)»**

1. Дискретная случайная величина задана законом распределения

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | 6   | 9   | 15  | 16  |
| $P$ | 0,6 | 0,1 | 0,2 | 0,1 |

Найти  $MX, DX, \sigma X$ . Построить график  $F(x)$ .

2. Найдите  $MX, DX, \sigma X$ , если интегральная функция непрерывной случайной величины  $X$  имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{64}x^2, & 0 < x \leq 8, \\ 1, & x > 8. \end{cases}$$

## **Приложение 2**

### **Типовые вопросы для коллоквиумов по разделам дисциплины**

#### **Вопросы к коллоквиуму по разделам**

##### **«Элементы линейной алгебры» и «Аналитическая геометрия»**

1. Матрицы, основные определения. Линейные операции над матрицами (сложение матриц, умножение матрицы на число). Умножение матриц. Свойства операций.
2. Определители квадратных матриц второго и третьего порядка и их вычисление. Свойства определителей.
3. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема о разложении определителя по элементам строки (столбца).
4. Обратная матрица. Существование и единственность обратной матрицы. Решение матричных уравнений.
5. Нахождение единственного решения системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными методом Крамера и методом обратной матрицы.
6. Ранг матрицы. Нахождение ранга матрицы с помощью элементарных преобразований матрицы.
7. Системы  $n$  линейных уравнений с  $m$  неизвестными. Критерий совместности. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
8. Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений.
9. Векторы. Основные понятия. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось.
10. Разложение вектора по ортам координатных осей. Координаты вектора. Действия над векторами, заданными координатами. Направляющие косинусы.
11. Скалярное произведение векторов, его свойства. Скалярное произведение векторов в координатной форме (вывод формулы). Приложения скалярного произведения.
12. Векторное произведение векторов, его свойства и геометрический смысл. Векторное произведение векторов в координатной форме (вывод формулы). Приложения векторного произведения.
13. Смешанное произведение векторов, его свойства и геометрический смысл. Смешанное произведение векторов в координатной форме (вывод формулы). Приложения смешанного произведения.

14. Прямая на плоскости. Различные виды уравнения прямой (уравнение прямой, заданной точкой и нормальным вектором; общее уравнение прямой), вывод формул.

15. Исследование общего уравнения прямой на плоскости.

16. Прямая на плоскости. Различные виды уравнения прямой (уравнение прямой с угловым коэффициентом; уравнение прямой, проходящей через точку с заданным угловым коэффициентом; уравнение прямой по двум точкам).

17. Прямая на плоскости. Угол между прямыми. Параллельность, перпендикулярность прямых. Расстояние от точки до прямой.

18. Плоскость. Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору (вывод формулы). Общее уравнение плоскости.

19. Частные случаи общего уравнения плоскости. Неполные уравнения плоскости.

20. Уравнение плоскости в отрезках на осях координат. Уравнение плоскости, проходящей через три точки (вывод формулы).

21. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

22. Прямая в пространстве. Канонические уравнения прямой в пространстве. Параметрические уравнения прямой в пространстве.

23. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Прямая как пересечение двух плоскостей.

24. Угол между прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве.

25. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Условие принадлежности прямой плоскости.

26. Окружность. Уравнение окружности (вывод формулы).

27. Эллипс. Уравнение эллипса. Построение эллипса. Фокусы, эксцентриситет эллипса.

28. Гипербола. Уравнение гиперболы. Построение гиперболы. Асимпты, фокусы, эксцентриситет эллипса.

29. Парабола. Уравнение параболы. Построение параболы. Фокус, директриса параболы.

30. Поверхности 2-го порядка.

## **Вопросы к коллоквиуму по разделам «Определенный интеграл. Несобственные интегралы», «Дифференциальные уравнения»**

1. Первообразная и неопределенный интеграл: понятие, свойства.
2. Таблица неопределенных интегралов. Непосредственное интегрирование. Метод занесения переменной под знак дифференциала.
3. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
4. Замена переменной в неопределенном интеграле.
5. Интегрирование некоторых выражений, содержащих квадратный трехчлен.
6. Интегрирование дробно-рациональных функций.
7. Интегрирование простейших иррациональных выражений.
8. Интегрирование тригонометрических выражений.
9. Определенный интеграл: определение, геометрический смысл.
10. Свойства определенного интеграла.
11. Формула Ньютона-Лейбница.
12. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям в определенном интеграле.
13. Вычисление площадей плоских фигур. Вычисление длин дуг плоских кривых.
14. Вычисление объемов тел. Физические приложения определенного интеграла.
15. Несобственный интеграл 1-го рода: определение, признаки сходимости.
16. Несобственный интеграл 2-го рода: определение, признаки сходимости.
17. Дифференциальные уравнения 1-го порядка: понятие, общее и частные решения, задача Коши. Условия существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка.
18. Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка.
19. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Метод Бернулли. Уравнение Бернулли.
20. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Метод Лагранжа.
21. Дифференциальные уравнения высших порядков: основные понятия.
22. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка: основные типы и методы интегрирования.
23. Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Структура общего решения.
24. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

25. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

26. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольных постоянных.

### **Вопросы к коллоквиуму по разделу «Теория вероятностей»**

1. Основные формулы комбинаторики: размещения, перестановки, сочетания.
2. Виды случайных событий.
3. Алгебра событий
4. Классическое определение вероятности события. Свойства вероятности.
5. Теоремы сложения вероятностей несовместных событий.
6. Теорема умножения вероятностей независимых событий.
7. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей зависимых событий.
8. Теорема сложения вероятностей совместных событий.
9. Вероятность появления хотя бы одного события.
10. Формула полной вероятности.
11. Вероятность гипотез. Формулы Байеса.
12. Повторение испытаний. Формула Бернулли.
13. Локальная теорема Лапласа.
14. Распределение Пуассона.
15. Интегральная теорема Лапласа.
16. Относительная частота.
17. Вероятность отклонения относительной частоты от теоретической вероятности.
18. Случайные величины. Дискретные и непрерывные случайные величины.
19. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины.
20. Ряд и многоугольник распределения.
21. Числовые характеристики дискретных случайных величин.
22. Математическое ожидание дискретной случайной величины, его свойства.
23. Математическое ожидание числа появлений события в независимых испытаниях.
24. Отклонение случайной величины от её математического ожидания.
25. Дисперсия дискретной случайной величины, её свойства.
26. Формула для вычисления дисперсии.
27. Дисперсия числа появления события в независимых испытаниях.
28. Среднее квадратическое отклонение.
29. Функция распределения случайной величины, её свойства, график.

30. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины, её свойства. 31. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал.

32. Нахождение функции распределения по известной плотности распределения.

33. Показательное распределение.

34. Биномиальное распределение.

35. Закон равномерного распределения вероятностей.

36. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

37. Нормальное распределение, его математическое ожидание, дисперсия.

38. Нормальная кривая.

39. Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины.

40. Вычисление вероятности заданного отклонения.

41. Правило трёх сигм.

## **Приложение 3**

### **Материал для подготовки к экзамену по дисциплине «Высшая математика»**

#### **Экзаменационные вопросы по дисциплине «Высшая математика» за 1 семестр**

1. Матрицы, основные определения. Линейные операции над матрицами (сложение матриц, умножение матрицы на число). Умножение матриц. Свойства операций.
2. Определители квадратных матриц второго и третьего порядка и их вычисление. Свойства определителей.
3. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема о разложении определителя по элементам строки (столбца).
4. Обратная матрица. Существование и единственность обратной матрицы. Решение матричных уравнений.
5. Нахождение единственного решения системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными методом Крамера и методом обратной матрицы.
6. Ранг матрицы. Нахождение ранга матрицы с помощью элементарных преобразований матрицы.
7. Системы  $n$  линейных уравнений с  $m$  неизвестными. Критерий совместности. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
8. Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений.
9. Векторы. Основные понятия. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось.
10. Разложение вектора по ортам координатных осей. Координаты вектора. Действия над векторами, заданными координатами. Направляющие косинусы.
11. Скалярное произведение векторов, его свойства. Скалярное произведение векторов в координатной форме (вывод формулы). Приложения скалярного произведения.
12. Векторное произведение векторов, его свойства и геометрический смысл. Векторное произведение векторов в координатной форме (вывод формулы). Приложения векторного произведения.

13. Смешанное произведение векторов, его свойства и геометрический смысл. Смешанное произведение векторов в координатной форме (вывод формулы). Приложения смешанного произведения.

14. Прямая на плоскости. Различные виды уравнения прямой (уравнение прямой, заданной точкой и нормальным вектором; общее уравнение прямой,) (вывод формул).

15. Исследование общего уравнения прямой на плоскости.

16. Прямая на плоскости. Различные виды уравнения прямой (уравнение прямой с угловым коэффициентом; уравнение прямой, проходящей через точку с заданным угловым коэффициентом; уравнение прямой по двум точкам).

17. Прямая на плоскости. Угол между прямыми. Параллельность, перпендикулярность прямых. Расстояние от точки до прямой.

18. Плоскость. Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору (вывод формулы). Общее уравнение плоскости.

19. Частные случаи общего уравнения плоскости. Неполные уравнения плоскости.

20. Уравнение плоскости в отрезках на осях координат. Уравнение плоскости, проходящей через три точки (вывод формулы).

21. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

22. Прямая в пространстве. Канонические уравнения прямой в пространстве. Параметрические уравнения прямой в пространстве.

23. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Прямая как пересечение двух плоскостей.

24. Угол между прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве.

25. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Условие принадлежности прямой плоскости.

26. Окружность. Уравнение окружности (вывод формулы).

27. Эллипс. Уравнение эллипса. Построение эллипса. Фокусы, эксцентриситет эллипса.

28. Гипербола. Уравнение гиперболы. Построение гиперболы. Асимптоты, фокусы, эксцентриситет эллипса.

29. Парабола. Уравнение параболы. Построение параболы. Фокус, директриса параболы.

30. Поверхности 2-го порядка.

31. Комплексные числа: мнимая единица, алгебраическая форма записи, действительная часть, мнимая часть, равенство комплексных чисел, действия над комплексными числами в алгебраической форме, степени мнимой единицы.

32. Геометрическое изображение комплексных чисел, модуль и аргумент комплексного числа, Переход от алгебраической к тригонометрической форме.

33. Тригонометрическая форма комплексного числа, действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Показательная форма комплексного числа, действия над комплексными числами в показательной форме

34. Числовая последовательность. Понятие и свойства предела последовательности. Ограниченностность последовательности. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности, свойства.

35. Предел функции: определение, свойства. Бесконечно большие и бесконечно малые функции.

36. Первый замечательный предел. Второй замечательные предел (вывод формулы).

37. Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые функции.

38. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация.

39. Производная функции одной переменной: понятие, геометрический и физический смысл. Уравнения касательной и нормали к графику функции.

40. Правила дифференцирования. Таблица производных. Связь дифференцируемости и непрерывности функции.

41. Производная сложной функции. Производная обратной функции.

42. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций.

43. Дифференциал: определение, свойства, геометрический смысл.

44. Производные и дифференциалы высших порядков.

45. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Правила Лопиталя.

46. Монотонность функции на данном промежутке. Экстремум функции. Необходимое условие экстремума дифференцируемых функций. Достаточное условие экстремума.

47. Исследование функции на экстремум с помощью второй производной. Наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке.

48. Выпуклость и вогнутость графика функции на заданном промежутке; точка перегиба.

49. Асимптоты графика функции. Общий план исследования функции и построения графика.

50. Функция нескольких переменных: понятие, область определения, множество значений, линии и поверхности уровня. Предел функции двух переменных. Непрерывность функции двух переменных.

51. Частные и полное приращения функции двух переменных. Частные производные функции двух переменных 1 и 2-го порядка.

52. Частные и полный дифференциалы. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

53. Производные сложных функций двух переменных. Производные функции, заданной неявно.

54. Градиент функции. Производная по направлению.

55. Экстремум функции двух переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции в данной области.

### Экзаменационные задачи за 1-й семестр

В качестве тренировочных задач для подготовки к экзамену могут быть использованы задания для практических занятий по дисциплине (§4), а также следующие задания.

1. Вычислить определитель матрицы  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ .

2. Вычислить алгебраическое дополнение  $A_{32}$  элемента  $a_{32}$  определителя

$$\left| \begin{array}{cccc} 2 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 6 & -1 & 5 \\ 8 & 4 & 12 & -4 \\ 0 & 4 & 16 & 5 \end{array} \right|.$$

3. Вычислить произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -9 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -6 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

4. Найти  $A \cdot B + B \cdot A$ , если  $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ .

5. Найти  $A \cdot B$  и  $B \cdot A$ , если  $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = (2 \ 3 \ 5)$ .

6. Найти  $A^2$ , если

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \\ 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. Найти  $A \cdot B$  и  $B \cdot A$ , если  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ;

8. Для матрицы  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$  найти  $5A + A^T$ ,  $A^3$ .

9. Найти матрицу  $X$ , удовлетворяющую условию:

1)  $A - 2X = 3B$ , 2)  $3A + X = E + B^2$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}.$$

10. Найти  $f(A)$ , если  $f(x) = x^2 + 3x - 4$ ,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

11. Найти: 1) миноры элементов третьей строки; 2) алгебраические дополнения элементов второго столбца матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 11 & 9 \\ 2 & -8 & 5 \\ -4 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

12. Решить уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0;$$

13. Для матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  найти обратную матрицу.

14. Найти  $A^{-1}$  и сделать проверку, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

15. Решить матричные уравнения:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

16. Найти ранг матрицы  $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ .

17. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} 2x - y - z = 4, \\ 3x + 4y - 2z = 11, \\ 3x - 2y + 4z = 11; \end{cases}$$

18. Решить систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + z = -2; \end{cases}$$

19. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 2x + y + 3z = 11; \end{cases}$$

20. Исследовать системы на совместность

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 9x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$$

21. Решить систему уравнений, выделив фундаментальные решения

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 + 34x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

22. Написать разложение вектора  $\bar{x}$  по векторам  $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ .

$$\bar{x} = \{-2, 4, 7\}, \bar{p} = \{0, 1, 2\}, \bar{q} = \{1, 0, 1\}, \bar{r} = \{-1, 2, 4\}.$$

23. Проверить, коллинеарны ли векторы  $\bar{c}_1$  и  $\bar{c}_2$ ?

$$\bar{a} = \{1, -2, 3\}, \bar{b} = \{3, 0, -1\}, \bar{c}_1 = 2\bar{a} + 4\bar{b}, \bar{c}_2 = 3\bar{b} - \bar{a}.$$

24. Найти косинус угла между векторами  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$ , если  $A(1, -2, 3)$ ,

$B(0, -1, 2)$ ,  $C(3, -4, 5)$ .

25. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$

$$\bar{a} = \bar{p} + 2\bar{q}, \bar{b} = 3\bar{p} - \bar{q}; |\bar{p}| = 1, |\bar{q}| = 2, (\bar{p} \wedge \bar{q}) = \pi/6.$$

26. Компланарны ли векторы  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  и  $\bar{c}$ :  $\bar{a} = \{2, 3, 1\}$ ,  $\bar{b} = \{-1, 0, -1\}$ ,  $\bar{c} = \{2, 2, 2\}$ .?

27. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A_1, A_2, A_3, A_4$  и его высоту, опущенную из вершины  $A_4$  на грань  $A_1A_2A_3$ , если

$$A_1(1, 3, 6), A_2(2, 2, 1), A_3(-1, 0, 1), A_4(-4, 6, -3).$$

28. Напишите уравнения прямых, проходящих через точку  $M$ , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна заданной прямой  $l$ , если  $M(-2, 1)$ ,  $l: 3x - 2y + 12 = 0$ .

29. В треугольнике  $ABC$ :  $A(-3, 3)$ ,  $B(5, 1)$ ,  $C(6, -2)$ .

- 1) Составить уравнения: стороны  $BC$ ; высоты, проведенной из вершины  $A$ ; медианы, проведенной из вершины  $C$ ;
- 2) Найти площадь треугольника;
- 3) Найти угол  $A$ .

30. Приведите уравнение кривой второго порядка  $4x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$ . к каноническому виду и постройте ее.

31. Даны векторы  $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$  и  $\vec{b} = 2\vec{i} - 2\vec{k}$ . Вычислить проекцию  $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$ .

32. Даны координаты вершин пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ :  $A_1(4, 5, 2)$ ,  $A_2(0, 7, 2)$ ,  $A_3(0, 2, 7)$ ,  $A_4(1, 5, 0)$ . Найти:

- 1) угол между ребром  $A_1A_4$  и гранью  $A_1A_2A_3$ ;
- 2) угол между гранями  $A_1A_3A_4$  и  $A_2A_3A_4$ ;
- 3) уравнения прямой  $A_1A_2$ ;
- 4) уравнения прямой, проходящей через середину ребра  $A_2A_3$  параллельно ребру  $A_1A_2$ ;
- 5) уравнения медианы  $A_1M$  в  $\Delta A_1A_2A_3$ ;
- 6) уравнения высоты  $A_1K$  грани  $A_1A_2A_3$ ;
- 7) расстояние от вершины  $A_1$  до ребра  $A_2A_3$ ;

8) уравнение плоскости  $A_1A_2A_3$ ;

9) уравнение плоскости, проходящей через вершину  $A_4$  параллельно грани  $A_1A_2A_3$ ;

10) уравнение плоскости, проходящей через вершину  $A_4$  перпендикулярно грани  $A_1A_2A_3$ ;

11) уравнения высоты, опущенной из вершины  $A_4$  на грань  $A_1A_2A_3$ ;

12) длину высоты, опущенной из вершины  $A_4$  на грань  $A_1A_2A_3$ ;

33. Данна прямая  $2x+3y+4 = 0$ . Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(2; 1)$ : параллельно данной прямой; перпендикулярно к данной прямой.

34. Определить угол  $\varphi$  между двумя прямыми:  $5x-y+7=0$ ,  $3x+2y=0$ .

35. Установить, какие из следующих пар прямых перпендикулярны:

1)  $3x - y + 5 = 0$ ,  $x + 3y - 1 = 0$ ;

2)  $3x - 4y + 1 = 0$ ,  $4x - 3y + 7 = 0$ .

36. Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{3x^2 + 10x + 3}$ .

37. Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x}$ .

38. Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}$ .

39. Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+4}{x+8} \right)^{-3x}$ .

40. Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}$ .

41. Вычислить производную и дифференциал функции

$$y = \operatorname{ctg}^7 \frac{x+3}{5-2x^2}; \quad y', dy - ?$$

42. Вычислить производную функции  $xy = \ln \sin(x+y)$ .

43. Вычислить производную функции  $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ .

44. Вычислить производную функции  $x = \sin^2 \frac{t}{3}$ ,  $y = \frac{1+t}{1-t}$ .

45. Вычислить приближенно  $f(1,05)$ , если  $f(x) = e^{0,1x(1-x)}$ .

46. Вычислить вторую производную функции

$$y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

47. Вычислить  $\frac{dy}{dx}$  и  $\frac{d^2y}{dx^2}$ , если функция  $y(x)$  задана параметрически

$$x = \cos t, \quad y = \sin^2 t.$$

48. Вычислить  $y'$  и  $y''$  для функции  $y(x)$ , заданной неявно

$$x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + y^2} = 0.$$

49. Найти частную производную функции  $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$  по переменной  $x$ .

50. Найти частную производную второго порядка  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  функции

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

51. Найти градиент функции  $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$  в точке  $(1, 1, 1)$ .

52. Найти уравнение касательной и нормали к линии  $y = \ln x$  в точке  $x_0 = 1$ .

53. Решить, используя правило Лопиталя:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$ .

54. Найти частные производные функций:

$$1) z = e^{\frac{y}{x}}, \quad 2) z = \sqrt{x^2 - y^2}, \quad 3) z = \frac{2x}{x-y}, \quad z = x^y.$$

55. Найти полный дифференциал функции:

$$1) z = x^3 + 3axy + y^3, \quad 2) z = \frac{3x-y}{x+2y}.$$

56. Найти  $\overline{\operatorname{grad} z}$  в точке  $(5,2)$ , если  $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ .

57. Найти  $\overline{\operatorname{grad} z}$  в точке  $(1,2,3)$ , если  $z = xyz$ .

## **Экзаменационные вопросы по дисциплине «Высшая математика»**

### **за 2-й семестр**

1. Первообразная и неопределенный интеграл: понятие, свойства.
2. Таблица неопределенных интегралов. Непосредственное интегрирование. Метод занесения переменной под знак дифференциала.
3. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
4. Замена переменной в неопределенном интеграле.
5. Интегрирование некоторых выражений, содержащих квадратный трехчлен.
6. Интегрирование дробно-рациональных функций.
7. Интегрирование простейших иррациональных выражений.
8. Интегрирование тригонометрических выражений.
9. Определенный интеграл: определение, геометрический смысл.
10. Свойства определенного интеграла.
11. Формула Ньютона-Лейбница.
12. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям в определенном интеграле.
13. Вычисление площадей плоских фигур. Вычисление длин дуг плоских кривых.
14. Вычисление объемов тел. Физические приложения определенного интеграла.
15. Несобственный интеграл 1-го рода: определение, признаки сходимости.
16. Несобственный интеграл 2-го рода: определение, признаки сходимости.
17. Дифференциальные уравнения 1-го порядка: понятие, общее и частные решения, задача Коши. Условия существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка.
18. Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка.
19. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Метод Бернулли. Уравнение Бернулли.
20. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Метод Лагранжа.
21. Дифференциальные уравнения высших порядков: основные понятия.
22. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка: основные типы и методы интегрирования.
23. Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Структура общего решения.
24. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
25. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.
26. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольных постоянных.

27. Двойной интеграл.
28. Тройной интеграл.
29. Криволинейный интеграл первого рода.
30. Криволинейный интеграл второго рода.
31. Числовой ряд с положительными членами: определение, частичные суммы ряда, сходящиеся и расходящиеся ряды. Свойства сходящихся рядов.
32. Необходимый признак сходимости и следствие из него (достаточное условие расходимости ряда).
33. Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами: признак сравнения, предельный признак сравнения.
34. Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами: признак Даламбера, радикальный признак Коши.
35. Интегральный признак сходимости числовых рядов с положительными членами.
36. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды: определение; признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда; условная и абсолютная сходимость.
37. Функциональные ряды. Степенные ряды: определение; радиус и интервал сходимости. Теорема Абеля.
38. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение в ряд Тейлора некоторых элементарных функций.
39. Применения степенных рядов в приближенных вычислениях значений функций.
40. Применения степенных рядов в приближенных вычислениях определенных интегралов.
41. Тригонометрический ряд. Ряд Фурье.

### Экзаменационные задачи за 2-й семестр

Найти интегралы:

$$1. \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$$

$$2. \int \frac{x + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$3. \int \frac{\sqrt{x} + \ln^2 x}{x} dx$$

$$4. \int \frac{dx}{2x+3x \ln x}$$

$$13. \int \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}$$

$$14. \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$$

$$15. \int \frac{2x^2+x-1}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx$$

$$16. \int \frac{x^4-7x+11}{x-2} dx$$

$$17. \int \frac{dx}{(x^2-1)(x+2)}$$

5.  $\int \frac{2e^x dx}{(5+e^x)^2}$

6.  $\int x^2 \sin x dx$

7.  $\int \ln(1-x) dx$

8.  $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$

9.  $\int x^2 \ln x dx$

10.  $\int \frac{dx}{x^2 + 8x + 7}$

11.  $\int \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 5}}$

12.  $\int \frac{(3x+2)dx}{x^2 - 4x + 3}$

18.  $\int \frac{xdx}{x^3 - 1}$

19.  $\int \frac{x^2}{(1-x)^3} dx$

20.  $\int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}$

21.  $\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x} dx$

22.  $\int \sin^3 x dx$

23.  $\int \cos^4 x dx$

24.  $\int \frac{dx}{1+8\cos^2 x}$

25.  $\int \sin 3x \cos 7x dx$

Вычислить интегралы:

26.  $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x dx}{\cos^4 x}$

27.  $\int_0^1 \frac{dx}{6-5x+x^2}$

28.  $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

29.  $\int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1}$

30.  $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

31.  $\int_0^\pi x \cos 3x dx$

32. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 2x - x^2 + 3, \quad y = x^2 - 4x + 3$$

33. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \cos x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \pi/2.$$

34. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями:  $y^2 = 6x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 3$ .

35. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями:  $y = \cos x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$ .

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

36.  $\int_0^{+\infty} e^{-3x} dx$

38.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

37.  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$

39.  $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$

Вычислить повторные интегралы:

40.  $\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y) dx$

41.  $\int_{-3}^3 dy \int_{y^2-4}^5 (x + 2y) dx$

Изменить порядок интегрирования в двойных интегралах:

42.  $\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy$

43.  $\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x, y) dy$

Вычислить двойные интегралы:

44.  $\iint_S e^{\frac{x}{y}} dx dy$ , где  $S$  – криволинейный треугольник  $OAB$ , ограниченный параболой  $y^2 = x$  и прямыми  $x = 0, y = 1$ .

45.  $\iint_S \frac{x}{x^2+y^2} dx dy$ , где  $S$  – область, ограниченная параболой  $y = \frac{x^2}{2}$  и прямой  $y = x$ .

Решить уравнения:

46.  $(xy^2 + x)dx + (y + x^2y)dy = 0$

51.  $y' + \frac{y}{1+x} + x^2 = 0$

47.  $2x^2y' - 4xy - y^2 = 0$

52.  $\frac{dy}{dx} + \frac{4xy}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1}$

48.  $(x + y)dx + (y - x)dy = 0$

53.  $y' = ay + e^{bx}$

49.  $xdy - ydx = ydy$

50.  $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + 1$

54.  $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$

Найти частные решения дифференциальных уравнений:

46.  $(1 + e^x)yy' = e^y, y(0) = 0$

47.  $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0, \quad y(0) = 1$

48.  $xy' + y - e^x = 0, \quad y = b$  при  $x = a$

49.  $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}, \quad y(1) = 1$

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

50.  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dx}; \quad y(2) = 6, \quad y'(2) = 1$

51.  $\frac{d^2y}{dx^2} = 4; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$

52.  $(y''x - y')y' = x^3; \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$

53.  $2y(y')^3 + y'' = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -3$

Найти общие решения уравнений

54.  $y'' + 3y' = 9x$

61.  $y'' - 2y' = 6x^2 - 10x + 12$

55.  $y'' - 3y' + 2y = e^x$

62.  $y'' - 3y' - 10y = \sin x + 3\cos x$

56.  $y'' - 2y' = x^2 - x$

63.  $y'' - 8y' + 12y = -65\cos 4x$

57.  $y'' + y = 4\sin x$

64.  $y'' + 16y = -24\sin 4x$

58.  $y'' + y = \cos x$

65.  $y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$

59.  $y'' - 2y' + y = 2e^x$

66.  $y'' - 2y' + y = (x+1)e^x$

60.  $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$

67.  $y'' + 4y' - 5y = 1$

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

68.  $y'' - 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 8$

69.  $y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 15, \quad y'(0) = -1$

70. Записать формулу n-го члена ряда  $\frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \dots$

Исследовать ряды на сходимость

$$71. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n!}$$

$$72. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

$$73. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{100n+1}$$

$$74. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$$

$$75. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^n}$$

$$76. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!7^n}{n^n}$$

Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость

$$77. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$$

$$78. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$$

Найти область сходимости ряда

$$79. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$$

$$81. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$$

$$80. \sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$$

$$82. \sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-3)^n$$

### Экзаменационные вопросы по дисциплине «Высшая математика»

#### за 3-й семестр

1. Основные формулы комбинаторики: размещения, перестановки, сочетания.
2. Виды случайных событий.
3. Алгебра событий.
4. Классическое определение вероятности события. Свойства вероятности.
5. Теоремы сложения вероятностей несовместных событий.
6. Теорема умножения вероятностей независимых событий.

7. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей зависимых событий.
8. Теорема сложения вероятностей совместных событий.
9. Вероятность появления хотя бы одного события.
10. Формула полной вероятности.
11. Вероятность гипотез. Формулы Бейеса.
12. Повторение испытаний. Формула Бернулли.
13. Локальная теорема Лапласа.
14. Распределение Пуассона.
15. Интегральная теорема Лапласа.
16. Относительная частота.
17. Вероятность отклонения относительной частоты от теоретической вероятности.
18. Случайные величины. Дискретные и непрерывные случайные величины.
19. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины.
20. Ряд и многоугольник распределения.
21. Числовые характеристики дискретных случайных величин.
22. Математическое ожидание дискретной случайной величины, его свойства.
23. Математическое ожидание числа появлений события в независимых испытаниях.
24. Отклонение случайной величины от её математического ожидания.
25. Дисперсия дискретной случайной величины, её свойства.
26. Формула для вычисления дисперсии.
27. Дисперсия числа появления события в независимых испытаниях.
28. Среднее квадратическое отклонение.
29. Функция распределения случайной величины, её свойства, график.
30. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины, её свойства.
31. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал.
32. Нахождение функции распределения по известной плотности распределения.
33. Показательное распределение.

34. Биномиальное распределение.
35. Закон равномерного распределения вероятностей.
36. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.
37. Нормальное распределение, его математическое ожидание, дисперсия.
38. Нормальная кривая.
39. Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины.
40. Вычисление вероятности заданного отклонения.
41. Правило трёх сигм.
42. Генеральная и выборочная совокупность. Повторная и бесповторная выборки.
43. Статистическое распределение выборки
44. Эмпирическая функция распределения.
45. Полигон и гистограмма.
46. Статистические оценки параметров распределения.
47. Несмешённые, эффективные и состоятельные оценки.
48. Генеральная средняя. Выборочная средняя. Групповая и общая средние.
49. Генеральная дисперсия. Выборочная дисперсия.
50. Формула для вычисления дисперсии.
51. Оценка генеральной дисперсии по исправленной выборочной.
52. Точность оценки, доверительная вероятность (надёжность). Доверительный интервал.
53. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при известном  $\delta$ .
54. Мода, медиана.
55. Эмпирические моменты.
56. Асимметрия и эксцесс эмпирического распределения.
57. Статистические оценки статистических гипотез.
58. Система двух случайных величин.
59. Числовые характеристики системы двух случайных величин. Корреляционный момент. Коэффициент корреляции.
60. Линейная регрессия.

**Типовые варианты экзаменационного теста за 3-й семестр**  
**по дисциплине «Высшая математика»**

**Вариант 1**

Вопрос № 1. В комбинаторике по формуле  $\frac{n!}{(n-m)!}$  рассчитывают:

- 1) сочетания без повторений из  $n$  различных элементов по  $m$  элементов;
- 2) сочетания с повторениями из  $n$  различных элементов по  $m$  элементов;
- 3) размещения с повторениями из  $n$  различных элементов по  $m$  элементов;
- 4) размещения без повторений из  $n$  различных элементов по  $m$  элементов.

Вопрос № 2. Событие называется достоверным, если ...

- 1) его вероятность близка к единице;
- 2) при заданном комплексе факторов оно может произойти;
- 3) при заданном комплексе факторов оно обязательно произойдет;
- 4) вероятность события не зависит от причин, условий, испытаний.

Вопрос № 3. Формула Бернулли имеет вид:

- 1)  $P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(k), q = 1 - p ;$
- 2)  $P_n(k) = \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} ;$
- 3)  $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, q = 1 - p ;$
- 4)  $P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Phi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right), q = 1 - p .$

Вопрос № 4. Имеется 5 городов, каждый из которых соединен с каждым дорогой, не проходящей через остальные города. Общее количество дорог равно ...

- 1) 15;
- 2) 60;
- 3) 10;
- 4) 25.

Вопрос № 5. Подброшены две игральные кости. Вероятность того, что выпала хотя бы одна единица, равна ...

- 1) 0/36;
- 2)  $\frac{1}{4}$ ;
- 3) 1/12;
- 4) 11/36.

Вопрос № 6. Распределение непрерывной случайной величины  $X$ , заданной плотностью вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a; b] \\ 0, & x \notin [a; b] \end{cases}, \text{ называют ...}$$

- 1) равномерным;
- 2) показательным;
- 3) биномиальным;
- 4) нормальным.

Вопрос № 7. В законе распределения Пуассона для расчета вероятностей значений случайной величины  $X$  применяют формулу ...

- 1)  $P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda};$
- 2)  $P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{\lambda};$
- 3)  $P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e;$
- 4)  $P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$

Вопрос № 8. Случайная величина  $X$  задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1, \\ \frac{3x}{4} + \frac{3}{4} & \text{при } -1 < x \leq \frac{1}{3}, \\ 1 & \text{при } x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Вероятность того, что в результате испытания  $X$  попадет в интервал  $(0; \frac{1}{3})$ , равна ...

- 1) 0;
- 2) 1;
- 3)  $\frac{1}{3};$
- 4)  $\frac{1}{4}.$

Вопрос № 9. Дискретная случайная величина  $X$  задана рядом распределения:

|   |   |     |   |   |
|---|---|-----|---|---|
| X | 2 | 3   | 6 | 8 |
| p | a | 0,2 | b | c |

Тогда значения  $a, b, c$  не могут быть равны ...

- 1)  $a=0,3 \quad b=0,3 \quad c=0,2;$
- 2)  $a=0,2 \quad b=0,2 \quad c=0,2;$
- 3)  $a=0,4 \quad b=0,3 \quad c=0,1;$
- 4)  $a=0,4 \quad b=0,2 \quad c=0,2.$

Вопрос № 10. Соответствие между возможными значениями двумерной случайной величины  $(x_i, y_j)$  и вероятностями их реализации  $p_{ij}$  называется ...

- 1) законом распределения;
- 2) условной вероятностью;
- 3) плотностью распределения;
- 4) функцией распределения.

Вопрос №11. Задано статистическое распределение выборки объема  $n = \sum_{i=1}^k n_i$ :

|       |       |       |     |       |
|-------|-------|-------|-----|-------|
| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_k$ |
| $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | ... | $n_k$ |

Выборочное среднее  $\bar{x}_B$  вычисляется по формуле:

- 1)  $\frac{x_1+x_2+\dots+x_k}{n};$
- 2)  $\frac{x_1+x_k}{2};$

- 3)  $\frac{x_1 \cdot n_1 + x_k \cdot n_k}{n}$ ;
- 4)  $\frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \dots + x_k \cdot n_k}{n}$ .

Вопрос № 12. Сумма доверительной вероятности и уровня значимости равна ...

- 1) 1;
- 2) неотрицательному числу;
- 3) 0;
- 4) числу из интервала от 0 до 1.

Вопрос № 13. Оценка  $\tilde{\theta}$  параметра  $\theta$  распределения генеральной совокупности, для которой выполнено равенство  $M(\tilde{\theta}) = \theta$ , называется ...

- 1) состоятельной;
- 2) эффективной;
- 3) несмещенной;
- 4) асимптотически несмещенной.

Вопрос № 14. Для случайной величины X, распределенной по закону Пуассона, центральный момент второго порядка равен:

- 1)  $pr$ ;
- 2)  $\lambda p$ ;
- 3)  $\lambda$ ;
- 4)  $prq$ .

Вопрос № 15. При построении доверительного интервала для генеральной доли (вероятности  $p$ ) его центром является ...

- 1) выборочная средняя  $\bar{x}$ ;
- 2) выборочная дисперсия  $s^2$ ;
- 3) относительная частота  $\frac{m}{n}$ ;
- 4) исправленная выборочная дисперсия  $s_0^2$ .

## Вариант 2

Вопрос № 1. Размещения – это

- 1) возможность переставлять местами набор элементов;
- 2) комбинации, составленные выбором из различных элементов различных элементов, отличающиеся либо составом элементов, либо порядком их следования;
- 3) комбинации  $m$  элементов из  $n$  элементов, отличающиеся составом или порядком следования, причем выбранный элемент возвращается на место и может участвовать в дальнейшем выборе;
- 4) комбинации, составленные выбором различных элементов из различных элементов, отличающиеся только составом (но не порядком следования);
- 5) комбинации, составленные из одних и тех же элементов и отличающиеся порядком их следования.

Вопрос № 2. Утверждение «Противоположные события всегда составляют полную группу»...

- 1) верно;
- 2) зависит от природы случайных событий;
- 3) неверно;

4) верно только для независимых событий.

Вопрос № 3. На 9 карточках написаны цифры от 1 до 9. Вероятность того, что число, составленное из двух наугад взятых карточек, делится на 18, равна ...

- 1) 1/9;
- 2) 1/18;
- 3) 1/3;
- 4) 1/36.

Вопрос № 4. Число телефонных номеров из 6 цифр, при условии, что любая цифра может повторяться, равно ...

- 1) 999 999;
- 2) 998 900;
- 3) 999 000;
- 4) 1 000 000.

Вопрос № 5. Из пяти задолжников в академической ректор вызвал через старосту трех студентов. Староста забыл фамилии вызванных студентов и послал наудачу трех студентов. Вероятность того, что к ректору явятся именно вызванные им студенты, равна ...

- 1) 0,2;
- 2) 0,1;
- 3) 0,25;
- 4) 1/3.

Вопрос № 6. Функцией распределения случайной величины является:

- 1)  $F(x) = P(X >x)$ ;
- 2)  $f(x) = F'(x)$ ;
- 3)  $F(x) = f'(x)$ ;
- 4)  $F(x) = P(X <x)$ .

Вопрос № 7. Дискретная случайная величина  $X$  задана рядом распределения:

|   |     |   |   |
|---|-----|---|---|
| X | -1  | 2 | 4 |
| p | 0,1 | a | b |

Тогда  $M(X)=3,3$ , если ...

- 1)  $a=0,1 b=0,8$ ;
- 2)  $a=0,1 b=0,9$ ;
- 3)  $a=0,8 b=0,1$ ;
- 4)  $a=0,2 b=0,7$ .

Вопрос № 8. Плотность распределения случайной величины  $X$  имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -2, \\ \frac{1}{5} & \text{при } -2 < x \leq 3, \\ 0 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Тогда вероятность попадания  $X$  в интервал  $(0,5; 1)$  равна ...

- 1) 0,2;
- 2) 0,1;
- 3) 0,4;
- 4) 0,25.

Вопрос № 9. Время ожидания автобуса есть равномерно распределенная в интервале (0; 6) случайная величина X. Среднее время ожидания очередного автобуса равно ...

- 1) 6;
- 2) 3;
- 3) 2;
- 4)  $\frac{1}{4}$ .

Вопрос № 10. Закон больших чисел утверждает, что...

- 1) при большом числе испытаний вероятность реализации случайного события становится близкой к единице;
- 2) поведение произведения достаточно большого количества случайных величин становится почти закономерным;
- 3) при большом числе испытаний средняя величина неограниченно возрастает;
- 4) поведение суммы достаточно большого количества случайных величин становится почти закономерным.

Вопрос № 11. Выборка наблюдений, представленная в порядке возрастания, называется:

- 1) упорядоченным рядом;
- 2) вариационным рядом;
- 3) упорядоченной выборкой;
- 4) статистическим рядом.

Вопрос № 12. Проведено 3 измерения некоторой случайной величины (в мм): 10; 12; 14. Тогда несмещённая выборочная оценка дисперсии равна ...

- 1) 3;
- 2) 4;
- 3) 12;
- 4) 10.

Вопрос № 13. При построении доверительного интервала для вероятности биномиально распределенного генерального признака в случае больших выборок используют распределение:

- 1) хи-квадрат;
- 2) Стьюдента;
- 3) Фишера;
- 4) нормальное.

Вопрос № 14. Непараметрической гипотезой является предположение о ...

- 1) неизвестном законе распределения генеральной совокупности;
- 2) равенстве двух средних генеральных совокупностей;
- 3) равенстве двух дисперсий генеральных совокупностей;
- 4) равенстве дисперсии и математического ожидания.

Вопрос № 15. Левосторонняя критическая область принятия гипотезы может быть определена из соотношения ...

- 1)  $P(-x_{\text{крит}} < X < x_{\text{крит.}}) = g$ ;
- 2)  $P(X < -x_{\text{крит}}) + P(X > x_{\text{крит}}) = a$ ;
- 3)  $P(X < -x_{\text{крит}}) = a$ ;
- 4)  $P(X > x_{\text{крит}}) = a$ .

### Вариант 3

Вопрос № 1. В магазине продаются 8 сортов роз. Покупатель просит составить букет из 5 роз. Число комбинаций различных сортов роз в букете рассчитывается по формуле

- 1) сочетания без повторений;
- 2) сочетания с повторениями;
- 3) размещения с повторениями;
- 4) размещения без повторений.

Вопрос № 2. Вероятности событий *A* и *B* равны соответственно 0,3 и 0,4. Вероятность их суммы, если вероятность их произведения 0,1, равна ...

- 1) 0,6;
- 2) 0,12;
- 3) 0,7;
- 4) 0,4.

Вопрос № 3. В группе из 20 студентов 4 отличника и 16 хорошистов. Вероятности успешной сдачи сессии для них соответственно равны 0,9 и 0,65. Вероятность того, что наугад выбранный студент успешно сдаст сессию, равна ...

- 1) 7/10;
- 2) 9/20;
- 3) 7/20;
- 4) 9/10.

Вопрос № 4. Число четырехбуквенных слов, которые можно образовать из букв слова «around», равно ...

- 1) 360;
- 2) 1440;
- 3) 720;
- 4) 180.

Вопрос № 5. Из промежутка [0; 2] наугад выбирается два числа. Вероятность того, что их сумма больше 2, равна ...

- 1) 0,75;
- 2) 0,25;
- 3) 0,125;
- 4) 0,5.

Вопрос № 6. Не является дискретной случайная величина:

- 1) масса наудачу взятой монеты;
- 2) число попыток пересдач экзамена по теории вероятностей;
- 3) количество «орлов» при подбрасывании 10 монет;
- 4) число выпавших очков при подбрасывании двух игральных кубиков.

Вопрос № 7. Случайная величина *X* принимает целые неотрицательные значения от 0 до 5 с вероятностями

$$P(X = m) = C_5^m \cdot 0,9^m \cdot 0,1^{5-m}.$$

Тогда значение  $D(2X+3)$  равно ...

- 1) 2,7;
- 2) 0,2;
- 3) 1,2;

4) 1,8.

Вопрос № 8. Если возможные значения непрерывной случайной величины  $X$  принадлежат интервалу  $(a, b)$ , то можно утверждать, что:

- 1)  $f(x) = 0, x > b;$
- 2)  $f(x) = 0, x > a;$
- 3)  $f(x) = 1, a < x < b;$
- 4)  $f(x) = 1, x > b.$

Вопрос № 9. Функция распределения непрерывной случайной  $X$  величины имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

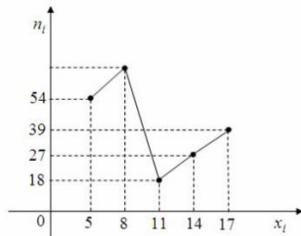
Тогда значение  $D(X)$  равно ...

- 1) 2/13;
- 2) 1/12;
- 3) 1/13;
- 4) 1/14.

Вопрос № 10. В данной местности среднее значение скорости ветра у земли равно 4 м/с. Вероятность  $p$  того, что в заданный день скорость ветра при одном наблюдении окажется более 25 м/с, можно оценить как ...

- 1)  $p \leq 0,16;$
- 2)  $p \leq 0,08;$
- 3)  $p > 0,16;$
- 4)  $p > 0,08.$

Вопрос № 11. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема  $n=200$ , полигон частот которой имеет вид



Тогда относительная частота варианты  $x_2=8$  равна ...

- 1) 0,32;
- 2) 0,69;
- 3) 0,62;
- 4) 0,31.

Вопрос № 12. Интервальная оценка математического ожидания нормально распределенного количественного признака  $(8,4; 9,2)$ . Выборочное среднее равно ...

- 1) 8,8;
- 2) 8,6;
- 3) 9,0;
- 4) 8,75;
- 5) недостаточно данных.

Вопрос №1 3. Доверительный интервал  $(\theta^* - d, \theta^* + d)$  для параметра  $\theta$  определяется по ...

- 1) заданному значению  $d$  и значению  $\theta^*$ , которое находится из соотношения  $P(|\theta^* - \theta| < d) = g$ ;
- 2) определенному из выборки  $\theta^*$  и значению  $d$ , которое находится из соотношения  $P(|\theta^* - \theta| < d) = g$ ;
- 3) заданной доверительной вероятности  $g$  и по ее выборочным данным  $d$  и  $\theta^*$ ;
- 4) определенным из выборки значениям  $d$  и  $\theta^*$ .

Вопрос № 14. При проверке статистических гипотез ошибка первого рода состоит в том, чтобы ...

- 1) отвергнуть правильную нулевую гипотезу;
- 2) принять нулевую и альтернативную гипотезы;
- 3) отвергнуть нулевую и альтернативную гипотезы;
- 4) принять неправильную нулевую гипотезу.

Вопрос № 15. Если альтернативная гипотеза имеет вид  $H_1: \alpha > 20$ , критическая область будет ...

- 1) двусторонней;
- 2) левосторонней;
- 3) правосторонней;
- 4) отсутствовать.

Локальный электронный методический материал

Наталья Александровна Елисеева

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Редактор С. Кондрашова

Корректор Т. Звада

Уч.-изд. л. 8,4. Печ. л. 6,8.

Издательство федерального государственного бюджетного  
образовательного учреждения высшего образования  
«Калининградский государственный технический университет».  
236022, Калининград, Советский проспект, 1