Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

С. Н. Мухина

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины
для студентов специальности
10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем

Калининград
Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ»
2023

Рецензент:
кандидат физико-математических наук, исполняющий обязанности заведующего кафедрой прикладной математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет»
А. И. Руденко

Мухина, С. Н.

Алгебра и геометрия: учебно-методическое пособие по изучению дисциплины для студентов специальности 10.05.03 – Информационная безопасность автоматизированных систем / С. Н. Мухина. – Калининград: Изд-во ФГБОУ ВО «КГТУ», 2023. – 96 с.

Учебно-методическое пособие является руководством по изучению дисциплины «Алгебра и геометрия» для студентов специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем специализации «Безопасность открытых информационных систем». Содержит характеристику дисциплины (цель и планируемые результаты изучения дисциплины, место дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы), тематический план с описанием для каждой темы форм проведения занятия, вопросов для изучения, методических материалов к занятию.

Табл. 19, рис. 43, список лит. – 4 наименования

Учебно-методическое пособие рассмотрено и одобрено в качестве локального электронного методического материала на заседании кафедры прикладной математики и информационных технологий Института цифровых технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» 22.02.2023, протокол № 2

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины рекомендовано к использованию в учебном процессе в качестве локального электронного методического материала методической комиссией ИЦТ 17.03.2023, протокол № 2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие по учебной дисциплине «Алгебра и геометрия» представляет комплекс систематизированных учебных методических материалов и предназначен для научно-методического обеспечения профессиональной подготовки студентов специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем по специализации «Безопасность открытых информационных систем», изучающих дисциплину в первом семестре.

Цель создания пособия – обеспечить качественное методическое оснащение учебного процесса изучения дисциплины. Учебно-методическое пособие способствует успешному осуществлению учебной деятельности, эффективному усвоению учебного материала, позволяет организовать систему управления самостоятельной работой студентов, мотивирует к более глубокому изучению алгебры и геометрии.

Цель освоения дисциплины «Алгебра и геометрия»: обеспечение фундаментальной подготовки будущего специалиста в одной из важнейших областей современной математики; изучение основ классической и современной алгебры и аналитической геометрии, ознакомление с основными направлениями и методами алгебраических исследований, демонстрация возможностей применения этих методов в различных областях математики и ее приложениях.

Задачами преподавания дисциплины, отражающимися в ее содержании, являются: знакомство студентов с языком современной алгебры, ее основными понятиями; развитие интеллектуальных и творческих способностей, познавательных процессов; формирование элементов соответствующих компетенций; формирование у студента личностного знания о роли математики как части общечеловеческой культуры, как универсального языка науки.

В результате изучения дисциплины студент должен знать свойства алгебраических структур, основные понятия и задачи векторной алгебры и аналитической геометрии, основные задачи линейной алгебры, системы линейных уравнений над полями, методы аналитической геометрии и векторной алгебры для решения задач в смежных дисциплинах и физике.

Знать: основы линейной алгебры над произвольными полями, векторные пространства над полями и их свойства; основы и методы аналитической геометрии; основные понятия теории матриц и определителей, линейных систем, линейных и евклидовых пространств, линейных преобразований, их собственных векторов и чисел, квадратичных форм; основные понятия алгебры геометрических векторов, свойства линейных операций над ними, различные типы произведений таких векторов; основные геометрические объекты – прямые, плоскости, кривые и поверхности второго порядка, их уравнения в различной форме; определение комплексного числа, формы записи комплексных чисел.

Уметь: распознавать метрические объекты по их уравнениям в различных системах координат; оперировать с числовыми и конечными полями, многочленами, матрицами, комплексными числами, решать основные задачи линейной алгебры, в частности системы линейных уравнений; вычислять определители по определению (2-го, 3-го порядка), разложением по элементам строки (столбца); выполнять линейные операции над матрицами; решать системы линейных уравнений различными способами: матричным, методом Крамера, методом Гаусса; решать неопределенные системы: находить общее и частное решение линейной системы; выполнять линейные операции над векторами в координатной форме, в векторной форме; нормировать вектор; выполнять нелинейные операции над векторами: скалярное произведение двух векторов; векторное произведение двух векторов; смешанное произведение трех векторов в координатной форме и решать задачи на их приложения; составлять уравнение прямой по двум точкам; по общему уравнению прямой (плоскости) записывать параметры данного математического объекта; осуществлять переход от одного вида уравнения прямой к другому; устанавливать расположение плоскостей, имеющих неполное уравнение, по отношению к координатным плоскостям и строить их; приводить уравнение кривой к каноническому виду методом выделения полного квадрата, записывать параметры кривой по этому уравнению и строить ее график; строить плоские фигуры, ограниченные алгебраическими линиями; классифицировать поверхности; находить корни многочлена; находить матрицу линейного оператора в разных базисах, собственные векторы; выполнять действия над комплексными числами, переходить от одной формы записи к другой.

Владеть: методами решения основных алгебраических задач; навыками использования методов векторной алгебры в смежных дисциплинах и в физике; навыками работы с учебной и научной литературой; навыками работы с компьютерными математическими прикладными пакетами; алгебро-геометрическими методами при решении задач физики, профессиональных задач и содержательной интерпретацией полученных результатов.

Место дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы

Дисциплина «Алгебра и геометрия» относится к модулю «Математические науки» основной профессиональной образовательной программы высшего образования по специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем специализации «Безопасность открытых информационных систем».

При изучении дисциплины используются знания, умения и навыки довузовской подготовки по математике. Выпускник школы должен владеть системой знаний, умений и навыков по элементарной математике, основам анализа и геометрии в объеме средней школы (уровень знаний не менее 60 %).

Дисциплина является базой при изучении дисциплин математического и естественнонаучного модуля, инженерно-технического модуля.

Основными видами аудиторных учебных занятий по дисциплине являются лекции и практические занятия.

Формирование знаний обучающихся обеспечивается проведением лекционных занятий.

Изучение разделов тематического плана сопровождается практическими занятиями, в ходе которых происходит закрепление теоретических знаний, формирование и совершенствование умений, навыков и компетенций.

Контроль знаний в ходе изучения дисциплины осуществляется в виде текущего контроля, а также промежуточной аттестации в форме экзамена в первом учебном семестре в соответствии с рабочим планом.

1 Тематический план

1.1 Тематический план для студентов очной формы обучения

Таблица 1 – **Трудоемкость освоения дисциплины по очной форме**

№ п/п	**Раздел (модуль) дисциплины**	**Контактная работа с преподавателем**					**СРС**	**Подготовка и аттестация в период сессии**
		ЛК	**ЛР**	**ПР**	**РЭ**	**КА**		
1	Элементы общей алгебры	6		10	6	0,6	10	
2	Линейная и векторная алгебра	12		12	5	0,6	20	
3	Линейные операторы и пространства	6		4	2	0,45	10	
4	Аналитическая геометрия	10		8	4	0,6	19	
ИТОГ0		**34**		**34**	**17**	**2,25**	**59**	**33,75**
Всего часов								**180**

1.2 Тематический план для студентов заочной формы обучения

Заочная форма обучения не предусмотрена.

2 Содержание и методические указания по изучению дисциплины

Структура дисциплины представлена четырьмя тематическими разделами.

2.1 Раздел 1. Элементы общей алгебры

Перечень изучаемых вопросов

1. Алгебраические операции, свойства алгебраических операций (коммутативная, ассоциативная, дистрибутивная). Формы записи алгебраической операции (мультипликативная, аддитивная).

2. Алгебраическая структура с одной и двумя алгебраическими операциями.

3. Основные алгебраические структуры: группа, поле, векторные (линейные) пространства, кольцо.

4. Построение поля комплексных чисел.

5. Расширение понятия «Числовые множества».

6. Алгебраическая форма записи комплексного числа. Действия с комплексными числами в алгебраической форме.

7. Тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа.

8. Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.

9. Решение алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел.

10. Геометрия комплексных чисел.

11. Кольцо многочленов от одной переменной. Сложение и умножение многочленов. НОД многочленов.

12. Дифференцирование в кольце многочленов. Кратные корни многочленов. Формула Тейлора. Основная теорема алгебры. Алгоритм отделения кратных корней.

13. Интерполяционные многочлены.

Методические указания к изучению

Раздел 1 «Элементы общей алгебры» состоит из трех тем: алгебраические структуры; поле комплексных чисел; кольцо многочленов от одной переменной.

Цель изучения темы «Алгебраические структуры»: подготовить студентов к изучению современных шифров, которые основаны на алгебраических структурах. Лекция имеет несколько целей: рассмотреть понятие алгебраических структур; определить и привести некоторые примеры алгебраических групп; определить и привести некоторые примеры алгебраических колец, ввести понятие поля, привести примеры.

Цель изучения темы «Поле комплексных чисел»*:* знакомство студентов с историей расширения понятия числа в математике; формирование математической культуры студентов; изучение взаимодействия дисциплин «Математика», «Физика», «Электротехника» с целью углубления и расширения знаний, умений и навыков студентов, отработка практических навыков по изображению комплексных чисел на комплексной плоскости, представлению их в тригонометрической и показательной формах, выполнению действий над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

Изучение свойств колец многочленов оказало большое влияние на многие области современной математики.

1. Комплексные числа – обобщение понятия действительных чисел.

2. Существуют алгебраическая, тригонометрическая, показательная формы комплексного числа.

3. Свойства операций над комплексными числами аналогичны свойствам операций над действительными числами.

4. Кольцо многочленов – кольцо, образованное многочленами от одной или нескольких переменных с коэффициентами из другого кольца.

Основные теоретические сведения, понятия и термины раздела 1 отражены в справочных таблицах и рисунках.

Алгебраические структуры

Терминология, которую необходимо усвоить, записана в таблице 2.

Таблица 2 – **Переход терминологии**

Термины и обозначения в общем случае	**Мультипликативные термины и обозначения**	**Аддитивные термины и обозначения**
Операция $\circ$	*Умножение* $\cdot$	*Сложение* $+$
Результат $\boldsymbol{a \circ b}$	*Произведение* $a \cdot b$	*Сумма* $a + b$
Нейтральный элемент	*Единица 1*	*Нуль 0*
Симметричный элемент	*Обратный* a^{-1}	*Противоположный* $-a$
	Степень a^n	*Кратное* na

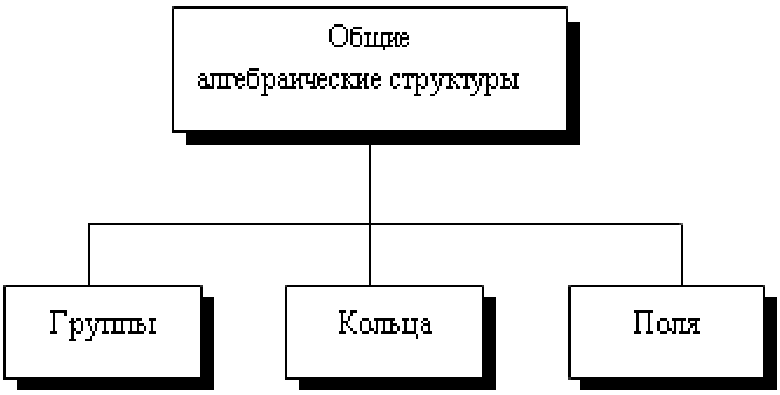


Рисунок 1. Основные алгебраические структуры

Таблица 3 – **Основные алгебраические структуры**

Алгебраические структуры с одной бинарной операцией		
название	**законы**	**примеры**
ГРУППА Группой называется множество G, на котором определена одна внутренняя бинарная алгебраическая операция *, которая подчиняется ***трем законам*** (аксиомы группы) КОММУТАТИВНАЯ ГРУППА подчиняется еще одному закону – четвертому АББЕЛЕВА ГРУППА коммутативная группа, у которой операция записана в аддитивной форме	1. Закон ассоциативности $\forall\, x, y, z \in G\colon\ x * (y * z) = (x * y) * z.$ 2. Существование нейтрального элемента $\exists e \in G\colon \forall\, x \in G\ \ x * e = e * x = x$ 3. Существование симметричного элемента $\forall\, x \in G\ \ \exists x' \in G\colon x * x' = x' * x = e$ 4. Закон коммутативности $\forall x, y \in G\colon x * y = y * x$	1. Множество целых чисел относительно сложения (Z, +) с нейтральным элементом – абелева. 2. Множество рациональных чисел относительно сложения (Q, +). 3. Множество действительных чисел относительно сложения (R, +). 4. Обозначим $Q^* = Q/\{0\}$ и $R^* = R/\{0\}$ – множества рациональных и действительных чисел без нулевого элемента (без нуля). Тогда оба множества относительно умножения являются коммутативными группами.
Алгебраические структуры с двумя бинарными операциями		
ПОЛЕ Полем называется множество К, на котором определены две внутренние бинарные алгебраические операции (сложение и умножение) и подчиняющиеся ***девяти законам*** (аксиомы поля)	1. Закон ассоциативности относительно сложения $\forall\, x, y, z \in K\colon$ $x + (y + z) = (x + y) + z$ 2. Существование нулевого элемента $\exists 0 \in K\colon$ $\forall\, x \in K\ \ x + 0 = 0 + x = x$ 3. Существование противоположного элемента $\exists x \in K\ \ \exists(-x) \in K\colon$ $x + (-x) = (-x) + x = 0$ 4. Закон коммутативности относительно сложения $\forall\, x, y \in K\colon\ x + y = y + x$ 5. Закон ассоциативности относительно умножения $x, y, z \in K\colon$ $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	1. Множество рациональных чисел. 2. Множество действительных чисел. 3. Поле рациональных дробей с одной неизвестной. 4. Поле из двух элементов: $K = \{0, 1\}$. Здесь 0 – нулевой элемент, 1 – единичный. Сложение и умножение задаются таблицами Кэли: $\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline\end{array}$ и $\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$

	6. Существование единичного элемента $\exists 1 \in K, 1 \neq 0$: $\forall x \in K \;\; x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ 7. Существование обратного элемента $\forall x \in K, x \neq 0 \;\; \exists x^{-1} \in K$: $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ 8. Закон коммутативности относительно умножения $\forall x, y \in K$: $x \cdot y = y \cdot x$ 9. Закон дистрибутивности умножения относительно сложения $\forall x, y, z \in K$: $x \cdot (y + z) = x \cdot y +$ $+ xz$ и $(x + y) \cdot z =$ $= x \cdot z + y \cdot z$	
КОЛЬЦО Кольцом называется множество А, на котором определены две внутренние бинарные алгебраические операции (сложение и умножение) и подчиняющиеся ***шести законам*** КОММУТАТИВНОЕ КОЛЬЦО подчиняется еще одному закону – седьмому КОЛЬЦО С ЕДИНИЦЕЙ в кольце А существует единичный элемент относительно умножения (аксиома 8)	1–4. Законы абелевой группы относительно сложения 5. Закон ассоциативности умножения $\forall x, y, z \in A$: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ 6. Закон дистрибутивности умножения относительно сложения $\forall x, y, z \in A$: $x(y + z) = xy + xz$ и $(x + y) \cdot z = xz + yz$ 7. Закон коммутативности умножения $\forall x, y \in A$: $x \cdot y = y \cdot x$ 8. Закон существования единичного элемента относительно умножения $\exists 1 \in A$: $\forall x \in A \;\; 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$	1. Множество целых чисел Z относительно сложения и умножения является коммутативным кольцом с единицей. 2. Множество всех многочленов от одной буквы $K[x]$ с коэффициентами из поля K относительно операций сложения и умножения многочленов является коммутативным кольцом с единицей. 3. Множество $F[a,b]$– всех числовых функций, определенных на отрезке $[a, b]$ числовой оси относительно обычных операций сложения и умножения числовых функций, является коммутативным кольцом с единицей.
ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО Пусть V – произвольное множество, элементы которого мы будем	1. Закон ассоциативности сложения $\forall x, y, z \in V$: $(x + y) + z = x + (y + z)$ 2. Существование нулевого вектора $\exists 0 \in V$:	V – множество всех векторов как направленных отрезков

называвать векторами, К – поле, элементы которого мы будем называть скалярами. Пусть на множестве V определена внутренняя бинарная алгебраическая операция, которую мы будем обозначать знаком + и называть сложением векторов. Пусть также на множестве V определена внешняя бинарная алгебраическая операция над полем К, которую мы будем называть умножением вектора на скаляр и обозначать знаком умножения. То есть, определены два отображения $\mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathrm{V}, \forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{V}$: $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \longrightarrow \mathrm{x} + \mathrm{y} \in \mathrm{V}$; $\mathrm{K} \times \mathrm{V} \to \mathrm{V}, \forall\, \lambda \in \mathrm{K}, \forall\, \mathrm{x} \in \mathrm{V}$: $(\lambda, \mathrm{x}) \longrightarrow \lambda \cdot \mathrm{x} \in \mathrm{V}$. Множество V вместе с этими двумя алгебраическими операциями называют **векторным пространством над полем К**, если эти алгебраические операции подчиняются ***восьми законам*** (аксиомы векторного пространства)	$\forall\, x \in V\;\; x + 0 = 0 + x = x$; 3. Существование противоположного вектора $\forall x \in V\;\; \exists(-x) \in V$: $x + (-x) = (-x) + x = 0$ 4. Закон коммутативности сложения $\forall\, x, y \in V$: $x + y = y + x$ 5. Закон ассоциативности умножения вектора на скаляр $\forall\, \alpha, \beta \in K, \forall\, x \in V$: $(\alpha\beta) = \alpha(\beta x)$ 6. Закон дистрибутивности умножения вектора на скаляр относительно сложения векторов $\forall\, \lambda \in K, \forall\, x, y \in V$: $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ 7. Закон дистрибутивности умножения вектора на скаляр относительно сложения скаляров $\forall\, \lambda, \mu \in K, \forall\, x \in V$: $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ 8. $\forall x \in V$: $1 \cdot x = x$, где 1 – это единица поля *К*.	

Типовые задачи

Задача 1. Даны два множества A и B.

$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ – множество первых восьми букв латинского алфавита.

$B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ – множество первых восьми натуральных чисел.

Тогда декартово произведение множества A на множество B есть множество

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), \dots, (h, 8)\}.$$

Задача 2. Пусть V – множество всех векторов как направленных отрезков. Доказать, что множество V относительно операции сложения является абелевой группой.

Решение

1. Для каждой упорядоченной пары векторов $(\vec{a}, \vec{b}) \in V^2$ определена их сумма $(\vec{a} + \vec{b}) \in V$, следовательно, операция сложения векторов – внутренняя бинарная алгебраическая операция.

2. Сложение векторов подчиняется законам ассоциативности и коммутативности:

$$\forall\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V: \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},\ \ \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b})\overrightarrow{+c}.$$

3. В множестве векторов V существует нулевой вектор

$$\vec{0} \in V: \forall \vec{a} \in V, \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}.$$

4. Для любого вектора $\forall\, \vec{a} \in V$ существует противоположный ему $-\vec{a}$.

Из 1–4 следует, что множество V векторов, как направленных отрезков относительно операции сложения является абелевой группой.

Задача 3. Пусть V – множество всех векторов как направленных отрезков. Доказать, что множество V образует вещественное векторное пространство.

Решение

1. Относительно сложения векторов множество V является абелевой группой (задача 2).

2. Из школьного курса геометрии известна еще одна операция с векторами – умножение вектора на число, в результате которой получается тоже вектор. Следовательно, эта операция является внешней бинарной алгебраической операцией на множестве V над полем действительных чисел:

$$R \times V \longrightarrow V.$$

3. Проверяем все аксиомы векторного пространства.

Из 1–3 следует, что множество всех векторов как направленных отрезков образует вещественное векторное пространство.

Поле комплексных чисел

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной* плоскостью (ее также обозначают C). Ось абсцисс называется *действительной осью,* а ось ординат – *мнимой* (рис. 2).

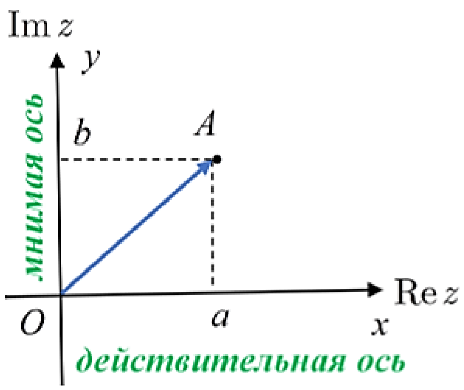


Рисунок 2. Комплексная плоскость

Таблица 4 – **Виды комплексных чисел**

Виды комплексных чисел	**Определение**
чисто мнимое число	вещественная часть равна нулю $z = 0 + bi$
действительное число	комплексное число с нулевой мнимой частью $z = a + 0i$
равные комплексные числа	два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их вещественные и мнимые части, т.е. $a + bi = c + di \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d)$
нулевой элемент	$0 = 0 + 0i$
противоположное комплексное число	$-z = -(a + bi) = -a + (-b)i$
комплексно сопряженные числа	числа, которые отличаются друг от друга знаком мнимой части $z = a + bi, \qquad \bar{z} = a - bi$

Таблица 5 – **Формы записи комплексного числа**

алгебраическая	$z = x + iy,$ $x = Rez,\ y = Imz,\ i^2 = -1$
тригонометрическая	$z = \lvert z\rvert(\cos\varphi + i\sin\varphi),$ $\lvert z\rvert = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ $tg\varphi = \frac{y}{x}$ *(необходимо учитывать четверть)* $\varphi \in [0; 2\pi]$ или $[-\pi; \pi]$
показательная	$z = \lvert z\rvert e^{i\varphi}$ *(получается из формулы Эйлера)*

Таблица 6 – **Действия над комплексными числами в тригонометрической форме**

умножение	$z_1 \cdot z_2 = \|z_1\|\|z_2\|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
возведение в степень	$z^n = \|z\|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$
деление	$\frac{z_1}{z_{2_1}} = \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$
извлечение корня	$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\|z\|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$ $k = 0,1 \dots n-1$

Таблица 7 – **Действия над комплексными числами в показательной форме**

умножение	$z_1 \cdot z_2 = \|z_1\|\|z_2\|e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
возведение в степень	$z^n = \|z\|^n e^{in\varphi}$
деление	$\frac{z_1}{z_{2_1}} = \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|}e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$
извлечение корня	$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\|z\|}e^{i\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)},$ $k = 0,1 \dots n-1$

Типовые задачи

1. Комплексные числа в алгебраической форме

Задача 4. Изобразить комплексные числа $z = -\sqrt{3} + i$ в комплексной плоскости.

Решение

Числу $z = -\sqrt{3} + i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(-\sqrt{3}; 1)$ или вектор $\overrightarrow{OM}$(рис. 3).

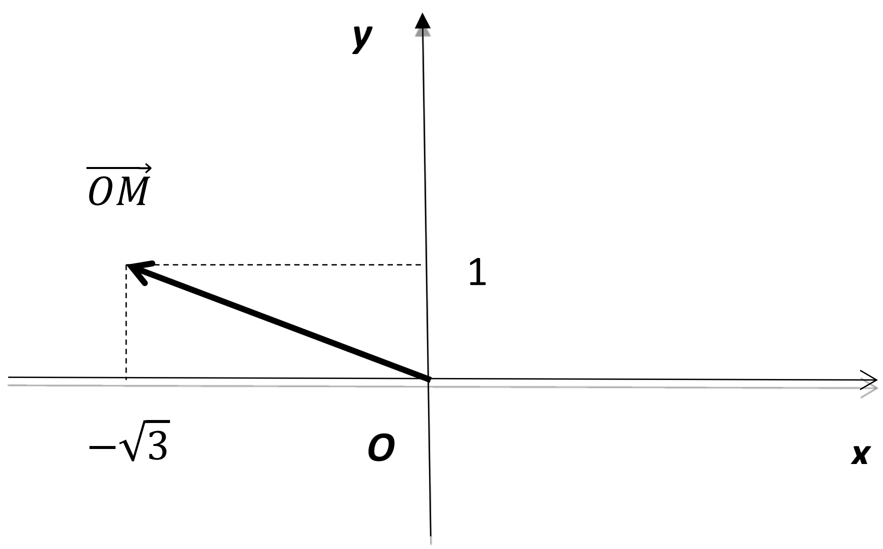


Рисунок 3. Геометрическое представление комплексного числа $z = -\sqrt{3} + i$

Задача 5. Выполнить действия:

а) $(-1+7i)+(2-5i)=1+2i$;

б) $(2+4i)-3i=2+i$;

в) $(1+i)(2-3i)=2-3i+2i-3i^2=5-i$;

г) $(2-3i)^2=4-12i+9i^2=-5-12i$;

д) $\frac{1+2i}{2+i}=\frac{(1+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{2-i+4i-2i^2}{4-i^2}=\frac{4+3i}{5}=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$;

е) $\frac{1}{i}=-i,\ \frac{-1}{i}=i,\ \frac{2+3i}{i}=\frac{2}{i}+3=-2i+3=3-2i.$

Задача 6. Вычислить $(1+i)^4+(1-i)^4$.

Решение

Пусть $1+i=z \Longrightarrow z^2=(1+i)^2=2i \Longrightarrow z^4=(z^2)^2=(2i)^2=-4$;

$$(1-i)^4=(\overline{z})^4=\overline{z^4}=\overline{-4}=-4;$$

$$(1+i)^4+(1-i)^4=(-4)+(-4)=8.$$

Задача 7. Найти степень числа i.

$$i^{195}=i^{194}i=(i^2)^{97}i=(-1)^{97}i=-i;$$

$$i^{62}=(i^2)^{31}=(-1)^{31}=-1;$$

$$i^{44}=(i^2)^{22}=(-1)^{22}=1.$$

2. Комплексные числа в тригонометрической и в показательной формах

Задача 8. Представить комплексные числа $z=-\sqrt{3}-i,\ z=-2,\ z=2i$ в тригонометрической форме.

Решение

1. Числу $z=-\sqrt{3}-i$ соответствует точка $M\left(-\sqrt{3};-1\right)$ (рис. 4).

Модуль комплексного числа $|z|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=2.$

Аргумент комплексного числа (точка лежит в III четверти)

$$\varphi=-\pi+arctg\frac{-1}{-\sqrt{3}}=-\pi+arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=-\pi+\frac{\pi}{6}=-\frac{5\pi}{6}.$$

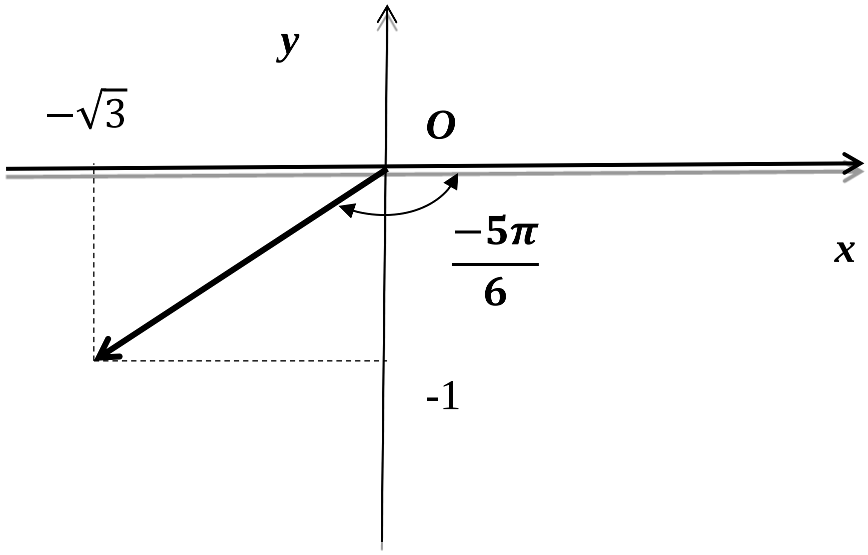


Рисунок 4. Геометрическое представление числа
$z = -\sqrt{3} - i$

Тогда тригонометрическая форма числа имеет вид:

$$z = -\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right).$$

2. Числу $z = -2$ соответствует точка $M(-2;0)$ (рис. 5). Модуль комплексного числа $|z| = \sqrt{(-2)^2 + (0)^2} = 2$. Аргумент комплексного числа (точка лежит на отрицательной части оси *Ox*): $\varphi = \pi$.

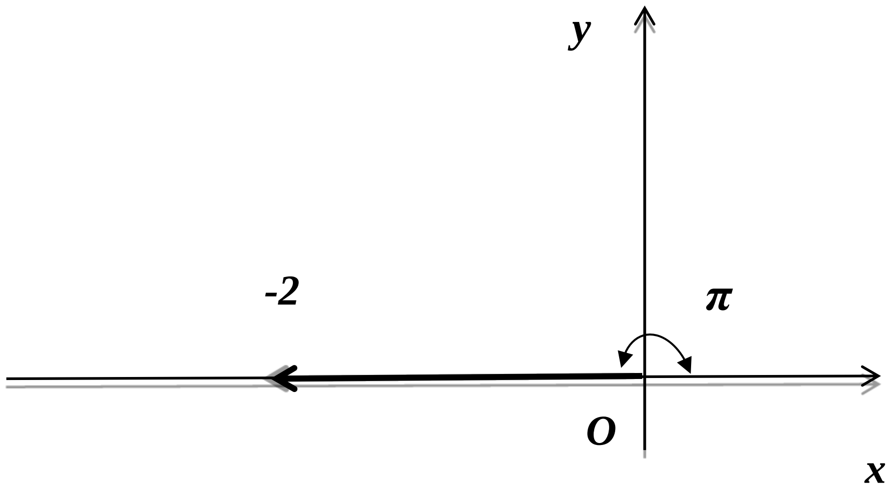


Рисунок 5. Геометрическое представление числа
$z = -2$

Тогда тригонометрическая форма числа имеет вид:

$$z = -2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi).$$

3. Числу $z = 2i$ соответствует точка $M(0;2)$ (рис. 5).

Модуль комплексного числа $|z| = \sqrt{(2)^2 + (0)^2} = 2$. Аргумент комплексного числа (точка лежит на положительной части оси *Oy*): $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

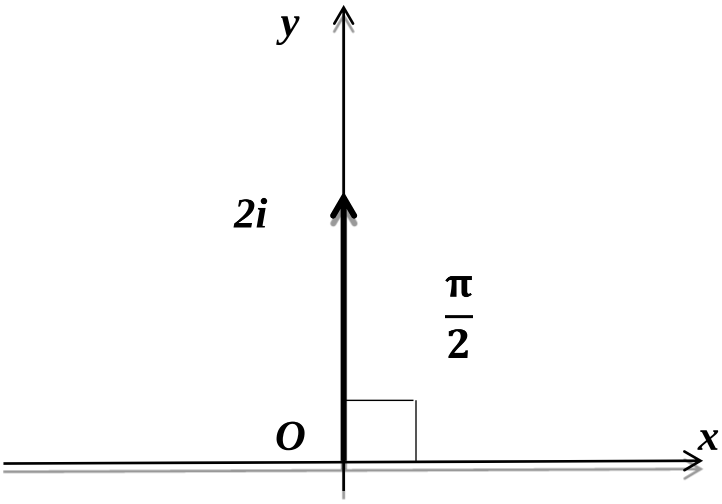


Рисунок 6. Геометрическое представление числа
$z = 2i$

Тогда тригонометрическая форма числа имеет вид:

$$z = 2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Задача 9. Представить комплексное число $z = 4\sqrt{3} - 4i$ в показательной форме.

Решение

Числу $z = 4\sqrt{3} - 4i$ соответствует точка $M\left(4\sqrt{3}; -4\right)$ (рис. 7).

Модуль комплексного числа $|z| = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + (-4)^2} = 8$. Аргумент комплексного числа (точка лежит в IY четверти)

$$\varphi = arctg\frac{-4}{4\sqrt{3}} = -arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}.$$

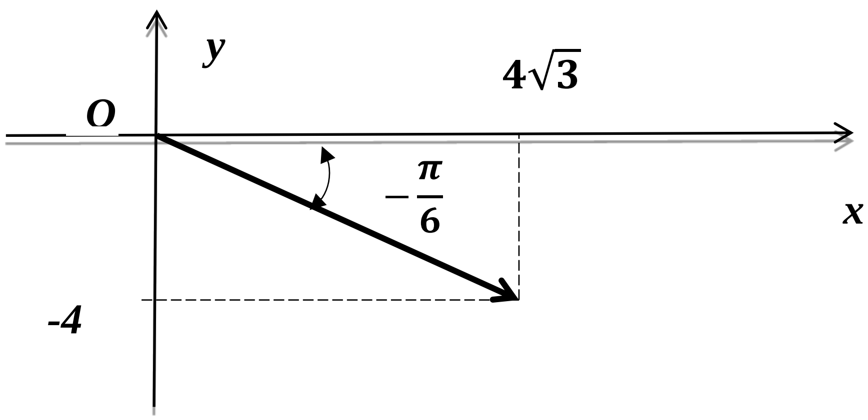


Рисунок 7. Геометрическое представление числа
$\mathrm{z} = 4\sqrt{3} - 4\mathrm{i}$

Тогда показательная форма комплексного числа $z = 4\sqrt{3} - 4i = 8e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

Задача 10. Найти произведение и частное двух комплексных чисел
$$z_1 = -\sqrt{3} - i, \qquad z_2 = 4\sqrt{3} - 4i \in$$
в тригонометрической и показательной формах.

Решение

1. Представим каждое число в тригонометрической форме
$$z_1 = -\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\left(-\tfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\tfrac{5\pi}{6}\right)\right) \text{ (задача 8)};$$
$$z_2 = 4\sqrt{3} - 4iz_2 = 8\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)\right) \text{ (задача 9)}.$$

Найдем произведение этих чисел в тригонометрической форме:
$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) =$$

$$= z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 8\left(\cos\left(\frac{-5\pi}{6} + \frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-5\pi}{6} + \frac{-\pi}{6}\right)\right) =$$
$$= 16(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Найдем частное этих чисел в тригонометрической форме:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) =$$
$$= \frac{2}{8}\left(\cos\left(\frac{-5\pi}{6} - \frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-5\pi}{6} - \frac{-\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

2. Представим каждое число в показательной форме:
$$z_1 = -\sqrt{3} - i = 2e^{-\frac{5\pi}{6}i};\ z_2 = 4\sqrt{3} - 4i = 8e^{-\frac{\pi}{6}i}$$

Найдем произведение этих чисел в показательной форме:
$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = 16e^{i\pi}.$$

Найдем частное этих чисел в показательной форме:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{1}{4}e^{-\frac{2\pi}{3}i}$$

Задача 11. Выполнить возведение комплексного числа в степень по формуле Муавра $\left(-\sqrt{3} + 3i\right)^8$.

Решение

1. Числу $z = -\sqrt{3} + 3i$ соответствует точка $M\left(-\sqrt{3}; 3\right)$ (рис. 8).

Модуль комплексного числа $|z| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$. Аргумент комплексного числа (точка лежит в II четверти)
$$\varphi = \pi + arctg\frac{3}{-\sqrt{3}} = \pi - arctg\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

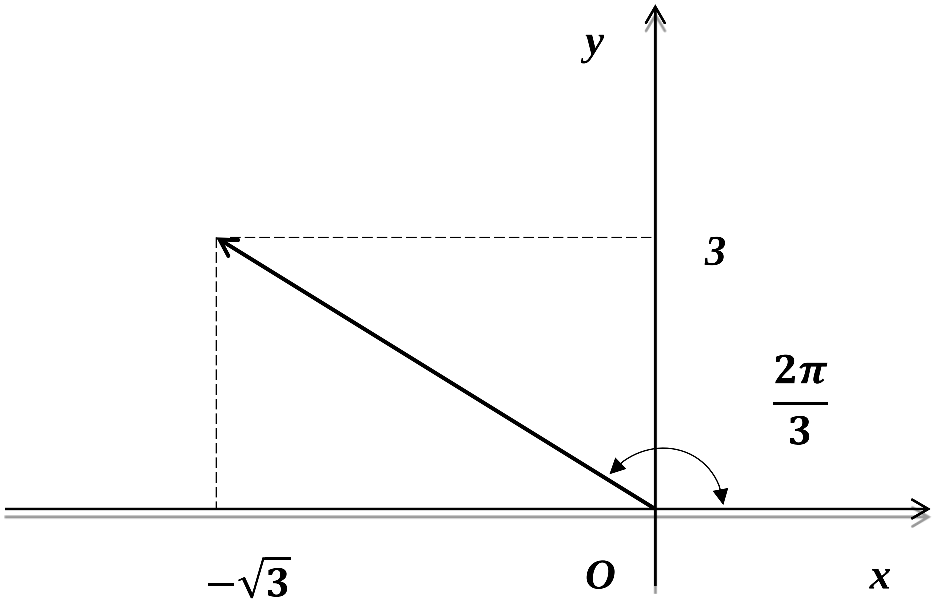


Рисунок 8. Геометрическое представление числа
$z = -\sqrt{3} + 3i$

Тогда тригонометрическая форма числа имеет вид:

$$z = -\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

2. Выполним возведение в степень по формуле Муавра:

$$\left(-\sqrt{3} + 3i\right)^8 = \left(2\sqrt{3}\right)^8\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\cdot 8\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\cdot 8\right)\right) =$$

$$= 20736\cdot\left(\cos\frac{16\pi}{3} + i\sin\frac{16\pi}{3}\right) = 20736\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right),$$

$$\left(-\sqrt{3} + 3i\right)^8 = 20736\cdot\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -10368 - i\sqrt{3}\cdot 10368.$$

Задача 12. Найти все значения корня из комплексных чисел

$$\sqrt{-1};\ \sqrt[4]{-2 + 2\sqrt{3}i}.$$

Решение

1. Для извлечения корня из комплексного числа $z = -1$ представим его в тригонометрической форме.

Числу $z = -1$ соответствует точка $M(-1; 0)$ (рис. 9).

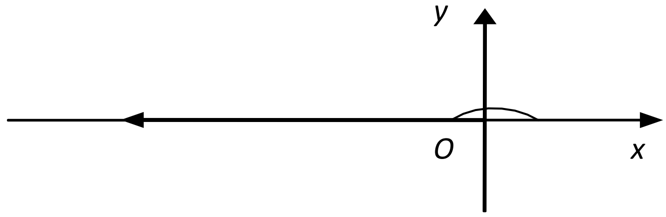


Рисунок 9. Геометрическое представление числа $\mathrm{z} = -1$

Модуль комплексного числа $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = 1$. Аргумент комплексного числа (точка лежит на отрицательной части оси Ox): $\varphi = \pi$. Тогда тригонометрическая форма числа имеет вид:

$$z = -1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Выполним извлечение корня:

$$\sqrt{-1} = \sqrt{1}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{2}\right), k = 0, 1.$$

При $k = 0$: $z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$;

при $k = 1$: $z_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$.

Найденные значения корня в комплексной плоскости представляют собой точки $M_1(0; 1)$ и $M_1(0; -1)$, лежащие на окружности радиуса 1 и расположенные на одинаковом расстоянии друг от друга (рис. 10).

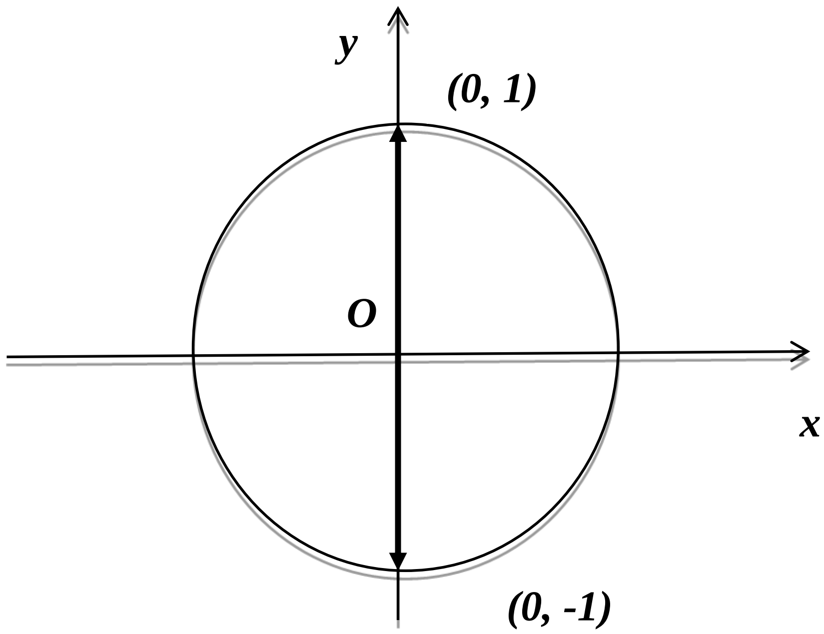


Рисунок 10. Все значения $\sqrt{-1}$

2. Для извлечения корня из комплексного числа $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}i}$ представим его в тригонометрической форме. Числу $z=-2+2\sqrt{3}i$ соответствует точка $M\left(-2;2\sqrt{3}\right)$ (рис. 11).

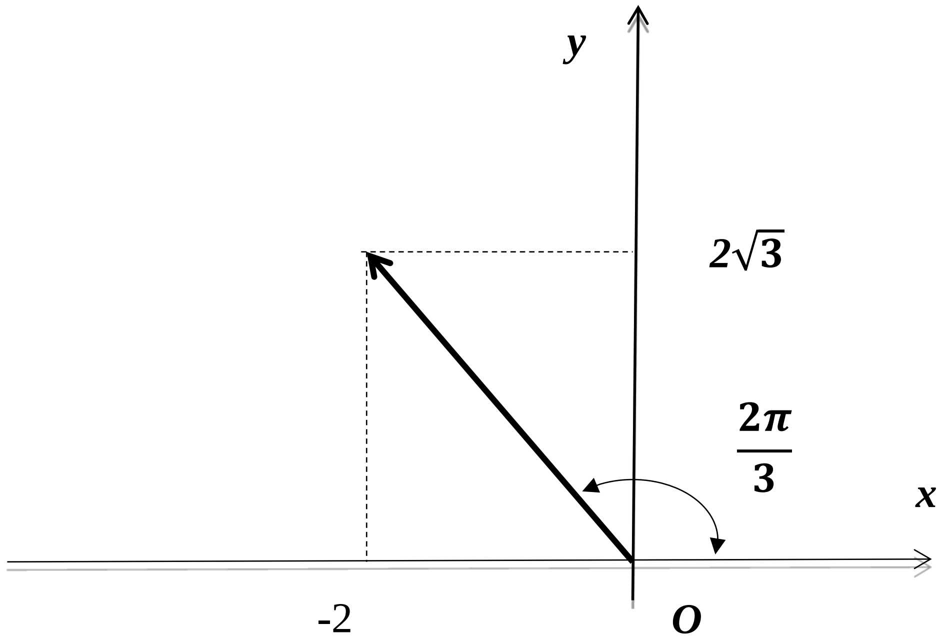


Рисунок 11. Геометрическое представление
числа $\mathrm{z}=-2+2\sqrt{3}\mathrm{i}$

Модуль комплексного числа $|z|=\sqrt{(-2)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=4$. Аргумент комплексного числа (точка лежит в II четверти)

$$\varphi=\pi+arctg\frac{2\sqrt{3}}{-2}=\pi-arctg\sqrt{3}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}.$$

Тогда тригонометрическая форма числа имеет вид:

$$z=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Выполним извлечение корня:

$$\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}i}=\sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}\right),k=0,1,2.$$

При $k=0$: $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

при $k=1$: $z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$;

при $k=2$: $z_3=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

при $k=3$: $z_4=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Найденные значения корня в комплексной плоскости представляют собой точки, лежащие на окружности радиуса $\sqrt{2}$ и являющиеся вершинами квадрата (рис. 12).

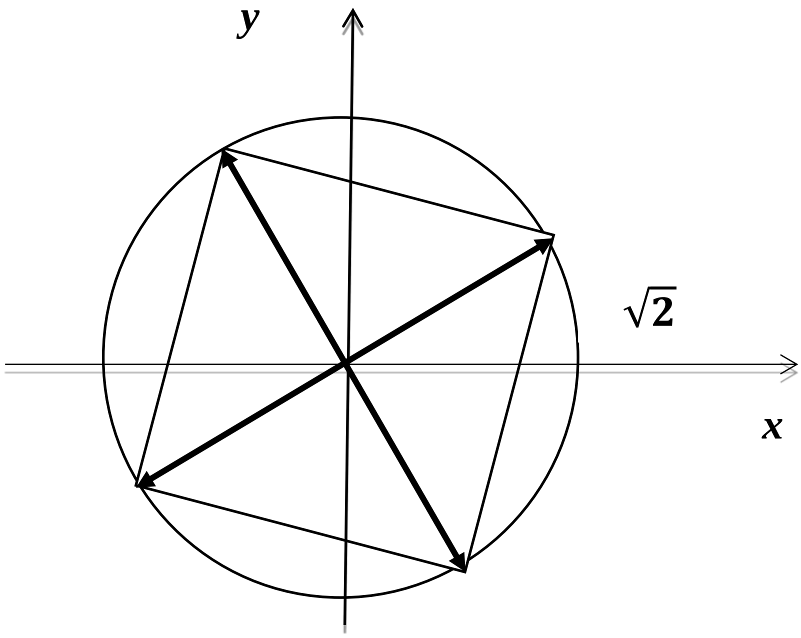


Рисунок 12. Все значения
$\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}\mathrm{i}}$

Задача 13. Решить уравнения на множестве комплексных чисел

$$x^6 - 1 = 0, \qquad x^3 - 1 + i = 0.$$

Решение

Рассмотрим уравнение $x^6 - 1 = 0$. Выразим x из уравнения:

$$x = \sqrt[6]{1}$$

и найдем все значения корня. Для этого представим число $z = 1$ в тригонометрической форме.

Числу $z = 1$ соответствует точка $M(1; 0)$ (рис. 13).

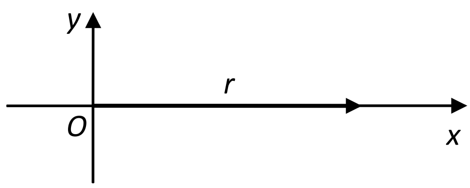


Рисунок 13. Геометрическое представление
числа $\mathrm{z} = 1$

Модуль комплексного числа $|z| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$. Аргумент комплексного числа (точка лежит на положительной части оси Ox): $\varphi = 0$.

Тогда тригонометрическая форма числа имеет вид $z = 1(\cos 0 + i \sin 0)$.

Выполним извлечение корня:

$$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{0+2\pi k}{6} + i\sin\frac{0+2\pi k}{6}\right), k = 0,1, \dots ,5.$$

$$k = 0: x_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1;$$

$$k = 1: x_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$k = 2: x_3 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$k = 3: x_4 = \cos\pi + i\sin\pi = -1;$$

$$k = 4: x_5 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$k = 5: x_6 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Рассмотрим уравнение $x^3 - 1 + i = 0.$ Выразим x из уравнения $x = \sqrt[3]{1-i}$ и найдем все значения корня. Для этого представим число $z = 1 - i$ в тригонометрической форме.

Числу $z = 1 - i$ соответствует точка $M(1; -1)$ (рис. 14).

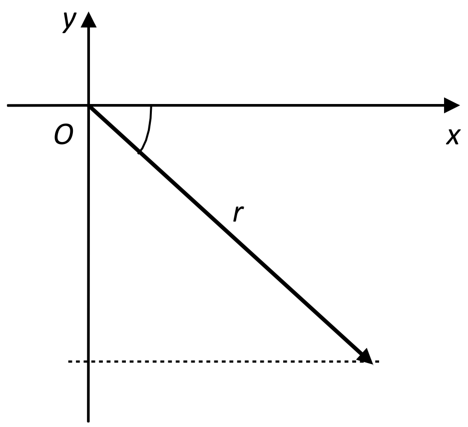


Рисунок 14. Геометрическое представление числа $z = 1 - i$

Модуль комплексного числа $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$ Аргумент комплексного числа (точка лежит в IY четверти):

$$\varphi = arctg\frac{y}{x} = arctg\frac{-1}{1} = -arctg1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Тогда тригонометрическая форма числа имеет вид:

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Выполним извлечение корня:

$$\sqrt[3]{1-i} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}\right), k = 0,1,2.$$

$$k = 0: x_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right);$$

$$k = 1: x_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right);$$

$$k = 2: x_3 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

3. Построение областей в комплексной плоскости

Из формулы вычитания комплексных чисел следует, что модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа: $d = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}$.

Этот факт используют при построении областей в комплексной плоскости.

Задача 14. В комплексной плоскости построить область, заданную указанными условиями.

1. $|z| = 3$

Решение

На основании формулы расстояния между двумя точками, изображающими комплексные числа на плоскости, данное условие определяет множество точек, удаленных от точки $z_0 = 0$ на расстояние 3, то есть определяет окружность радиуса 3 с центром в точке (0; 0) (рис. 15).

Иначе, модуль комплексного числа $z = x + iy$ равен 3, т. е.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9.$$

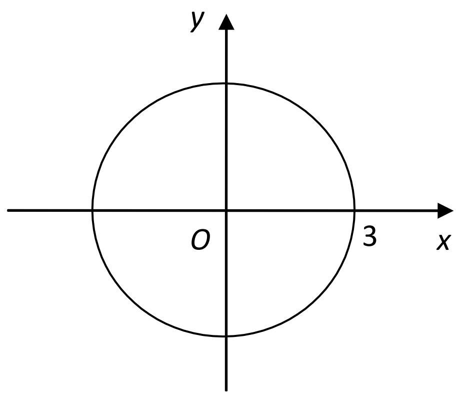


Рисунок 15. Линия, заданная условием $|z| = 3$

2. $|z| < 3$

Решение

На основании формулы расстояния между двумя точками, изображающими комплексные числа на плоскости, данное условие определяет множество точек, удаленных от точки $z_0 = 0$ на расстояние, меньшее 3, то есть определяет внутреннюю часть круга с центром в точке (0; 0) радиуса 3 (рис. 16).

Иначе, модуль комплексного числа $z = x + iy$ меньше 3, т. е.

$$\sqrt{x^2 + y^2} < 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 9.$$

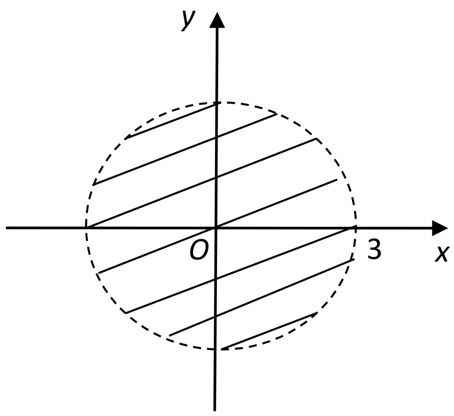


Рисунок 16. Линия, заданная условием $|\mathrm{z}| < 3$

3. $|z - 1| > 2$

Решение

На основании формулы расстояния между двумя точками, изображающими комплексные числа на плоскости, данное условие определяет множество точек, удаленных от точки $z_0 = 1$ на расстояние, большее 2, то есть определяет область, расположенную вне круга с центром в точке (1; 0) радиуса 2 (рис. 17).

Иначе, модуль комплексного числа $z = x + iy - 1$ больше 2, т. е.

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} > 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 > 4.$$

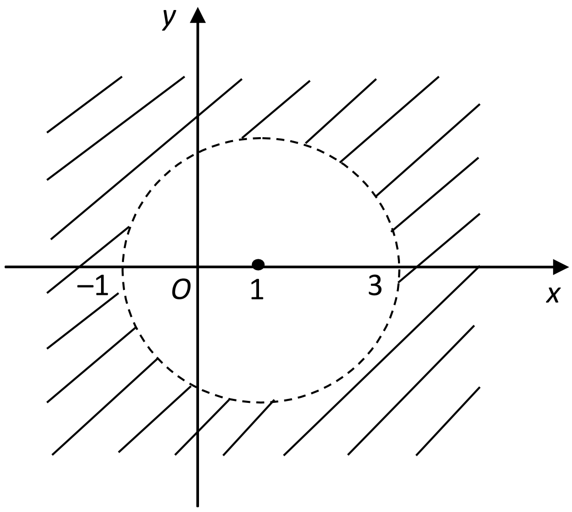


Рисунок 17. Область, заданная условием $|\mathrm{z} - 1| > 2$

4. $-\frac{3\pi}{4} \leq argz < -\frac{\pi}{6}$

Решение

Данное условие определяет множество точек, расположенных между лучами $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$ и $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, включая точки луча $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$ и не включая точки луча $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ (рис. 18).

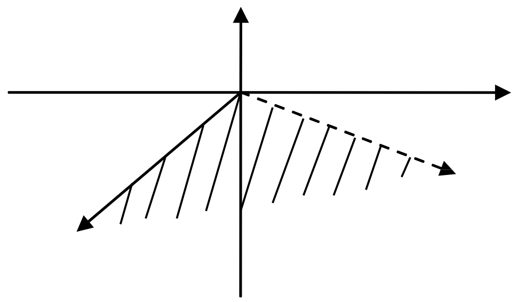


Рисунок 18. Область, заданная условием

$$-\frac{3\pi}{4} \leq \mathrm{argz} < -\frac{\pi}{6}$$

5. $3 \leq |z| < 5,\ Rez \geq 0$

Решение

На основании формулы расстояния между двумя точками, изображающими комплексные числа на плоскости, первое условие определяет множество точек, удаленных от точки $z_0 = 0$ на расстояние, не меньшее 3 и меньшее 5, то есть определяет кольцо, расположенное между двумя окружностями с центрами в начале координат радиусов 3 и 5, при этом точки окружности радиуса 3 включаем, а радиуса 5 исключаем.

Второе условие определяет множество точек, абсциссы которых неотрицательны, то есть область, расположенную правее оси *Oy*, включая точки оси.

Окончательно, заданная область представляет полукольцо, расположенное между правыми половинами окружностей с центрами в начале координат радиусов 3 и 5, включая точки окружности радиуса 3 и исключая точки окружности радиуса 5 (рис. 19).

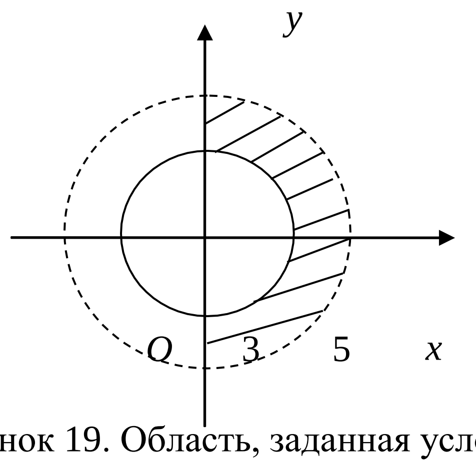


Рисунок 19. Область, заданная условием

$$3 \leq |\mathrm{z}| < 5, \qquad \mathrm{Rez} \geq 0$$

Кольцо многочленов

Под ***многочленом*** *от одной переменной x с коэффициентами из поля K понимается формальное выражение вида*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n, \text{где}$$

- $a_i \in K$ *– коэффициенты многочлена;*
- $a_n \neq 0$ *– старший коэффициент;*
- a_0 *– свободный член;*
- $a_n x^n$*- старший член многочлена;*
- $n = \deg f(x)$ *– степень ненулевого многочлена.*

1. Вместо формального выражения можно рассматривать счетные последовательности $(a_0,\ a_1,\ a_{n-1},\ a_n, \ldots, 0, 0, \ldots\ )$, $a_i \in K$, в которых почти все a_i (кроме конечного числа) равны нулю.

2. Нулевой многочлен – это $f(x) = a_0 = 0$.

3. Два многочлена f(x) и g(x) называются **равными** (алгебраически), если равны соответствующие коэффициенты при каждой степени x^k переменной x, т. е.

$$\deg f = \deg g, \qquad a_i = b_i, \qquad i = 0,1, \ldots, \deg f.$$

Другие формы записи многочленов

Название	*Форма записи*
стандартная	$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
приведенная (нормированная, унитарная)	$f(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$

Пусть $K[x]$ – множество всех многочленов с коэффициентами из поля *K*. На множестве $K[x]$ введем операции сложения и умножения для

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,\ \ g(x) = \sum_{i=0}^{s} b_i x^i.$$

1. Сложение многочленов

$$f(x) + g(x) = \sum_{i \geq 0} d_i x^i,\ \ \text{где } d_i = a_i + b_i.$$

2. Умножение многочленов

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{i \geq 0} t_i x^i,\ \ \text{где } t_i = \sum_{\substack{k+i=i \\ 0 \leq k,l \leq i}} a_k b_l\,.$$

Свойства степени многочленов

$\deg(f+g) \leq max(\deg f, \deg g)$
$\deg(fg) = \deg f + \deg g$

Таблица 8 – **Деление многочлена на многочлен**

нацело	**с остатком**
Многочлен f ($f \in K[x]$) делится на многочлен h ($h \in K[x]$), если существует многочлен g ($g \in K[x]$) такой, что $f = hg$	*Многочлен f делится на многочлен g в кольце K[x]* ***с остатком****, если найдутся многочлены q и r в этом кольце такие, что* $f = gq + r$, $\deg r < \deg g$

Теорема Безу: *остаток от деления многочлена $f \in K[x]$ на линейный многочлен $(x-\alpha)$ равен значению многочлена в α $(\alpha \in K)$.*

$$\boxed{f(x) = (x-\alpha)q(x) + f(\alpha)}$$

Следствие. *Многочлен $f \in K[x]$ делится на $(x-\alpha)$тогда и только тогда, когда α – корень многочлена f.*

Разложение многочлена по степеням x - c

Многочлен

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

может быть разложен по степеням *x – c* следующим образом:

$$f = r_n(x-c)^n + r_{n-1}(x-c)^{n-1} + \cdots + r_1(x-c)^1 + r_0.$$

В этом разложении r_0 – остаток от деления fна $(x - \text{c})$, а именно

$$f = (x-c)f_1 + r_0;$$

$$f_1 = (x-c)f_2 + r_1 \text{ и так далее}$$

$$r_n = a_n..$$

Общим делителем многочленов f_1 и f_2, *из которых хотя бы один ненулевой, называется многочлен d_*, на который делятся оба многочлена* f_1 и f_2. *Общий делитель наибольшей степени называется* ***наибольшим общим делителем*** *многочленов* f_1 и f_2 *и обозначается НОД* $(f_1, f_2) = d$.

Критерий
наибольшего общего делителя двух многочленов

$d =$ *НОД* (f_1, f_2), если выполняются два условия:

1. $f_1 ⋮ d$ и $f_2 ⋮ d$;
2. для любого общего делителя d_* многочленов $f_1,\ f_2 \to d ⋮ d_*$.

Конструктивный способ отыскания *НОД* (f_1, f_2) – ***алгоритм Евклида***. Как и в алгоритме Евклида в кольце целых чисел, он состоит в цепочке делений с остатком. Степень каждого последующего остатка строго меньше степени предыдущего, поэтому существует такой шаг k, для которого остаток $f_k \neq O$, а остаток $f_{k+1} = O$.

Последний ненулевой остаток в алгоритме Евклида для многочленов f_1, f_2, не равных нулю одновременно, является одним из их наибольших общих делителей.

Основная теорема алгебры.
Кратные корни многочлена

Если любой многочлен $f \in K[x]$, степени не меньшей 1, имеет по крайней мере один корень из K, то поле K называется ***алгебраически замкнутым.***

Рассмотрим многочлен $x^2 + 1$. Он не имеет действительных корней в поле R, следовательно, поле действительных чисел алгебраически замкнутым не является. Именно это послужило основной причиной построения поля комплексных чисел C. Поле C алгебраически замкнуто, а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема. (Основная теорема алгебры). Любой многочлен $f \in C[x]$ степени не меньше 1 имеет по крайней мере один комплексный корень.

Еще одна формулировка основной теоремы алгебры.

Теорема. (Основная теорема алгебры). Поле С комплексных чисел алгебраически замкнуто.

Справедливы следующие утверждения.

1. В алгебраически замкнутом поле K любой многочлен $f \in K[x]$ степени n имеет n корней, среди которых могут быть равные, и допускает разложение на линейные множители следующего вида:

$$f = a_0(x - c_1) \cdots (x - c_n), \qquad a_0, c_i \in K.$$

2. Разложение многочлена $f \in K[x]$ в алгебраически замкнутом поле K единственно с точностью до порядка следования множителей. ***Каноническое разложение*** многочленов в ***алгебраически замкнутом поле*** имеет вид:

$$f = a_0(x - c_1)^{k_1} \cdots (x - c_s)^{k_s}, a_0, c_1 \ldots c_s \in K, c_i \neq c_j \text{ при } i \neq j;$$
$$k_1 \ldots k_s \in N, k_1 + \cdots k_s = degf;$$
$$c_1 \ldots c_s \text{ – попарно различные корни } f;$$
$$k_1 \ldots k_s \text{ – показатели кратности соответствующих корней.}$$

3. ***Каноническое разложение*** многочленов ***над полем вещественных чисел***

$$f = a_0(x - c_1)^{k_1} \cdots (x - c_s)^{k_s}(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \cdots (x^2 + p_rx + q_r)^{m_r},$$
$$a_0, c_1 \ldots c_s,\ p_1 \ldots p_r,\ q_1 \ldots q_r,\ \in R;$$
$$a_0 \neq 0, \qquad c_i \neq c_j \text{ при } i \neq j;$$

$$p_i^2 - 4q_i < 0;\ k_1 \ldots k_s, \qquad m_1 \ldots m_r \in N;$$
$$k_1 \ldots k_s + 2(m_1 \ldots m_r) = degf.$$

Свойство корней многочленов с вещественными коэффициентами

1. Если комплексное число z является корнем многочлена с вещественными коэффициентами, то комплексно сопряженное число $\bar{z}$ также является корнем этого многочлена $(z, \bar{z} \in C)$.

2. Многочлен f с вещественными коэффициентами, имеющий комплексный корень z с ненулевой мнимой частью, делится на многочлен

$$\varphi(x) = (x - z)(x - \bar{z}).$$

3. Если z – комплексный корень k-й кратности многочлена f с вещественными коэффициентами, то $\bar{z}$ также является корнем корень k-й кратности многочлена f.

Алгоритм отделения кратных корней многочлена

1. Ищется производная $f^{/}$; $d = \text{НОД}(f, f^{/})$.

2. Ищется многочлен $f_1 = \frac{f}{d}$, который не содержит кратных корней и его корни совпадают с корнями многочлена f.

3. Ищутся корни многочлена f_1.

4. Определяется кратность корней многочлена f (например, по схеме Горнера), совпадающих с найденными корнями многочлена f_1. Или используем утверждение: «Для многочлена $f \in K[x]$ скаляр $c \in K$ является корнем кратности k $(k > 1)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$f(c) = f^{/}(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0, f^{(k)}(c) \neq 0.$$

Формула Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x - a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

С помощью формулы Тейлора можно, например, преобразовать многочлен целой степени от одного вида к другому. Значение этой формулы заключается в том, что она устанавливает взаимосвязь между коэффициентами многочлена и значениями его производных в точке x_0.

Типовые задачи

Задача 15. Найти остаток от деления многочлена $f = x^{100} + x^{10} + 1$ на $(x - 1)$.

Решение

Согласно теореме Безу, остаток равен $f(1) = 1^{100} + 1^{10} + 1 = 3$.

Задача 16. При каком a многочлен $f(x) = x^3 + ax - 10$ делится на $(x - 2)$.

Решение

Согласно следствию из теоремы Безу, $x = 2$ – корень данного многочлена, то есть $f(2) = 8 + 2a - 10 = 0 \Longrightarrow a = 1$.

Задача 17. Разложить многочлен $f = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ по степеням $(x + 1)$.

Решение

Найдем остатки от деления f на $(x + 1)$ и остатки от деления неполных частных на $(x + 1)$ по схеме Горнера.

1	2	-3	-4	1
1	1	-4	0	$r_0 = 1$
1	0	-4	$r_1 = 4$	
1	-1	$r_2 = -3$		
1	$r_3 = -2$			
$r_4 = 1$				

Таким образом, искомое разложение многочлена $f = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ по степеням $(x + 1)$ запишется в виде:

$$f = r_4(x+1)^4 + r_3(x+1)^3 + r_2(x+1)^2 + r_1(x+1) + r_0$$
$$= 1(x+1)^4 - 2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 1.$$

Задача 18. Найти НОД (267, 213).

Решение

Выполним деление с остатком: НОД (267, 213) = НОД (213, 54) = НОД (54, 51) = НОД (51, 3) = 17.

267	213		213	54		54	51		51	3
213	1		162	3		51	1		3	17
54			51			3			21	

Задача 19. Найти наибольший общий делитель многочленов

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 \text{ и } x^3 - 2x^2 + x - 2.$$

Решение

$$\text{НОД}\,(x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, x^3 - 2x^2 + x - 2) =$$
$$= \text{НОД}(x^3 - 2x^2 + x - 2, 7x^2 + 7) = \text{НОД}(x^3 - 2x^2 + x - 2, x^2 + 1) = x^2 + 1.$$

$x^4+ x^3+2x^2+x+1$	x^3-2x^2+x-2
- $x^4-2x^3+x^2-2x$	$x+3$
$3x^3+x^2+3x+1$ - $3x^3-6x^2+3x-6$	
$7x^2+\quad 7$	

В алгоритме Евклида можно использовать остатки, умноженные на любые ненулевые числа. Поэтому на последнем шаге многочлен x^3-2x^2+x-2 делится на многочлен $7x^2+7$, умноженный на $1/7$, чтобы избежать дробных коэффициентов.

x^3-2x^2+x-2	x^2+1
- $x^3+\quad x$	$x-2$
$-2x^2-2$ - $-2x^2-2$	
0	

Последний ненулевой остаток $7x^2+7$, следовательно, это и есть наибольший общий делитель.

Задача 20. Определить кратность корня $x_0=2$ многочлена $f=x^5-5x^4++7x^3-2x^2+4x-8$.

Решение

Убедимся, что 2 – корень многочлена и найдем значения производных многочлена при $x=2$.

$$f(2)=0,\qquad f^{(1)}(2)=0,\qquad f^{(2)}(2)=0,\quad f^{(3)}(2)\neq 0,.$$

Следовательно, $x_0=2$ является корнем кратности 3.

Задача 21. Представить многочлен $f=1+8(x-2)+6(x-2)^2+(x-2)^3$ в виде разложения по степеням *x*.

Решение

$$f(x)=f(0)+\frac{f^{(1)}(0)}{1!}(x-0)+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}(x-0)^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3.$$

Последовательно вычисляем

$$f(0)=1,\ f^{(1)}(0)=-4,\ f^{(2)}(0)=0,\ f^{(3)}(0)=6.$$

Таким образом,

$$f(x) = 1 - 4x + x^3.$$

Задача 22. Найти целую часть и остаток от деления многочлена

$$f(x) = 1 + 8(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3$$

на двучлен $(x+1)$, не деля многочлены.

Решение

Представим многочлен в виде

$$f(x) = f(-1) + \frac{f^{(1)}(-1)}{1!}(x+1) + \frac{f^{(2)}(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{f^{(3)}(-1)}{3!}(x+1)^3.$$

Тогда

$$\frac{f(x)}{x+1} = \underbrace{f^{(1)}(-1) + \frac{f^{(2)}(-1)}{2}(x+1) + \frac{f^{(3)}(-1)}{6}(x+1)^2}_{\text{целая часть}} + \frac{f(-1)}{x+1}.$$

Учитывая, что

$$f(-1) = 4, \quad f^{(1)}(-1) = -1, \quad f^{(2)}(-1) = -6, \quad f^{(3)}(-1) = 6,$$

получаем:

- целая часть равна $-1 - 6(x+1) + 6(x+1)^2$;
- остаток от деления равен $f(-1) = 4$.

Интерполяционные многочлены

В классе полиномиальных функций ***задача интерполяции*** формулируется следующим образом: по заданной таблице

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_{n+1}
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_{n+1}

найти многочлен f, принимающий в заданных попарно различных элементах $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, заданные значения $y_1 \cdots y_{n+1}$ и имеющий степень, не превосходящую n. Такой многочлен существует и единственен.

Интерполяционный многочлен Лагранжа

$$f = \frac{(t-x_2)\cdots(t-x_{n+1})}{(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_{n+1})}y_1 + \cdots + \frac{(t-x_1)\cdots(t-x_n)}{(x_{n+1}-x_1)\cdots(x_{n+1}-x_n)}y_{n+1}.$$

В правой части имеется $n + 1$ слагаемое, каждое из которых представляет собой многочлен n-й степени, так как содержит n линейных множителей.

Интерполяционный многочлен Ньютона

$$f = b_1 + (t - x_1)b_2 + (t - x_1)(t - x_2)b_3 + \cdots (t - x_1) \cdots (t - x_n)b_{n+1}.$$

Степень многочлена Ньютона не превосходит n, так как максимальную степень имеет последнее слагаемое в правой части, а его степень не превосходит n. Коэффициенты $b_1, \cdots, b_{n+1}$ многочлена Ньютона определяются последовательно из следующих равенств:

$y_1 = b_1$	$\rightarrow$	b_1
$y_2 = b_1 + (x_2 - x_1)b_2$	$\rightarrow$	b_2
$y_3 = b_1 + (x_3 - x_1)b_2 + (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)b_3$	$\rightarrow$	b_3
$y_n = b_1 + (x_n - x_1)b_2 + \cdots + (x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})b_n$	$\rightarrow$	b_n
$y_{n+1} = b_1 +$ $+ (x_{n+1} - x_1)b_2 + \cdots + (x_{n+1} - x_1) \cdots (x_{n+1} - x_n)b_{n+1}$	$\rightarrow$	b_{n+1}

Интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона являются одним и тем же многочленом, записанным по-разному.

Рекомендуемая литература: /1, 3/.

Контрольные вопросы

1. Понятия алгебраической структуры, алгебры, модели.
2. Определение группы. Аддитивные и мультипликативные группы, абелева группа, полугруппы. Примеры.
3. Определение кольца. Делители нуля, область целостности. Примеры.
4. Определение поля. Примеры. Поле вещественных чисел.
5. Как строится поле комплексных чисел?
6. Определение комплексного числа, его геометрическое представление.
7. Виды комплексных чисел (чисто мнимое число, действительное число, противоположное комплексное число, комплексно сопряженные числа, равные комплексные числа).
8. Формы записи комплексных чисел (алгебраическая, тригонометрическая, показательная).
9. Действия над комплексными числами в алгебраической форме (сложение, вычитание, умножение, деление).

10. Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах (произведение, деление, возведение в целую положительную степень, извлечение корня).

11. Геометрическая интерпретация действий над комплексными числами.

12. Многочлены от одной переменной. Формы записи.

13. Корни многочлена. Основная теорема алгебры (две формулировки).

14. Интерполяционные многочлены (Лагранжа и Ньютона).

2.2 Раздел 2. Линейная и векторная алгебра

Перечень изучаемых вопросов

1. Матрица. Определение. Частные виды матриц. Единичная матрица. Транспонирование матриц. Сложение матриц. Умножение матриц на число. Умножение матриц. Обратная матрица.

2. Определители второго и третьего порядков. Их вычисление. Свойства определителей. Понятие об определителях любого конечного порядка.

3. Системы линейных уравнений. Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера. Решение систем линейных уравнений средствами матричного исчисления. Однородные системы.

4. Понятие о ранге матрицы. Теорема Кронекера – Капелли. Метод Гаусса.

5. Векторы. Основные определения. Линейные операции над векторами: сложение. Вычитание, умножение вектора на число. Условие коллинеарности векторов.

6. Проекция вектора на ось. Прямоугольная декартова система координат на плоскости и в пространстве. Разложение вектора по ортам координатных осей. Координаты вектора. Направляющие косинусы вектора, длина вектора.

7. Линейная комбинация векторов. Линейно зависимые и линейно независимые векторы. Разложение вектора по базису.

8. Линейные операции над векторами, заданными проекциями на координатные оси.

9. Координаты вектора, заданного двумя точками. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении.

10. Скалярное и векторное, смешанное произведения векторов. Их приложения к решению задач физики и геометрии.

Методические указания

Важно хорошо усвоить свойства определителей, так как без их применения практически невозможно вычислять определители высших порядков (выше третьего). Умение вычислять определители пригодится при изучении последующих тем. Понятие матрицы тесно связано с исследованием и решением систем линейных уравнений.

Понятие вектора в современной математике является довольно широким понятием, связанным с понятием линейных операций (сложением и умножением на число). Такие операции уже встречались, например, в арифметике, теории матриц. В каждом конкретном случае они определялись по-своему, в соответствии со спецификой тех множеств, для которых они рассматриваются (числа, матрицы). Но свойства этих операций одинаковы. Именно эта общность и сближает их. При решении задач следует учесть особенности применяемой терминологии.

Основные теоретические сведения, понятия и термины, формулы раздела 2 отражены в справочных таблицах и рисунках.

Матричная алгебра

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

- a_{ij} – элементы матрицы,
- i – номер строки,
- j – номер столбца.

Например, матрица порядка 3х3 имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Элементы, идущие из левого верхнего угла, образуют *главную диагональ*. Матрицу A называют матрицей размера $m\times n$.

Основные виды матриц и действия над матрицами приведены в таблице 9 и таблице 10.

Таблица 9 – **Частные виды матриц**

Название матрицы	**Словесная формулировка**	**Пример**
Квадратная	Число строк равно числу столбцов	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
Диагональная	Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме стоящих на главной диагонали, равны нулю	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Единичная	Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице	$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Название матрицы	**Словесная формулировка**	**Пример**
Нулевая	Все элементы равны нулю	$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Матрица-строка	Матрица, размер которой $1 \times m$	$(a_{11} \quad \dots \quad a_{1m})$
Матрица-столбец	Матрица, размер которой $m \times 1$	$\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$
Транспонированная	Матрица называется транспонированной по отношению к матрице А, если строки матрицы А служат ее столбцами.	$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad A^T=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Две матрицы называются **равными**, если они одного порядка и их соответствующие элементы равны.

Таблица 10 – **Действия над матрицами**

Линейные операции над матрицами	
1. Сложение	
Формальная модель	Наглядно-эмпирическая модель
Суммой матриц A и B одинаковой размерности называется матрица С той же размерности, $m \times n$ каждый элемент которой равен сумме элементов матриц A и B, стоящих на тех же местах	$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то $A \pm B=\begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}$
2. Произведение матрицы на число	
Формальная модель	Наглядно-эмпирическая модель
Произведением матрицы на число называется матрица той же размерности, что и исходная, все элементы которой равны элементам исходной матрицы, умноженным на данное число	$k \cdot A=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$

Произведение матриц	
Формальная модель	Наглядно-эмпирическая модель
Произведением матрицы A размерности $m \times p$ и матрицы B размерности $p \times n$ называется матрица C размерности $m \times n$ каждый элемент которой c_{ij}определяется формулой $$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}.$$ Таким образом, элемент c_{ij} представляет собой сумму произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.	$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$$ $$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + b_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

Пример 1. Найти произведение AB, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 8 \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot 6 + (-1) \cdot 7 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{3 \times 3} \qquad \mathbf{3 \times 1} \qquad \mathbf{3 \times 1}$$

Легко показать, что

$$AE = EA = A.$$

В общем случае произведение матриц не обладает переместительным свойством умножения:

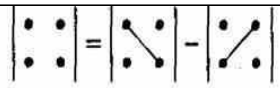
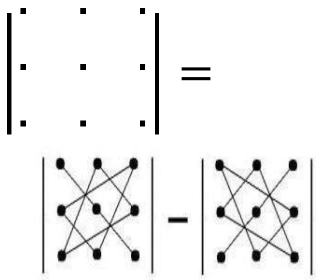
$$AB \neq BA.$$

Матрицы, для которых $AB = BA$ называются **перестановочными**. Например, $AE = EA$.

Определители

Квадратной матрице A порядка n ставят в соответствие число, которое называется ее *определителем* (детерминантом) и обозначается $detA,\ \Delta A$ или $|A|$ и вычисляется по особому правилу (таблица 11).

Таблица 11 – **Вычисление определителя**

Квадратная матрица	***Формула для вычисления***	***Графическая модель***
$A = a_{11}$	$detA = a_{11}$	
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$	$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$	
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$	$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$	

Пример 4. Вычислить определители $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2;$

б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 3 - -2 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \cdot 4 = -6 + 8 - 2 = 0.$

Минором M_{ij} элемента a_{ij}определителя n-го порядка называется определитель (n-1) -го порядка, полученный из данного вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется его минор, взятый с тем же знаком, если сумма индексов i + j – четная, с противоположным знаком, если эта сумма – нечетная:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}\ .$$

Пример 5. Найти минор и алгебраическое дополнение элемента a_{23} определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение

Вычеркиваем в заданном определителе вторую строку и третий столбец:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

Получили, что $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$, $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -(8 - 14) = 6.$

Теорема. *Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие алгебраические дополнения*

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}.$$

Пример 6. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ путем разложения по элементам первого столбца.

Решение

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} == 2 + (2 - 9) + 0 = -5.$$

Свойства определителей

1. Определитель Δ не изменится, если строки заменить столбцами, не меняя порядка.

2. Определитель Δ будет равен нулю, если элементы какого-либо ряда (строки или столбца) умножить на алгебраическое дополнение другого ряда.

3. При перестановке двух строк (столбцов) знак определителя изменится на противоположный.

4. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

5. Общий множитель элементов одной строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

6. Определитель, имеющий две пропорциональные строки (столбца) равен нулю.

7. Определитель не изменится, если к элементам какого-либо ряда

прибавить элементы другого ряда, умножив их на некоторое число, отличное от нуля.

8. Если в определителе Δ произведены преобразования так, что получен определитель

$$\bar{\Delta}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & k_1a_{11}+k_2a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & k_1a_{11}+k_2a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & k_1a_{11}+k_2a_{32} \end{vmatrix},$$

то говорят, что его третий столбец есть *линейная комбинация* первых двух. В этом случае полученный определитель $\bar{\Delta}$ равен нулю.

Все свойства доказываются непосредственным вычислением.

Пример 7. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение

$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$, т. к. элементы третьего столбца есть линейные комбинации элементов первых двух столбцов.

Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется *обратной* матрице A, если

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E.$$

Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если ее определитель

$$\Delta\neq 0.$$

Для всякой невырожденной матрицы A можно найти обратную по следующей формуле (на примере матрицы 3-го порядка):

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\quad A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Правило отыскания обратной матрицы

1. Вычисляем определитель матрицы A и убеждаемся, что матрица невырожденная ($\Delta\neq 0$).

2. Вычисляем алгебраические дополнения A_{ij}.

3. Составляем обратную матрицу. Обращаем внимание, что в первом столбце обратной матрицы стоят алгебраические дополнения первой строки матрицы A и т. д.

4. Делаем проверку $A^{-1}A=E$.

Пример 8. Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение

1. Вычисляем определитель матрицы $\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$

2. Вычисляем алгебраические дополнения A_{ij} элементов матрицы

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$	$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$	$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1$
$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$	$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5$	$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6$
$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3$	$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$	$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$

3. Составляем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ -1 & -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Делаем проверку $A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Системы линейных уравнений

Ограничимся рассмотрением случая при $n = 3$. Пусть задана система 3-х линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_{2,} \quad где \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases}$$

- a_{ij} – коэффициенты системы,

- $b_1,\ b_{2,}\ b_3$ – свободные члены.

Матрица

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей системы*, а ее определитель Δ называется *главным определителем* системы. Если к матрице системы добавить столбец свободных членов, получим *расширенную матрицу системы уравнений.*

решение системы	совокупность чисел c_1, $c_{2,}$ c_3, которые обращают уравнения системы в верные равенства
совместная система	система имеет хотя бы одно решение
несовместная система	система, не имеющая решений
определенная система	имеет единственное решение
неопределенная система	имеет бесконечно много решений

Исследование систем линейных уравнений

Для решения и исследования систем линейных уравнений введем такое понятие, как *ранг* матрицы.

Рангом r матрицы называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Иначе, рангом матрицы называется наибольший *порядок* отличного от нуля определителя этой матрицы, при том, что все остальные определители порядка выше r равны нулю.

Пример 9. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение

Для нахождения ранга матрицы, сделаем ряд преобразований и приведем матрицу A к эквивалентному виду:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Т. к. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$, а все определители 3-го порядка равны 0, то

$$r(A) = 2.$$

Теорема Кронекера – Капелли. *Для совместности системы необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы.*

Таблица 12 – **Следствия из теоремы Кронекера – Капелли**

$\boldsymbol{r(A)}$ – ранг основной матрицы, $\boldsymbol{r(A/B)}$ – ранг расширенной матрицы, n – число неизвестных	
$\boldsymbol{r(A) = r(A/B) = n}$	система имеет единственное решение
$\boldsymbol{r(A) = r(A/B) < n}$	система имеет бесконечно много решений решение
$\boldsymbol{r(A) \neq r(A/B)}$	система несовместна

Таблица 13 – **Методы решения систем линейных уравнений**

Методы решения	Математическая модель
Средствами матричного исчисления $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix}$ – матрица-столбец из неизвестных; $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b_1}\\ \boldsymbol{b_2}\\ \boldsymbol{b_3}\end{pmatrix}$ – матрица-столбец из свободных членов	Чтобы решить заданную систему, надо: 1) найти обратную матрицу A^{-1} для матрицы этой системы; 2) умножить матрицу A^{-1} на матрицу-столбец свободных членов В. $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A^{-1}B}$
Правило Крамера Δ – определитель системы, Δ_i – вспомогательные определители, которые получены из определителя системы заменой i-го столбца столбцом свободных членов	$\boldsymbol{x_i}=\dfrac{\Delta_i}{\Delta}$,

Типовые задачи

Задача 1. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x+5y+z=0,\\ 2x-4y-3z=-1,\\ 3x+4y+2z=8.\end{cases}$

Доказать ее совместность и решить двумя способами: по правилу Крамера; средствами матричного исчисления.

Решение

Определим ранг матрицы данной системы и ранг ее расширенной матрицы. Запишем расширенную матрицу.

$$\begin{pmatrix}1 & 5 & 1 & 0\\ 2 & -4 & -3 & -1\\ 3 & 4 & 2 & 8\end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы системы $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 5 & 1\\ 2 & -4 & -3\\ 3 & 4 & 2\end{vmatrix}=-41\neq 0.$

Так как определитель матрицы системы отличен от нуля, ее ранг равен 3. Расширенная матрица является прямоугольной с числом строк, равным 3. Поэтому ее ранг тоже равен 3. По теореме Кронекера – Капелли данная система совместна.

<u>Первый способ</u>

Решим систему по правилу Крамера.

Определитель системы уже найден: $\Delta=-41$. Вычислим вспомогательные определители $\Delta_x,\ \Delta_y,\ \Delta_z$. Чтобы их получить, заменим соответственно первый, второй и третий столбец определителя системы столбцом свободных членов.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}0 & 5 & 1\\ -1 & -4 & -3\\ 8 & 4 & 2\end{vmatrix}=-82,\qquad \Delta_y=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -3\\ 3 & 8 & 2\end{vmatrix}=-41,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -123.$$

По правилу Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-82}{-41} = 2, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-41}{-41} = 1, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-123}{-41} = 3.$$

<u>Второй способ</u>

Решим данную систему средствами матричного исчисления. Обозначим матрицу-столбец из неизвестных $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, а матрицу-столбец из свободных членов $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$, матрицу системы, составленную из коэффициентов при неизвестных $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Тогда данную систему можно записать в виде

$$A \cdot X = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Умножим обе части этого матричного уравнения слева на обратную матрицу A^{-1} :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$
$$X = A^{-1}B.$$

Чтобы решить данную систему средствами матричного исчисления, следует:

- найти матрицу A^{-1}, обратную матрице A:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix};$$

- найти произведение матрицы A^{-1} на матрицу B.

Вычисляем алгебраические дополнения всех элементов матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -13, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 20, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 11,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = -11,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 5, \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -14.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-41}\begin{pmatrix} 4 & -6 & -11 \\ -13 & -1 & 5 \\ 20 & 11 & -14 \end{pmatrix}.$$

Найдем произведение матрицы A^{-1} на матрицу-столбец B. Предварительно вспомним правило умножения матрицы на матрицу-столбец:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3 \\ a_{31}b_1 + a_{32}b_2 + a_{33}b_3 \end{pmatrix},$$

$$X = \frac{1}{-41}\begin{pmatrix} 4 & -6 & -11 \\ -13 & -1 & 5 \\ 20 & 11 & -14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = -\frac{1}{41}\begin{pmatrix} -82 \\ 41 \\ -123 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 2; y = -1; z = 3$.

Рекомендуемая литература: /1, глава 2 § 1, 2/.

Контрольные вопросы

1. Сколько элементов содержит определитель 3-го порядка?
2. Есть ли в определителе Δ_2 элемент a_{22}, a_{23}?
3. В определителе $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ -1 & -4 & -3 \\ 8 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ перечислить элементы, стоящие на главной диагонали (на побочной).
4. Для определителя $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ -1 & -4 & -3 \\ 8 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ вычислить M_{21}, A_{21}.
5. Вычислить определитель наиболее удобным способом $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.
6. Продолжить равенства: $A \cdot A^{-1} = \cdots$; $\det(AB) = \cdots$; $A \cdot E = \cdots$; $A^{-1} = \cdots$.
7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$. Записать A^T.

8. Записать единичную матрицу любой размерности.

9. Привести пример матрицы B такой, чтобы была выполнима операция:

$$A_{2\times 3}\cdot B_{m\times n}.$$

10. Какая из матриц имеет себе обратную:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; $b)$ $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $c)$ $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & -8 & 4 \end{pmatrix}$?

11. Найти ранг матрицы A, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

12. Дана система линейных уравнений размерностью 4 на 4. Сколько решений имеет система, если: $r(A) = 4,\ r(A/B) = 4;\ r(A) = 3,\ r(A/B) = 3;\ r(A) = 3,\ r(A/B) = 4.$

13. Записать систему линейных уравнений, если $AX = B,$ где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Векторная алгебра

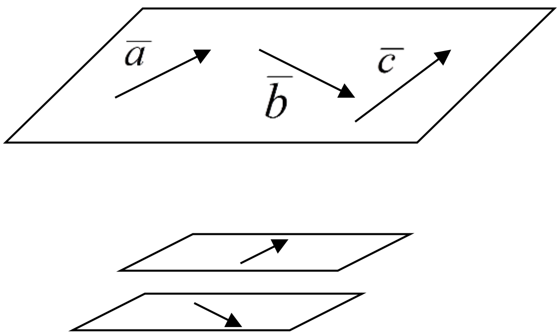
Таблица 14 – **Виды величин**

Величина	Определение	Примеры
скалярные	полностью определяются своим числовым значением	длина, площадь, температура, масса, работа
векторные	определяются не только численным значением, но и направлением	скорость, сила, ускорение

Для наглядного изображения векторных величин используются геометрические векторы. *Вектором* называется направленный отрезок, т. е. отрезок, имеющий длину и определенное направление.

Вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. *Длиной* или модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right| = |\vec{a}|$.

Таблица 15 – **Виды векторов**

Вектор	Определение
Нулевой вектор $\vec{0}$	вектор, длина которого равна нулю
Единичный вектор	вектор, длина которого равна единице
Орт вектора $\vec{a}^0$	вектор, длина которого равна единице и направление совпадает с направлением данного вектора
Противоположный вектору $\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$
Коллинеарные	лежат на одной или параллельных прямых; коллинеарные векторы могут быть одинаково или противоположно направлены $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b},\ \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$
Равные	коллинеарные, одинаково направлены и имеют одинаковые длины
Компланарные	лежат в одной плоскости или параллельных плоскостях 

Линейные операции над векторами

Пусть $\vec{a}, \vec{b}$ – два произвольных вектора. Возьмем произвольную точку O и построим вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, из точки A построим вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$.

Линейными операциями называются операции сложения, вычитания векторов и умножения вектора на число.

1. *Суммой векторов* $\vec{a} + \vec{b}$ называется вектор $\overrightarrow{OB}$, соединяющий начало первого вектора с концом второго (рис. 20).

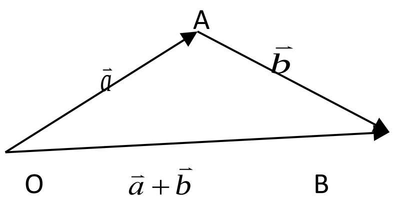


Рисунок 20. Сложение двух векторов

Это правило сложения векторов называется правилом треугольника. Ниже показано сложение трех векторов (рис. 21).

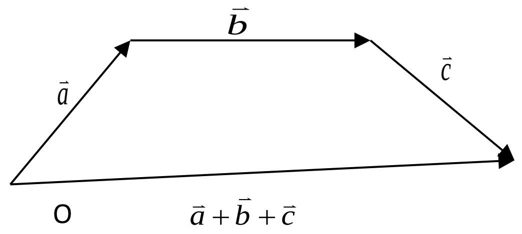


Рисунок 21. Правило многоугольника

2. *Разностью векторов* $\vec{a}-\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, что $\vec{a}=\vec{c}+\vec{b}$.

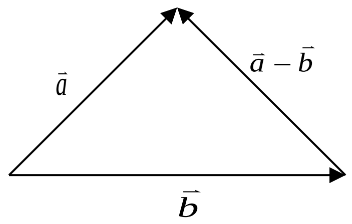


Рисунок 22. Разность векторов

В параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a},\vec{b}$, одна направленная диагональ является суммой векторов $\vec{a}+\vec{b}$, другая – разностью $\vec{a}-\vec{b}$ (рис. 23).

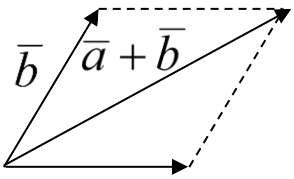


Рисунок 23. Правило параллелограмма

3. *Произведением вектора* $\vec{a}$ *на число* (*скаляр*) λ называется вектор $\lambda\vec{a}$, длина которого равна $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda>0$ и противоположно вектору $\vec{a}$, если $\lambda<0$ (рис. 24).

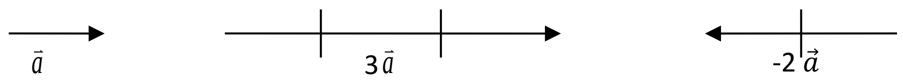


Рисунок 24. Произведение вектора на число

Проекция вектора на ось. Свойства проекций

Осью называется луч с выбранной единицей масштаба. Проекцией точки на ось называется основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на ось. Пусть заданы ось Ox и вектор $\overrightarrow{AB}$ (рис. 25).

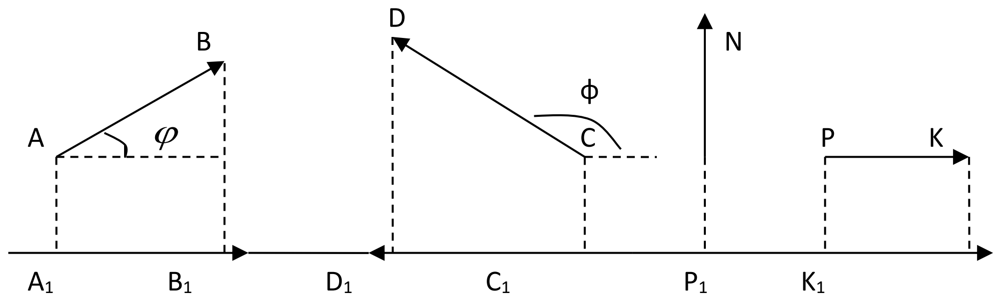


Рисунок 25. Проекции векторов ни ось

Обозначим A_1, B_1 проекции точек на ось Ох. Вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ называется *геометрической проекцией* вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось Ох, или *составляющей* (*компонентой*) вектора $\overrightarrow{AB}$ на оси Ох.

Алгебраической проекцией (или просто проекцией) вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось Ох называется число, равное $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, взятое со знаком «+», если направление оси и вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ совпадают, и со знаком «–», если эти направления противоположны.

На рисунке 25: $np_{Ox}\overrightarrow{AB} > 0$; $np_{Ox}\overrightarrow{CD} < 0$; $np_{Ox}\overrightarrow{MN} = 0$; $np_{Ox}\overrightarrow{PK} = |PK|$.

Свойства проекций

1. Проекция вектора на ось равна произведению модуля вектора на косинус угла между вектором и осью $np_{Ox}\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\varphi$.

2. Проекция суммы векторов на одну и туже ось равна сумме их проекций на эту ось $np_{Ox}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = np_{Ox}\vec{a} + np_{Ox}\vec{b}$.

3. При умножении вектора $\vec{a}$ на число λ его проекция умножается на это число $np_{Ox}(\lambda\vec{a}) = \lambda \cdot np_{Ox}\vec{a}$.

Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат *OXYZ*. Единичные векторы координатных осей обозначим $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и назовем координатными ортами. Выберем произвольный вектор пространства и поместим его начало в точку *O* (рис. 26).

Найдем проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси. Проведем через точку *A* плоскости, параллельные координатным плоскостям. Точки пересечения этих плоскостей с координатными осями обозначим A_1, A_2, A_3. Получим прямоугольный параллелепипед, одной из диагоналей которого является вектор $\overrightarrow{OA}$.

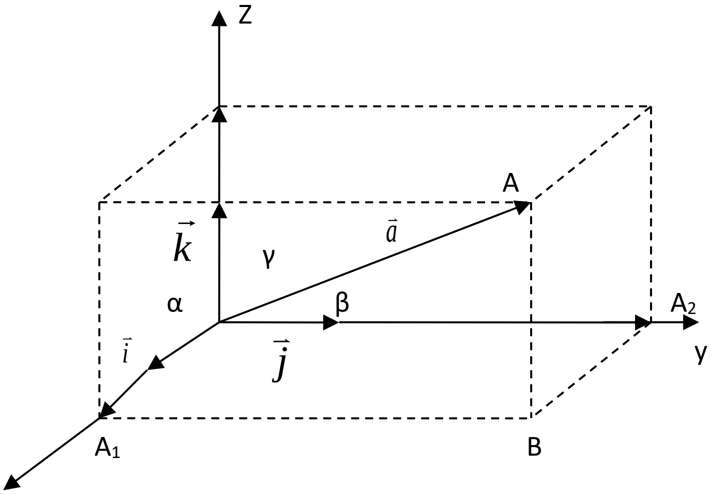


Рисунок 26. Проекции вектора на координатные оси

Введем обозначения

$$np_{Ox}\overrightarrow{OA} = |OA_1| = x, np_{Oy}\overrightarrow{OA} = |OA_2| = y, np_{Oz}\overrightarrow{OA} = |OA_3| = z.$$

По определению суммы векторов находим $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BA}$,

Но $\overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA_3}$.

Тогда получим:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}.$$

Теперь выразим слагаемые вектора через их проекции. Получим:

$$\vec{a} = \left|\overrightarrow{OA_1}\right|\vec{i} + \left|\overrightarrow{OA_2}\right|\vec{j} + \left|\overrightarrow{OA_3}\right|\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Эта формула является *основной формулой векторного исчисления* и называется разложением вектора по ортам координатных осей. Числа x, y, z – *координатами вектора*.

Таким образом, координаты вектора являются его проекциями на координатные оси. Используется следующие равносильные равенства:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Leftrightarrow \vec{a} = (x, y, z).$$

Зная координаты вектора, легко найти его *модуль*:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Обозначим углы вектора $\vec{a}$ с координатными осями α, β, γ (рис. 25). По свойству проекции вектора на ось имеем:

$$cos\,\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}, \quad cos\,\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}, \quad cos\,\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}.$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора. Легко видеть, что $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$.

Направляющие косинусы являются координатами единичного вектора, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$:

$$\vec{a}_0 = (cos\,\alpha, cos\,\beta, cos\,\gamma).$$

Таблица 16 – **Основные формулы векторного исчисления**

Название формулы	Формула
Основная формула векторного исчисления (разложение вектора по ортам координатных осей)	$\vec{a} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \Leftrightarrow \vec{a} = (x, y, z)$
Длина вектора	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
Направляющие косинусы вектора	$cos\,\alpha = \frac{x}{\lvert\vec{a}\rvert}, \quad cos\,\beta = \frac{y}{\lvert\vec{a}\rvert}, \quad cos\,\gamma = \frac{z}{\lvert\vec{a}\rvert}$
Орт вектора	$\vec{a}_0 = (cos\,\alpha, cos\,\beta, cos\,\gamma)$
Линейные операции над векторами, заданными проекциями	$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2;\ y_1 \pm y_2 \pm z_1 \pm z_2),$ $\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$
Равенство векторов, коллинеарность векторов	$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x_1 = x_2;\ y_1 = y_2;\ z_1 = z_{2,}\ \vec{a}//\vec{b}$ $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$
Координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, если известны координаты точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$	$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$
Деление отрезка в данном отношении $\frac{M_1N}{NM_2} = \lambda$	$x_N = \frac{x_{M_1} + \lambda x_{M_2}}{1 + \lambda};\ y_N = \frac{y_{M_1} + \lambda y_{M_2}}{1 + \lambda}$

Произведение векторов

Операция умножения двух векторов, с одной стороны, должна подчиняться в основном тем же законам, что и операция умножения чисел; с другой стороны, она должна обобщать распространенные в геометрии и физике конкретные операции.

Оказывается, что и с той и с другой точек зрения возможны две операции умножения двух векторов. Одна дает в результате скаляр и поэтому называется ***скалярным умножением***, другая – вектор – ***векторное умножение***.

Скалярное произведение векторов

Пусть сила $\vec{F}$, действующая на прямолинейно перемещающуюся точку M, постоянна и составляет постоянный угол φ с перемещением $\vec{S}$ точки M (рис. 27). Тогда, как известно из физики, работа A силы $\vec{F}$ на перемещение $\vec{S}$ равна:

$$A = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cos\varphi.$$

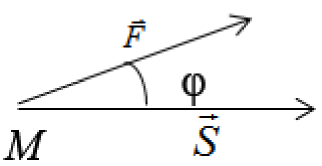


Рисунок 27. Работа силы по перемещению тела

Таким образом, двум векторам – силе $\vec{F}$ и перемещению $\vec{S}$ – оказался сопоставленным вполне определенный скаляр A – работа. Этот скаляр A и называется скалярным *произведением* силы $\vec{F}$ на перемещение $\vec{S}$.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}, \vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Обозначается:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}\vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}),$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi.$$

Свойства скалярного произведения

1. Переместительное свойство: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. Сочетательное свойство относительно скалярного множителя:

$$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

3. Распределительное свойство:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

4. Скалярным квадратом вектора называется скалярное произведение вектора на самого себя:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0° = |\vec{a}|^2.$$

5. Условием перпендикулярности ненулевых векторов $\vec{a}, \vec{b}$ является равенство нулю их скалярного произведения:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Действительно, если $\vec{a}$ перпендикулярен вектору $\vec{b}$, то угол между ними $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 0 = 0$.

Верно и обратное утверждение.

6. Выражение скалярного произведения через координаты.

Пусть даны два вектора: $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$.

Тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Некоторые приложения скалярного произведения

1. Угол между векторами. Так как

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\mathrm{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

2. Проекция вектора на ось:

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|b|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

3. Условие перпендикулярности ненулевых векторов:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

4. Пусть сила $\vec{F} = (x_1, y_1, z_1)$, действующая на прямолинейно перемещающуюся точку M, постоянна и составляет постоянный угол φ с перемещением $\vec{S}$ точки M. Тогда, как известно из физики, работа A силы $\vec{F}$ на перемещение $\vec{S} = (x_2, y_2, z_2)$ равна

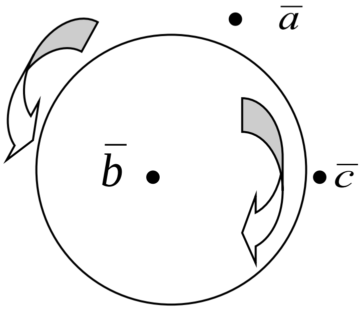
$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cos\varphi.$$

Если векторы заданы в координатной форме, то $A = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Векторное произведение векторов

Тройка упорядоченных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется правой (левой), если, находясь внутри телесного угла ими образованного, мы видим поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ и от него к $\vec{c}$, совершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелке).

Составить тройки легко по рисунку 28.



$\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ $\vec{b}\vec{c}\vec{a}$ $\vec{c}\vec{a}\vec{b}$ –
тройки одной ориентации (правые);
$\vec{b}\vec{a}\vec{c}$ $\vec{a}\vec{c}\vec{b}$ $\vec{c}\vec{b}\vec{a}$ –
тройки одной ориентации (левые).

Рисунок 28. Схема составления троек векторов

Понятие векторного произведения возникает из понятия момента силы.

Пусть тело имеет одну неподвижную точку O. Пусть к точке A этого тела приложена сила $\vec{F}$. Из физики известно, что воздействие этой силы на тело с неподвижной точкой O характеризуется особой векторной величиной $\overrightarrow{M}$, которая называется моментом силы $\vec{F}$ относительно точки O. Числовая мера момента (его модуль) является произведением модуля силы $\vec{F}$ на расстояние h линии ее действия от точки O («плечо силы»). Это есть площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{OA}$ и $\vec{F}$ (рис. 29).

Рисунок 29. Величина момента

Направлен момент $\overrightarrow{M}$ по перпендикуляру к плоскости, проходящей через точку O и силу $\vec{F}$, в ту сторону, откуда вращение тела вокруг точки O, вызываемое силой $\vec{F}$, видно происходящим против часовой стрелки. Следовательно, направление силы $\vec{F}$ определяет ось, проходящая через неподвижную точку O, вокруг которой эта сила стремится вращать тело. Момент силы $\vec{F}$ относительно точки O и называется *векторным произведением вектора* $\overrightarrow{OA}$ *и вектора* $\vec{F}$.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который (рис. 30):

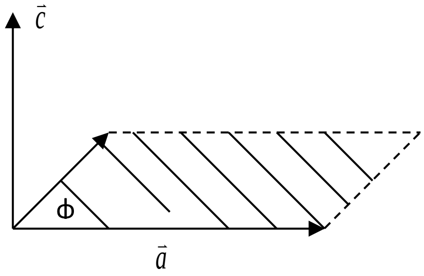


Рисунок 30. Векторное произведение

- имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$;

- перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $\vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b}$;

- векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в указанном порядке образуют правую тройку.

Векторное произведение обозначается $\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

Свойства векторного произведения

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак (антиперестановочный закон) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

2. Векторный квадрат любого вектора равен нулю $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{o}$.

3. $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

4. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

5. Выражение векторного произведения через координаты

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

где $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$.

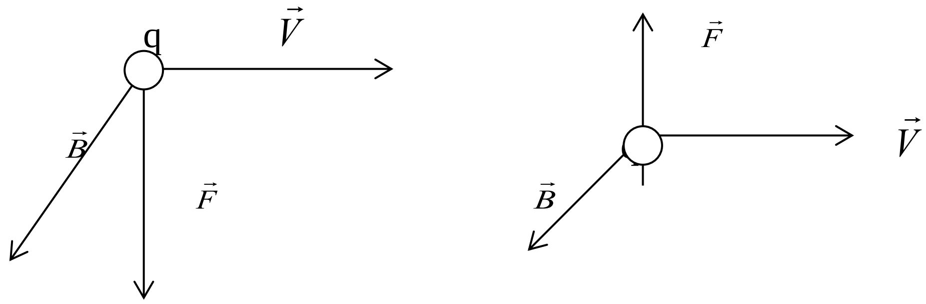
Некоторые приложения векторного произведения

1. Площадь параллелограмма и треугольника. Согласно определению векторного произведения $S_{\text{пар}} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|,\ S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$.

2. Коллинеарность векторов. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ (и наоборот).

3. Скалярное и векторное произведения широко используется в различных разделах физики.

3.1. Через векторное произведение выражается магнитная сила (*сила Лоренца*), действующая на заряд q, движущийся со скоростью $\vec{V}$ в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ (рис. 31).



$$\vec{F} = q \cdot \left(\vec{V} \times \vec{B}\right)$$

Рисунок 31. Сила Лоренца

Направлена магнитная сила перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы $\vec{V}$ и $\vec{\text{B}}$.

3.2. Если во вращающейся системе отсчета некое тело движется по радиусу от центра или к центру вращения, то его скорость изменяется. Тело приобретает тангенциальное ускорение, которое вызывается *силой Кориолиса*. В векторной форме сила Кориолиса записывается в виде $\vec{F} = 2 \cdot m \cdot \left(\vec{\vartheta} \times \vec{\omega}\right)$.

3.3. Скорость совершения работы характеризуется *мощностью*. Мощность N – величина скалярная и равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения этой силы $N = \vec{F} \cdot \vec{\vartheta}$.

Смешанное произведение векторов

Смешанным (векторно-скалярным) произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется их произведение, составленное следующим образом:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}.$$

Первые два вектора перемножаются векторно, полученный вектор умножается на вектор $\vec{c}$ скалярно, в результате получается число.

Свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке векторов:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}\,.$$

2. Смешанное произведение трех ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы компланарны.

3. Выражение смешанного произведения через координаты. Пусть даны три вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$. Тогда их смешанное произведение выражается формулой

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Некоторые приложения смешанного произведения

1. Взаимная ориентация векторов. Если $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} > 0$, то тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}\,, \vec{c}$ – правая тройка; $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} < 0$, то тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}\,, \vec{c}$ – левая тройка.

2. Условие компланарности векторов

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Объем параллелепипеда и треугольной пирамиды (рис. 32).

$$V_{\text{пар}} = \left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right| = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}; V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right| = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

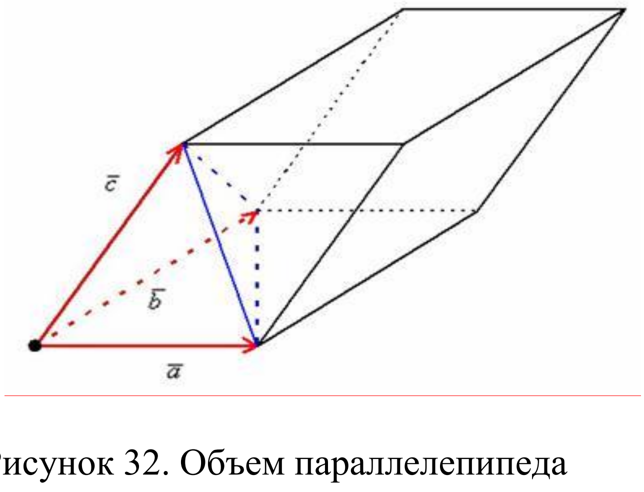


Рисунок 32. Объем параллелепипеда

Типовые задачи

Задача 1. Выясните, образуют ли вектора $\vec{p} = (3; -1; 0)$, $\vec{q} = (2; 3; 1)$, $\vec{r} = (-1; 4; 3)$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x} = (2; 3; 7)$ по этому базису.

Решение

Вычисляем $\vec{p}\vec{q}\vec{r} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 22 \neq 0.$

Следовательно, векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис, и вектор $\vec{x}$ линейно выражается через базисные векторы:

$$\vec{x} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{r}$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta - \gamma = 2, \\ -\alpha + 3\beta + 4\gamma = 3, \\ \beta + 3\gamma = 7. \end{cases}$$

Решаем полученную систему по формулам Крамера.

Находим: $\Delta = 22$,

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 66, \Delta_\beta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -44, \ \Delta_\gamma = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 66.$$

$$\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} = \frac{66}{22} = 3, \qquad \beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta} = \frac{-44}{22} = -2, \qquad \gamma = \frac{\Delta_\gamma}{\Delta} = \frac{66}{22} = 3.$$

$$\vec{x} = 3\vec{p} - 2\vec{q} + 3\vec{r}.$$

Задача 2. Даны три силы $\vec{P}$ = (8, -1, 2), $\vec{Q}$ = (1, 1, -2), $\vec{R}$ = (-3, -2, 4), приложенные к точке *A* (0, 4, 2). Вычислить:

- работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку *B* (4, 3, -5);

- величину момента равнодействующей этих сил относительно точки *B*.

Решение

1. Найдем равнодействующую трех сил. Так как силы – векторные величины – заданы своими координатами, то воспользуемся правилом сложения векторов в координатной форме:

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = (8, -1, 2) + (1, 1, -2) + (-3, -2, 4) = (6, -2, 4).$$

2. Найдем вектор перемещения $\vec{S} = \overrightarrow{AB}$. Воспользуемся формулой для нахождения координат вектора, если заданы координаты начальной и конечной точек вектора $\vec{S} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (4 - 0; 3 - 4; -5 - 2)$;

$$\vec{S} = \overrightarrow{AB} = (4; -1; -7).$$

3. Так как работа равна $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$, т. е. скалярному произведению двух векторов, то $A = (6;\ -2;\ 4) \cdot (4; -1; -7) = 6 \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) + 4 \cdot (-7) = -2.$

4. Момент силы $\vec{F}$ относительно точки B есть векторные произведение вектора $\overrightarrow{BA}$ и вектора $\vec{F}$. Следовательно, $\vec{M} = \overrightarrow{BA} \times \vec{F}$.

Или в координатной форме:

$$\vec{M} = \overrightarrow{BA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & -7 \\ 6 & -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -7 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -18\vec{i} - 58\vec{j} - 2\vec{k}.$$

5. Величина момента – это длина вектора $\vec{M} = -18\vec{i} - 58\vec{j} - 2\vec{k}$. Зная координаты вектора, можно найти его длину:

$$|\vec{M}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-18)^2 + (-58)^2 + (-2)^2} = \sqrt{3692}.$$

Рекомендуемая литература: /1, глава 2 § 1, 2/.

Контрольные вопросы

1. Определение коллинеарных векторов. Признак коллинеарности векторов.
2. Правила нахождение суммы векторов. Законы сложения векторов.
3. Разность векторов.
4. Умножение вектора на число. Геометрический смысл.
5. Определение линейной комбинации векторов.
6. Определение линейной зависимости векторов.
7. Определение проекции вектора на ось.
8. Геометрический смысл координат вектора.
9. Определение направляющего косинуса вектора. Свойство направляющих косинусов любого вектора.
10. Определение и обозначение скалярного произведения векторов. Свойства.
11. Физический смысл скалярного произведения.
12. Формула косинуса угла между двумя векторами.
13. Определение и обозначение векторного произведения векторов. Свойства.
14. Физические и геометрические приложения векторного произведения.
15. Определение и обозначение смешанного произведения векторов. Свойства.

2.3 Раздел 3. Линейные операторы и пространства

Перечень изучаемых вопросов

1. Метрическое пространство R^n
2. Линейные операторы. Свойства линейного оператора.

3. Собственные значения матрицы. Характеристический многочлен матрицы. Собственные векторы матрицы. Собственные значения и векторы линейного оператора.

4. Квадратичные формы, канонический вид. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Критерий Сильвестра.

Методические указания к изучению

В этом разделе рассматриваются абстрактные обобщения изученных ранее понятий. Эти обобщения являются объектами изучения в современной математической дисциплине – так называемой высшей или многомерной геометрии. Метрическое пространство R^n – обобщение трехмерного евклидова пространства.

Линейные пространства – обобщение пространства геометрических векторов на объекты любой природы.

В евклидовом линейном пространстве определено скалярное произведение векторов.

Линейные операторы – фундаментальное понятие матричной алгебры.

Метрическое пространство R^n

Известно, что всякая точка плоскости определяется своими двумя координатами, то есть упорядоченной системой двух чисел (x, y). Точка в пространстве R^3, а также вектор в R^3 – упорядоченной тройкой чисел (x, y, z). В геометрии, механике и физике изучаются такие объекты, для задания которых недостаточно трех действительных чисел. Например, для того, чтобы полностью определить сферу, нужно задать координаты ее центра и радиус, то есть упорядоченную совокупность 4-х чисел. Положение твердого тела будет вполне определенно, если будут указаны координаты его центра тяжести (то есть три действительных числа), направление некоторой фиксированной оси, проходящей через центр тяжести (два числа – два из трех направляющих косинусов оси) и, наконец, угол поворота тела вокруг этой оси. Таким образом, положение твердого тела в пространстве определяется упорядоченной системой из шести чисел.

Эти примеры указывают на целесообразность рассмотрения множества всевозможных упорядоченных систем из n действительных чисел.

Упорядоченную совокупность n чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ***рассматривают как точку n-мерного числового (арифметического) пространства.*** Так же, как и в трехмерном пространстве, каждая упорядоченная пара точек n-мерного пространства определяет n-мерный вектор. Одна из этих точек называется началом вектора, другая – его концом. Разности соответствующих координат конца и начала принимают, по определению, за координаты вектора.

Такие векторы образуют ***n*-мерное арифметическое** (**или координатное**) **векторное пространство***, в котором равенство векторов и линейные операции над ними определяются так же, как и в трехмерном пространстве. Числа, определяющие вектор, трактуются как его координаты; при сложении векторов их одноименные координаты складываются; при умножении вектора на число, его координаты умножаются на это число.

По аналогии с координатным базисом в R^3

$$\vec{i} = \{1; 0; 0\},\ \vec{j} = \{0; 1; 0\},\ \vec{k} = \{0; 0; 1\},$$

в векторном пространстве можно рассматривать в качестве координатного базиса множество векторов

$$\begin{aligned}
\bar{e}_1 &= \{1;\ 0;\ 0;\ \ldots;\ 0\},\\
\bar{e}_2 &= \{0;\ 1;\ 0;\ \ldots;\ 0\},\\
\bar{e}_3 &= \{0;\ 0;\ 1;\ \ldots;\ 0\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\bar{e}_n &= \{0;\ 0;\ 0;\ \ldots;\ 1\}.
\end{aligned}$$

Этот базис называется ***каноническим базисом пространства*** R^n.

Любой вектор $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ может быть однозначно представлен в виде разложения по данному координатному базису:

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \ldots + x_n\bar{e}_n,$$

числа $x_1, x_2, \ldots x_n$ – координаты вектора в данном базисе.

Расстояния между двумя точками $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Q(y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$\rho(PQ) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}\ .$$

***n*-мерное пространство точек, в котором введено определение расстояния между точками, называется метрическим.**

1. Прямая в n-мерном пространстве – это множество точек, координаты которых определяются системой уравнений:

$$\begin{cases}
x_1 = m_1 t + l_1,\\
x_2 = m_2 t + l_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n = m_n t + l_n,
\end{cases}$$

t является параметром и меняется от $-\infty$ до $+\infty$, $m_1, m_2, \ldots, m_n$ не все равны нулю одновременно, так как иначе мы имели бы одну точку; если t меняется в сегменте конечной длины, $\alpha \le t \le \beta$, то система определит отрезок прямой.

2. ***n*-мерной сферой называется множество точек, удаленных на одно и то же расстояние r от данной точки $C(a_1, a_2, ..., a_n)$.** Этим условием определяется уравнение сферы в R^n, которое имеет вид:

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 + a_2)^2 + ... + (x_n - a_n)^2 = r^2.$$

Линейные пространства

Мы знакомы с различными математическими объектами – векторами, числами, матрицами, функциями, ввели понятие упорядоченных совокупностей n чисел. Для всех этих объектов были определены линейные операции – сложение и умножение на число. Независимо от природы этих объектов, линейные операции над ними, как мы видели, обладают рядом общих свойств. Отвлекаясь от специфических особенностей объектов и рассматривая только те общие свойства, которые присущи линейным операциям над ними, мы придем к понятию линейного пространства. Это понятие используется во многих областях математики и ее приложениях.

Необходимо повторить!!!

Пусть V - произвольное множество, элементы которого мы будем называть векторами, K - поле, элементы которого мы будем называть скалярами. Пусть на множестве V определена внутренняя бинарная алгебраическая операция, которую мы будем обозначать знаком + и называть сложением векторов. Пусть также на множестве V определена внешняя бинарная алгебраическая операция над полем K, которую мы будем называть умножением вектора на скаляр и обозначать знаком умножения. То есть, определены два отображения:

$$V \times V \to V, \forall\, x, y \in V: (x, y) \longrightarrow x + y \in V;$$

$$K \times V \to V, \forall\, \lambda \in K, \forall\, x \in V: (\lambda, x) \longrightarrow \lambda \cdot x \in V.$$

Множество V вместе с этими двумя алгебраическими операциями называют ***векторным пространством над полем K****, если эти алгебраические операции подчиняются следующим законам (аксиомы векторного пространства):*

- закон ассоциативности сложения

$$\forall\, x, y, z \in V: (x + y) + z = x + (y + z);$$

- существование нулевого вектора

$$\exists 0 \in V: \forall\, x \in V \;\; x + 0 = 0 + x = x;$$

- существование противоположного вектора

$$\forall x \in V \;\; \exists(-x) \in V: x + (-x) = (-x) + x = 0;$$

- закон коммутативности сложения

$$\forall\, x, y \in V: \; x + y = y + x;$$

- закон ассоциативности умножения вектора на скаляр

$$\forall\, \alpha, \beta \in K, \forall\, x \in V: (\alpha\beta) = \alpha(\beta x);$$

- закон дистрибутивности умножения вектора на скаляр относительно сложения векторов

$$\forall\, \lambda \in K, \forall\, x, y \in V: \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y;$$

- закон дистрибутивности умножения вектора на скаляр относительно сложения скаляров

$$\forall\, \lambda, \mu \in K, \forall\, x \in V: (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x;$$

- $\forall x \in V: 1 \cdot x = x$, где 1 – это единица поля *K*.

Заметим, что в определении не случайно не сказано, как именно определяются сложение и умножение на число. От этих операций требуется только, чтобы они удовлетворяли перечисленным аксиомам. Кроме того, в определении не говорится о природе объектов, являющихся элементами пространства *V*. Выдающийся немецкий математик Давид Гильберт (1862–1943), создатель современной математической дисциплины – функционального анализа, оказавший своими трудами значительное влияние на развитие математической науки XX века, шутливо говорил своим коллегам: «Следует добиться того, чтобы с равным успехом можно было говорить вместо точек, прямых и плоскостей о столах, стульях и пивных кружках».

Развивая дальше идею линейного пространства по аналогии с пространством геометрических векторов, введем определения.

Семейство векторов $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_n,\}$ в линейном векторном пространстве V называется конечным ***базисом*** этого пространства, если любой вектор $\overline{x} \in V$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\overline{e}_i \left(i = \overline{1,n}\right)$, то есть

$$\overline{x} = \alpha_1 \overline{e}_1 + \alpha_2 \overline{e}_2 + \dots + \alpha_n \overline{e}_n,$$

и это представление единственно. При этом числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называются координатами вектора $\overline{x}$ относительно базиса $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_n,\}$.

Пример 1. В пространстве геометрических векторов $\{\tilde{O};Y;Z\}$ в качестве базиса можно взять орты осей координат $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Пример 2. Матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ образуют линейное пространство, если операции их сложения и умножения на число введены, как это было сделано ранее. В этом пространстве в качестве базиса можно взять матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Элементы произвольной квадратной матрицы второго порядка являются ее координатами в этом базисе, так как

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Многочлены степени не выше n образуют линейное пространство при обычном определении сложения многочленов и умножения их на число. В качестве базиса этого пространства можно взять одночлены $1, x, x^2, \dots, x^n$.

Базис в линейном пространстве может быть выбран различными способами.

Теорема. ***В линейном пространстве число элементов базиса не зависит от выбора базиса.***

Число векторов, образующих базис, называется ***размерностью пространства V*** и обозначается $\dim V$. Если $\dim V = n$, то пространство называется n-мерным.

Пример 4. Размерность пространства многочленов степени не выше n равна $(n+1)$.

Система векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n$ называется ***линейно зависимой***, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, не равные одновременно нулю, что

$$\bar{x} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \cdots + \alpha_n\bar{e}_n = 0.$$

Векторы, не являющиеся линейно зависимыми, называются ***линейно независимыми***.

Система векторов, образующая базис, является линейно независимой. Отсюда следует, что в n-мерном пространстве существует n линейно независимых векторов (векторы базиса), но любые $(n+1)$ вектор линейно зависимы.

Евклидово пространство
Неравенство Коши – Буняковского

Скалярным произведением векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ называется ***число***, обозначаемое $(\bar{x}, \bar{y})$, такое, что для любых $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ и $\forall\ \alpha \in R$ выполняются следующие равенства:

- $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$;
- $(\bar{x} + \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{z}) + (\bar{y}, \bar{z})$;
- $(\alpha, \bar{x}, \bar{y}) = \alpha(\bar{x}, \bar{y})$;
- $(\bar{x}, \bar{x}) \geq 0$.

Линейное пространство, в котором определена операция скалярного умножения векторов, называется ***евклидовым***.

Пример 5. Множество упорядоченных систем n чисел $(x_1, x_2, ...\ x_n)$ является линейным евклидовым пространством, если скалярное умножение $\bar{x} = (x_1, x_2, ...\ x_n)$на $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ определить по правилу:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_2 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

(аналогично скалярному произведению в R^3).

Длиной (или ***модулем***, ***нормой***) вектора $\bar{x}$ евклидова пространства называется арифметическое значение квадратного корня из скалярного квадрата вектора $\bar{x}$, то есть $|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x}^2}$.

В евклидовом пространстве справедливо неравенство Коши – Буняковского:

$$|(\bar{x}, \bar{y})| \leq |\bar{x}| \cdot |\bar{y}|.$$

Замечание. *Это важное равенство было выведено в 1821 году для пространства* R^n (*в другой терминологии*) *выдающимся французским математиком Огюстеном Коши* (*1789–1857*)*, а для некоторых других случаев в 1859 году – нашим соотечественником, известным русским математиком В. Я. Буняковским* (*1804–1899*) *и в 1884 году в общем виде – немецким математиком Г. Шварцем* (*1843–1921*)*. Поэтому разные авторы присваивают неравенству названия, содержащие разные комбинации из названных фамилий; встречаются все восемь мыслимых комбинаций.*

Из неравенства Коши – Буняковского вытекает, в частности, что

$$|(\overline{x}+\ \overline{y})| \le |\overline{x}| + |\overline{y}|.$$

Это неравенство, справедливое в любом евклидовом пространстве (в частности, и в нашем, трехмерном), называется неравенством треугольника (название связано с геометрической интерпретацией неравенства в R^3).

Из неравенства Коши – Буняковского следует, что

$$\frac{|(\overline{x}\,,\overline{y})|}{|\overline{x}|\cdot|\overline{y}|} \le 1,$$

и поэтому можно положить

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{x}\,,\overline{y})}{|\overline{x}|\cdot|\overline{y}|}.$$

Два вектора называются ***ортогональными***, если их скалярное произведение равно нулю, то есть $(\overline{x}\,,\overline{y}) = 0$.

В евклидовом пространстве в качестве базиса выбирают обычно систему попарно ортогональных векторов, причем каждый из векторов нормируют, чтобы длина его стала равной 1. Такой базис называется ***ортонормированным***.

Линейные операторы

Если задан закон (правило), по которому каждому вектору $\vec{x}$ пространства R^n ставится в соответствие единственный вектор $\vec{y}$ пространства R^m, то говорят, что задан ***оператор*** (*преобразование*, *отображение*) $A(x)$.

Рассматриваем случай, когда $R^n = R^m$.

Оператор A называется ***линейным***, если для любых двух векторов пространства R^n и любого числа λ верны соотношения:

$$A(x+y) = A(x) + A(y),$$
$$A(\lambda x) = \lambda A(x).$$

Таблица 17 – **Свойства линейных операторов**

Действие	**Формула**
Сложение	$(A+B)(x) = A(x) + B(x)$
Умножение	$(AB)(x) = A(B(x))$
Умножение на число	$\lambda A(x) = \lambda(A(x))$
Нулевой оператор	$O(x) = 0$
Тождественный оператор	$E(x) = x$

Матрицы A и A^*линейного оператора в базисах $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ и $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ связаны соотношением

$$A^* = C^{-1}AC,$$

где C – матрица перехода от старого базиса к новому.

Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Вектор $\vec{x} \neq 0$ называется ***собственным вектором*** линейного оператора или матрицы A, если найдется такое число λ, что $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

Число λ – ***собственное*** (***характеристическое***) ***значение*** (***число***) оператора или матрицы A, соответствующее вектору $\vec{x}$: $(A - \lambda E)x = 0$.

Характеристическим уравнением оператора или матрицы A называется уравнение: $|A - \lambda E| = 0$.

Типовые задачи

Задача 1. Найти матрицу линейного оператора

$y = A(x) = (x_1 + x_2 - x_3; 2x_3; 2x_2 + 5x_3)$, где $x = (x_1; x_2; x_3)$ в том базисе, в котором даны координаты векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.

Решение

Запишем связь между координатами векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ и матрицу линейного оператора:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3, \\ y_2 = \qquad\quad 2x_3, \\ y_3 = \quad 2x_2 + 5x_3, \end{cases} \text{следовательно, } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Найти (в том же базисе) координаты вектора $\boldsymbol{y}$, если оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } x = 2e_1 + 4e_2 - e_3.$$

Решение

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Матрица линейного оператора в базисе $(e_1; e_2; e_3)$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу A^* этого оператора в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*), если

$$e_1^* = 3e_1 + e_2 + 2e_3, \qquad e_2^* = 2e_1 + e_2 + 2e_3, \qquad e_3^* = -e_1 + 2e_2 + 5e_3.$$

Решение

$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ – матрица перехода от старого базиса к новому.

$$A^* = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -85 & -59 & 18 \\ 121 & 84 & -25 \\ -13 & -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

1. Составляем характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (2-\lambda)(1-\lambda) - 12 = 0.$$

$\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 5$ – собственные значения матрицы A.

2. Найдем собственный вектор $x^{(1)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -2$.

$$(A - \lambda_1 E)x = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Полагая $x_2 = c_1$, найдем $x^{(1)} = \left(-\frac{3}{4}c_1;\ c_1\right)$.

3. Найдем собственный вектор $x^{(2)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 5$.

$$(A - \lambda_2 E)x = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -3x_1 + 3x_2 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 = 0. \end{cases}$$

Полагая $x_2 = c_2$, найдем $x^{(2)} = (c_2;\ c_2)$.

Квадратичные формы

Квадратичной формой $\boldsymbol{L(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ от n переменных называется сумма, каждый член которой является либо квадратом одной из переменных, либо произведением двух разных переменных, взятых с некоторым коэффициентом

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j.$$

В матричной записи квадратичная форма имеет вид:

$$L = X^{\mathrm{T}}AX:$$

положительно определенная	***отрицательно определенная***
$L(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$	$L(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$
при всех значениях переменных	при всех значениях переменных

Критерий Сильвестра

квадратичная форма $L = X^{\mathrm{T}}AX$

тогда и только тогда

положительно определена, если:	***отрицательно определена***, если:
- все собственные значения λ_i матрицы *A* положительны;	- все собственные значения λ_i матрицы *A* отрицательны;
- все главные угловые миноры матрицы *A* положительны.	- все главные угловые миноры матрицы *A* нечетного порядка отрицательны, а четного порядка – положительны.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа

Квадратичная форма называется ***канонической*** (имеет канонический вид), если все коэффициенты $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$:

$$L = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2.$$

Основная идея метода – последовательное выделение полных квадратов по каждой переменной.

Пример 6. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$L(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 10x_2^2.$$

Решение

$$L(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 10x_2^2 = 2(x_1^2 + 4x_1x_2) + 10x_2^2$$
$$= 2(x_1^2 + 2x_1 2x_2 + 4x_2^2 - 4x_2^2) + 10x_2^2 = 2(x_1 + 2x_2)^2 + 2x_2^2.$$

$$y_1 = x_1 + 2x_2, \;\; y_2 = x_2$$

$$L(y_1, y_2) = 2y_1^2 + 2y_2^2.$$

Типовые задачи

Задача 1. Дана квадратичная форма

$$L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Записать ее в матричном виде.

Решение

Диагональные элементы симметрической матрицы A квадратичной формы равны коэффициентам при квадратах переменных, т. е. 2; -5; 8, а другие элементы – половинам соответствующих коэффициентов квадратичной формы.

$$L = X^T AX = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Найти квадратичную форму, соответствующую матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$L = X^T AX = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$
$$= x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Задача 3. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму

$$a)\ L = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3;$$
$$b)\ L = 2x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_3.$$

Решение

А. <u>1 способ</u>. Матрица квадратичной формы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 3 \pm \sqrt{7}$ – все положительные, следовательно, квадратичная форма $L(x_1, x_2, x_3)$ положительно определенная.

<u>2 способ</u>. Так как все главные (угловые) миноры матрицы A положительны, т. е.

$\Delta_1 = 2 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 > 0,$ то по критерию Сильвестра квадратичная форма $L(x_1, x_2, x_3)$ положительно определенная.

Б. Матрица квадратичной формы имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Так как $\Delta_1 = 2 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -7 < 0$, то квадратичная форма не является знакоопределенной (она была бы отрицательно определенной, если бы $\Delta_1 < 0$, а $\Delta_2 > 0$).

Рекомендуемая литература: /1 глава 5, 1–4/.

Контрольные вопросы

1. Что такое линейный оператор?
2. Что такое матрица линейного оператора в данном базисе? Как она изменится, если поменять местами два базисных вектора?
3. Известна матрица оператора в некотором базисе. По какой формуле преобразуются координаты векторов под действием этого оператора?
4. Что такое сумма, произведение линейных операторов? Что происходит с матрицами линейных операторов при сложении, умножении операторов?
5. Что такое собственный вектор линейного оператора?
6. Как находить собственные значения и собственные векторы линейного оператора в n-мерном пространстве?
7. Каков канонический вид квадратичной формы? Однозначно ли он определен? Как выглядит матрица формы в каноническом базисе? Какие характеристики формы не зависят от выбора канонического базиса?
8. Что означает положительная (отрицательная) определенность формы? Каков критерий положительной (отрицательной) определенности квадратичной формы?
9. Что такое длина (норма) вектора в евклидовом пространстве? Каковы ее свойства?
10. Что такое неравенство Коши – Буняковского? Когда оно превращается в равенство? Как выглядит неравенство треугольника, и почему оно так называется?

2.4 Раздел 4. Аналитическая геометрия

Перечень изучаемых вопросов

1. Задание множеств точек уравнениями и неравенствами. Уравнение линии на плоскости.

2. Прямая на плоскости. Способы задания прямой на плоскости.

3. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых.

4. Понятие о кривых второго порядка. Канонические уравнения эллипса, окружности, параболы, гиперболы.

5. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду в простейших случаях.

6. Уравнения плоскости. Уравнения прямой в пространстве.

Методические указания к изучению

Аналитическая геометрия – область математики, в которой геометрические задачи решаются алгебраическим способом. Важно научиться анализировать геометрические свойства линии на основе анализа их уравнений.

Алгебраические уравнения первого порядка
Прямые и плоскости

Аналогии математических моделей для описания изучаемых геометрических образов отображены в таблице 17.

Таблица 17 – **Линии первого порядка**

Способ задания	**Прямая на плоскости**	**Плоскость в пространстве**
точкой и нормальным вектором	$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
общее (следствие предыдущего)	$Ax+By+C=0$	$Ax+By+Cz+D=0$
в отрезках по координатным осям	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$
нормированное уравнение	$\cos\alpha+y\cos\beta=1$	$\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=1$
через три точки	-	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$

	Прямая на плоскости	Прямая в пространстве
через две точки	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$
через точку и направляющий вектор	$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{p}$	$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{p}=\frac{z-z_0}{l}$
параметрические уравнения	$\begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+pt\end{cases}$	$\begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+pt,\\ z=z_0+lt\end{cases}$
через точку и угловой коэффициент	$y-y_0=k(x-x_0)$	-
как линия пересечения двух плоскостей	-	$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

Таблица 18 – **Простейшие задачи на плоскости и в пространстве**

Угол между прямыми на плоскости	$\boldsymbol{\ell_1: y=k_1x+b_1}$, $\boldsymbol{\ell_2: y=k_2x+b_2}$	$\boldsymbol{tg\varphi=\left\lvert\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right\rvert}$ $\boldsymbol{l_1 \parallel l_2 \Rightarrow k_1=k_2}$ $\boldsymbol{l_1 \perp l_2 \Rightarrow 1+k_1k_2=0}$
Угол между прямыми в пространстве	$\boldsymbol{\ell_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}}$, $\boldsymbol{\overrightarrow{s_1}=(m_1;n_1;p_1)}$; $\boldsymbol{\ell_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}}$, $\boldsymbol{\overrightarrow{s_2}=(m_2;n_2;p_2)}$	$\cos\alpha=\frac{\lvert m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2\rvert}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$
Угол между плоскостями	$\boldsymbol{P_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0}$, $\boldsymbol{\overrightarrow{n_1}=(A_1;B_1;C_1)}$; $\boldsymbol{P_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0}$, $\boldsymbol{\overrightarrow{n_2}=(A_2;B_2;C_2)}$	$\boldsymbol{cos\propto=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}}$
Угол между прямой и плоскостью в пространстве	$\boldsymbol{\ell_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}}$, $\boldsymbol{\overrightarrow{s_1}=(m_1;n_1;p_1)}$; $\boldsymbol{P_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0}$, $\boldsymbol{\overrightarrow{n_1}=(A_1;B_1;C_1)}$	$\boldsymbol{sin\propto=\frac{A_1m_1+B_1n_1+C_1p_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}}}$

Расстояние между двумя точками	$\boldsymbol{M_1(x_1, y_1)}$ и $\boldsymbol{M_2(x_2, y_2)}$	$\boldsymbol{d = \lvert M_1M_2\rvert =}$ $\boldsymbol{= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$
Деление отрезка в данном отношении	$\boldsymbol{M_1(x_1, y_1)}$ и $\boldsymbol{M_2(x_2, y_2)}$ $\boldsymbol{\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda}$	$\boldsymbol{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}}$: если точка M – середина отрезка M_1M_2, то $\lambda = 1$ и координаты середины отрезка $\boldsymbol{x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}}$
Расстояние от точки до прямой на плоскости	$\boldsymbol{M(x_0; y_0)}$ $Ax + By + C = 0$	$\boldsymbol{d = \frac{\lvert Ax_0 + By_0 + C\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$
Расстояние от точки до плоскости	$\boldsymbol{M(x_0; y_0; z_0)}$ $Ax + By + Cz + D = 0$	$\boldsymbol{d = \frac{\lvert Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$

Типовые задачи

Задача 1. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(-2;3), *B*(1;10), *C*(11;6). Найти:
- длину стороны *BC*;
- уравнение стороны *BC*;
- уравнение высоты, проведенной из вершины *A*;
- уравнение медианы, проведенной из вершины *A*;
- точку пересечения стороны *BC* и высоты *AD*.

Сделать чертеж.

Решение

Построим в прямоугольной системе координат данный треугольник. Проведем высоту *AD* и медиану *AM* (рис. 33).

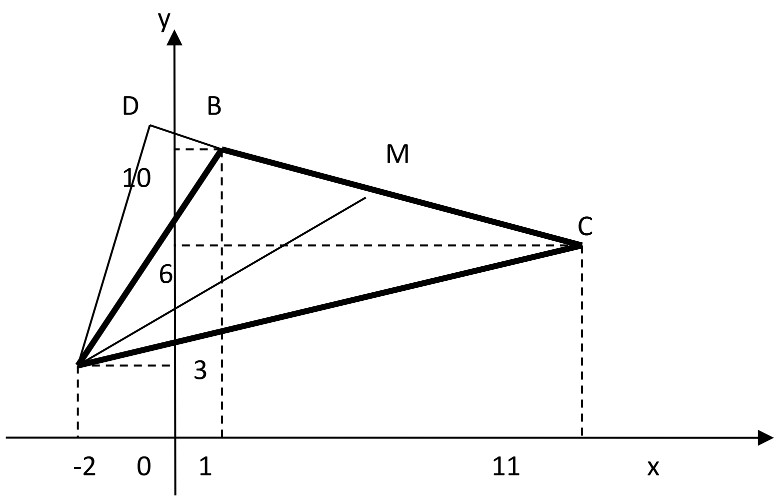


Рисунок 33. К задаче 1

1. Найдем длину стороны BC. Это можно сделать по формуле расстояния между двумя точками

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

По условию задачи: $B(1;10)$, $C(11;6)$, тогда

$$|BC| = \sqrt{(11-1)^2 + (6-10)^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}.$$

2. Составим уравнение стороны BC. Для этого используем уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Подставив в это уравнение координаты точек B(1;10), C(11;6), получим:

$$\frac{x-1}{11-1} = \frac{y-10}{6-10} \Rightarrow \frac{x-1}{10} = \frac{y-10}{-4} \Rightarrow -4(x-1) = 10(y-10),$$

$$-2x + 2 = 5y - 50 \Rightarrow 2x + 5y - 52 = 0.$$

Окончательно получаем уравнение стороны BC:

$$2x + 5y - 52 = 0.$$

3. Составим уравнение высоты AD. Высота AD перпендикулярна стороне BC. Поэтому их угловые коэффициенты связаны соотношением

$$k_{AD} = -\frac{1}{k_{BC}}.$$

Чтобы найти угловой коэффициент BC, запишем ее уравнение в виде

$$2x + 5y - 52 = 0 \Rightarrow 5y = -2x + 52 \Rightarrow y = -\frac{2}{5}x + 26.$$

Из последнего уравнения получим, что

$$k_{BC} = -\frac{2}{5} \Rightarrow k_{AD} = \frac{5}{2}.$$

Чтобы составить уравнение высоты AD, используем уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Подставив в это уравнение координаты точки A (-2;3) и угловой коэффициент $k_{AD} = \frac{5}{2}$, получим:

$$y - 3 = \frac{5}{2}(x+2) \Rightarrow 2(y-3) = 5(x+2) \Rightarrow 2y - 6 = 5x + 10,$$

$$5x - 2y + 16 = 0.$$

Уравнение высоты AD $\quad 5x - 2y + 16 = 0.$

4. Составим уравнение медианы AM. Точка M является серединой отрезка BC. Ее координаты можно найти по формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ \ y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Используя координаты точек $B(1;10)$, $C(11;6)$, получим:

$$x = \frac{1 + 11}{2} = 6, \qquad y = \frac{10 + 6}{2} = 8.$$

Координаты точки $M(6;8)$.

Составим уравнение прямой AM по двум точкам:

$$\frac{x+2}{6+2} = \frac{y-3}{8-3} \Rightarrow \frac{x+2}{8} = \frac{y-3}{5} \Rightarrow 5(x+2) = 8(y-3),$$

$$5x + 10 = 8y - 24 \Rightarrow 5x - 8y + 34 = 0.$$

Уравнение медианы AM

$$5x - 8y + 34 = 0.$$

5. Чтобы найти точку пересечения стороны BC и высоты AD, решим систему уравнений этих прямых:

$$\begin{cases} 2x + 5y - 52 = 0, \\ 5x - 2y + 16 = 0. \end{cases}$$

Получим:

$$x = \frac{24}{29}, y = \frac{292}{29}; D\left(\frac{24}{29}; \frac{292}{29}\right).$$

Задача 2. Общее уравнение прямой $\begin{cases} x + 3y - 4z + 5 = 0, \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$ преобразовать к каноническому виду.

Решение

Каноническое уравнение прямой имеет вид: $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$

Для решения задачи надо знать какую-либо точку прямой и ее направляющий вектор $\vec{s}$.

1. Выберем точку A на прямой следующим образом: положим, например, z = 0, тогда получим $\begin{cases} x + 3y + 5 = 0, \\ 2x - y - 4 = 0. \end{cases}$ Решим систему: $x = 1, y = -2$. A (1; -2; 0).

2. Найдем направляющий вектор $\vec{s} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$, где $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ нормальные векторы плоскостей $\overrightarrow{n_1} = (1; 3; -4), \overrightarrow{n_2} = (2; -1; 1)$.

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 9\vec{j} - 7\vec{k}.$$

3. Канонические уравнения прямой, проходящей через данную точку $(\mathbf{1}; -\mathbf{2}; \mathbf{0})$ параллельно **вектору** $\boldsymbol{\vec{s} = (-1; -9; -7)}$, имеют вид:

$$\frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{-9} = \frac{z-0}{-7} \quad \text{или} \quad \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{9} = \frac{z}{7}.$$

Задача 3. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(3; -1; 2)$ параллельно оси Оу.

Решение

1. В качестве направляющего вектора оси Oy можно взять вектор $\vec{j} = (0; 1; 0)$.

2. Напишем искомое уравнение $\begin{cases} x = 3 + 0 \cdot t, \\ y = -1 + 1 \cdot t, \\ z = 2 + 0 \cdot t, \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 3, \\ y = -1 + t, \\ z = 2. \end{cases}$

Задача 3. Составить параметрические уравнения прямой проходящей через точку А (-2; 1; 3) параллельно прямой $\begin{cases} x = -4 + 5 \cdot t, \\ y = 2 - 3 \cdot t, \\ z = t. \end{cases}$

Решение

1. Найдем направляющий вектор. Так как прямые параллельны, то они имеют один и тот же направляющий вектор $\vec{s} = (5; -3; 1)$.

2. Составим параметрические уравнения $\begin{cases} x = -2 + 5 \cdot t, \\ y = 1 - 3 \cdot t, \\ z = 3 + t. \end{cases}$

Задача 4. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;2;-1)$, $M_2(-1;0;4)$, $M_3(-2;-1;1)$

Решение

Математическая модель плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1; y_1 z_1)$, $M_2(x_2; y_2 z_2)$, $M_3(x_3; y_3 z_3)$: $$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Имеем:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z + 1 \\ -1 - 1 & 0 - 2 & 4 + 1 \\ -2 - 1 & -1 - 2 & 1 + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив определитель, получим $x - y + 1 = 0$.

Задача 5. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку P (1;2;-1) перпендикулярно прямой $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{4}$.

Решение

Математическая модель плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(A;B;C)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Из условия перпендикулярности прямой и плоскости следует, что в качестве нормального вектора плоскости можно взять поправляющий вектор прямой, т. е. $\vec{n}=(1;-3;4)$.

Составим уравнение $(x-1)-3(y-2)+4(z+1)=0$.

$$x-3y+4z+9=0.$$

Задача 6. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ (рис. 34): $A_1(4;4;10)$, $A_2(4;10;2)$, $A_3(2;8;4)$, $A_4(9;6;4)$.

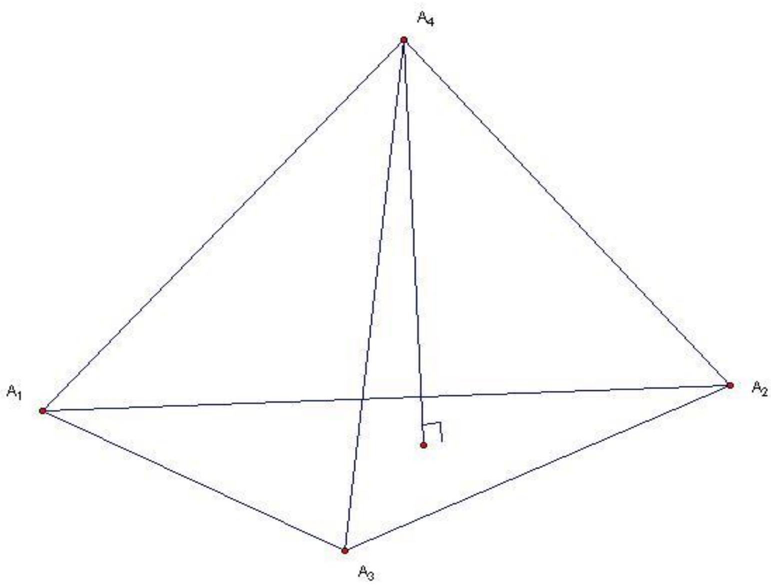


Рисунок 34. К задаче 6

Найти:

1. Длину ребра A_1A_2.

Воспользуемся формулой расстояния между двумя точками:

$$d=\sqrt{\left(x_1-x_0\right)^2+\left(y_1-y_0\right)^2+\left(z_1-z_0\right)^2}$$

$$d=\sqrt{\left(4-4\right)^2+\left(10-4\right)^2+\left(2-10\right)^2}=\sqrt{6^2+\left(-8\right)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$$

2. Угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$.

Математическая модель нахождения величины угла между плоскостью и прямой:

$$sin \propto =\frac{A_1m_1+B_1n_1+C_1p_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}}$$

$\overrightarrow{A_1A_4}=(5;2;-6)$

$A_1\left(4;4;10\right)$, $A_2\left(4;10;2\right)$, $A_3\left(2;8;4\right)$

Найдем уравнение плоскости, содержащей точки A_1, A_2, A_3, по формуле:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-4 & z-10 \\ 4-4 & 10-4 & 2-10 \\ 2-4 & 8-4 & 4-10 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-4 & y-4 & z-10 \\ 0 & 6 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix}=$$

$$=\left(-4\right)6\left(-6\right)+\left(y-4\right)\left(-8\right)\left(-2\right)+\left(z-10\right)0\cdot 4-\left(z-10\right)6\left(-2\right)-$$

$$-\left(y-4\right)0\left(-6\right)-\left(x-4\right)4\left(-8\right)=$$

$$=-36x+144+16y-64+12z-120+32x-128=$$

$$=-4x+16y+12z-168=0$$

$$-4x+16y+12z-168=0$$

$x-4y-3z+42=0$ – уравнение плоскости. Вектор нормали к этой плоскости имеет координаты $\vec{n}=(1;-4;-3)$.

$$\sin\alpha=\frac{1\cdot 5+\left(-4\right)\cdot 2+\left(-3\right)\cdot\left(-6\right)}{\sqrt{1^2+\left(-4\right)^2+\left(-3\right)^2}\cdot\sqrt{5^2+2^2+\left(-6\right)^2}}=\frac{15}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{65}}=\frac{15}{13\sqrt{10}}$$

$$\alpha=\arcsin\left(\frac{15}{13\sqrt{10}}\right)$$

3. Уравнение высоты, опущенной из вершины $A_4(9;6;4)$ на грань $A_1A_2A_3$.

Уравнение грани имеет вид $x-4y-3z+42=0$. Вектор нормали к этой плоскости имеет координаты $\vec{n}=(1;-4;-3)$, т. е. он и будет направляющим вектором высоты. Следовательно,

$$\frac{x-9}{1}=\frac{y-6}{-4}=\frac{z-4}{-3}.$$

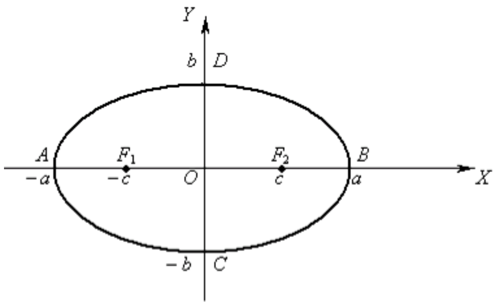
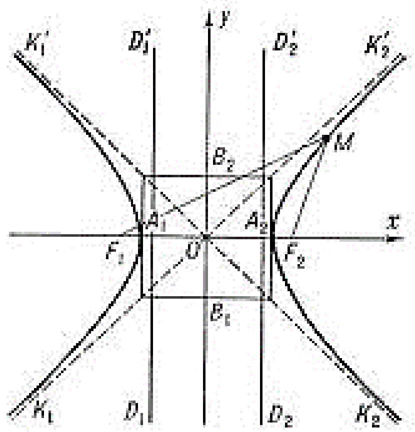
Кривые второго порядка

Общее уравнение линии второго порядка на плоскости имеет вид:

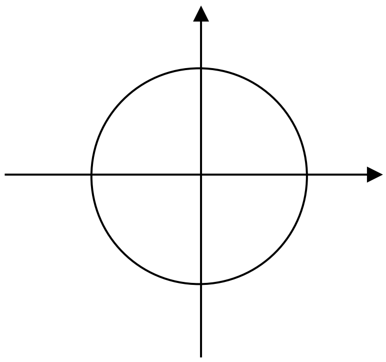
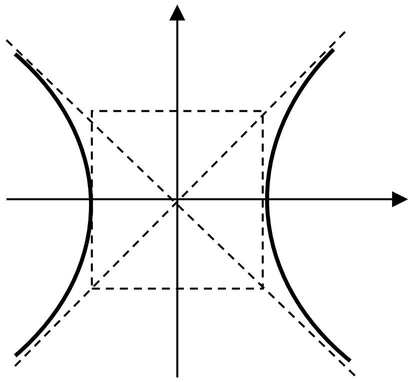
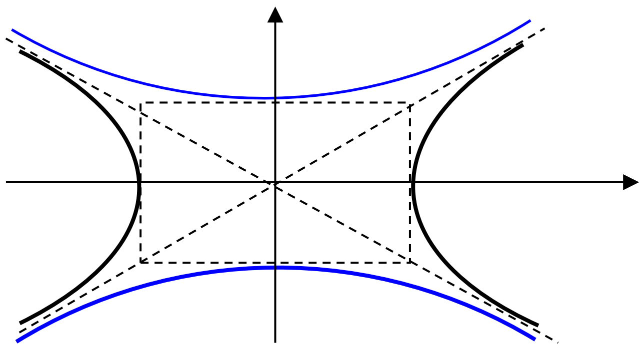
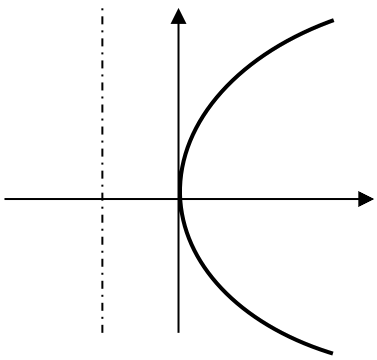
$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0,$$

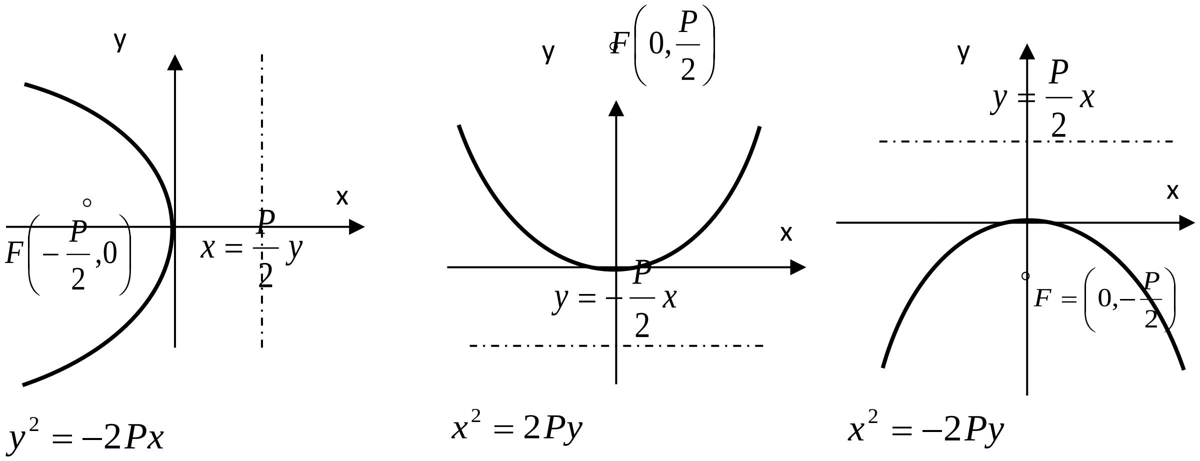
где A, B, C – коэффициенты, одновременно не равные нулю. Это уравнение может определять окружность, эллипс, гиперболу или параболу.

Таблица 19 – **Алгебраические уравнения кривых второго порядка**

Эллипс	**Гипербола**
Геометрическое место точек $M(x,y)$, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$ есть число, большее, чем расстояние между фокусами $F_1F_2=2c$	Геометрическое место точек $M(x,y)$, для каждой из которых разность расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$ есть число, меньшее чем расстояние между фокусами $F_1F_2=2c$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
	

Продолжение таблицы 19

<table>
<tr><th colspan="2">Частные виды эллипса и гиперболы</th></tr>
<tr><td>Если $a = b,$ то получаем каноническое уравнение окружности с радиусом a
</td><td>Если $a = b$, то гипербола $x^2 - y^2 = a^2$ называется равносторонней, ее асимптоты $y = x$ и $y = -x$
</td></tr>
<tr><td></td><td>Сопряженные гиперболы имеют канонические уравнения:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ и } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Парабола
Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки F, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой параболы</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>



Типовые задачи

Задача 7. Составить уравнение линии, каждая точка которой находится вдвое ближе к точке *A* (*1;0*), чем к точке *B* (-*2;0*). Сделать чертеж.

Решение

1. Рассмотрим произвольную точку $M(x;y)$, принадлежащую искомой линии (рис. 35).

2. Запишем геометрическое свойство линии $2|AM| = |BM|$.

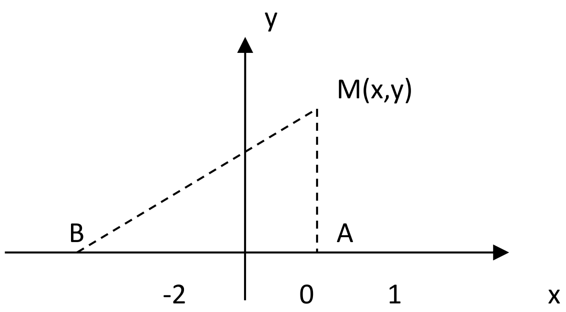


Рисунок 35. К задаче 7

3. Выразим это свойство через координаты точки $M(x;y)$. Используем формулу расстояния между двумя точками:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$|AM| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2};\ \ |BM| = \sqrt{(x+2)^2 + (y-0)^2},$$

$$2|AM| = |BM| \Rightarrow$$

$$2\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-0)^2}.$$

.

Преобразуем полученное уравнение. Возведем обе части в квадрат:

$$4((x-1)^2+y^2)=(x+2)^2+y^2.$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены:

$$x^2-4x+y^2=0.$$

Дополним члены, содержащие x до полного квадрата

$$(x^2-4x+4)-4+y^2=0 \Longrightarrow (x-2)^2+y^2=4.$$

Это уравнение окружности с центром в точке *C (2;0)* и радиусом $R=2$.

Задача 8. Найти координаты центра и радиус окружности $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

Решение

В прямоугольной системе координат уравнение окружности имеет вид: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, где $(x_0;y_0)$ – координаты центра, R – радиус окружности.

Выделим полные квадраты $(x^2+4x+4)-4+(y^2-6y+9)-9-3=0$

$$(x+2)^2+(y-3)^2=16$$

Значит O (-2; 3), $R=4$.

Задача 9. Дано уравнение эллипса $24x^2+49y^2=1176$. Найти:

а) длины его полуосей;

б) координаты фокусов;

в) эксцентриситет эллипса;

г) уравнение директрис и расстояние между ними;

д) точки эллипса, расстояние от которых до левого фокуса F_1 равно 12.

Решение

А. Разделим обе части данного уравнения на 1176, получим каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1.$$

Из полученного уравнения заключаем, что *a = 7*, $b=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$.

Б. Найдем координаты фокусов; координаты фокусов F_1(-c; 0), F_2(c; 0).

Числа a, b, c связаны соотношением $c^2=a^2-b^2 \Longrightarrow c^2=7^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2=$

$25 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow F_1$(-5; 0) и F_2(5; 0).

В. Найдем эксцентриситет эллипса; E – эксцентриситет, $E = \frac{c}{a}(E < 1,$ так как $c < a)$, тогда $E = \frac{5}{7}$.

Г. Найдем уравнения директрис.

Директрисами эллипса называются прямые l_1 и l_2 *, параллельные малой оси эллипса и отстоящие от нее на расстоянии, равном* $\frac{a}{\mathrm{E}}$*; уравнения директрис*: $x = \frac{a}{\mathrm{E}}$ *и* $x = -\frac{a}{\mathrm{E}}$.

Имеем: $x = \pm\frac{7}{\frac{5}{7}}$, то есть $x = \frac{49}{5}$ и $x = -\frac{49}{5}$.

Найдем расстояние между директрисами:

$$d = \frac{49}{5} - \left(-\frac{49}{5}\right) = \frac{98}{5} = 19{,}6$$

д. Найдем точки эллипса, расстояние от которых до левого фокуса F_1 равно 12.

Расстояния r_1 и r_2 *от произвольной точки М эллипса до его фокусов называются фокальными радиусами этой точки.*

$$r_1 = a + Ex, r_2 = a - Ex,$$
$$(r_1 + r_2 = 2a)$$

Так как $r_1 = 12$, имеем:

$$12 = 7 + \frac{5}{7}x, \text{тогда } x = 7.$$

Подставим значение x в уравнение эллипса, найдем ординаты этих точек:

$$24 \cdot 49 + 49y^2 = 1176$$
$$49y^2 = 0, y = 0$$

Условие задачи удовлетворяет точка А (7; 0).

Задача 10. Дано уравнение гиперболы $2x^2 - 3y^2 = 6$. Найти:

а) длины его полуосей;

б) координаты фокусов;

в) эксцентриситет гиперболы;

г) уравнение асимптот и директрис;

Решение

Каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,

где a – действительная, b – мнимая полуось гиперболы.

1. Приведем уравнение гиперболы к каноническому виду, разделив обе его части на 6. Получим:

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1.$$

2. Найдем длины полуосей гиперболы из уравнения:

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1.$$

$$a^2 = 3 => a = \sqrt{3}$$

$$b^2 = 2 => b = \sqrt{2}$$

3. Определяем координаты фокусов F_1(-с; 0), F_2(с; 0). Числа a, b, c связаны соотношением $c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow c^2 = 3 + 2 = 5,$ тогда F_1(-$\sqrt{5}$; 0) иF_2($\sqrt{5}$; 0).

4. Вычислим эксцентриситет гиперболы:

$$E = \frac{c}{a} (E > 1, \text{так как } c > a)$$

$$E = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

5. Составим уравнение асимптот, которые определяются уравнениями:

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

$y = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} x$ и $y = \frac{\sqrt{2}}{3} x$ или $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$ и $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 0$.

6. Составим уравнение директрис. Две прямые l_1 и l_2 , параллельные мнимой оси гиперболы и отстоящие от нее на расстоянии, равном $\frac{a}{E}$, называются директрисами гиперболы. Их уравнения: $x = \frac{a}{\text{E}}$ и $x = -\frac{a}{\text{E}}$.

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{5}{3}}} = \pm \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Задача 11. Дана парабола $x^2 = 8y$. Найти:

а) координаты ее фокуса;

б) уравнение директрисы;

в) длину фокального радиуса точки М (4; 2).

Решение

А. Каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$, тогда 2p=8 => p=4. Найдем координаты фокуса. Фокусом параболы является точка F(0;$\frac{p}{2}$), значит F (0; 2).

Б. Уравнение директрисы параболы заданной каноническим уравнением имеет вид $y = -\frac{p}{2}$, значит $y = -\frac{4}{2} = -2$.

В. Вычислить фокальный радиус точки. Фокальный радиус точки М вычисляется по формуле $r = y + \frac{p}{2}$, тогда $r = 2 + 2 = 4$.

Поверхности второго порядка

Поверхности 2-го порядка задаются уравнениями второй степени в системе координат *Oxyz* и являются простейшими аналогами кривых 2-го порядка.

Поверхности второго порядка				
Эллипсоид	*Гиперболоид*	*Параболоид*	*Конические поверхности*	*Цилиндрические поверхности*
сфера	*однополостной* *двуполостной*	*эллиптический* *гиперболический*		*гиперболический цилиндр* *параболический цилиндр* *эллиптический цилиндр*

1. Эллипсоид – поверхность, заданная каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где a, b, c – параметры (полуоси) эллипсоида, $a>0, b>0, c>0$ (рис. 36).

Если

- полуоси a, b, c различны, то эллипсоид называется *трехосным*;

- какие-либо две полуоси равны $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ – *эллипсоидом вращения*;

- все три полуоси равны $x^2+y^2+z^2=a.$, то получается *сфера*.

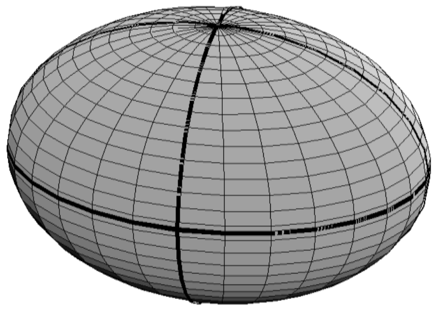


Рисунок 36. Эллипсоид

Геометрические свойства эллипсоида

1. Сечения эллипсоида плоскостями $x=h$, $y=h$ или $z=h$ есть эллипсы.

2. Эллипсоид целиком расположен в параллелепипеде с центром в точке O(0,0,0), с гранями, параллельными координатным плоскостям, и со сторонами, равными $2a$, $2b$ и $2c$.

Эллипсоид часто встречается в природе и технике: апельсин, дыня, граната-лимонка; модель Земли – это эллипсоид вращения (или сфероид), полученный вращением вокруг малой оси.

2. Гиперболоид

Однополостным гиперболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad (a,b,c>0)$ (рис. 37).

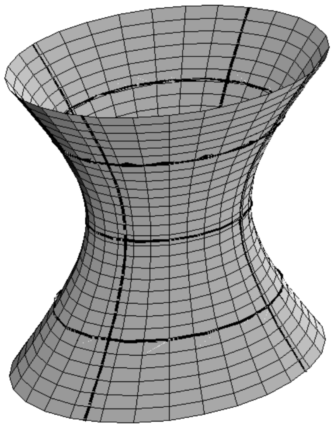


Рисунок 37. Однополостной гиперболоид

Геометрические свойства однополостного гиперболоида

1. Каждая горизонтальная плоскость z = h пересекает гиперболоид по эллипсу. Эллипс получающийся при h = 0, называется горловым эллипсом гиперболоида.

2. Вертикальные плоскости x = 0 и y = 0 пересекают гиперболоид по гиперболам.

3. Ось Oz называется продольной осью гиперболоида, оси Ox и Oy называются поперечными осями гиперболоида.

Двуполостным гиперболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (рис. 38).

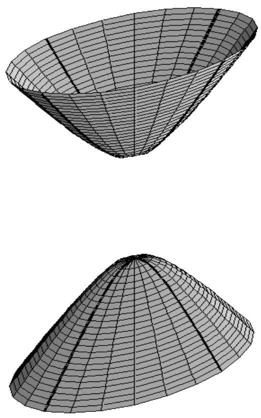


Рисунок 38. Двуполостной гиперболоид

Геометрические свойства двуполостного гиперболоида

1. Каждая горизонтальная плоскость $z = h$ при $|h| < c$ не пересекает гиперболоид; $|h| = c$ имеет единственную общую точку с гиперболоидом ((0, 0, c) при $h = c$ и (0, 0,–c) при $h = -c$); $|h| > c$ плоскость $z = h$ пересекает гиперболоид по эллипсу.

2. Вертикальные плоскости $x = 0$ и $y = 0$ пересекают гиперболоид по гиперболам, у которых действительной осью является ось Oz.

3. Поверхность состоит из двух симметричных полостей, имеющих форму неограниченных чаш, расположенных в полупространствах $z \geq c$ и $z \leq -c$.

4. Ось Oz называется продольной осью гиперболоида, оси Ox и Oy называются поперечными осями гиперболоида.

3. Параболоиды

Эллиптическим параболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z,$ где $a > 0, b > 0$ (рис. 39).

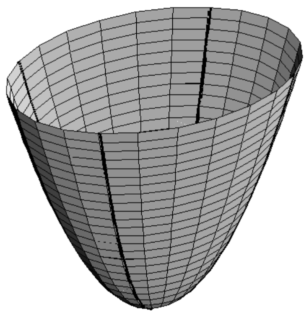


Рисунок 39. Эллиптический параболоид

Геометрические свойства эллиптического параболоида

1. Каждая плоскость $z = h$ при $h < 0$ не пересекает параболоид при $h = 0$ имеет с ним единственную общую точку O(0, 0, 0), при $h > 0$ пересекает параболоид по эллипсу.

2. Плоскости $x = 0$ и $y = 0$ пересекают параболоид по параболам.

3. Поверхность состоит из одной полости, имеющей форму неограниченной чаши, расположенной в полупространстве $z \geq 0$.

4. Ось Oz называется осью эллиптического параболоида, точка O(0, 0, 0) – его вершиной.

Гиперболическим параболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z,$ где $a > 0, b > 0$ (рис. 40).

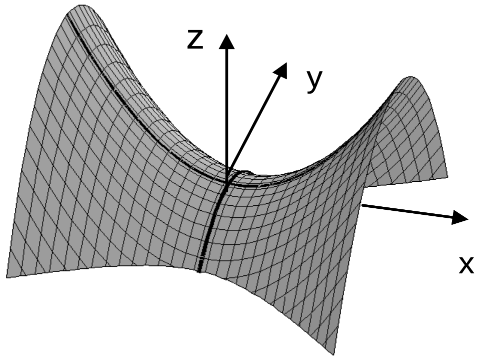


Рисунок 40. Гиперболический параболоид

Геометрические свойства гиперболического параболоида

1. Каждая плоскость $z = h$ при $h < 0$ пересекает параболоид по гиперболе, действительная ось которой параллельна оси Oy, а мнимая – оси Ox. При $h > 0$ плоскость $z = h$ пересекает параболоид по гиперболе, действительная ось которой параллельна оси Ox, а мнимая – оси Oy. Плоскость z = 0 пересекает параболоид по паре прямых.

2. Плоскости $y = h$ и $x = h$ пересекают параболоид по параболам.

3. Поверхность имеет вид седла и может быть получена движением параболы, эта парабола все время остается в плоскости, перпендикулярной к одной из осей координат.

4. Конические поверхности. Конической поверхностью называется поверхность, описываемая прямой (образующей), проходящей через данную точку S (вершину конуса) и пересекающей данную линию L (направляющую) (рис. 41).

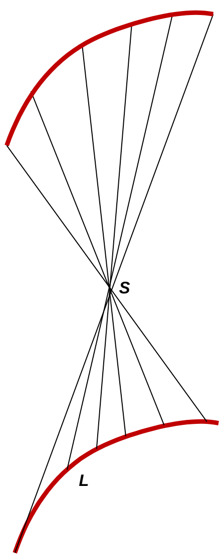


Рисунок 41. Определение конической поверхности

Эллиптическим конусом называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат определяется каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \text{ где } a>0, b>0 \text{ (рис. 42).}$$

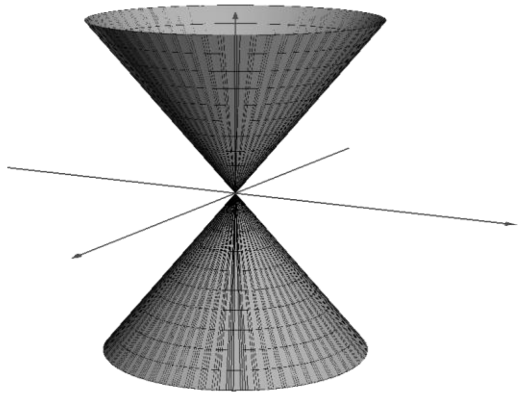


Рисунок 42. Эллиптический конус

Геометрические свойства конуса

1. Сечение эллиптического конуса плоскостью $z=h, h\neq 0$ представляет собой эллипс. Прямая проходящая через центры этих эллипсов, называется осью конуса. Сечение конуса плоскостью $z=0$ состоит из одной точки O (0, 0, 0).

2. Сечения конуса плоскостями $x=h, y=h, h\neq 0$ являются гиперболами.

3. Сечения конуса плоскостями $x=0, y=0$ представляют собой пары пересекающихся прямых.

4. Рассматривая сечения конуса плоскостями, не перпендикулярными осям Ox или Oy, можем получить параболу.

5. Поверхность состоит из двух симметричных частей, расположенных в полупространствах $z\geq 0$ и $z\leq 0$.

5. Цилиндрические поверхности 2-го порядка, которые ***называются цилиндрами 2-го порядка***. Их направляющие – кривые 2-го порядка.

Если направляющей цилиндра 2-го порядка является ***эллипс***, цилиндр называется ***эллиптическим***; в случае, когда направляющая – ***гипербола***, цилиндр называется ***гиперболическим***, а если направляющая ***парабола***, – ***параболическим***.

Далее на рисунке 43 изображены эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры с образующими, параллельными оси *Ox,* и соответствующие им уравнения.

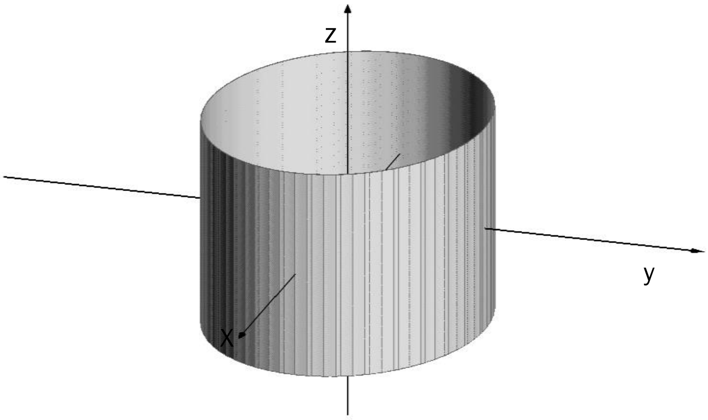
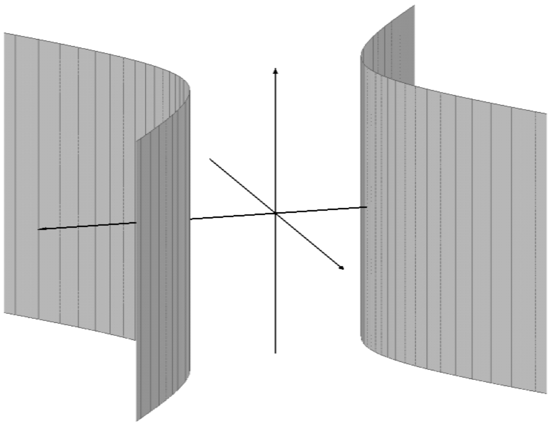
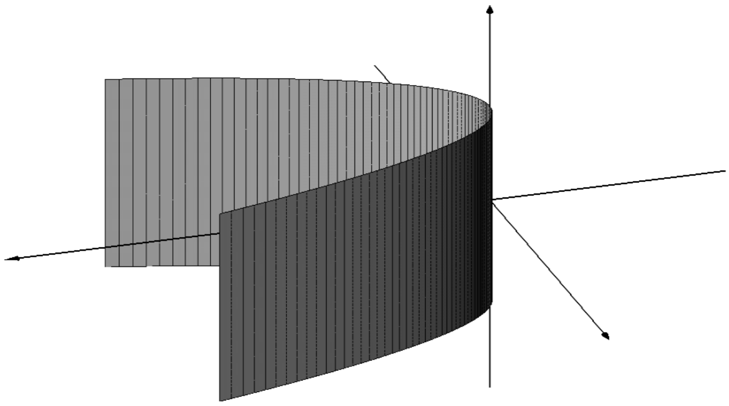
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-$ эллиптический цилиндр при $a = b$ – круговой	
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1-$ гиперболический цилиндр	
$y^2 = 2px -$ параболический цилиндр	

Рисунок 43. Цилиндрические поверхности

Рекомендуемая литература: /1, глава 1 § 1–4, глава 3 § 1–4/.

Контрольные вопросы

1. Уравнения прямой на плоскости: через точку и нормальный вектор; через точку и направляющий вектор; через две точки; с угловым коэффициентом; общее уравнение; нормальное уравнение; параметрические уравнения; в отрезках.
2. Две прямы заданы общими уравнениями: условие параллельности прямых; условие перпендикулярности прямых.
3. Формула расстояния от точки до прямой на плоскости; от точки до плоскости.
4. Две прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом: условие параллельности прямых; условие перпендикулярности прямых.
5. Уравнения плоскости: через три заданные точки; через заданную точку с данным нормальным вектором; нормированное уравнение; общее уравнение; в отрезках.
6. Уравнения прямой в пространстве: канонические; через две точки; параметрические.
7. Угол между прямой и плоскостью в пространстве.
8. Определение, характеристики и построение эллипса.
9. Определение, характеристики и построение гиперболы.
10. Определение, характеристики и построение параболы.

3 Требования к аттестации по дисциплине

3.1 Текущая аттестация

В ходе изучения дисциплины студентам предстоит пройти следующие этапы текущей аттестации: выполнить задания по темам практических занятий; выполнить индивидуальное домашнее задание по следующим темам: поле комплексных чисел; кольцо многочленов; системы линейных уравнений; векторная алгебра; аналитическая геометрия на плоскости.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества усвоения студентами учебного материала и стимулирования их учебной работы. Он может осуществляться в ходе всех видов занятий в форме, избранной преподавателем или предусмотренной рабочей программой дисциплины.

Текущий контроль предполагает постоянный контроль преподавателем качества усвоения учебного материала, активизацию учебной деятельности студентов на занятиях, побуждение их к самостоятельной систематической работе. Он необходим обучающимся для самоконтроля на разных этапах обучения. Их результаты учитываются выставлением преподавателем оценок в журнале учета успеваемости и в ходе ежемесячной аттестации.

При текущем контроле успеваемости учитывается: выполнение обучающимся всех работ и заданий, предусмотренных рабочей программой дисциплины, а именно выполнение заданий на практических занятиях, выполнение отдельных индивидуальных домашних заданий, для которых срок выполнения приходится на отчетный период; самостоятельную работу обучающихся; посещаемость аудиторных занятий.

Результаты текущего контроля успеваемости оцениваются по пятибалльной шкале:

- оценка «**отлично**» (**5**) – график самостоятельной работы и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся на 100 % и более (с опережением);

- оценка «**хорошо**» (**4**) – график самостоятельной работы и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся на 75 % и более;

- оценка «**удовлетворительно**» (**3**) – график самостоятельной работы и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся на 50 % и более;

- оценка «**неудовлетворительно**» (**2**) – график самостоятельной работы и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся менее чем на 50 %.

3.2 Условия получения положительной оценки

Промежуточная аттестация по дисциплине проводится в форме экзамена.

К экзамену допускаются студенты, имеющие по всем текущим контролям положительные оценки.

Экзамен проводится в соответствии с перечнем вопросов к экзамену, размещенному в ЭИОС КГТУ и представленному в приложении 1.

Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса и три задачи. Выбор экзаменационных вопросов для включения в билет осуществляется из принципа равной сложности всех билетов и наибольшего охвата каждым билетом учебного материала.

Подготовка к экзамену ведется по конспекту лекций, учебникам и учебным пособиям, рекомендуемым к изучению в начале курса. В ходе подготовки к экзамену преподаватель проводит консультацию, на которой доводится порядок проведения экзамена и даются ответы на вопросы, вызвавшие затруднения у студентов в процессе подготовки.

Экзамен проводится в день, указанный в расписании занятий.

Студент, прибывший для сдачи экзамена, получает билет на бланке установленной формы и занимает указанное ему место для подготовки. После получения билета в течение 40 минут студент имеет право готовиться к ответу. На ответ по билету отводится до 15 минут.

Готовясь к ответу, обучающийся все доказательства, формулы, структурные схемы, графики и т.д. записывает и изображает на полученном листе в форме удобной для использования при устном ответе экзаменатору.

Ответ обучающегося должен быть четким, конкретным и кратким. После ответа преподаватель задает вопросы, помогающие ему выявить ход мыслей, логику рассуждений и способность применять полученные знания в практической деятельности. Если требуется уточнить оценку или степень знаний обучающегося по тому или иному вопросу, задаются дополнительные вопросы.

Студентам, пользующимся на экзамене материалами, различного рода записями, техническими средствами, не указанными в перечне разрешенных, выставляется оценка «**неудовлетворительно**», о чем докладывается заведующему кафедрой.

Знания, умения и навыки студентов определяются оценками «**отлично**», «**хорошо**», «**удовлетворительно**», «**неудовлетворительно**». Общая оценка объявляется курсанту СРАЗУ после окончания его ответа на билет экзамена.

Положительная оценка («**отлично**», «**хорошо**», «**удовлетворительно**») заносится в ведомость и зачетную книжку по окончании экзамена. Оценка «**неудовлетворительно**» выставляется только в ведомость.

Компетенции в той части, в которой они должны быть сформированы в рамках изучения дисциплины, могут считаться сформированными в случае, если студент получил на экзамене положительную оценку.

Библиографический список

Основная литература

1. Баврин, И. И. Высшая математика [Текст]: учеб. для студ. естественно-науч. спец. / И. И. Баврин. – 8-е изд., стер. – Москва: Изд. центр «Академия», 2010. – 616 с.

Дополнительная литература

2. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 1: учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко; авт.: А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 7-е изд., испр. – Москва: Оникс: Мир и Образование, 2009. – 368 с.

3. Мухина, С. Н. Алгебра и геометрия. Алгебраические структуры. Поле комплексных чисел. Кольцо многочленов: учебное пособие. – Калининград, изд-во БГАРФ, 2020. – 86 с.

4. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – Москва: Айрис-пресс, 2011. – 608 с.

Приложение

Тестовые задания

Тестовые задания предназначены для оценки в рамках текущего контроля успеваемости знаний, приобретенных студентами на лекционных и практических занятиях и для измерения соответствующих индикаторов достижения компетенции.

Содержание теста определяется в соответствии с содержанием дисциплины пропорционально учебному времени, отведенному на изучение разделов, перечисленных в рабочей программе модуля. Тестовый вариант содержит 43 задания закрытого типа с возможностью одиночного правильного ответа. Время выполнения теста – 95 мин.

Тестовые задания разработаны в программной среде «Moodle» (ссылка на электронный ресурс:

https://eios.klgtu.ru/course/view.php?id=9542;

https://cloud.mail.ru/public/Ep4h/8GzWA3pxp).

Вопросы для подготовки к экзамену

1. Понятие алгебраической структуры. Алгебраические операции.
2. Определение группы. Аддитивные и мультипликативные группы. Примеры.
3. Определение кольца. Делители нуля, область целостности. Примеры.
4. Определение поля. Примеры. Поле вещественных чисел.
5. Комплексные числа. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная форма записи комплексного числа. Действия над комплексными числами. Геометрическая интерпретация.
6. Поле комплексных чисел.
7. Формула Муавра – Лапласа. Отыскание всех значений, где z – произвольное комплексное число.
8. Алгебраические многочлены по степеням z. Корни многочлена. Теорема Безу. Основная теорема алгебры, ее следствие.
9. Определитель квадратной матрицы второго и третьего порядка. Свойства определителей, их вычисление.
10. Линейные системы уравнений в случае равенства числа уравнений числу неизвестных. Решение систем матричным способом, по формулам Крамера.
11. Миноры и алгебраические дополнения матрицы. Ранг матрицы и способы его нахождение.
12. Линейные системы уравнений в общем случае. Теорема Кронекера – Капелли. Исследование систем линейных уравнений.
13. Скалярное произведение, определение, свойства, выражение в координатной форме, приложения.

14. Векторное произведение, определение, свойства, выражение в координатной форме, приложения.

15. Смешанное произведение, определение, свойства, выражение в координатной форме, приложения

16. Прямая на плоскости. Различные виды уравнения прямой. Взаимное расположение прямых на плоскости. Расстояние от заданной точки на плоскости до прямой.

17. Плоскость в пространстве. Различные виды уравнения плоскости. Взаимное расположение плоскостей в пространстве. Расстояние от заданной точки до плоскости.

18. Каноническое уравнение прямой в пространстве. Прямая как пересечение двух плоскостей. Взаимное расположение прямых, прямой и плоскости в пространстве.

19. Окружность. Вывод уравнения окружности.

20. Эллипс. Вывод уравнения эллипса. Исследование формы. Фокусы, директрисы и эксцентриситет эллипса. Свойства эллипса.

21. Гипербола. Вывод уравнения гиперболы. Исследование формы. Асимптоты, фокусы, директрисы и эксцентриситет гиперболы. Свойства гиперболы.

22. Парабола. Вывод уравнения параболы. Исследование формы. Фокус, директриса и эксцентриситет параболы. Свойства параболы.

23. Поверхности второго порядка, общее уравнение. Канонические уравнения поверхностей второго порядка.

24. Сфера и эллипсоид, основные свойства.

25. Однополостный и двуполостный гиперболоиды, их свойства.

26. Эллиптический и гиперболический параболоиды, их свойства.

27. Конусы и цилиндрические поверхности.

28. Поверхности вращения. Примеры.

Локальный электронный методический материал

Светлана Николаевна Мухина

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Редактор М. А. Дмитриева

Уч.-изд. л. 4,4. Печ. л. 6,0.

Издательство федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Калининградский государственный технический университет».
236022, Калининград, Советский проспект, 1.