Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**В. М. Усатова**

# МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины
для студентов специальности
26.05.05 Судовождение

Калининград
Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ»
2023

УДК 51(075)

Рецензент:
кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет»
Е. А. Мажаева

Усатова, В. М.
Математика: учеб.-метод. пособие по изучению дисциплины для студ. специальности 26.05.05 Судовождение / В. М. Усатова. – Калининград: Изд-во ФГБОУ ВО «КГТУ». – 2023. – 154 с.

Учебно-методическое пособие является руководством по изучению дисциплины «Математика» для студентов очной и заочной форм обучения специальности 26.05.05 Судовождение. Содержит характеристику дисциплины (цель и планируемые результаты изучения дисциплины, место дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы, описание видов и процедур текущего контроля и промежуточной аттестации), тематический план с описанием для каждой темы вопросов для изучения, методических материалов к занятию, методических указаний по выполнению самостоятельной работы, а также задание на контрольные работы студентам заочной формы обучения и методические указания по их выполнению.
Табл. 6, рис. 4, список лит. – 24 наименования

Учебно-методическое пособие рассмотрено и одобрено в качестве локального электронного методического материала на заседании кафедры прикладной математики и информационных технологий Института цифровых технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» 21 апреля 2023 г., протокол № 4

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины рекомендовано к использованию в учебном процессе в качестве локального электронного методического материала методической комиссией Института цифровых технологий 1 июня 2023 г., протокол № 6

УДК 51(075)

## Оглавление

**Введение** .......... 4
**1 Тематический план** .......... 9
1.1 Тематический план для студентов очной формы обучения .......... 9
1.2 Тематический план для студентов заочной формы обучения .......... 9
**2 Содержание и методические указания по изучению дисциплины** .......... 10
2.1 Раздел 1. Элементы линейной алгебры .......... 10
2.2 Раздел 2. Векторная алгебра .......... 17
2.3 Раздел 3. Элементы аналитической геометрии на плоскости .......... 21
2.4 Раздел 4. Комплексные числа .......... 28
2.5 Раздел 5. Введение в математический анализ .......... 32
2.6 Раздел 6. Дифференциальное исчисление функции одной .......... 48
2.7 Раздел 7. Функции нескольких переменных .......... 54
2.8 Раздел 8. Неопределенный интеграл. Методы вычисления .......... 58
2.9 Раздел 9. Определенный интеграл .......... 64
2.10 Раздел 10. Дифференциальные уравнения первого порядка .......... 71
2.11 Раздел 11. Кратные, криволинейные и поверхностные .......... 83
2.12 Раздел 12. Ряды .......... 100
2.13 Раздел 13. Теория вероятностей .......... 108
2.14 Раздел 14. Математическая статистика .......... 119
**3 Методические указания по самостоятельной работе** .......... 142
Библиографический список .......... 145
Основные источники .......... 145
Дополнительные источники .......... 145
**Приложение А Перечень экзаменационных вопросов по дисциплине «Математика»** .......... 148
**Приложение Б Пример оформления титульного листа на курсовую работу** .......... 153

## Введение

Учебно-методическое пособие представляет комплекс систематизированных материалов для самостоятельного изучения дисциплины «Математика» для студентов очной и заочной форм обучения специальности 26.05.05 Судовождение.

Целью освоения дисциплины является получение систематизированных знаний об основных закономерностях и особенностях математической области знаний с акцентом на изучение прикладных математических аспектов технического направления, о проблемах, связанных с областью будущей профессиональной деятельности; выработка навыков получения, анализа и обобщения информации.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

знать: фундаментальные разделы математики в объеме, необходимом для владения математическими методами обработки и анализа информации, статистики, основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, сферической тригонометрии, теории дифференциальных уравнений, основные понятия и методы векторной алгебры и анализа, теории вероятностей и его практического применения, иметь представление о математических моделях, применяемых в решении прикладных и профессиональных задач;

уметь: использовать методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной и векторной алгебры, теории вероятностей и математической статистики при решении типовых задач с использованием алгоритмов, строить алгоритм решения конкретной типовой задачи, выбирать метод ее решения и обосновывать свой выбор, выбирать оптимальный метод решения задачи, оценивать полученный результат, строить простейшие математические модели прикладных и профессиональных задач, применять математические методы при решении типовых и профессиональных задач на определение оптимальных соотношений параметров различных систем;

владеть: математической символикой, основными способами представления математической информации (аналитическим, графическим, символьным, словесным и др.), определением области применения математического знания к решению конкретной задачи; методами построения простейших математических моделей типовых задач, конкретным представлением словесных задач в математической форме, математической постановкой задачи; методами построения математических моделей и их исследования в различных сферах профессиональной деятельности; основными приемами обработки экспериментальных данных, методами построения математической модели типовых профессиональных задач и содержательной интерпретации полученных результатов; навыками самостоятельного применения методов математического анализа, линейной алгебры, аналитической геометрии, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики, выбором способа построения простейших математических моделей профессиональных задач, навыками самостоятельного построения математических моделей нестандартных и прикладных задач из своей будущей профессиональной деятельности.

**Место дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы**

Дисциплина Б1.О.03.01 «Математика» относится к Математическому и естественнонаучному модулю Б1.О.03 основной профессиональной образовательной программы высшего образования по специальности 26.05.05 Судовождение.

При изучении дисциплины используются знания, умения и навыки довузовской подготовки по математике (умение проводить алгебраические преобразования, решать уравнения и неравенства, знание основных тригонометрических формул, умение проводить тригонометрические преобразования и решать тригонометрические уравнения и неравенства, понимание функции, графика функции и основных ее свойств, знание основных геометрических фигур, умение находить их площади, знать основные виды многогранников и тел вращения и уметь вычислять их площади и объемы).

Дисциплина является базой при изучении дисциплин математического и естественнонаучного модуля, инженерно-технического модуля.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 12 зачетных единиц (з.е.), т.е. 432 академических часов контактной и самостоятельной учебной работы студента; работы, связанной с текущей и промежуточной (заключительной) аттестацией по дисциплине.

Таблица 1 – Объем (трудоемкость освоения) в очной форме обучения и структура дисциплины

| **Наименование** | **Семестр** | **Форма контроля** | **з.е.** | **Акад. часов** | **Контактная работа** | | | | | **СРС** | Подготовка и аттестация в период сессии |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | Лек | Лаб | Пр | РЭ | КА | | |
| Математика | 1 | Эк, К | 4 | 144 | 34 | | 34 | 2 | 2,55 | 46,7 | 24,75 |
| | 2 | Эк, К | 4 | 144 | 34 | 17 | 34 | 2 | 2,55 | 29,7 | 24,75 |
| | 3 | Эк<br>КР<br>К | 4 | 144 | 28 | | 28 | 2 | 5,55 | 55,7 | 24,75 |
| ИТОГО: | | | 12 | 432 | 96 | 17 | 96 | 6 | 10,65 | 132,1 | 74,25 |

*Обозначения: Э – экзамен; К – контрольная работа, РГР – расчетно-графическая работа; КР – курсовая работа; Лек – лекционные занятия; Лаб - лабораторные занятия; Пр – практические занятия; РЭ – контактная работа с преподавателем в ЭИОС; КА – контактная работа, включающая консультации, инд. занятия, практики и аттестации; СРС – самостоятельная работа студентов.*

Таблица 2 – Объем (трудоемкость освоения) в заочной форме обучения и структура дисциплины

| **Наименование** | **Семестр** | **Форма контроля** | **з.е.** | **Акад. часов** | **Контактная работа** | | | | | **СРС** | Подготовка и аттестация в период сессии |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | Лек | Лаб | Пр | РЭ | КА | | |
| Математика | 1 | Эк К(2) | 4 | 144 | 4 | | 6 | 2 | 3,25 | 122 | 6,75 |
| | 2 | Эк К(2) | 4 | 144 | 6 | | 6 | 2 | 3,25 | 120 | 6,75 |
| | 3 | Эк КР К(2) | 4 | 144 | 4 | | 6 | 2 | 6,25 | 119 | 6,75 |
| ИТОГО: | | | 12 | 432 | 14 | 0 | 18 | 6 | 12,75 | 361 | 20,25 |

Основными видами аудиторных учебных занятий по дисциплине являются лекции, лабораторные и практические занятия.

Формирование знаний обучающихся обеспечивается проведением лекционных занятий.

Изучение отдельных разделов тематического плана сопровождается лабораторными и практическими занятиями, в ходе которых происходит закрепление теоретических знаний, формирование и совершенствование умений, навыков и компетенций.

В ходе изучения дисциплины предусматривается применение эффективных методик обучения, которые предполагают постановку вопросов проблемного характера с разрешением их как непосредственно в ходе занятий, так и в ходе самостоятельной работы.

Отдельным разделом дисциплины является курсовая работа, направленная на освоение навыков обработки экспериментальных данных средствами математической статистики. Результаты выполнения курсовой работы оформляются в виде отчета и пояснительной записки. Обучающимся рекомендуется широкое использование ПЭВМ и средств компьютерного моделирования. В этом плане роль консультаций сводиться в основном к помощи в изучении методов решения статистических задач.

Контроль знаний в ходе изучения дисциплины осуществляется в виде текущего контроля, а также промежуточной аттестации в форме экзаменов в 1-м – 3-м учебных семестрах в соответствии с рабочим планом для очной и заочной форм обучения.

Текущий контроль (защита лабораторных работ, курсовой работы, контроль выполнения заданий на самостоятельную работу) предназначен для проверки хода и качества усвоения курсантами/студентами учебного материала и стимулирования их учебной работы. Он может осуществляться в ходе всех видов занятий в форме, избранной преподавателем или предусмотренной рабочей программой дисциплины.

Текущий контроль предполагает постоянный контроль преподавателем качества усвоения учебного материала, активизацию учебной деятельности курсантов/студентов на занятиях, побуждение их к самостоятельной систематической работе. Он необходим обучающимся для самоконтроля на разных этапах обучения. Их результаты учитываются выставлением преподавателем оценок в ходе ежемесячной аттестации.

При текущем контроле успеваемости учитывается:

- выполнение обучающимся всех работ и заданий, предусмотренных рабочей программой дисциплины, а именно выполнение и защита лабораторных работ, выполнение заданий на практических занятиях, выполнение отдельных этапов курсовой работы, для которых срок выполнения и защиты приходится на отчетный период; выполнение контрольных работ; самостоятельная работу обучающихся; посещаемость аудиторных занятий (занятий с применением ДОТ).

Результаты текущего контроля успеваемости оцениваются по пятибалльной шкале:

оценка **«отлично» (5)** – график самостоятельной работы (график выполнения курсовой работы и т.д.) и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся на 100 % и более (с опережением);

оценка **«хорошо» (4)** – график самостоятельной работы (график выполнения курсовой работы и т.д.) и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся на 75 % и более;

оценка **«удовлетворительно» (3)** – график самостоятельной работы (график выполнения курсовой работы и т.д.) и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся на 50 % и более;

оценка **«неудовлетворительно» (2)** – график самостоятельной работы (график выполнения курсовой работы и т.д.) и все виды контрольных мероприятий за истекающий период выполнены обучающимся менее чем на 50 %.

Задания на контрольные работы и методические указания по их выполнению для студентов заочной формы обучения приведены в учебном пособии [11].

Шкала оценивания результатов выполнения контрольной работы обучающимся заочной формы основана двухбалльной системе.

Оценка **«зачтено»** выставляется в случае, если для решаемых задач приведено полное теоретическое обоснование решения, расчеты выполнены по правильным формулам и алгоритмам и без существенных ошибок, выводы приведены полностью и по существу, студент понимает и может пояснить ход решения и привести экспликацию любой формулы, работа оформлена в соответствии с требованиями.

Оценка **«не зачтено»** выставляется в случае, если теоретическое обоснование при решении задач приведено формально и излишне кратко или не приведено вовсе, расчеты выполнены с использованием неправильных алгоритмов и формул, контрольная работа оформлена с нарушениями требований, выводы приведены не полностью или не приведены вовсе, студент плохо понимает (или не понимает вовсе) и не может пояснить ход решения.

К экзамену (зачету с оценкой) допускаются студенты, имеющие по всем текущим контролям положительные оценки.

Экзамен проводится в соответствии с перечнем вопросов к экзамену, размещенному в ЭИОС БГАРФ.

Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса и три задачи. Выбор экзаменационных вопросов для включения в билет осуществляется из принципа равной сложности всех билетов и наибольшего охвата каждым билетом учебного материала.

Подготовка к экзамену (зачету с оценкой) ведется по конспекту лекций, рекомендуемым к изучению в начале курса учебникам и учебным пособиям. В ходе подготовки к экзамену преподаватель проводит консультацию, на которой доводится порядок проведения экзамена и даются ответы на вопросы, вызвавшие затруднения у курсантов/студентов в процессе подготовки.

Экзамен проводится в день, указанный в расписании занятий.

Курсант/студент, прибывший для сдачи экзамена, докладывает экзаменатору, принимающему экзамен, сдает ему зачетную книжку, получает билет на бланке установленной формы и занимает указанное ему место для подготовки. После получения билета в течение 40 мин. курсант/студент имеет право готовиться к ответу. На ответ по билету отводится до 15 мин.

Готовясь к ответу, обучающийся все доказательства, формулы, структурные схемы, графики и т.д. записывает и изображает на полученном листе в форме, удобной для использования при устном ответе экзаменатору.

Ответ обучающегося должен быть четким, конкретным и кратким. После ответа преподаватель задает вопросы, помогающие ему выявить ход мыслей, логику рассуждений и способность применять полученные знания в практической деятельности. Если требуется уточнить оценку или степень знаний обучающегося по тому или иному вопросу, задаются дополнительные вопросы.

Во время экзамена должна соблюдаться дисциплина и порядок, разговоры курсантов/студентов между собой не допускаются. Если во время экзамена у экзаменуемого возникает необходимость обратиться к преподавателю, то он поднимает руку и просит подойти к нему преподавателя. Кроме авторучки, калькулятора, билета и бланка для ответа на столе не должно быть ничего. Пользоваться конспектами, учебниками, учебными пособиями и иными дополнительными материалами, раскрывающими содержание вопросов, не разрешается.

Курсантам/студентам, пользующимся на экзамене материалами, различного рода записями, техническими средствами, не указанными в перечне разрешенных, выставляется оценка «**неудовлетворительно**», о чем докладывается заведующему кафедрой.

Знания, умения и навыки курсантов/студентов определяются оценками «**отлично**», «**хорошо**», «**удовлетворительно**», «**неудовлетворительно**». Общая оценка объявляется курсанту СРАЗУ после окончания его ответа на билет экзамена.

Положительная оценка («**отлично**», «**хорошо**», «**удовлетворительно**») заносится в ведомость и зачетную книжку по окончании экзамена (зачета с оценкой). Оценка «**неудовлетворительно**» выставляется только в ведомость.

# 1 Тематический план

## 1.1 Тематический план для студентов очной формы обучения

Форма промежуточной аттестации по дисциплине для очной формы обучения – экзамены (1-й – 3-й семестры).

Таблица 3 – Трудоемкость освоения по очной форме обучения

| № п/п | Раздел (модуль) дисциплины | Контактная работа с преподавателем | | | | | СРС | Подготовка и аттестация в период сессии |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ЛК | ЛР | ПР | РЭ | КА | | |
| 1 | Элементы линейной алгебры | 6 | 1 | 6 | 2 | | 6 | |
| 2 | Векторная алгебра | 4 | 1 | 4 | 2 | | 6 | |
| 3 | Элементы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве | 8 | 1 | 8 | 2 | | 8 | |
| 4 | Комплексные числа | 2 | | 2 | 1 | | 6 | |
| 5 | Введение в математический анализ | 6 | | 6 | 2 | | 8 | |
| 6 | Дифференциальное исчисление функции одной переменной | 8 | 1 | 8 | 4 | | 10 | |
| 7 | Функции нескольких переменных | 8 | 1 | 8 | 4 | | 12 | |
| 8 | Неопределенный интеграл. Методы вычисления | 10 | 1 | 10 | 6 | | 12 | |
| 9 | Определенный интеграл | 8 | 1 | 8 | 6 | | 12 | |
| 10 | Дифференциальные уравнения первого порядка | 8 | 1 | 8 | 5 | | 12 | |
| 11 | Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Векторный анализ | 6 | 1 | 6 | 2 | | 10 | |
| 12 | Ряды | 8 | 2 | 8 | 5 | | 12 | |
| 13 | Теория вероятностей | 8 | 5 | 8 | 8 | | 12 | |
| 14 | Математическая статистика | 6 | 1 | 6 | 2 | | 6 | |
| **ИТОГО:** | | 96 | 17 | 96 | 6 | 10,65 | 132 | 74,25 |

## 1.2 Тематический план для студентов заочной формы обучения

Форма промежуточной аттестации по дисциплине для заочной формы обучения – контрольная работа, зачет.

Таблица 4 – Трудоемкость освоения по заочной форме обучения

| № п/п | Раздел (модуль) дисциплины | Контактная работа с преподавателем | | | | | СРС | Подготовка и аттестация в период сессии |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ЛК | ЛР | ПР | РЭ | КА | | |
| 1 | Элементы линейной алгебры | 0,5 | | 1 | | | 25 | |
| 2 | Векторная алгебра | 1 | | 1 | | | 25 | |
| 3 | Элементы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве | 1 | | 1 | | | 30 | |
| 4 | Комплексные числа | 0,5 | | 1 | | | 10 | |
| 5 | Введение в математический анализ | 1 | | 1 | | | 16 | |
| 6 | Дифференциальное исчисление функции одной переменной | 1 | | 1 | | | 25 | |
| 7 | Функции нескольких переменных | 1 | | 2 | | | 25 | |
| 8 | Неопределенный интеграл. Методы вычисления | 1 | | 2 | | | 25 | |
| 9 | Определенный интеграл | 1 | | 1 | | | 30 | |
| 10 | Дифференциальные уравнения первого порядка | 1 | | 2 | | | 30 | |
| 11 | Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Векторный анализ | 1 | | 1 | | | 30 | |
| 12 | Ряды | 2 | | 2 | | | 30 | |
| 13 | Теория вероятностей | 1 | | 1 | | | 30 | |
| 14 | Математическая статистика | 1 | | 1 | | | 30 | |
| **ИТОГО:** | | 14 | 0 | 18 | 6 | 12,75 | 361 | 20,25 |

## 2 Содержание и методические указания по изучению дисциплины

Курс разбит на разделы, в которых даны указания литературы, рекомендуемой для изучения.

Номера в скобках *[]* означают пособия из приведенного списка литературы, например *[1, глава 2, §3, 4, 6]* обозначает учебник М.А. Баврина, в котором рекомендуется изучить главу 2, §3, 4, 6, и т.д.

### 2.1 Раздел 1. Элементы линейной алгебры

**Вопросы для изучения**

1. Матрица. Определение. Частные виды матриц. Единичная матрица. Транспонирование матриц. Сложение матриц. Умножение матриц на число. Умножение матриц. Обратная матрица.

2. Определители второго и третьего порядков. Их вычисление. Свойства определителей. Понятие об определителях любого конечного порядка.

3. Системы линейных уравнений.

4. Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера.
5. Решение систем линейных уравнений средствами матричного исчисления.
6. Однородные системы.
7. Понятие о ранге матрицы. Теорема Кронекера – Капелли.

**Методические указания**

Важно хорошо усвоить свойства определителей, так как без их применения практически невозможно вычислять определители высших порядков (выше третьего). Умение вычислять определители пригодится в ходе последующих тем. Понятие матрицы тесно связано с исследованием и решением систем линейных уравнений.

**Рекомендуемые источники по теме:** /*1, глава 3 §3.1, 3.2*/ или /*3 лекции 1,2*/.

**Основные теоретические сведения**

**Матрицей** размера n×m называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из n строк и m столбцов.

Матрица записывается в виде

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если m=*n*, то матрица называется ***квадратной.***

Элементы матрицы А обозначаются $a_{ij}$, где *i* - номер строки, в которой находится элемент, *j* - номер столбца.

**Главной диагональю матрицы** называется диагональ, проведенная из левого верхнего угла матрицы в правый нижний угол

**Побочной диагональю матрицы** называется диагональ, проведенная из левого нижнего угла матрицы в правый верхний угол.

**Единичная матрица** – это диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Действия над матрицами

### 1. Сложение

| Формальная модель | Наглядно-эмпирическая модель |
|---|---|
| Суммой матриц А и В одинаковой размерности называется матрица С той же размерности, m×n каждый элемент которой равен сумме элементов матриц А и В, стоящих на тех же местах | $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то $A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}$ |

### 2. Произведение матрицы на число

| Формальная модель | Наглядно-эмпирическая модель |
|---|---|
| Произведением матрицы на число называется матрица той же размерности, что и исходная, все элементы которой равны элементам исходной матрицы, умноженным на данное число | $k \cdot A = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$ |

### 3. Произведение матриц

| Формальная модель | Наглядно-эмпирическая модель |
|---|---|
| Произведением матрицы А размерности m×p и матрицы В размерности p×n называется матрица С размерности m×n каждый элемент которой $c_{ij}$ определяется формулой $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, i = 1,\dots,m, j = 1,\dots,n.$ Таким образом, элемент $c_{ij}$ представляет собой сумму произведений элементов i-й строки матрицы А на соответствующие элементы j-го столбца матрицы В | $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + b_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$ |

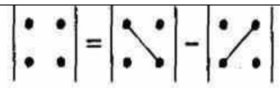
## Определители

Определителем или детерминантом квадратной матрицы А называется число, которое ставится в соответствие этой матрице и может быть вычислено по ее элементам.

Обозначается |**A**|, det **A**, или Δ.

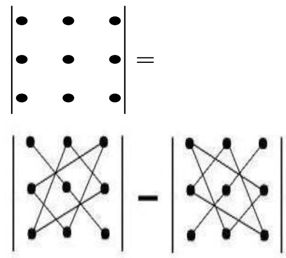
**Вычисление определителей второго порядка**

***Определителем второго порядка*** называется число, равное разности произведений элементов главной и второй диагонали.

| Аналитическая модель | Графическая модель |
|---|---|
| $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ |  |

**Вычисление определителей третьего порядка**

***Определитель третьего порядка*** вычисляется следующим образом: со знаком плюс идут произведения троек чисел, расположенных на главной диагонали матрицы, и в вершинах треугольников с основанием, параллельным этой диагонали, и вершиной противоположного угла матрицы. Со знаком минус идут тройки из второй диагонали и из треугольников, построенных относительно этой диагонали.

| Математическая Модель | Графическая модель |
|---|---|
| $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$ $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$ $- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$ |  |

**Свойства определителей**

1. Определитель единичной матрицы равен единице: $\det(E) = 1$.

2. Определитель матрицы с двумя равными строками (столбцами) равен нулю.

3. Определитель матрицы с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю.

4. Определитель матрицы, содержащий нулевую строку (столбец), равен нулю.

5. Определитель матрицы равен нулю, если две (или несколько) строк (столбцов) матрицы линейно зависимы.

6. При транспонировании значение определителя матрицы не меняется: $\det(A) = \det(A^T)$.

7. Определитель матрицы не изменится, если к какой-то его строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на некоторое число.

8. Если поменять местами две строки (столбца) матрицы, то определитель матрицы поменяет знак.

9. Общий множитель в строке (столбце) можно выносить за знак определителя.

## Обратная матрица

Обратной матрицей к квадратной матрице $A$ называется такая матрица (обозначается $A^{-1}$), что $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

***Минором*** $M_{ij}$ к элементу $a_{ij}$ определителя n-го порядка называется определитель (n-1)-го, полученный из исходного вычеркиванием i-й строки и j-го столбца (т.е. вычеркивается строка и столбец, на пересечении которых находится элемент $a_{ij}$).

| Наглядно-эмпирическая модель нахождения обратной матрицы | Формальная модель нахождения обратной матрицы |
|---|---|
| $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, где $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ - союзная матрица, $A_{ij}$ - алгебраические дополнения элементов $\boldsymbol{a_{ij}}$ исходной матрицы | Правило нахождения обратной матрицы на примере матрицы $\boldsymbol{A}$. 1. Находим определитель матрицы. Если $\Delta \neq 0$, то матрица $A^{-1}$ существует. 2. Составим матрицу В алгебраических дополнений элементов исходной матрицы $A$. Т.е. в матрице $B$ элементом $i$ -й строки и $j$ -го столбца будет алгебраическое дополнение $A_{ij}$ (элемента $a_{ij}$ исходной матрицы). 3. Транспонируем матрицу $B$ и получим $B^T$ |

## Системы линейных уравнений. Формулы Крамера

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Если определитель $\Delta$ системы линейных алгебраических уравнений отличен от нуля, то система имеет единственное решение.

| Наглядно-эмпирическая модель решения системы | Формальная модель решения системы |
|---|---|
| $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$ | Если определитель матрицы системы отличен от нуля, то система имеет решение и притом только одно. Это решение определяется формулами: $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$, где $\Delta$ — определитель матрицы системы и $\Delta_k$ — определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой $k$-го столбца столбцом свободных членов |

| Наглядно-эмпирическая модель решения системы | Формальная модель решения системы |
|---|---|
| $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$ <br> $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$ | |

**Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы**

Систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

можно записать в матричном виде $A \cdot X = B$, где

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - матрица системы,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - столбец неизвестных,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ - столбец свободных членов.

Составим модели решения систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

| Математическая модель | Формальная модель |
|---|---|
| $X = A^{-1} \cdot B$ | Чтобы решить заданную систему, надо: 1) найти обратную матрицу $A^{-1}$ для матрицы $A$ этой системы; 2) умножить матрицу $A^{-1}$ на матрицу-столбец свободных членов $B$ |

**Решение типовых задач:**

Решить систему уравнений следующими методами:

а) методом Крамера,

б) матричным методом.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases}$$

*Решение:*

а) Составим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

Для его вычисления воспользуемся свойством определителя о том, что величина определителя не изменится, если к элементам любой его строки (столбца) прибавить элементы любой другой строки (столбца), умноженной(го) на число.

(Первую строку умножаем на (-1) и прибавляем ко второй и к третьей строке.)

Получим: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix}$

Применяя свойство о разложении определителя по элементам любой строки (столбца) (в данном случае по элементам первого столбца), получим:

$$\Delta = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2$$

Составим вспомогательные определители и вычислим их аналогичным образом:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -17 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 2 \begin{vmatrix} -5 & -17 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-15 + 17) = 4$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 6 \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$x_1$, $x_2$, $x_3$ вычисляются по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}$$

$$x_1 = \frac{4}{2} = 2; \quad x_2 = \frac{6}{2} = 3; \quad x_3 = \frac{-2}{2} = -1$$

б) Для решения системы матричным методом введем обозначения матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$AX = B \quad X = A^{-1}B. \quad (1)$$

Так как $\Delta = 2 \neq 0,$ то для матрицы А существует обратная матрица $A^{-1}$. Найдем обратную матрицу. Для этого вычислим алгебраические дополнения всех элементов главного определителя $\Delta$ системы:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{31} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Союзной матрицей А* для матрицы А будет матрица:

$$A^* = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = 2, \text{ то } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Учитывая равенство (1), имеем:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 2; \; x_2 = 3; \; x_3 = -1.$

## 2.2 Раздел 2. Векторная алгебра

**Вопросы для изучения**

1. Векторы. Основные определения. Линейные операции над векторами: сложение. Вычитание, умножение вектора на число. Условие коллинеарности векторов.

2. Проекция вектора на ось.

3. Линейная комбинация векторов. Линейно зависимые и линейно независимые векторы. Разложение вектора по базису.

4. Прямоугольная декартова система координат на плоскости и в пространстве. Разложение вектора по координатному базису. Координаты вектора.

5. Линейные операции над векторами, заданными своими координатами.

6. Координаты вектора, заданного двумя точками. Расстояние между двумя точками.

7. Направляющие косинусы вектора.

8. Деление отрезка в данном отношении.

9. Скалярное и векторное произведение векторов.

**Методические указания**

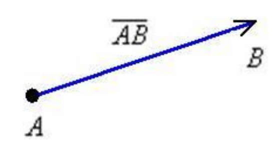
Понятие вектора в современной математике является довольно широким понятием, связанным с понятием линейных операций (сложением и умножением на число). Такие операции уже встречались, например в арифметике, теории матриц. В каждом конкретном случае они определялись по-своему, в соответствии со спецификой тех множеств, для которых они рассматриваются (числа, матрицы). Но свойства этих операций одинаковы. Именно эта общность и сближает их. При решении задач следует учесть особенности применяемой терминологии. Пояснение всех терминов, используемых в задачах, найти в методических рекомендациях по изучению данной темы, и в рекомендуемой литературе.

**Рекомендуемые источники по теме:** /1*, глава 2 §2.1, 2.2, глава 3 §3.3.4*/ или / *3 лекции 3-5*/.

**Основные теоретические сведения**

## Основные понятия

***Вектором*** называется направленный отрезок, для которого указаны его начало и конец:




1) Чтобы вычислить ***координаты вектора*** $\overrightarrow{AB}$, зная координаты его начала *A* и координаты его конца *B*, нужно из координат конца вычесть координаты начала:

$\overrightarrow{AB}=(x_2–x_1;y_2–y_1;\ z_2\ -z_1)$, где $A(x_1, y_1, z_1),\ \ B(x_2, y_2, z_2).$

2) Расстояние между началом и концом вектора называется его длиной.

Если $\bar{a}=\{x, y\ \ , z\ \}$, то ***длина вектора*** вычисляется по формуле:

$|\bar{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ .

3) Сложение векторов

При сложении (вычитании) векторов складываются (вычитаются) их соответственные координаты.

Если $\bar{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\bar{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$, то $\bar{a}\ \pm\ \bar{b}=\{x_1\ \pm\ x_2,\ y_1 \pm y_2\ ,\ z_1 \pm z_2\}$.

4) Умножение вектора на число

При умножении вектора на число каждая координата умножается на это число: $k\bar{a}=\{kx_1, ky_1, kz_1\}$.

## Скалярное произведение векторов

*Скалярным произведением двух векторов* называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\vec{a}\,{}^\wedge\,\vec{b}) \Rightarrow \cos(\vec{a}\,{}^\wedge\,\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$$

**Выражение скалярного произведения через координаты**

*Скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных координат.*

$\vec{a}\,(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $\vec{b}\,(x_2;\, y_2;\, z_2)$, *то*

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2)$

Тогда $\cos\varphi=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}\cdot\sqrt{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}+z_2^{\,2}}}$

**Свойства скалярного произведения**

Для произвольных векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ и любого числа $\lambda$ справедливы следующие свойства:

1) $\bar{a}\bar{b}=\bar{b}\bar{a}$ – переместительный закон скалярного произведения.

2) $(\bar{a}+\bar{b})\bar{c}=\bar{a}\bar{c}+\bar{b}\bar{c}$ – распределительный закон скалярного произведения.

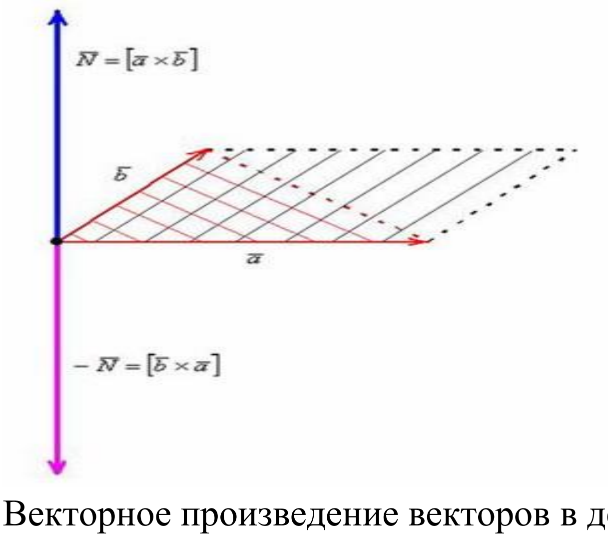
3) $(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}=\lambda(\bar{a}\bar{b})$ – сочетательный закон скалярного произведения. (Константу можно вынести из скалярного произведения.)

## Векторное произведение векторов

Векторным произведением $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$ неколлинеарных векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, взятых в данном порядке, называется вектор $\vec{N}$, длина которого численно равна площади параллелограмма, построенного на данных векторах:

$\left|\bar{N}\right|=\left|\left[\bar{a}\times\bar{b}\right]\right|=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\sin\angle(\bar{a};\bar{b})$

Вектор $\vec{N}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ и направлен так, что базис $(\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{N})$ имеет правую ориентацию:




Векторное произведение векторов в декартовых координатах

Если $\bar{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$, $\bar{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$, то

$\bar{a}\times\bar{b}=\{y_1z_2-y_2z_1;\ z_1x_2-z_2x_1;\ x_1y_2-x_2y_1\}$, или

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\cdot\vec{i}+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\cdot\vec{k}\text{, или}$$

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=(y_1z_2-y_2z_1)\bar{i}+(z_1x_2-z_2x_1)\bar{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\bar{k}$$

## Свойства векторного произведения векторов

Для произвольных векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ и произвольного числа $\lambda$ справедливы следующие свойства:

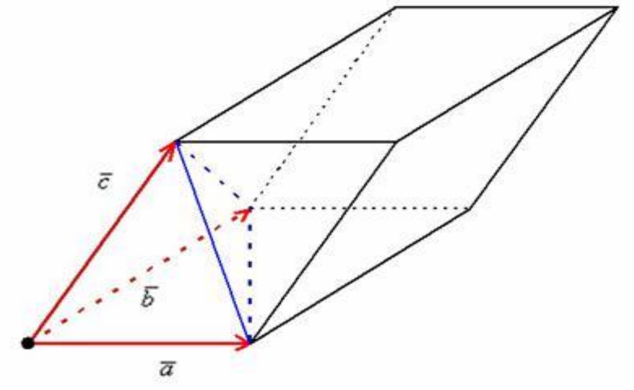
1) $[\bar{a}\times\bar{a}]=\bar{0}$
2) $[\bar{a}\times\bar{b}]=-[\bar{b}\times\bar{a}]$
3) $[\lambda\bar{a}\times\bar{b}]=\lambda[\bar{a}\times\bar{b}]$, $[\bar{a}\times(\lambda\bar{b})]=\lambda[\bar{a}\times\bar{b}]$ – сочетательные
4) $[(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c}]=[\bar{a}\times\bar{c}]+[\bar{b}\times\bar{c}]$, $[\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})]=[\bar{a}\times\bar{b}]+[\bar{a}\times\bar{c}]$

## Смешанное произведение векторов

**Определение**: *Смешанным произведением* трех векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

Обозначение: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ или $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$

Геометрический смысл **смешанного произведения: это объем параллелепипеда**, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ как на ребрах.




Так как объем тетраэдра (треугольной пирамиды) равен одной шестой объема параллелепипеда то:

$$V_{тетраедра}=\frac{1}{6}(abc)$$

**Смешанное произведение векторов в декартовых координатах**

Если $\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$, $\vec{c}=\{x_3, y_3, z_3\}$, то смешанное произведение вычисляется по формуле:

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Смешанное произведение компланарных векторов

Если векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны, то их можно расположить в одной плоскости и тогда $(abc)=0$

**Решение типовых задач:**

Задача 1. Выясните, образуют ли векторы $\vec{p}=(3;-1;0)$ , $\vec{q}(2;3;1)$ , $\vec{r}(-1;4;3)$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x}(2;3;7)$ по этому базису.

*Решение:*

Вычисляем $\vec{p}\vec{q}\vec{r}=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}=22\neq 0.$

Следовательно, векторы $\vec{p}$ , $\vec{q}$ , $\vec{r}$ образуют базис, и вектор $\vec{x}$ линейно выражается через базисные векторы: $\vec{x}=\alpha\ \cdot\vec{p}\ +\beta\ \cdot\vec{q}\ +\gamma\ \cdot\vec{r}$

или в координатной форме

$$\begin{cases} 3\alpha+2\beta-\gamma=2 \\ -\alpha+3\beta+4\gamma=3 \\ \qquad\beta+3\gamma=7 \end{cases}$$

Решаем полученную систему по формулам Крамера.

Находим: $\Delta=22,$

$$\Delta_\alpha=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}=66,\qquad \Delta_\beta=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix}=-44,\qquad \Delta_\gamma=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & 7 \end{vmatrix}=66.$$

$\alpha=\dfrac{\Delta_\alpha}{\Delta}=\dfrac{66}{22}=3,\qquad \beta=\dfrac{\Delta_\beta}{\Delta}=\dfrac{-44}{22}=-2,\qquad \gamma=\dfrac{\Delta_\gamma}{\Delta}=\dfrac{66}{22}=3,$ поэтому

$\vec{x}=(3;-2;3)$

$\vec{x}=3\ \cdot\vec{p}\ -2\ \cdot\vec{q}\ +3\ \cdot\vec{r}$

## 2.3 Раздел 3. Элементы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве

**Вопросы для изучения**

1. Задание множеств точек уравнениями и неравенствами. Уравнение линии на плоскости.

2. Прямая на плоскости. Общее уравнение.

3. Угловой коэффициент прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

4. Уравнение прямой, проходящей через две точки.

5. Уравнение прямой в отрезках.

6. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых.

7. Понятие о кривых второго порядка. Канонические уравнения эллипса, окружности, параболы, гиперболы.

8. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду в простейших случаях.

9. Общее уравнение плоскости. Уравнения прямой в пространстве.

**Методические указания**

Аналитическая геометрия - область математики, в которой геометрические задачи решаются алгебраическим способом. Важно научиться анализировать геометрические свойства линии на основе анализа их уравнений.

**Рекомендуемые источники по теме:** /*1, глава 1 §1.31.-3.6, глава 4 § 4.1-4.3, глава 5 § 5.1-5.2, глава 6 § 6.1-6.2* / или /*3 лекции 6-9*/.

**Основные теоретические сведения**

**Алгебраические уравнения первого порядка. Прямые и плоскости**

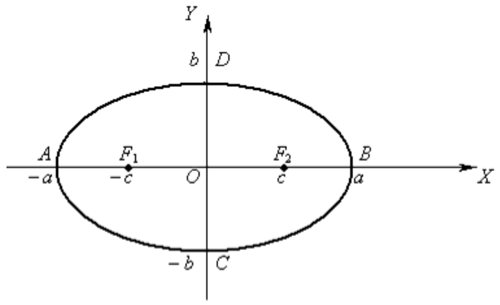
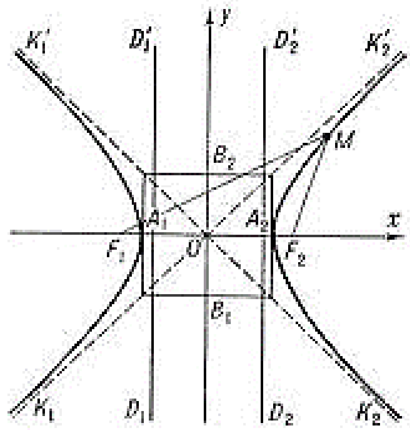
Аналогии математических моделей для описания изучаемых геометрических образов отобразим в таблице:

| Геометрические образы и их модели / Способы задания | Математические модели | | |
|---|---|---|---|
| | прямой на плоскости | прямой в пространстве | плоскости |
| 1. Точкой и нормальным вектором | $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ | модели нет | $A(x-x_0) + B(y- y_0) + C(z - z_0) = 0$ |
| 2. Как следствие предыдущего | $Ax + By + C =0$ | модели нет | $Ax + By + Cz +D =0$ |
| 3. Уравнение в отрезках | $\frac{x}{a}+\frac{y}{в}=1$ | $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1,$ $\frac{y}{в}+\frac{z}{c}=1,$ $\frac{x}{a}+\frac{y}{в}=1$ | $\frac{x}{a}+\frac{y}{в}+\frac{z}{c}=1$ |

| Геометрические образы и их модели / Способы задания | Математические модели | | |
|---|---|---|---|
| | прямой на плоскости | прямой в пространстве | плоскости |
| 4. Точкой и направляющим вектором | $\frac{x-x_0}{l}+\frac{y-y_0}{m}=1$ | $\frac{x-x_0}{l}+\frac{y-y_0}{m}$ $+\frac{z-z_0}{n}=1$ | модели нет |
| 5. Расстоянием от начала координат $p$ и ортонормальным вектором | $x\cos\alpha+y\cos\beta-$ $-p=0$ | модели нет | $x\cos\alpha+y\cos\beta+$ $z\cos\gamma-p=0$ |
| 6. Двумя точками | $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ | $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=$ $=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=$ $=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ | модели нет |

## Алгебраические уравнения кривых и поверхностей второго порядка. Канонические уравнения

| Модели | Эллипс | Гипербола |
|---|---|---|
| Математическая модель | Геометрическое место точек $M(x,y)$, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$ есть число, большее, чем расстояние между фокусами $F_1F_2=2c$ | Геометрическое место точек $M(x,y)$, для каждой из которых разность расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$ есть число, меньшее чем расстояние между фокусами $F_1F_2=2c$ |
| | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ | $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ |

| Модели | Эллипс | Гипербола |
|---|---|---|
| |   |   |

## Решение типовых задач

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(4;4;10)$, $A_2(4;10;2)$, $A_3(2;8;4)$, $A_4(9;6;4)$.

Найти:

1. Длину ребра $A_1A_2$, если

$A_1(4;4;10)$, $A_2(4;10;2)$

*Решение:*

$$d=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$$

$$d=\sqrt{(4-4)^2+(10-4)^2+(2-10)^2}=\sqrt{6^2+(-8)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$$

Ответ: $|A_1A_2|=10$.

2. Угол между ребрами $A_1A_2$ и $A_1A_4$, если

$A_1(4;4;10)$, $A_2(4;10;2)$, $A_4(9;6;4)$

*Решение:*

Найдем координаты векторов по формулам: $\{x_1-x_0;y_1-y_0;z_1-z_0\}$

$\overrightarrow{A_1A_2}=(4-4;10-4;2-10)$

$\overrightarrow{A_1A_2}=(0;6;-8)$

$\overrightarrow{A_1A_4}=(9-4;6-4;4-10)$

$\overrightarrow{A_1A_4}=(5;2;-6)$

Угол между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}=(0;6;-8)$ и $\overrightarrow{A_1A_4}=(5;2;-6)$ вычисляется по формуле: $\cos\alpha=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}\cdot\sqrt{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}+z_2^{\,2}}}$.

$$\cos\alpha=\frac{0\cdot5+6\cdot2+(-8)\cdot(-6)}{\sqrt{0^2+6^2+(-8)^2}\cdot\sqrt{5^2+2^2+(-6)^2}}=\frac{60}{10\sqrt{65}}=\frac{6}{\sqrt{65}}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{6}{\sqrt{65}}\right)$$

Ответ: $\alpha = \arccos\left(\frac{6}{\sqrt{65}}\right)$.

3. Угол между ребром $A_1A_4$ и гранью $A_1A_2A_3$.

$\overrightarrow{A_1A_4} = (5;2;-6)$,

$A_1(4;4;10)$, $A_2(4;10;2)$, $A_3(2;8;4)$.

*Решение:*

Найдем уравнение плоскости, содержащей точки $A_1$, $A_2$, $A_3$.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-4 & z-10 \\ 4-4 & 10-4 & 2-10 \\ 2-4 & 8-4 & 4-10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-4 & y-4 & z-10 \\ 0 & 6 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$=(-4)6(-6)+(y-4)(-8)(-2)+(z-10)0\cdot4-(z-10)6(-2)-$$

$$-(y-4)0(-6)-(x-4)4(-8)=$$

$$=-36x+144+16y-64+12z-120+32x-128=$$

$$=-4x+16y+12z-168=0$$

$$-4x+16y+12z-168=0$$

$x-4y-3z+42=0$ - уравнение плоскости.

Вектор нормали к этой плоскости имеет координаты $\vec{n}(1;-4;-3)$.

Косинус угла между плоскостью и вектором равен синусу угла между этим вектором и вектором нормали.

$\vec{n}(1;-4;-3)$ $\overrightarrow{A_1A_4} = (5;2;-6)$

$$\sin\alpha = \frac{1\cdot5+(-4)\cdot2+(-3)\cdot(-6)}{\sqrt{1^2+(-4)^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{5^2+2^2+(-6)^2}} = \frac{15}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{65}} = \frac{15}{13\sqrt{10}}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{15}{13\sqrt{10}}\right)$$

Ответ: $\alpha = \arcsin\left(\frac{15}{13\sqrt{10}}\right)$

4. Площадь грани $A_1A_2A_3$.

*Решение:*

Грань $A_1A_2A_3$ - треугольник, его площадь вычислим по формуле:

$S = \frac{1}{2}|a\times b|$, где $|a\times b|$ - модуль векторного произведения двух векторов (сторон треугольника), по определению он равен произведению длин двух векторов на синус угла между ними, т.е. $S=\frac{1}{2}|a||b|\sin(\alpha)$.

Найдем векторное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$

$\overrightarrow{A_1A_2}=(0;6;-8)$

$\overrightarrow{A_1A_3}=(2-4;8-4;4-10)$

$\overrightarrow{A_1A_3}=(-2;4;-6)$

$$\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 6 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix}=-36i+16j+12k+32i=-4i+16j+12k$$

Результатом будет вектор с координатами $(-4;12;16)$, найдем его длину

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\sqrt{(-4)^2+16^2+12^2}=\sqrt{416}=4\sqrt{26}$$

$$S=\frac{1}{2}4\sqrt{26}=2\sqrt{26}$$

Ответ: $S=2\sqrt{26}$.

5. Объем пирамиды.

*Решение:*

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right)\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right|$$

$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right)\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right|$, где - $\left(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right)\cdot\overrightarrow{A_1A_4}$ - смешанное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}=(0;6;-8)$, $\overrightarrow{A_1A_3}=(-2;4;-6)$ и $\overrightarrow{A_1A_4}=(5;2;-6)$

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right)\cdot\overrightarrow{A_1A_4}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 6 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \\ 5 & 2 & -6 \end{vmatrix}=6\cdot(-6)\cdot5+(-2)\cdot2\cdot(-8)+8\cdot4\cdot5+2\cdot(-6)\cdot6=$$

$$-180+32+160-72=-60$$

$$V=\frac{1}{6}60=10$$

Ответ: $V=10$.

6. Уравнение прямой $A_1A_2$

*Решение:*

Каноническое уравнение прямой имеет вид:

$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$, где $(x_1,y_1,z_1)$ - точка, принадлежащая прямой - $A_1(4;4;10)$, $(a,b,c)$- направляющий вектор этой прямой – $\overrightarrow{A_1A_2}=(0;6;-8)$.

$$\frac{x-4}{0}=\frac{y-4}{6}=\frac{z-10}{-8}$$

Ответ: $\frac{x-4}{0}=\frac{y-4}{6}=\frac{z-10}{-8}$.

7. Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ (см. пункт 3)

$x-4y-3z+42=0$ - уравнение плоскости.

Ответ: $x-4y-3z+42=0$.

Уравнение высоты, опущенной из вершины $A_4$ на грань $A_1A_2A_3$.

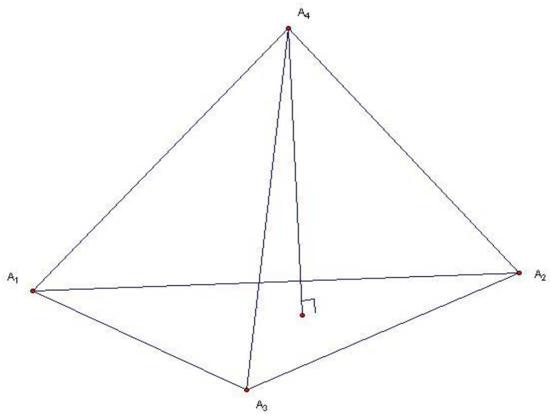
$A_4(9;6;4)$

$x-4y-3z+42=0$

Вектор нормали к этой плоскости имеет координаты $\vec{n}(1;-4;-3)$, т.е. он и будет направляющим вектором высоты:

$$\frac{x-9}{1}=\frac{y-6}{-4}=\frac{z-4}{-3}$$

Ответ: $\frac{x-9}{1}=\frac{y-6}{-4}=\frac{z-6}{-3}$.




Задача 2. Даны две вершины $A(2;-2)$ и $B(3;-1)$ и точка $P(1;0)$ пересечения медиан треугольника ABC. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной через третью вершину C.

*Решение:*

а) Найдем точку пересечения стороны *AB* с медианой, проведенной к ней.

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2} \qquad y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$$

$$x_M=\frac{3+2}{2}=2,5 \quad y_M=\frac{-1-2}{2}=-1,5$$

$M(2,5;-1,5)$

б) Найдем координаты точки *C* исходя из того факта, что медианы точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины.

Обозначим координаты (x, y).

$$\frac{x-1}{1-2,5}=\frac{2}{1}$$

$x=-2$

$$\frac{y-0}{0+1,5}=\frac{2}{1} \qquad y=3$$

в) Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$:

$A(2;-2)$ и $B(3;-1)$

$\overrightarrow{AB}(1;1)$

Направляющим вектором высоты, проведенной к стороне АВ, будет вектор, перпендикулярный найденному, т.е., например

(-1;1).

С(-2;3)

$$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{1}$$

$$y=-x+1$$

Эта прямая совпадает с прямой, содержащей медиану АМ.

Ответ: y = -x+1.

## 2.4 Раздел 4. Комплексные числа

**Вопросы для изучения**

1. Комплексные числа. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Мнимая единица.

3. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

4. Возведение в натуральную степень и извлечение корня из комплексного числа (формула Муавра – Лапласа).

**Методические указания**

Комплексные числа обладают рядом замечательных свойств, выделяющих их из ряда других полей. В отличие от поля вещественных чисел, комплексные числа образуют алгебраически замкнутое поле. Это означает, что любой многочлен произвольной степени $n$ ($n$ – любое натуральное число) с комплексными коэффициентами имеет ровно $n$ комплексных корней (основная теорема алгебры). Они также нашли значительное применение в анализе: теория функций комплексного переменного оказалась намного более богата, чем теория функций вещественного переменного. Комплексные числа также играют важную роль при рассмотрении представлений функций в виде рядов: при комплексной записи вещественных рядов появляется возможность полностью решить вопрос о сходимости каждого ряда.

Применение комплексных чисел позволяет удобно и компактно сформулировать многие математические модели, применяемые в математической физике и в естественных науках. Поэтому комплексные числа имеют широкое применение как в самой математике, так и в приложениях: в электротехнике, гидродинамике, картографии, квантовой механике, теории колебаний и многих других.

**Рекомендуемые источники по теме:** */1, глава 7 § 7.7/.*

**Основные теоретические сведения**

*Комплексным числом* $z$ *называется упорядоченная пара действительных чисел (x; y), первое из которых x называется его действительной частью, а второе число y – мнимой частью.*

Обозначение: $z = x + iy$ . Символ $i$ называется *мнимой единицей.*

Если $x = 0$, то число называется *чисто мнимым*, если $y = 0$, то число $z = x + i \cdot 0 = x$ отождествляется с действительным числом $x$, а это означает, что множество R действительных чисел является подмножеством множества C всех комплексных чисел, т.е. $R \subset C$ .

Число $x$ называется действительной частью комплексного числа $z$ и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, а $y$ – мнимой частью, $y = \operatorname{Im} z$ .

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными* если равны их действительные мнимые части, т.е. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$.

*Сопряженными* называются два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся только знаком мнимой части.

**Геометрическое изображение комплексных чисел**

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной* плоскостью (ее также обозначают С). Ось абсцисс называется *действительной осью*, а ось ординат – *мнимой* (рисунок 1).

Комплексное число $z = x + iy$ *можно изобразить точкой* $M(x; y)$ плоскости $XOY$ такой, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ или с помощью радиус-вектора $\vec{r} = \overline{OM}(x; y)$ (см. рисунок 2).

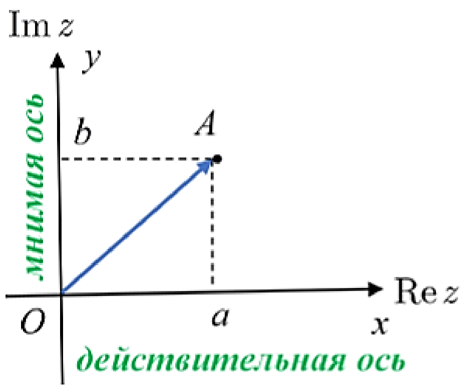



Рисунок 1

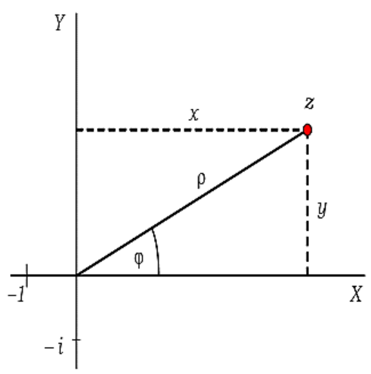



Рисунок 2

Длина вектора $\vec{r}$, изображающего комплексное число $z$, называется *модулем* этого числа и обозначается $|z|$ или $r$ . Модуль $\vec{r} = |z|$ определяется по формуле

$\vec{r} = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\vec{r}$ , изображающим комплексное число, называется *аргументом* этого числа, обозначается $Arg\ z$ .

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ – величина многозначная: $Arg\ z = \arg z + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ где $\arg z = \varphi$ -*главное значение аргумента*, заключенное в промежутке $(-\pi; \pi]$, то есть $-\pi < \arg x \leq \pi$ . Аргумент комплексного числа $z = 0 = 0 + i0$ не определен.

В качестве значение аргумента можно брать величину принадлежащую промежутку $[0; 2\pi)$ .

**Формы записи комплексных чисел**

*Алгебраическая форма* комплексного числа $z$ записывается в виде $z = x + iy$ . *Тригонометрическая форма записи* числа $z$ имеет вид:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi))$$

Аргумент $\varphi$ вычисляется по формулам: $\cos\varphi = \dfrac{x}{r},\ \sin\varphi = \dfrac{y}{r},$ где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Аргумент $z$ можно найти, используя формулу $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$; так как $-\pi < \arg z \leq \pi$ , то из формулы $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$ находим

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, \text{ при } x > 0; \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi, \text{ при } x < 0, y > 0; \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi, \text{ при } x < 0, y < 0; \end{cases}$$

Запись числа $z$

*Показательная* (или экспоненциальная) *форма* комплексного числа имеет вид: $z = re^{i\varphi}$ или $z = |z|e^{i\arg z}$ .

**Действие над комплексными числами**

Основные действия над комплексными числами $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ , заданные в *алгебраической форме*:

сложение - $z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$;

вычитание - $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$;

умножение - $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$;

деление - $\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$.

Из формулы вычитания следует, что модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа на плоскости, т.е. $|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

Из формулы умножения вытекает, что

$i^2=-1$

При умножении комплексных чисел $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, заданных в *тригонометрической форме*, их модули перемножаются, а аргументы складываются, т.е.

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Отсюда следует *формула Муавра для возведения комплексных чисел* в натуральную степень:

$$z^n=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n\cdot(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, осуществляется по формуле:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Корень n-й степени из комплексного числа имеет $n$ различных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}),$$

где $k=0,1,2,3,...,n-1$.

***Пример 1***

Найти $z_1+z_2, z_1-z_2, z_1\cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}$, если $z_1=1+2i, z_2=2-i$.

*Решение:*

Используя формулы действий над комплексными числами, находим:

$$z_1+z_2=(1+2i)+(2-i)=3+i;$$

$$z_1-z_2=(1+2i)-(2-i)=-1+3i;$$

$$z_1\cdot z_2=(1+2i)\cdot(2-i)=2-i+4i-2i^2=4+3i;$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{5i}{5}=i.$$

***Пример 2***

Найти $(-1-i\sqrt{3})^{15}$.

*Решение:*

Запишем число $z=-1-i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме:

$$|z| = r = \sqrt{1+3} = 2, \arg z = \varphi = tg\,\frac{(-\sqrt{3})}{(-1)} - \pi = -\frac{2}{3}\pi \text{, т.е.}$$

$$-1 - i\sqrt{3} = 2(\cos(-\frac{2}{3}\pi) + i\sin(-\frac{2}{3}\pi)).$$

По формуле Муавра имеем:

$$(-1 - i\sqrt{3})^{15} = \left[2(\cos(-\frac{2}{3}\pi) + i\sin(-\frac{2}{3}\pi))\right]^{15} =$$

$$= 2^{15} \cdot (\cos(-10\pi) + i\sin(-10\pi)) = 2^{15} = 32768.$$

**Решение типовых задач**

Задача 1. Дано комплексное число $z = \frac{1}{1+i}$. Записать это число в алгебраической и тригонометрической формах.

*Решение:*

Чтобы записать число z в алгебраической форме $z = x + iy$, умножим числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю:

$$z = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$$

Итак, алгебраическая форма числа $z = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$.

Запишем данное число в тригонометрической форме. Имеем: $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$. Получим:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \ \cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0; \ \sin\varphi = \frac{y}{r} = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0.$$

Угол, для которого косинус положителен, а синус отрицателен, находится в четвертой четверти. Следовательно, $\varphi = \frac{7\pi}{4}$. Число z в тригонометрической форме запишется в виде: $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$.

## 2.5 Раздел 5. Введение в математический анализ

**Вопросы для изучения**

1. Функция и способы ее задания. Область определения функции.
2. Основные элементарные функции и их графики.
3. Понятие предела функции.
4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
5. Основные теоремы о пределах.

6. Понятие о неопределенных выражениях. Раскрытие неопределенностей.

7. Первый и второй замечательный пределы.

8. Непрерывность функции. Понятие о точках разрыва функции.

**Методические указания**

Понятие функции – одно из наиболее важных в математике и ее приложениях. В самом общем понимании функция – это зависимость между двумя переменными. В курсе математического анализа изучают главным образом числовые функции. Наглядное представление о числовой функции дает ее график – некоторое множество точек на координатной плоскости, обычно – некоторая линия. Задать функцию означает указать область определения функции и описать правило, позволяющее по данному значению аргумента находить соответствующее значение функции. Наиболее употребительными являются три способа задания функции: табличный, аналитический, графический. Наиболее простые приложения математического анализа ограничиваются кругом так называемых элементарных функций. Это степенные функции, показательные функции, тригонометрические функции, обратные тригонометрические.

Важно усвоить понятия предела функции, бесконечно малых и бесконечно больших функций и методы вычисления приделов. Изучив эту главу, студент будет готов к восприятию понятий производной и интеграла.

**Рекомендуемые источники по теме:** /*1, глава 7 §7.1-7.6*/ и /*2, глава 1 §1-3, глава 2 §1-4*/.

**Основные теоретические сведения**

**Предел функции. Основные понятия**

Число $A$ называется *пределом функции* $y = f(x)$при $x \to a$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, для всех значений $x$, удовлетворяющих неравенству $|f(x) - A| < \varepsilon$. В этом случае пишут:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Аналогично: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, если $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > N$.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, если $|f(x)| > M$ при $|x - a| < \delta$.

где M – произвольное сколь угодно большое положительное число. В этом случае $f(x)$ называется *бесконечно большой* величиной при $x \to a$.

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, то функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* величиной при $x \to a$.

Практическое вычисление пределов основывается на следующих теоремах.

Если существуют $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$, то

1. $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+\varphi(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$
2. $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot\varphi(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$
3. $\lim\limits_{x\to a} k\cdot f(x) = k\lim\limits_{x\to a} f(x)$
4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)}$, если $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) \neq 0$
5. $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\big)^{\varphi(x)} = A^B$, где $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $B = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$

***Пример 1.*** Найти предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$$

Запись читается так: «Предел функции при икс стремящемся к единице».

Для решения данного примера надо просто подставить единицу в функцию, стоящую под знаком предела:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{2\cdot 1^2-3\cdot 1-5}{1+1}=\frac{-6}{2}=-3$$

***<u>Правило 1</u>. В данный предел сначала просто подставляем число в функцию.***

### Пределы с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$ и методы их решения

***Пример 2***

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$$

*Решение:*

По правилу 1сначала попробуем подставить (-1) в дробь:

$$\frac{2(-1)^2-3\cdot(-1)-5}{-1+1}=\frac{0}{0}$$

Получили неопределенность $\dfrac{0}{0}$.

***<u>Правило 2.</u>*** *Если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенности вида* $\dfrac{0}{0}$, *то для ее раскрытия надо* ***разложить числитель и знаменатель на множители.***

Для этого чаще всего нужно решить квадратное уравнение или использовать формулы сокращенного умножения.

Итак, решаем наш предел:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители. Для того чтобы разложить числитель на множители, нужно решить квадратное уравнение:

$2x^2-3x-5=0$

1) Находим дискриминант:

$D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-5)=9+40=49$

И квадратный корень из него: $\sqrt{D}=\sqrt{49}=7$.

2) Вычисляем корни:

$$x_1=\frac{-(-3)-7}{2\cdot 2}=\frac{3-7}{4}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$x_2=\frac{-(-3)+7}{2\cdot 2}=\frac{3+7}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

3) Получаем разложение числителя на множители.

$$2x^2-3x-5=2(x-(-1))\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)=2(x+1)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)=(x+1)\cdot(2x-5)$$

$$(*)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1}=(*)$$

4) Сокращаем дробь на (x+1)

$$(*)=\lim_{x\to -1}(2x-5)=(*)$$

5) Подставляем (-1) в выражение, которое осталось под знаком предела:

$=2\cdot(-1)-5=-2-5=-7$

***Пример 3.***

$$\lim_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}$$

*Решение:*

$$\lim_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}=\frac{0}{0}=(*)$$

1) Разложим числитель и знаменатель на множители.

Формула разности квадратов:

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

Числитель:

$8-2x^2=2(4-x^2)=2(2-x)(2+x)$

Знаменатель:

$x^2+4x-12=0$

$D=16+48=64$

$\sqrt{D}=8$

$$x_1=\frac{-4-8}{2}=-6 \quad x_2=\frac{-4+8}{2}=2$$

$x^2+4x-12=(x+6)(x-2)$

$$(*) = \lim_{x\to 2}\frac{2(2-x)(2+x)}{(x+6)(x-2)} = 2\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(2+x)}{(x+6)(x-2)} = 2\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)(2+x)}{(x+6)(x-2)} =$$

$$= -2\lim_{x\to 2}\frac{(2+x)}{(x+6)} = -2\cdot\frac{4}{8} = -1$$

***<u>Замечание 1.</u> Если в пределе можно вынести число за скобку, то целесообразно выносить его за знак предела.***

## Метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение

Продолжаем рассматривать неопределенность вида $\frac{0}{0}$

***Пример 4***

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}$$

*Решение:*

Применяем Правило1. Подставляем число 3 в выражение под знаком предела:

$$\frac{\sqrt{3+6}-\sqrt{10\cdot 3-21}}{5\cdot 3-15} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{9}}{15-15} = \frac{0}{0}.$$

Получена неопределенность вида $\frac{0}{0}$, от которой необходимо избавиться.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15} = \frac{0}{0} = (*)$$

***<u>Правило 3.</u>*** *Когда в числителе (знаменателе) находится разность корней (или корень минус какое-нибудь число), то для раскрытия неопределенности* $\frac{0}{0}$ *используют* ***метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение.***

**Умножаем числитель и знаменатель на выражение, сопряженное к числителю:**

$$(*) = \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} = (*)$$

Умножили.

Теперь в числителе применяем формулу разности квадратов:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Получим:

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6})^2-(\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-(10x-21)}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-10x+21}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=(*)$$

Если подставить число 3 в числитель и знаменатель, то увидим, что неопределенность $\frac{0}{0}$ не пропала.

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{3+6}+\sqrt{10\cdot 3-21})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{9}+\sqrt{9})}=\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(3+3)}=$$

Разложим числитель и знаменатель на множители, учитывая, что согласно Замечанию 1 числовой общий множитель лучше вынести за знак предела.

$$(*)=\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9(x-3)}{5(x-3)}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9}{5}=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{-9}{5}\right)=-\frac{3}{10}$$

***Пример 5***

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2}$$

Сначала попробуйте решить его самостоятельно.

*Решение:*

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель на множители:

$$x^2+x-2=0$$

$$D=1+8=9$$

$$\sqrt{D}=3$$

$$x_1=\frac{-1-3}{2}=-2$$

$$x_2=\frac{-1+3}{2}=1$$

$$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$$

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение к знаменателю:

$$(*)=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x+6}+2)}{(\sqrt{x+6}-2)(\sqrt{x+6}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x+6}^{\to 2}+2)}{x+6-4}=4\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}=$$

$$=4\lim_{x\to-2}(x-1)=4\cdot(-3)=-12$$

## Пределы с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$ и метод их решения

***<u>Правило 4</u>. Для того чтобы раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$, необходимо разделить числитель и знаменатель на X в старшей степени.***

***Пример 6***

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

*Решение:*

1) определяем старшую степень $x$ в числителе - она равна двум:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$$

2) определяем старшую степень $x$ в знаменателе - она равна двум.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$$

Получили, что старшая степень числителя и знаменателя в данном примере совпадают.

3) Разделим числитель и знаменатель на $x^2$:

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{1+x+3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x^2}^{\to 0}+\frac{1}{x}^{\to 0}+3}=\frac{2}{3}$$

***Замечание 2.*** *Впределе желательно помечать, что и куда стремится. Когда работа оформляется от руки, удобнее это сделать так:*

$$\frac{2-\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+3}$$

***Пример 7.*** Найти предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$$

*Решение:*

1) В числителе и знаменателе находим $x$ в старшей степени:

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x^3 + 15x^2 + 9x + 1}{5x^4 + 6x^2 - 3x - 4}$

Максимальная степень в числителе: 3.

Максимальная степень в знаменателе: 4.

3) Выбираем **наибольшее** значение, в данном случае это четыре.

Согласно нашему алгоритму, для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ делим числитель и знаменатель на $x^4$:

$$(*) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{x^4}}{\frac{5x^4+6x^2-3x-4}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{7}{x}^{\to 0} + \frac{15}{x^2}^{\to 0} + \frac{9}{x^3}^{\to 0} + \frac{1}{x^4}^{\to 0}}{5 + \frac{6}{x^2}^{\to 0} - \frac{3}{x^3}^{\to 0} - \frac{4}{x^4}^{\to 0}} =$$

$$= \frac{0+0+0+0}{5+0-0-0} = \frac{0}{5} = 0$$

***Пример 8.*** Найти предел:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x-5}{x+1}$$

*Решение:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x-5}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$$

Максимальная степень $x$ в числителе: 2.

Максимальная степень $x$ в знаменателе: 1.

Для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на $x^2$.

Разделим числитель и знаменатель на $x^2$:

$$(*) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{3}{x}^{\to 0} - \frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x}^{\to 0} + \frac{1}{x^2}^{\to 0}} = \frac{2}{0} = \infty$$

Под записью $\frac{2}{0}$ подразумевается не деление на ноль (делить на ноль нельзя), а деление на бесконечно малое число.

Таким образом, при раскрытии неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ у нас может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.

**Замечательные пределы**

**Первый замечательный предел**

$\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ — первый замечательный предел

Нередко функции могут быть расположены по-другому, это ничего не меняет:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1$$

Следствия из первого замечательного предела

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{x}=\alpha,\alpha\in R$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x}=1$

***Пример 9***

Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}$$

*Решение:*

Согласно Правилу 1 сначала подставляем 0 в выражение, стоящее под знаком предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}$$

Получили неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Для применения первого замечательного предела знаменатель искусственно умножается в данном случае на 7 и делится на 7:

$$(*)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}=\frac{1}{\frac{3}{7}}=\frac{7}{3}$$

(1-й замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}=\frac{1}{\frac{3}{7}}=\frac{7}{3}$$

***Пример 10***

*Решение:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

1) Подставляем в числитель и знаменатель ноль:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}$$

Получили неопределенность $\frac{0}{0}$, значит надо попытаться организовать первый замечательный предел. Для этого разложим числитель и знаменатель на множители - степени мы представим в виде произведения (множителей):

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

Далее по уже знакомой схеме организовываем первые замечательные пределы. Под синусами у нас $\frac{x}{2}$, значит, в числителе тоже нужно получить $\frac{x}{2}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

Аналогично предыдущему примеру, обводим карандашом замечательные пределы (здесь их два) и указываем, что они стремятся к единице:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}5\cdot 2\cdot 2\cdot\underbrace{\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}}_{\to 1}$$

Собственно, ответ готов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}5\cdot 2\cdot 2\cdot\underbrace{\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}}_{\to 1}=5\cdot 2\cdot 2=20$$

***Пример 11***

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}$$

*Решение:*

По Правилу 1 подставляем ноль в выражение под знаком предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}=\frac{0}{0}$$

Получена неопределенность $\frac{0}{0}$, которую нужно раскрывать. Если в пределе есть тангенс, то надо использовать тригонометрическую формулу

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

В данном случае:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2\cdot\cos 2x}$$

Косинус нуля равен единице, и от него легко избавиться (не забываем пометить, что он стремится к единице):

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2\cdot(\cos 2x)^{\to 1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\frac{1}{0}=\infty$$

В итоге получена бесконечность.

***Пример 12***

*Решение:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}$$

Начинаем с Правила 1, подставить ноль в числитель и знаменатель:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}$$

Получена неопределенность $\frac{0}{0}$ (помним, что косинус нуля равен единице).

Используем тригонометрическую формулу $1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x}=$$

$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{\frac{1}{2}\cdot 2x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}\cdot 2\lim_{x\to 0}(\sin 2x)^{\to 0}=\frac{4}{5}\cdot 0=0$$

***Пример 13***

$$\lim_{x\to 0}\frac{ctgx\cdot(1-\cos^2 3x)}{(x^2+5x)}$$

Этот пример сложнее, попробуйте разобраться самостоятельно:

*Решение:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{ctgx\cdot(1-\cos^2 3x)}{(x^2+5x)}=\frac{\infty\cdot 0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot(1-\cos^2 3x)}{\sin x\cdot(x^2+5x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^{\to 1}\cdot(1-\cos^2 3x)}{\sin x\cdot(x^2+5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{\sin x\cdot(x^2+5x)}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin x\cdot x\cdot(x+5)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin x\cdot x\cdot(x^{\to 0}+5)}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin x\cdot x}=$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\sin 3x}{\sin x\cdot x}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin 3x\cdot\sin 3x}{\sin x\cdot 3x\cdot 3x\cdot\frac{1}{9}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\frac{1}{9}}=\frac{9}{5}$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \text{ или } \lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{x}=e$$

***Замечание 3.*** *В качестве параметра $\alpha$ может выступать не только переменная $x$, но и сложная функция.* ***Важно лишь, чтобы она стремилась к бесконечности.***

Следствия из второго замечательного предела

1. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$

***Пример 14***

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}$$

***Замечание 4.*** *Когда выражение под знаком предела находится в степени – это первый признак того, что нужно попытаться применить второй замечательный предел.*

*Решение:*

Сначала, как всегда, пробуем подставить бесконечно большое число в выражение $\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}$. Нетрудно заметить, что при $x\to\infty$ основание степени $\left(1+\frac{1}{3x}\right)\to 1$, а показатель – $4x\to\infty$, то есть имеется, неопределенность вида $1^{\infty}$: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}$.

Данная неопределенность раскрывается с помощью второго замечательного предела.

В данном примере параметр $\alpha=3x$, значит, в показателе нам тоже нужно организовать $3x$. Для этого возводим основание в степень $3x$ и, чтобы выражение не изменилось, возводим в степень $\frac{1}{3x}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}}_{e\text{ (2-ой замечательный предел)}}\right)^{\frac{1}{3x}4x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{3x}}=e^{\frac{4}{3}}$$

***Пример 15***

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}$$

*Решение:*

Пробуем подставить бесконечно большое число в выражение, стоящее под знаком предела:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$$

В результате получена неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$. Но второй замечательный предел применим к неопределенности вида $1^{\infty}$. Поэтому необходимо преобразовать основание степени. Для этого, так как в знаменателе у нас $x+1$, в числителе тоже нужно получить $x+1$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}$$

Теперь можно почленно разделить числитель на знаменатель:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3}=1^{\infty}$$

Таким образом, основание приняло вид $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$ – появилась нужная нам неопределенность $1^{\infty}$. Организуем второй замечательный предел $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}$.

Легко заметить, что в данном примере $\alpha=\frac{x+1}{-3}$. Вновь применяем наш искусственный прием: возводим основание степени в $\frac{x+1}{-3}$ и, чтобы выражение не изменилось, возводим в обратную дробь $\frac{-3}{x+1}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\dfrac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(\dfrac{x+1}{-3}\right)}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right)^{\frac{-3}{x+1}\cdot(2x+3)}$$

$$=e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+1}}=e^{\frac{\infty}{\infty}}=e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x+3}{x}}{\frac{x+1}{x}}}=e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\left(\frac{3}{x}\right)^{\to 0}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{\to 0}}}=e^{-3\cdot 2}=e^{6}$$

**Решение типовых задач**

Задача 1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

*а)* $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$

*б)* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}$

*в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x-3}{2x^3+4x+3}$

*г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+3x^3+4}{3x^2-4x+2}$

*д)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+6x-2}{7x^3+8x^2-4}$

*е)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+6x-2}{7x^3+8x^2-4}$

*ж)* $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi^2-x^2}$

*Решение:*

*а)* $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$

Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия разложим квадратные трехчлены на линейные множители по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Имеем:

$$\lim_{x\to -2}\frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}=\lim_{x\to -2}\frac{5(x+2)\left(x+\frac{3}{5}\right)}{3(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)}.$$

Сократив общий множитель $(x+2)$, получим:

$$\lim_{x\to -2}\frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}=\lim_{x\to -2}\frac{5x+3}{3x-4}=\frac{7}{10}=0{,}7$$

*б)* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}$

Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия умножим и числитель, и знаменатель данной дроби на выражение, сопряженное числителю (знаменателю), а именно: $\sqrt{21+x}+5$. Имеем:

$$\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{21+x}-5)(\sqrt{21+x}+5)}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)}=$$

Для упрощения числителя воспользуемся формулой:
$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, где $a=\sqrt{21+x}-5$, $b=\sqrt{21+x}+5$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{21+x})^2-5^2}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)}=\lim_{x\to 4}\frac{21+x-25}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)}=$$

Разложим первый сомножитель знаменателя по формуле:
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, где $a=x,\quad b=4$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)}{(x-4)(x^2+8x+16)(\sqrt{21+x}+5)}=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{1}{(x^2+8x+16)(\sqrt{21+x}+5)}=\frac{1}{480}$$

*в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x-3}{2x^3+4x+3}$

Если числитель и знаменатель дроби представляют собой алгебраические многочлены и имеется неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, то для ее раскрытия и числитель, и знаменатель делят на x в старшей степени. В данном случае старшая степень 3, поэтому и числитель, и знаменатель делим на $x^3$, имеем:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{10x}{x^3}-\frac{3}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{4x}{x^3}+\frac{3}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{10}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{2+\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=$$

(по теореме о пределе частного, имеем)

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{10}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}=$$

(по теореме о пределе суммы, имеем)

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{10}{x^2}-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x^3}}{\lim\limits_{x\to-\infty}2+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x^3}}=\frac{0}{2}=0$$

*г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+3x^3+4}{3x^2-4x\ +2}$

Имеем также неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Старшая степень x равна 5. Поэтому делим и числитель, и знаменатель на $x^5$. Имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^5}{x^5}+\frac{3x^3}{x^5}+\frac{4}{x^5}}{\frac{3x^2}{x^5}+\frac{4x}{x^5}+\frac{2}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^5}\right)}{\left(\frac{3}{x^3}+\frac{4}{x^4}+\frac{2}{x^5}\right)}=\infty,$$

так как предел числителя равен 2, а знаменателя 0.

*д)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+6x-2}{7x^3+8x^2-4}$

Для вычисления данного предела, и числитель, и знаменатель дроби делим на $x^3$, имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+6x-2}{7x^3+8x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{6}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{7+\frac{8}{x}-\frac{4}{x^3}}=\frac{5}{7}$$

*е)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+6x-2}{7x^3+8x^2-4}$

Имеем неопределенность вида: $1^{\infty}$.

Для ее раскрытия воспользуемся вторым замечательным пределом:

$$\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=e \quad \text{или} \quad \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3+3}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x-3}+\frac{3}{2x-3}\right)^{2-5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-3}{3}}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x-3}{3}}\right)^{\frac{2x-3}{3}}\right)^{\frac{3}{2x-3}\cdot(2-5x)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3}{2x-3}\cdot(2-5x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2-5x)\cdot 3}{2x-3}}=e^{-\frac{15}{2}}$$

*ж)* $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi^2-x^2}$

Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Для ее раскрытия будем использовать первый замечательный предел: $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\sin u}=1$

Для этого сделаем следующие преобразования:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi^2-x^2}=\left|\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right|==\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)}{(\pi-x)(\pi+x)}=\left|1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi-x}{4}\right)}{(\pi-x)(\pi+x)}=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin\left(\frac{\pi-x}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi-x}{4}\right)}{(\pi-x)(\pi+x)}=$$

$$=2\lim_{x\to\pi}\frac{\sin\left(\frac{\pi-x}{4}\right)}{\frac{\pi-x}{4}\cdot 4}\cdot\lim_{x\to\pi}\sin\left(\frac{\pi-x}{4}\right)\cdot\lim_{x\to\pi}\frac{1}{\pi+x}=$$

$$=\left|\lim_{x\to\pi}\frac{\sin\left(\frac{\pi-x}{4}\right)}{\frac{\pi-x}{4}\cdot 4}=1;\quad \lim_{x\to\pi}\frac{1}{\pi+x}=\frac{1}{2\pi};\quad \lim_{x\to\pi}\sin\left(\frac{\pi-x}{4}\right)=0\right|=$$

$$=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot 0=0$$

## 2.6 Раздел 6. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

**Вопросы для изучения**

1. Определение производной. Ее механический и геометрический смысл. Уравнение касательной к графику функции.
2. Свойства производной. Основные правила нахождения производных.
3. Таблица производных основных элементарных функций.
4. Производные высших порядков.
5. Дифференциал функции. Геометрический смысл. Использование в приближенных вычислениях.
6. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей.
7. Признаки возрастания и убывания функций в интервале.
8. Экстремум функции. Необходимые и достаточные условия экстремума функции.
9. Направление выпуклости и точки перегиба графика функции.
10. Схема исследования функции и построения ее графика.

**Методические указания**

Понятие производной – одно из основных понятий математического анализа. Всякий процесс или явление, протекающее во времени, характеризуются наряду с другими показателями такой важной характеристикой, как скорость. Можно говорить о задаче нахождения скорости неравномерного движения, химической реакции, нагревания и остывания нагретого тела, производительности труда и т.д. Все эти задачи приводят к однотипным вычислениям, результат которых называют производной.

Важно усвоить понятие производной, способы ее вычисления, а также научиться применять это понятие при решении прикладных задач.

**Рекомендуемые источники по теме:** */1, глава 8 § 8.1-8.8/ и /2, глава 3 §1-5, глава 4 §1-3/.*

**Основные теоретические сведения**

**Производная функции, правила и формулы дифференцирования**

Пусть функция $y = f(x)$определена в точках $x_1, x_2$, и $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, тогда разность $\Delta x = x_2 - x_1$ называется приращением аргумента, а $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$ - приращением функции.

*Производной функции* $y = f(x)$в точке $x$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю и этот предел существует. Обозначается

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Вычисление производной называется *дифференцированием функции.*

**Механический смысл производной.**

Скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути S по временит: $V = S'(t)$.

**Геометрический смысл производной.**

Производная представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции в точке с абсциссой $x$, т.е. $y' = tg\alpha$.

**Таблица производных основных элементарных функций**

| **Простые** | | **Сложные** | |
|---|---|---|---|
| $y = x^n$ | $y' = nx^{n-1}$ | $y = U^a$ | $y' = aU^{a-1}U'$ |
| $y = \frac{1}{x}$ | $y' = -\frac{1}{x^2}$ | $y = \frac{1}{U}$ | $y' = \frac{U'}{U^2}$ |
| $y = \sqrt{x}$ | $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $y = \sqrt{U}$ | $y' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$ |
| $y = \sin x$ | $y' = \cos x$ | $y = \sin U$ | $y' = (\cos U) \cdot U'$ |
| $y = \cos x$ | $y' = -\sin x$ | $y = \cos U$ | $y' = (-\sin x) \cdot U'$ |
| $y = tgx$ | $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $y = tgU$ | $y' = \frac{U'}{\cos^2 U}$ |
| $y = ctgx$ | $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ | $y = ctgU$ | $y' = -\frac{U'}{\sin^2 U}$ |
| $y = a^x$ | $y' = a^x \ln a$ | $y = a^U$ | $y' = a^u \ln a \cdot U'$ |
| $y = e^x$ | $y' = e^x$ | $y = e^U$ | $y' = e^U \cdot U'$ |

| Простые | | Сложные | |
|---|---|---|---|
| $y = \log_a x$ | $y' = \frac{1}{x \ln a}$ | $y = \log_a U$ | $y' = \frac{U'}{U \ln a}$ |
| $y = \ln x$ | $y' = \frac{1}{x}$ | $y = \ln U$ | $y' = \frac{U'}{U}$ |
| $y = \arccos x$ | $y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ | $y = \arccos U$ | $y' = -\frac{U'}{\sqrt{1 - U^2}}$ |
| $y = \arcsin x$ | $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ | $y = \arcsin U$ | $y' = \frac{U'}{\sqrt{1 - U^2}}$ |
| $y = arctgx$ | $y' = \frac{1}{1 + x^2}$ | $y = arctgU$ | $y' = \frac{U'}{1 + U^2}$ |
| $y = shx$ | $y' = chx$ | $y = shU$ | $y' = chU \cdot U'$ |
| $y = chx$ | $y' = shx$ | $y = chU$ | $y' = shU \cdot U'$ |
| $y = thx$ | $y' = \frac{1}{ch^2 x}$ | $y = thU$ | $y' = \frac{U'}{ch^2 U}$ |
| $y = cthx$ | $y' = -\frac{1}{sh^2 x}$ | $y = cthU$ | $y' = -\frac{U'}{sh^2 U}$ |

**Основные правила дифференцирования**

1. Производная постоянной равна нулю:
$y = C;\ \ y' = 0.$

2. Производная функции $y = x$ равна единице:
$x' = 1.$

3. Производная суммы равна сумме производных:
$(u + v)' = u' + v'.$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак производной:
$(Cy)' = C \cdot y'.$

5. Производная произведения: $(uv)' = u'v + uv'.$

6. Производная частного: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{(u'v - uv')}{v^2}.$

7. Производная сложной функции.

Пусть $y = f(u), u = u(x)$, т. е. $y = f\big(u(x)\big)$, где $f(u), u(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:
$y'(x) = y'(u) \cdot u'(x).$

8. Логарифмическая производная
$y' = (\ln y)' \cdot y.$

9. Производная показательно-степенной функции
$(u^v)' = u^v \ln u\ \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$

10. Производная функции заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$

$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

11. Производная неявно заданной функции $F(x, y) = 0$.

Для нахождения производной $y'$ необходимо продифференцировать обе части данного уравнения по $x$, считая $y$ функцией от $x$. Из полученного равенства выразить $y'$.

***Применяя формулы и правила дифференцирования, найти производные следующих функций:***

***Пример 1***

$y = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 4$.

*Решение:*

$$y' = \left(2x^3\right)' - \left(5x^2\right)' + \left(7x\right)' + \left(4\right)' = 2\left(x^3\right)' - 5\left(x^2\right)' + 7x' + 4' =$$

$$= 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 + 0 = 6x^2 - 10x + 7.$$

***Пример 2***

$y = x^2 e^x$.

*Решение:*

Применяем формулу производной произведения $(uv)' = u'v + uv'$.

Получим:

$$y' = x^2\left(e^x\right)' + e^x \cdot \left(x^2\right)' = x^2 e^x + 2xe^x = xe^x\left(x+2\right).$$

***Пример 3***

$y = x^3 \operatorname{arc} tgx$.

*Решение:*

$$y' = x^3(\operatorname{arc} tgx)' + \operatorname{arc} tgx \cdot \left(x^3\right)' = x^3 \frac{1}{1+x^2} + 3x^2 \operatorname{arc} tgx = \frac{x^3}{1+x^2} + 3x^2 \operatorname{arc} tgx.$$

***Пример 4***

Найти производную от дроби $y = \frac{\cos x}{x}$.

*Решение:*

По формуле производной частного $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{(u'v - uv')}{v^2}$

Получаем:

$$y' = \left(\frac{\cos x}{x}\right) = \frac{(\cos x)'x - \cos x(x)'}{(x)^2}$$

Учитываем, что $(\cos x)' = -\sin x$

Тогда:

$$y' = \frac{-x\sin x - \cos x}{x^2} = \frac{x\sin x + \cos x}{x^2}$$

***Пример 5***

Найти производную сложной функции $y = \sin(3x-5)$.

*Решение:*

Применим формулу $y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)$, тогда

$$y' = (\sin(3x-5))' = \cos(3x-5)\cdot(3x-5)' = \cos(3x-5)\cdot(3-0) = 3\cos(3x-5)$$

***Пример 6***

Найти производную от показательно-степенной функции

*Решение:*

В данном примере основание и показатель степени зависят от $x$. Логарифмируя, получим $\ln y = x^2 \ln x$.

Продифференцируем обе части последнего равенства по $x$. Так как $y$ является функцией от $x$, то $\ln y$ есть сложная функция $x$ и $(\ln y)' = \frac{1}{y}\cdot y'$. Следовательно:

$$\frac{y'}{y} = x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x\ln x,$$

$$\frac{y'}{y} = x(1+2\ln x), \text{ т.е.}$$

$$y' = xy(1+2\ln x) = xx^{x^2}(1+2\ln x) = x^{x^2+1}(1+2\ln x)$$

***Пример 7***

Найти $y'_x$, если функция задана параметрически

$$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases}$$

*Решение:*

Для вычисления производной функции, заданной параметрически, воспользуемся формулой:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Найдем $x'_t = 3t^2 + 3$, $y'_t = 15t^4 + 15t^2$. Следовательно:

$$y'_x = \frac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = 5t^2.$$

***Пример 8***

Найти производную $y'_x$ неявно заданной функции $x^2 + y^2 = 4$.

*Решение:*

Так как $y$ является функцией от $x$, то будем рассматривать $y^2$ как сложную функцию от $x$.

Следовательно: $\left(y^2\right)'=2yy'$. Продифференцировав по $x$ обе части данного уравнения, получим $2x+2yy'=0$, т.е.

$$y'=-\frac{x}{y}.$$

**Решение типовых задач**

Задача 1. Найти производные следующих функций**:**

*а)* $y=\sqrt{5+2x^2}+\dfrac{4}{(x^2-4x+5)^3}$

*б)* $y=\sin^5(3x+1)\cdot\arccos\sqrt{x}$

*в)* $y=\dfrac{\cos^2(3x+2)}{x^2-2x}$

*г)* $y=(\sin x)^{\sqrt{x+1}}$

*Решение:*

*а)* $y=\sqrt{5+2x^2}+\dfrac{4}{(x^2-4x+5)^3}$

При нахождении производной данной функции воспользуемся следующими формулами: $(u\pm v)'=u'\pm v'$

$(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$

Имеем:

$$y'=\left(\left(5+2x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'+\left(4\left(x^2-4x+5\right)^{-3}\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}\left(5+2x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4x-12\left(x^2-4x+5\right)^{-4}\left(2x-4\right)$$

$$y'=2x\left(5+2x^2\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{12\left(2x-4\right)}{\left(x^2-4x+5\right)^4}$$

*б)* $y=\sin^5(3x+1)\cdot\arccos\sqrt{x}$

При вычислении производной данной функции воспользуемся формулой: $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$

Имеем:

$$y'=(\sin^5(3x+1))'\cdot\arccos\sqrt{x}+\sin^5(3x+1)(\arccos\sqrt{x}) \qquad (*)$$

При вычислении производной первого сомножителя воспользуемся формулой $(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$, где

$$u=\sin(3x+1)\Rightarrow(\sin^5(3x+1))'=$$

$$=5\sin^4(3x+1)\cdot\cos(3x+1)\cdot 3=15\sin^4(3x+1)\cdot\cos(3x+1)$$

При вычислении производной второго сомножителя воспользуемся следующей формулой: $(\arccos u)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

$$(\arccos\sqrt{x})'=-\frac{1}{\sqrt{1-(x^{\frac{1}{2}})^2}}\cdot(x^{\frac{1}{2}})'=-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Подставляя вычисленные производные в равенство (*), имеем:

$$y'=15\sin^4(3x+1)\cdot\cos(3x+1)\cdot\arccos\sqrt{x}-\sin^5(3x+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$$

*в)* $y = \dfrac{\cos^2(3x+2)}{x^2-2x}$

В данном случае сначала воспользуемся формулой:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$y' = \frac{(\cos^2(3x+2))' \cdot (x^2-2x) - \cos^2(3x+2) \cdot (x^2-2x)'}{(x^2-2x)^2}$$

Производную числителя и знаменателя вычисляем, используя формулу $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

$(\cos^2(3x+2))' = 2\cos(3x+2) \cdot (-\sin(3x+2)) \cdot 3 = -3\sin(2(3x+2))$,

т.к. $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha$ .

$(x^2-2x)' = 2x-2$.

В результате:

$$y' = \frac{-3\sin(6x+4) \cdot (x^2-2x) - \cos^2(3x+2) \cdot (2x-2)}{(x^2-2x)^2}.$$

## 2.7 Раздел 7. Функции нескольких переменных

**Вопросы для изучения**

1. Функции двух переменных. Область определения. Линии уровня. Понятие о функциях трех и более переменных.
2. Предел функции. Непрерывность.
3. Частные производные. Их геометрический и механический смысл.
4. Полный дифференциал, его приложение к приближенным вычислениям.
5. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков.
6. Экстремумы функции двух переменных. Необходимые условия. Понятие о достаточных условиях экстремума.

**Методические указания**

В данной теме рассматриваются переменные величины, зависящие от нескольких других переменных величин. Необходимость изучения такого вида зависимостей вызваны тем, что во многих процессах и явлениях, встречающихся в природе, технике, в практической деятельности человека, числовые значения одной величины определяются набором из двух, трех и большего количества независимых переменных. При изучении этих явлений используют понятие функции нескольких переменных.

**Рекомендуемые источники по теме:** /*1, глава 11 § 11.1-11.4*/ *и* /*2, глава 10 §1-5*/.

## Основные теоретические сведения

### Частные производные первого порядка

Если каждой паре действительных чисел (x,y) из непустого множества $D$(область определения функции) по некоторому правилу ставится в соответствие определенный элемент $z$ из множества $U$(множество значений функции), то говорят, что на множестве $D$ задана функция двух переменных, которую обозначают $z = f(x,y)$.

Независимые переменные $x, y$ называют аргументами функции $z$

Аналогично определяется функция любого числа переменных:

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

*Частными производными* от функции $z = f(x,y)$ по переменным $x$ и $y$ называются пределы вида:

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x,y)}{\Delta x},$$
$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

Для нахождения частных производных используют правила и формулы дифференцирования функции одной переменной в предположении, что одна из переменных – x или y – постоянная величина.

***Пример 1***

$u = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1$. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$.

*Решение:*

1) При нахождении частной производной по x рассматриваем $y$ как постоянную величину, получим $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3y - 1$.

2) При нахождении частной производной по y рассматриваем $x$ как постоянную величину, получим $\frac{\partial u}{\partial y} = -3x - 8y + 2$.

***Пример 2***

$z = e^{x^2+y^2}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

*Решение:*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^2}(x^2+y^2)'_x = 2xe^{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y^2}(x^2+y^2)'_y = 2ye^{x^2+y^2}.$$

### Полный дифференциал

***Полным приращением*** функции $z = f(x,y)$ в точке $M(x,y)$ называется разность

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x,y),$$

где $\Delta x, \Delta y$ – приращения аргументов.

Функция $z = f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке $M(x,y)$, если ее полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \gamma,$$

где $\gamma$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

***Полным дифференциалом*** функции $z = f(x,y)$ называется главная часть ее полного приращения, линейная относительно $\Delta x, \Delta y$, т.е.

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями:

$$dx = \Delta x;$$
$$dy = \Delta y$$

Полный дифференциал функции $z = f(x,y)$ находят по формуле:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy.$$

***Пример 3***

$z = arctg\,\frac{x+y}{x-y}$. Найти полный дифференциал функции $dz$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{-2y}{(x-y)^2} = -\frac{y}{x^2+y^2};.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Следовательно: $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$.

## Частные производные второго порядка

*Частными производными второго порядка* от функции $z = f(x,y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка:

$$(z'_x)'_x = z'_{xx};\ (z'_x)'_y = z''_{xy};$$
$$(z'_y)'_x = z''_{yx};\ (z'_y)'_y = z''_{yy}.$$

Аналогично определяются и обозначаются производные третьего и высших порядков.

Если частные производные высшего порядка непрерывны, то так называемые смешанные производные, отличающиеся друг от друга лишь последовательностью дифференцирования, равны между собой, т.е. $z''_{xy} = z''_{yx}$.

***Пример 4***

Найти частные производные второго порядка функции $z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1$.

*Решение:*

Так как $z'_x = 4x^3 - 4xy^3$ и $z'_y = -6x^2y^2 + 5y^4$, то

$$z''_{xy} = (4x^3 - 4xy^3)'_y = -12xy^2$$

$$z''_{yx} = (-6x^2y^2 + 5y^4)'_x = -12xy^2$$

Получим $z''_{xy} = z''_{yx}$.

## Полный дифференциал

***Полным приращением*** функции $z = f(x,y)$ в точке $M(x,y)$называется разность

$$\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x,y),$$

где $\Delta x, \Delta y$ – приращения аргументов.

Функция $z = f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке $M(x,y)$, если ее полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \gamma,$$

где $\gamma$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

***Полным дифференциалом*** функции $z = f(x,y)$ называется главная часть ее полного приращения, линейная относительно $\Delta x, \Delta y$, т.е.

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями:

$$dx = \Delta x;$$

$$dy = \Delta y.$$

Полный дифференциал функции $z = f(x,y)$ находят по формуле:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy.$$

***Пример 3***

$z = arctg\,\frac{x+y}{x-y}$. Найти полный дифференциал функции $dz$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{-2y}{(x-y)^2} = -\frac{y}{x^2+y^2};.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Следовательно: $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$.

**Решение типовых задач**

Задача 1. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = \ln\sin\frac{x+a}{\sqrt{y}}$.

*Решение:*

Считая $y$ постоянной (тогда и $\sqrt{y} =$ const), находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sin\frac{x+a}{\sqrt{y}}}\cos\frac{x+a}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}}ctg\,\frac{x+a}{\sqrt{y}}$$

Считая $x$ постоянной, имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sin\frac{x+a}{\sqrt{y}}}\cos\frac{x+a}{\sqrt{y}}\cdot\left(\frac{x+a}{\sqrt{y}}\right)_y^{/}=\frac{-(x+a)}{2y\sqrt{y}}\cdot ctg\frac{x+a}{\sqrt{y}}.$$

## 2.8 Раздел 8. Неопределенный интеграл. Методы вычисления

**Вопросы для изучения**

1. Первообразная функция. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных интегралов.

2. Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование, замена переменной, интегрирование по частям.

3. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование.

4. Правильные и неправильные рациональные дроби. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие. Интегрирование дробно-рациональных функций.

5. Интегрирование некоторых видов тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка. Интегралы вида: $\int \sin^m x\cdot\cos^n xdx$ .

6. Интегрирование некоторых видов иррациональных выражений. Тригонометрические подстановки.

**Методические указания**

В предыдущих разделах мы изучали производную функции и ее приложения к решению практических задач.

В этом разделе рассматривается второе основное понятие математического анализа понятие интеграла. Интегрирование – действие, обратное нахождению производной. Важно усвоить основные формулы интегрирования и методы интегрирования, так как понятие интеграла пронизывает не только всю современную математику, но и физику, химию и многие общетехнические и специальные дисциплины.

**Рекомендуемые источники по теме:** */1, глава 9 §9.1-9.5/ и /2, глава 6 §1-3/*.

**Основные теоретические сведения**

### Неопределенный интеграл. Основные понятия

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на интервале (a;b), если для любого $x$ в каждой точке этого промежутка выполняется равенство: $F'(x)=f(x)$.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех ее первообразных.

Обозначение: $\int f(x)dx = F(x) + C,$ где $\int -$ знак интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, $x$ – переменная интегрирования, $C$ – произвольная постоянная.

Из определения неопределенного интеграла вытекают свойства:

1. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx,$
2. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$
3. $\int dF(x) = F(x) + C.$
4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,\ k - \textit{число}.$
5. $\int \big(f(x)dx \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

**Таблица простейших интегралов**

| | |
|---|---|
| 1 | $\int dx = x + C,$ |
| 2 | $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq 1,$ |
| 3 | $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C,$ |
| 4 | $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$ |
| 5 | $\int e^x\, dx = e^x + C,$ |
| 6 | $\int \sin x dx = -\cos x + C,$ |
| 7 | $\int \cos x dx = \sin x + C,$ |
| 8 | $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C,$ |
| 9 | $\int \frac{dx}{sin^2\, x} = -ctgx + C,$ |
| 10 | $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,$ |
| 11 | $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C,$ |
| 12 | $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C,$ |
| 13 | $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + a}\right\rvert + C$ |

При нахождении интегралов вида $\int \cos kxdx,\quad \int \sin kxdx,\quad \int \ell^{kx}dx$ можно не производить подстановку $kx+b=t$. Достаточно принять во внимание, что

$$dx=\frac{1}{k}d(kx+b).$$

Такие интегралы будем называть почти табличными.

**Талица почти табличных интегралов**

| | |
|---|---|
| 1 | $\int(kx+b)^n\,dx=\frac{1}{k}\cdot\frac{(kx+b)^{n+1}}{n+1}+C$ |
| 2 | $\int e^{kx+b}dx=\frac{1}{k}e^{kx+b}+C$ |
| 3 | $\int\cos kxdx=\frac{1}{k}\sin kx+C$ |
| 4 | $\int\sin kxdx=-\frac{1}{k}\cos kx+C$ |
| 5 | $\int\frac{dx}{kx+b}=\frac{1}{k}\ln\lvert kx+b\rvert+C$ |

## Основные методы интегрирования

### 1. Метод непосредственного интегрирования

Путем тождественных преобразований подынтегральной функции и свойств неопределенного интеграла вычисляемый интеграл сводится к табличному.

***Пример 1***

Найти интеграл $\int(2x^3-5x^2+7x-3)dx$.

*Решение:*

Используя свойства 4 и 5, получаем

$$\int(2x^3-5x^2+7x-3)dx=2\cdot\frac{x^4}{4}-5\cdot\frac{x^3}{3}+7\cdot\frac{x^2}{2}-3x+C=\frac{1}{2}x^4-\frac{5}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2-3x+C.$$

***Пример 2***

$$\int\frac{dx}{x^5}=\int x^{-5}dx=\frac{x^{-5+1}}{-5+1}+C=\frac{x^{-4}}{-4}+C=-\frac{1}{4x^4}+C.$$

***Пример 3***

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int\frac{dx}{x^{-\frac{1}{2}}}=\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{x}+C.$$

### 2. Внесение под знак дифференциала

С помощью преобразования подынтегрального выражения интеграл приводится к табличному. При этом используются свойства дифференциала функции:

1. $dx=\frac{1}{k}d(kx+b)$.
2. $x^n dx=\frac{1}{n+1}d(x^{n+1})$.

3. $\sin x dx = -d(\cos x)$.
4. $\cos x dx = d(\sin x)$.
5. $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(tgx)$.
6. $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$.

Этот метод применим, когда интеграл имеет вид

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x).$$

***Пример 4***

Вычислить интеграл:

$\int (3x-5)^{10}dx$.

Данный пример можно решить двумя способами

1) Решаем методом внесения под знак дифференциала:

$\int (3x-5)^{10}dx = \frac{1}{3}\int (3x-5)^{10}d(3x-5) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-5)^{11}}{11} + C.$

2) Решаем по формуле почти табличного интеграла:

$$\int (kx+b)^n\, dx = \frac{1}{k}\cdot\frac{(kx+b)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int (3x-5)^{10}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-5)^{11}}{11} + C$$

***Пример 5***

$\int \frac{\ln^4 x}{x}dx = \int \ln^4 x\, d\ln x = \frac{\ln^5 x}{5} + C.$

**3. Замена переменной**

***Пример 6***

$$\int \frac{dx}{4+\sqrt{x}} = \left|\begin{matrix}\sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt\end{matrix}\right| = \int \frac{2tdt}{4+t} = 2\int \frac{(4+t)-4}{4+t}dt = 2\left(\int dt - 4\int \frac{dt}{4+t}\right) =$$

$$= 2(t - 4\ln|4+t|) + C = 2\left(\sqrt{x} - 4\ln\left|4+\sqrt{x}\right|\right) + C.$$

**4. Метод интегрирования по частям**

Пусть производные функций *u(x)* и *v(x)* существуют и непрерывны на заданном интервале. Тогда

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

называется формулой интегрирования по частям.

Выделим основные виды интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

| № | Вид интеграла | Способ разбиения на части | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\int P(x)\, e^{kx} dx$<br>$\int P(x) \sin kx dx$<br>$\int P(x) \cos kx dx$ | $u = P(x)$ | $dv = \begin{cases} e^{kx} dx \\ \cos kx dx \\ \sin kx dx \end{cases}$ |
| 2. | $\int P(x) \ln x dx$<br>$\int P(x) arctgx dx$<br>$\int P(x) arcctgx dx$<br>$\int P(x) \arcsin x dx$<br>$\int P(x) \arccos x dx$ | $u = \begin{cases} \ln x, \\ arctgx \\ arcctgx \\ \arcsin x \\ \arccos x \end{cases}$ | $dv = P(x)dx$ |
| 3. | $\int \mathrm{e}^{kx}\, sinaxdx$<br>$\int \mathrm{e}^{kx}\, cosaxdx$ | $u = e^{kx}$ | $dv = \begin{cases} sinaxdx \\ cosaxdx \end{cases}$ |

$P(x)$ - некоторая степенная функция $k$ и а - числа.

***Пример 7.*** Найти неопределенный интеграл:

$\int \ln xdx$

*Решение:*

$\int \ln xdx = (*)$

Используем формулу интегрирования по частям:

$\int udv = uv - \int vdu$

**В интегралах рассматриваемого типа за** $u$ **всегда обозначается логарифм,** а за $dv$ – **оставшаяся часть** подынтегрального выражения.

Интегрируем по частям: $\int u dv = uv - \int v du$

$$u = \ln x \Rightarrow du = (\ln x)' dx = \frac{dx}{x}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x$$

$$(*) = x\ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C,\ где\ C = const$$

Итак, если это все записать без объяснения, то получим:

$$\begin{bmatrix} u = \ln x & \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx & \Rightarrow v = x \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$\int \ln x\, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - x + C.$$

***Пример 8***

Найти $\int (2x+1)e^{3x}dx$.

*Решение:*

Пусть $\begin{bmatrix} u = 2x+1 & \Rightarrow du = 2dx \\ dv = e^{3x}dx & \Rightarrow v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{bmatrix}$ (можно положить $C = 0$). Следовательно, по формуле интегрирования по частям:

$$\int (2x+1)e^{3x}dx = (2x+1) \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}2dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C.$$

**Решение типовых задач**

Задача 1. Найти неопределенные интегралы.

а) $\int \cos(\ln x)\frac{dx}{x}$.

*Решение:*

Так как $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$, то

$$\int \cos(\ln x)\frac{dx}{x} = \int \cos(\ln x) d(\ln x) = \sin(\ln x) + C.$$

Проверка:

$$d(\sin(\ln x) + C = \cos(\ln x)\frac{1}{x}dx.$$

$\acute{a})\ \int \ln x dx.$

*Решение:*

Положим $u = \ln x \quad dv = dx.$

Найдем $du = \dfrac{dx}{x}; \quad v = \int dx = x.$

Применяя формулу интегрирования по частям: $\int udv = u \cdot v - \int v \cdot du$

$\int \ln xdx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$ .

â) $\int \dfrac{x^3 + x + 1}{x \cdot (x^2 + 1)} dx$ .

*Решение:*

Данная подынтегральная дробь – неправильная, поэтому сначала выделим целую часть $\dfrac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} = \dfrac{x^3 + x + 1}{x^3 + x} = 1 + \dfrac{1}{x^3 + x}$ .

Представим дробь $\dfrac{1}{x^3 + x}$ в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{x^3 + x} = \frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + D}{x^2 + 1} = \frac{A(x^2 + 1) + x(Bx + D)}{x(x^2 + 1)} = \frac{Ax^2 + Bx^2 + A + Dx}{x(x^2 + 1)} =$$

$$\frac{x^2(A + B) + Dx + A}{x(x^2 + 1)}$$

Тогда $A + B = 0, D = 0, A = 1$, следовательно: $A = 1, B = -1, D = 0$.

Получим

$$\int \frac{x^3 + x + 1}{x \cdot (x^2 + 1)} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2 + 1}\right) dx = \int dx + \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = x + \ln|x| + \ln\left|x^2 + 1\right| + C$$

ã) $\int \cos^4 xdx$ .

*Решение:*

Применим формулу понижения степени:

$2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$

$$\int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x + \sin 2x + \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx\right) = \frac{1}{4}\left(x + \sin 2x + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x\right)\right) + C$$

## 2.9 Раздел 9. Определенный интеграл

**Вопросы для изучения**

1. Геометрический смысл определенного интеграла.
2. Основные свойства определенного интеграла.
3. Формула Ньютона – Лейбница.
4. Замена переменной в определенном интеграле.

5. Формула интегрирования по частям для определенного интеграла.

6. Несобственные интегралы (случай бесконечных пределов интегрирования).

7. Несобственные интегралы (интегралы от разрывных функций).

8. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых координатах.

9. Вычисление площади под кривой, заданной параметрически.

10. Вычисление площади криволинейного сектора в полярных координатах.

11. Вычисление длин дуг плоских кривых.

12. Вычисление объемов тел вращения.

13. Вычисление площади поверхности тел вращения.

**Методические указания**

К понятию определенного интеграла приводит задача вычисления площади криволинейной трапеции. Важное значение имеет формула Ньютона – Лейбница. Эта формула устанавливает связь между двумя основными понятиями интегрального исчисления: неопределенным и определенным интегралами. Она позволяет вычислять определенные интегралы путем нахождения первообразных.

Геометрические приложения определенного интеграла многочисленны. Это вычисление: площадей плоских фигур, объема тел вращения, длин дуг.

Многие задачи механики (например, вычисление давления жидкости на пластину; вычисление работы переменной силы на прямолинейном отрезке пути; вычисление работы по выкачиванию жидкости из резервуара) можно решить, используя методы интегрирования.

**Рекомендуемые источники по теме:** */1, глава 9 §9.6-9.10/ и /2, глава 5 §1-2, глава 7 §1-3, глава 8 §1-2/.*

**Основные теоретические сведения**

## Определенный интеграл. Основные понятия

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на $n$ произвольных отрезков точками $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Обозначим $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. В каждом из отрезков разбиения $[x_i x_{i+1}]$ выберем произвольную точку $c_i$ и вычислим в ней значение функции $f(c_i)$. *Интегральной суммой* для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется сумма вида:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Если существует конечный предел интегральной суммы при максимальном значении$\Delta x_i$ , стремящемся к нулю, который не зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$ и выбора точек $c_i$, то он называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

***Геометрический смысл определенного интеграла.***

Определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции (фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ох, прямыми $x = a, x = b$).

***Свойства определенного интеграла***

1. $\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, где $k$ - число.
2. $\int_a^b \left( f(x) \pm g(x) \right) dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
4. $\int_a^a f(x)dx = 0$.
5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $c \in (a,b)$.
6. *Теорема о среднем.* Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то найдется такое значение$c \in (a, b)$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

7. Если функция $y = f(x)$ – четная, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

8. Если функция $y = f(x)$ – нечетная, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

9. *Формула Ньютона - Лейбница.*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a),$$

$F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

## Основные методы интегрирования

**1. Метод непосредственного интегрирования**

Интегралы вычисляются, используя таблицу интегралов и формулу Ньютона – Лейбница.

***Пример 1***

Вычислить $\int_1^4 x^2 dx$.

*Решение:*

Подынтегральная функция $f(x) = x^2$ на отрезке $[1;4]$ имеет первообразную $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Тогда по формуле $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ имеем:

$$\int_1^4 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 21.$$

**2. Интегрирование подстановкой (замена переменной)**

При вычислении определенного интеграла часто используется метод интегрирования подстановкой или замены переменной интегрирования. Для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции $f(x)$ сделана подстановка $x = \varphi(t)$ – функция, непрерывная вместе со своей производной на отрезке $[\alpha; \beta]$, причем $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$, то справедлива формула, которая называется формулой нтегрирования подстановкой:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.$$

***Пример 2***

Вычислить интеграл $\int_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}}$ с помощью замены переменных.

*Решение:*

Применим подстановку $\sqrt{x} = t$. Тогда $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$. Находим новые пределы интегрирования $\begin{array}{c|c|c} x & 1 & 9 \\ \hline t=\sqrt{x} & 1 & 3 \end{array}$.

Применяя формулу, получим:

$$\int_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}} = \int_1^3 \frac{2t\,dt}{5+2t} = \int_1^3 \frac{2t+5-5}{2t+5}dt =$$

$$= \int_1^3 (1 - \frac{5}{2t+5})dt = t\Big|_1^3 - 5\cdot\frac{1}{2}\ln|2t+5|\Big|_1^3 =$$

$$= 3 - 1 - \frac{5}{2}(\ln 11 - \ln 7) = 2 - \frac{5}{2}\ln\frac{11}{7}.$$

***Пример 3***

При помощи замены переменной вычислить интеграл

$\int_2^3 x(3-x)^7\,dx$.

*Решение:*

| x | 2 | 3 |
|---|---|---|
| t | 1 | 0 |

Полагая $t=3-x$, получим: $x=3-t$, $dx=-dt$, тогда

$$\int_2^3 x(3-x)^7\,dx=\int_1^0 (3-t)t^7(-dt)=\int_1^0 (t^8-3t^7)dt=\left(\frac{t^9}{9}-\frac{3}{8}t^8\right)\Bigg|_1^0=-\frac{1}{9}+\frac{3}{8}=\frac{19}{72}$$

## 1. Интегрирование по частям определенного интеграла

Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[a;b]$, то имеет место формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u\,dv=uv|_a^b-\int_a^b v\,du.$$

***Пример 4***

Вычислить $\int_0^1 xe^{3x}dx$.

*Решение:*

Воспользуемся методом интегрирования по частям. Положим $u=x$, $dv=e^{-x}dx$, откуда $du=dx$, $v=-e^{-x}$. Тогда

$$\int_0^1 xe^{-x}dx=-xe^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=-e^{-1}-e^{-x}\Big|_0^1=-2e^{-1}+1=\frac{e-2}{e}.$$

***Пример 5***

Вычислить интеграл $\int_1^e (x+1)\ln x dx$.

*Решение:*

Применим формулу интегрирования по частям.

Положим $u=\ln x$, $dv=(x+1)dx$. Тогда $du=\frac{1}{x}dx$, $v=\frac{x^2}{2}+x$.

Получим:

$$\int_1^e (x+1)\ln x dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{e^2}{2}+e-0-\left(\frac{x^2}{4}+x\right)\Bigg|_1^e=\frac{e^2}{2}+e-\frac{e^2}{4}-e+\frac{1}{4}+1=\frac{e^2+5}{4}.$$

## Несобственные интегралы

### 1. Несобственный интеграл I рода (интеграл с бесконечным промежутком интегрирования)

Пусть функция $y = f(x)$ задана на бесконечном промежутке $[a, +\infty)$. *Несобственным интегралом I рода* называется интеграл вида:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx.$$

Если предел, стоящий в правой части равенства, существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся; если же предел не существует или равен бесконечности – расходящимся.

Аналогично:

$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{t \to +\infty} \int_t^b f(x)dx$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \to +\infty} \int_c^b f(x)dx,$$

где с – произвольное число, обычно удобно брать с=0.

***Пример 6***

Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx$ (или установить его расходимость).

*Решение:*

Имеем: $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_0^b \cos x dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \sin x \Big|_0^b = \lim\limits_{b \to +\infty} (\sin b - \sin 0) = \lim\limits_{b \to +\infty} \sin b$,

т. е. предел не существует. Следовательно, несобственный интеграл расходится.

***Пример 7***

Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{-1} \dfrac{dx}{x^2}$.

*Решение:*

Найдем:

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \to -\infty} \left[ -\frac{1}{x} \right]_a^{-1} = \lim_{a \to -\infty} \left( 1 + \frac{1}{a} \right) = 1,$$

т. е. несобственный интеграл сходится.

***Пример 8***

Найти $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{1 + x^2}$.

*Решение:*

Подынтегральная функция – четная, поэтому $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$. Тогда

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty} arctg\ x\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty} arctg\ b=\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$, т. е. несобственный интеграл сходится.

**2. Несобственный интеграл II рода (интеграл от разрывной функции)**

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a,+\infty)$ и в точке $x=b$ имеет бесконечный разрыв. *Несобственным интегралом II рода* называется

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если предел, стоящий в правой части равенства, существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*; в противном случае – *расходящимся.*

Аналогично можно определить несобственный интеграл на полуинтервале$(a,b]$:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Если функция $y=f(x)$ имеет бесконечный разрыв во внутренней точке$c\in(a,b)$, то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=\int\limits_{a}^{c} f(x)dx+\int\limits_{c}^{b} f(x)dx.$$

Оба интеграла в правой части равенства являются несобственными.

***Пример 9***

Найти $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

*Решение:*

Подынтегральная функция $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ имеет бесконечный разрыв в точке $x=1$. Поэтому

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{0}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0}\arcsin x|_0^{1-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to0}(\arcsin(1-\varepsilon)-\arcsin 0)=$$

$$=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$$

**Решение типовых задач**

Задача 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x + 2, \quad y = 2x - \dfrac{x^2}{2} + 6$ .

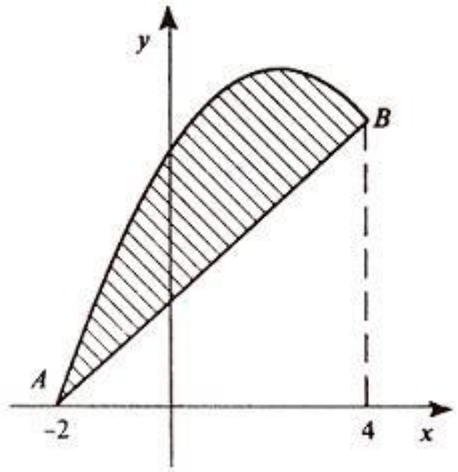
*Решение:*

Найдем абсциссы точек пересечения прямой с параболой, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x + 2, \\ y = 2x - \dfrac{x^2}{2} + 6. \end{cases}$$

Решая эту систему получим $x_1 = -2, \quad x_2 = 1$. Это и будут пределы интегрирования.

Итак, данные линии пересекаются в точках $A$(-2; 0), $B$(4; 6).




Эти линии образуют замкнутую фигуру, площадь которой равна:

$$S = \int_{-2}^{4} \left( 2x - \frac{x^2}{2} + 6 - x - 2 \right) dx = \int_{-2}^{4} \left( x - \frac{x^2}{2} + 4 \right) dx = \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x \right) \Bigg|_{-2}^{4} =$$

$$\frac{16}{2} - \frac{64}{6} + 16 - \frac{4}{2} - \frac{8}{6} + 8 = 18$$

## 2.10 Раздел 10. Дифференциальные уравнения первого порядка

**Вопросы для изучения**

1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Общее и частное решения. Задача Коши. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

2. Интегрирование простейших типов дифференциальных уравнений первого порядка. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

5. Дифференциальные уравнения высших порядков. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

6. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

7. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Однородные уравнения. Свойства их решений. Фундаментальная система решений.

8. Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения.

9. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

10. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Теорема о структуре общего решения.

11. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

12. Понятие о системах линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

**Методические указания**

Многочисленные задачи естествознания, техники, механики, биологии, химии и других отраслей знаний сводятся к тому, что по заданным свойствам некоторого процесса или явления необходимо найти математическую модель самого процесса в виде формулы, связывающей переменные величины, т.е. в виде функциональной зависимости.

При изучении таких задач используют дифференциальные уравнения. В данной теме рассмотрены обыкновенные дифференциальные уравнения.

**Рекомендуемые источники по теме:** */1, глава 13 §13.1-13.5/ или /6, глава 1 §1-3, глава 2 §4/ и /2, глава 14 §1-5/.*

**Основные теоретические сведения**

## Основные понятия и определения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производную.

Дифференциальное уравнение первого порядка можно записать в виде

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.1}$$

Если уравнение (1.1) можно разрешить относительно $y'$, то его записывают в виде:

$$y' = f(x;y) \tag{1.2}$$

В дифференциальной форме уравнение (1.2) записывается в виде

$$dy = f(x;y)dx \text{ или } P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0 \tag{1.3}$$

Дифференциальное уравнение имеет бесконечное число различных решений. Каждое из таких решений называется частным решением. Совокупность всех частных решений называется общим решением дифференциального уравнения. Общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную константу $C$ и имеет вид $y = \varphi(x;c)$. Это значит, что при любом значении $C = C_0$ функция $y(x,c_0)$ является решением и любое частное решение можно найти из общего, подобрав соответствующее значение константы $C$. Если задано дополнительное начальное условие $y(x_0) = y_0$, то, как правило, можно найти единственное частное решение, удовлетворяющее ему.

Задача отыскания решения дифференциального уравнения первого порядка (1.3), удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$ или $y\big|_{x=x_0} = y_0$, называется задачей Коши. Рассмотрим основные типы дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решения.

## Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Дифференциальные уравнения вида (1) называют уравнениями с разделенными переменными.

$$P(x)\cdot dx + Q(y)\cdot dy = 0 \tag{1}$$

Проинтегрировав почленно уравнение (1), получаем его общий интеграл.

Дифференциальные уравнения вида (2) и (3) называют уравнениями с разделяющимися переменными

$$y' = f(x)\cdot g(y) \tag{2}$$

$$P_1(x)\cdot Q_1(y)\cdot dx + P_2(x)\cdot Q_2(y)\cdot dy = 0 \tag{3}$$

Для решения уравнения (2) необходимо представить производную как отношение дифференциалов и разделить переменные, т.е. с одной стороны от знака равенства собрать выражение, содержащее только $x$, с другой – только $y$.

Уравнение (3) путем деления на произведение $P_2(x)\cdot Q_1(y)$ приводится к уравнению с разделенными переменными.

Представим методы решения данных уравнений в таблице.

**Основные методы решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными**

| $y' = f(x)\cdot g(y)$ | $P(x)\cdot dx + Q(y)\cdot dy = 0$ | $P_1(x)\cdot Q_1(y)\cdot dx + P_2(x)\cdot Q_2(y)\cdot dy = 0$ |
|---|---|---|
| $\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$; $\frac{dy}{g(y)} = f(x)\cdot dx$; $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\cdot dx$ | $P(x)\cdot dx = -Q(y)\cdot dy$; $\int P(x)\cdot dx = -\int Q(y)\cdot dy$ | $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\cdot dx + \frac{Q_1(y)}{Q_2(y)}\cdot dy = 0$; $\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\cdot dx + \int \frac{Q_1(y)}{Q_2(y)}\cdot dy = 0$ |

***Пример 1.*** Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка.

$$\left(1+e^x\right)ydy = e^x dx\left(1+y^2\right).$$

*Решение:*

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, так как коэффициент при $dx$ представляет собой произведение двух сомножителей: $e^x$зависит только от $x$, а $(1+y^2)$ – только от $y$. Аналогично коэффициент при $dy$ тоже является произведением двух сомножителей: $(1+e^x)$ зависит только от x, а второй сомножитель – $y$.

Чтобы привести его к виду с разделенными переменными, разделим все члены уравнения на $(1+e^x)(1+y^2)$, в результате получим: $\frac{ydy}{1+y^2} = \frac{e^x dx}{1+e^x}$.

Решим это уравнение. (Заметим, что постоянную С можно записывать как $\frac{C}{2}$, $2C$, $\ln C$, $\sin C$ .) Здесь произвольную постоянную удобнее взять в виде $\ln C$.

$$\int \frac{ydy}{1+y^2} = \int \frac{e^x dx}{1+e^x} + \ln C,$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln(1+e^x) + \ln C,$$

$$\ln\sqrt{1+y^2} = \ln C(1+e^x).$$

$\sqrt{1+y^2} = C(1+e^x)$ - это общий интеграл исходного уравнения.

***Пример 2.*** Найти частное решение дифференциального уравнения.

$$(xy^2+y^2)dx + (x^2-x^2y)dy = 0, \quad y(1)=1.$$

*Решение:*

Преобразуем левую часть уравнения:

$$y^2(x+1)dx + x^2(1-y)dy = 0.$$

Разделим переменные, поделив на $x^2y^2$ :

$$\frac{x+1}{x^2}dx+\frac{1-y}{y^2}dy=0$$

Интегрируя, получаем общий интеграл:

$$\int\frac{x+1}{x^2}dx+\int\frac{1-y}{y^2}dy=0;\quad \int\frac{dx}{x}+\int x^{-2}dx+\int y^{-2}dy-\int\frac{dy}{y}=0,$$

$$\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\ln|y|=c;\quad \ln\left|\frac{x}{y}\right|-\frac{x+y}{xy}=c.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что $x=0$ и $y=0$ являются решениями данного дифференциального уравнения.

Найдем частный интеграл, подставив в общий значения $x=1$ и $y=1$, получим $\ln 1-2=c,\quad c=-2$; таким образом, $\ln\left|\frac{x}{y}\right|-\frac{x+y}{xy}=-2$.

## Однородные дифференциальные уравнения

Функция $z=f(x;y)$ называется однородной функцией порядка k если $f(\lambda\cdot x;\lambda\cdot y)=\lambda^k\cdot f(x;y)$.

Дифференциальное уравнение вида $y'=f(x;y)$ называется однородным, если функция $f(x;y)$ есть однородная функция нулевого порядка.

Однородное дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$y'=\varphi\left(\frac{x}{y}\right) \tag{2.1}$$

Или в дифференциальной форме:

$$P(x;y)\cdot dx+Q(x;y)\cdot dy=0$$

Методы решения данных уравнений представим в таблице.

**Основные методы решения однородных дифференциальных уравнений**

<table>
<tr><td>$y'=\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$</td><td>$P(x;y)\cdot dx+Q(x;y)\cdot dy=0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Преобразуются в уравнения с разделяющимися переменными при помощи замены переменной (подстановки) $u=\frac{y}{x}\Rightarrow\quad u=u\cdot x$, тогда</td></tr>
<tr><td>$y'=u'\cdot x+u$</td><td>$dy=x\cdot du+u\cdot dx$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Полученные уравнения в новых переменах являются уравнениями с разделяющимися переменными. Найдя их решения и заменив обратно $u$ на $\frac{y}{x}$, получим общее решение исходного уравнения.</td></tr>
</table>

***Пример 3.*** Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' = \frac{x+2y}{2x-y}.$$

*Решение:*

$$y' = \frac{1+2\frac{y}{x}}{2-\frac{y}{x}},$$

введем замену $\frac{y}{x} = u$, тогда $y = ux$, а $y' = u + u'x$.

Заданное уравнение принимает вид:

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1+2u}{2-u},$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{2-u},$$

$$\frac{2-u}{1+u^2}du = \frac{dx}{x},$$

$$\int\left(\frac{2}{1+u^2} - \frac{u}{1+u^2}\right)du = \int\frac{dx}{x},$$

$$2arctgu - \frac{1}{2}\ln\left|1+u^2\right| = \ln|x| + \ln C.$$

Возвращаясь, к замене $\frac{y}{x} = u$ получим:

$$2arctg\,\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{y^2}{x^2}\right| = \ln|x| + \ln C.$$

***Пример 4.*** Решить дифференциальное уравнение:

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$$

*Решение:*

Разрешим уравнение относительно $y'$:

$$y' = \sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}.$$

Уравнение однородное, сделаем замену: $u = \frac{y}{x}$ или $y = ux$, тогда $y' = xu' + u$.

Подставив в уравнение выражения для $y$ и $y'$, получим:

$$xu' = \sqrt{1-u^2}.$$

Получим уравнение с разделяющимися переменными.

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int\frac{dx}{x},$$

$\arcsin u = \ln|c|\cdot|x|$ или возвращаясь к функции $y$, будем иметь: $\arcsin\frac{y}{x} = \ln|cx|$.

Так как $\left|\ln|cx|\right| \le \frac{\pi}{2}$, т.е. $e^{-\frac{\pi}{2}} \le |cx| \le e^{\frac{\pi}{2}}$, или $y = \sin\ln|cx|$.

Непосредственно проверим, что $x = 0$ не является решением уравнения. Множитель $\sqrt{1-u^2} = 0$ дает решения $u = \pm 1$, т.е. $y = \pm x$, которые являются решением. Это подтверждает непосредственная проверка.

## Линейные дифференциальные уравнения
## Уравнения Бернулли

### Линейные дифференциальные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением1-го порядка называется уравнение вида

$$y' + p(x)\cdot y = g(x),$$

где $p(x),\ g(x)$– непрерывные (на данном интервале) функции, в частности постоянные.

Характерный признак уравнений – функция $y$ и ее производная $y'$ содержатся в уравнении в первой степени и не перемножаются между собой.

Если функция $g(x) \equiv 0$, то уравнение (3.1) принимает вид $y' + p(x)\cdot y = 0$ и называется линейным однородным ЛОДУ. Иначе уравнение называется линейным неоднородным ЛНДУ.

Существует несколько методов решения уравнений данных видов: метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа), метод интегрирующего множителя, метод Бернулли, которые представлены в таблице.

**Основные методы решения линейных дифференциальных уравнений**

| Метод Бернулли | Метод Лагранжа |
|---|---|
| Линейное уравнение решается с помощью замены неизвестной функции и ее производной по формулам: $y = u\cdot v$; $y' = u'\cdot v + v'\cdot u$, где $u = u(x),\ v = v(x)$- неизвестные функции.<br>Проведя замену, уравнение $y' + p(x)\cdot y = g(x)$ записывается следующим образом:<br>$u'\cdot v + v'\cdot u + p(x)\cdot u\cdot v = g(x)$ или<br>$u'\cdot v + u(v' + p(x)\cdot v) = g(x)$ $(*)$<br>Функцию $v = v(x)$выбираем таким образом, чтобы она обращала в ноль выражение, стоящее в скобках левой части равенства $(*)$:<br>$v' + p(x)\cdot v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -p(x)\cdot v$. | Метод состоит в следующем: решим вместо уравнения $y' + p(x)\cdot y = g(x)$ уравнение $y' + p(x)\cdot y = 0$, решение которого записывается в виде: $y = C\cdot e^{-\int p(x)dx}$.<br>Положим, что $C = C(x)$и подставим решение уравнения с нулевой правой частью в исходное. Получим уравнение для $C(x)$: |

| Метод Бернулли | Метод Лагранжа |
|---|---|
| Решаем полученное для функции $v$ ДУ с разделяющимися переменными:<br>$\frac{dv}{v} = -p(x)\cdot dx;$<br>$\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)\cdot dx;$<br>$v = e^{-\int p(x)} dx$.<br>Следует подставить в уравнение $(*)$, которое стало эквивалентно уравнению с разделяющимися переменными и приняло вид $u'\cdot v = g(x)$.<br>В результате получим для неизвестной функции $u(x)$ уравнение с разделяющимися переменными. Его решение позволяет найти исходную неизвестную функцию $y$ по формуле: $y = u\cdot v$<br>Окончательно общий интеграл линейного дифференциального уравнения<br>примет вид $y = v(x)\cdot u(x;C)$ | $C'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} - C(x)\cdot p(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} +$<br>$+ C(x)\cdot p(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} = g(x)$<br>Откуда $C'(x) = g(x)\cdot e^{\int p(x)dx} \Leftrightarrow$<br>$C(x) = \int g(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$,<br>решение исходного уравнения<br>$y = C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}$ |

**Уравнения Бернулли**

Уравнение Бернулли отличается от линейного уравнения $y' + p(x)\cdot y = g(x)$ тем, что в правой части есть множитель в виде степени неизвестной функции и оно имеет вид:

$$y' + p(x)\cdot y = g(x)\cdot y^n,\ \ n\in R,\ \ n\neq 0,\ \ n\neq 1$$

Уравнение Бернулли решается по той же схеме, что и линейное уравнение. Оно приводится к линейному уравнению с помощью подстановки $z = y^{-n+1}$.

***Пример 5.*** Решить дифференциальное уравнение $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

*Решение:*

Заданное уравнение является ЛНДУ. Будем искать решение уравнения в виде произведения двух функций: $y = u\cdot v \Rightarrow y' = u'v + v'u$. После этой подстановки данное уравнение примет вид: $u'v + v'u + 2xuv = xe^{-x^2}$.

Вынесем за скобки $u$: $u'v + u(v' + 2xv) = xe^{-x^2}$ $(*)$.

Найдем *одну* из функций $v$, такую, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль: $v' + 2xv = 0$. Это уравнение будет с разделяющимися переменными. Решим его.

$$\frac{dv}{dx} + 2xv = 0,$$
$$dv = -2xvdx,$$
$$\frac{dv}{v} = -2xdx,$$
$$\ln|v| = -x^2$$
$$v = e^{-x^2}$$
Подставим найденную функцию в уравнение $(*)$.
$$u'e^{-x^2} = xe^{-x^2},$$
$$u' = x,$$
$$\frac{du}{dx} = x,$$
$$du = xdx,$$
$$u = \frac{x^2}{2} + C$$
Так как $y = uv$, то $y = (\frac{x^2}{2} + C) \cdot e^{-x^2}$ – общее решение данного уравнения.

***Пример 6.*** Найти общее решение дифференциального уравнения:
$xy' + y = y^2 \ln x$.

*Решение:*

Это уравнение Бернулли. Воспользуемся подстановкой:
$y = uv; \quad y' = u'v + uv'$.

Подставим $y$ и $y'$ в исходное уравнение:
$xu'v + xuv' + uv = u^2v^2 \ln x$ или $xu'v + u(xv' + v) = u^2v^2 \ln x$.

Потребуем, чтобы $xv' + v = 0$, тогда
$\frac{xdv}{dx} - v = 0$ или $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$.

Интегрируя, получим: $\ln v = -\ln x, \quad v = \frac{1}{x}$.

Подставим найденное значение $v$ в уравнение, получим:
$u' = u^2 \frac{\ln x}{x^2}$ или $\frac{du}{u^2} = \frac{\ln xdx}{x^2}$.

Интегрируя, получим: $\frac{1}{u} = \frac{1}{x}(\ln x + 1 + cx)$ или $u = \frac{x}{\ln x + 1 + cx}$.

Так как $y = uv$, то $y = \frac{1}{\ln x + 1 + cx}$.

Кроме того, очевидно, что решением уравнения будет $y = 0$.

**Решение типовых задач**

Задача 1. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка.

$a)\ \left(1+e^{x}\right)ydy = e^{x}dx\left(1+y^{2}\right).$

*Решение:*

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, так как коэффициент при $dx$ представляет собой произведение двух сомножителей: $e^x$зависит только от $x$, а $(1+y^2)$ – только от $y$. Аналогично коэффициент при $dy$ тоже является произведением двух сомножителей: $(1+e^x)$ зависит только от x, а второй сомножитель – $y$.

Чтобы привести его к виду с разделенными переменными, разделим все члены уравнения на $(1+e^x)(1+y^2)$, в результате получим: $\frac{ydy}{1+y^{2}} = \frac{e^{x}dx}{1+e^{x}}$.

Решим это уравнение. (Заметим, что постоянную С можно записывать как $\frac{\tilde{N}}{2},\ 2C,\ \ln C,\ \sin C$ .) Здесь произвольную постоянную удобнее взять в виде $\ln C$ .

$$\int \frac{ydy}{1+y^{2}} = \int \frac{e^{x}dx}{1+e^{x}} + \ln C$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^{2}) = \ln(1+e^{x}) + \ln C$$

$$\ln\sqrt{1+y^{2}} = \ln C(1+e^{x})$$

$\sqrt{1+y^{2}} = C(1+e^{x})$ – это общий интеграл исходного уравнения.

$\acute{a})\ \ y' = \frac{x+2y}{2x-y}$.

*Решение:*

$$y' = \frac{1+2\frac{y}{x}}{2-\frac{y}{x}},$$

введем замену $\frac{y}{x} = u$ , тогда $y = ux,$ а $y' = u + u'x.$

Заданное уравнение принимает вид:

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1+2u}{2-u},$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{1+u^{2}}{2-u},$$

$$\frac{2-u}{1+u^{2}}du = \frac{dx}{x},$$

$$\int\left(\frac{2}{1+u^{2}} - \frac{u}{1+u^{2}}\right)du = \int\frac{dx}{x},$$

$$2arctgu-\frac{1}{2}\ln\left|1+u^2\right|=\ln|x|+\ln C.$$

Возвращаясь к замене $\frac{y}{x}=u$, получим:

$$2arctg\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{y^2}{x^2}\right|=\ln|x|+\ln C.$$

â) $y'+2xy=xe^{-x^2}$.

*Решение:*

Заданное уравнение является ЛНДУ. Будем искать решение уравнения в виде произведения двух функций: $y=u\cdot v\Rightarrow y'=u'v+v'u$. После этой подстановки данное уравнение примет вид: $u'v+v'u+2xuv=xe^{-x^2}$.

Вынесем за скобки *u*:

$$u'v+u(v'+2xv)=xe^{-x^2} \qquad (*)$$

Найдем *одну* из функций *v*, такую, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль: $v'+2xv=0$. Это уравнение будет с разделяющимися переменными. Решим его.

$$\frac{dv}{dx}+2xv=0,$$

$$dv=-2xvdx,$$

$$\frac{dv}{v}=-2xdx,$$

$$\ln|v|=-x^2$$

$$v=e^{-x^2}$$

Подставим найденную функцию в уравнение (*).

$$u'e^{-x^2}=xe^{-x^2},$$

$$u'=x,$$

$$\frac{du}{dx}=x,$$

$$du=xdx,$$

$$u=\frac{x^2}{2}+C$$

Так как $y=uv$, то $y=(\frac{x^2}{2}+C)\cdot e^{-x^2}$ – общее решение данного уравнения.

Задача 2. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка:

$a)$ $y'''=x+\sin x$

Общее решение этого уравнения находим последовательным трехкратным интегрированием. Имеем:

$$y'' = \int (x + \sin x)dx = \frac{x^2}{2} - \cos x + c_1,$$

$$y' = \int \left( \frac{x^2}{2} - \cos x + c_1 \right) dx = \frac{x^3}{6} - \sin x + c_1 x + c_2,$$

$$y = \int \left( \frac{x^3}{6} - \sin x + c_1 x + c_2 \right) dx = \frac{x^4}{24} + \cos x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3.$$

á) $xy^{(IV)} - y''' = 0$.

Полагаем $y''' = p$, тогда $y^{(IV)} = p'$ и уравнение примет вид:

$$xp' - p = 0, \quad \frac{xdp}{dx} = p, \quad \frac{dx}{x} = \frac{dp}{p}.$$

Интегрируя, получим: $\ln|x| = \ln|p \cdot c|$, $x = p \cdot c$.

Следовательно: $y''' = \dfrac{x}{c}$.

Интегрируя последовательно три раза, получим:

$$y'' = \int \frac{x}{c} dx = \frac{x^2}{2c} + c_1$$

$$y' = \int \left( \frac{x^2}{2c} + c_1 \right) dx = \frac{x^3}{6c} + c_1 x + c_2$$

$$y = \int \left( \frac{x^3}{6c} + c_1 x + c_2 \right) dx = \frac{x^4}{24c} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3.$$

â) $yy'' - y'^2 = 0$.

Полагаем $y' = p(y)$, тогда

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p' \cdot p.$$

Уравнение примет вид: $yp'p - p^2 = 0$.

Решая его, получим:

$$y\frac{dp}{dy} = p, \quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}, \quad \ln|p| = \ln|yc_1|, \quad p = yc_1$$

$y' = yc_1$ или $\dfrac{dy}{dx} = yc_1$, $\dfrac{dy}{y} = c_1 dx$, $\ln|y| = c_1 x + c_2$ или $y = e^{c_1 x + c_2}$.

Решая уравнение, мы делили его на $y$ и на $p$.

Но $y = 0$ и $p = 0$ могут быть включены в общее решение, если считать, что $c_1$ и $c_2$ могут принимать значение «ноль».

Задача 3. Решить задачу Коши:

$y'' - 4y' + 13y = 0 \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = -2$.

*Решение:*

Характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 13 = 0$ имеет корни $k = 2 \pm 3i$.

Корни характеристического уравнения комплексные сопряженные, им соответствуют частные решения $e^{2x}\cos 3x$; $e^{2x}\sin 3x$.

Следовательно, общее решение: $y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$.

Подставляя начальные условия в найденное общее решение и его производную:

$y' = 2e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + e^{2x}(-3C_1\sin 3x + 3C_2\cos 3x)$,

получим систему: $\begin{cases} 1 = C_1 \\ -2 = 2C_1 + 3C_2 \end{cases}$.

Решая ее, получим: $C_1 = 1. \quad C_2 = -\dfrac{4}{3}$.

Тогда частное решение примет вид: $y = e^{2x}(\cos 3x - \dfrac{4}{3}\sin 3x)$.

## 2.11 Раздел 11. Кратные, криволинейные и поверхностные Интегралы. Векторный анализ

**Вопросы для изучения**

1. Задачи, приводящие к двойным интегралам. Двойной интеграл.
2. Свойства двойного интеграла.
3. Вычисление двойного интеграла в прямоугольных декартовых координатах.
4. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах.
5. Приложения двойного интеграла.
6. Тройной интеграл.
7. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах.
8. Приложения тройного интеграла.
9. Задачи, приводящие к понятию криволинейного интеграла. Криволинейный интеграл первого рода.
10. Криволинейный интеграл второго рода. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода.
11. Приложения криволинейных интегралов. Формула Грина.
12. Формула Стокса. Формула Остроградского.
13. Дивергенция векторного поля.

14. Ротор векторного поля.
15. Поток векторного поля.
16. Работа векторного поля.
17. Потенциальные и соленоидальные поля.

**Методические рекомендации**

При изучении физики, механики и при решении разнообразных инженерных задач часто возникает необходимость наряду с интегралами от действительной функции одного переменного рассматривать интегралы от функций многих переменных. Эти интегралы приходиться вычислять по двухмерным, трехмерным областям, по кривым и поверхностям. Такие интегралы играют важную роль при исследовании скалярных и векторных полей, задаваемых в пространстве действительными и векторными функциями векторного аргумента, составляющими предмет изучения теории поля и векторного анализа.

Примерами векторных полей являются поле скоростей текущей жидкости, поле скоростей точек твердого тела, вращающегося с угловой скоростью или вокруг данной оси, поле электрической или магнитной напряженности и другие.

**Рекомендуемые источники по теме:** */1, глава 12 §12.1-12.5/ и /2, глава 12 §1-4, глава 13§1-3/.*

**Основные теоретические сведения**

Теория поля – крупный раздел физики, механики, математики, в котором изучаются скалярные, векторные, тензорные поля.

***Определение.*** Полем называется область $V$ пространства, в каждой точке которой определено значение некоторой величины. Если каждой точке М этой области соответствует некоторое число, то говорят, что задано **скалярное поле.** Иными словами: скалярная функция $u = f(x, y, z)$ вместе с областью своего определения образует скалярное поле.

***Пример.*** Скалярным полем является поле температур некоторого тела, поле плотности массы тела, поле плотности электрических зарядов.

Если же в каждой точке М области $V$ задан вектор $\vec{a} = \vec{a}(M)$, то говорят, что задано ***векторное поле***. Векторное поле задают векторной функцией скалярного аргумента: $\vec{R} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ .

***Пример.*** Векторным полем является поле силы тяжести, поле скоростей частиц движущейся жидкости, магнитное поле, характеризующееся вектором электромагнитной индукции, и т.д.

**Определение.** Если функции $u = f(x, y, z)$ *и* $\vec{R}$ не зависят от времени, то поле называется *стационарным*.

## Скалярное поле и его характеристики

Рассмотрим основные характеристики скалярного поля.

***1) Поверхности и линии уровня***

Рассмотрим скалярное поле $u = u(x, y, z)$ .

Для его наглядного представления используют поверхности уровня.

***<u>Определение</u>.*** *Поверхностью уровня называется множество точек пространства, в которых функция* $u = u(x, y, z)$ *принимает постоянное значение.*

Уравнение поверхности уровня: $u(x, y, z) = u_0$.

Для плоского поля определяют линии уровня.

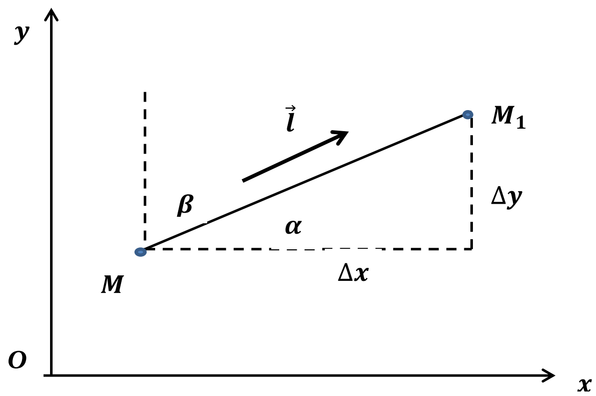
***Пример 1.*** Функция $u(x, y, z) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}$ определяет скалярное поле при $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, т.е. в части пространства, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Поверхностями уровня будет семейство концентрических сфер: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 - u_0^2$.

***Пример 2.*** Потенциал электростатического поля, образованного точечным зарядом, помещенным в начало координат, определяется формулой $u = \dfrac{q}{r}$, где $q$ – величина заряда, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – расстояние точки до начала координат. Указанная формула определяет скалярное поле во всех точках пространства, кроме начала координат. Уравнение поверхностей уровня этого поля имеет вид:

$$u_0 = \frac{q}{r} \Rightarrow u_0 = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = (\frac{q}{u_0})^2 .$$

**2)** ***Производная в данном направлении***

Для характеристики скорости изменения поля в данном направлении введем понятие производной в этом направлении. Для наглядности рассмотрим плоское поле $u = u(x, y)$ . В области задания поля возьмем произвольную точку ***M***. В направлении вектора $\vec{l} = \{cos\alpha, \cos\beta\}$ выберем точку $M_1$.



При переходе от первой точки ко второй функция получит приращение $\Delta u = u(M_1) - u(M)$, которое назовем приращением функции в данном направлении. Длину отрезка $|MM_1| = \Delta l$ назовем перемещением.

***Определение.*** *Производной функции* $u = u(x, y)$ *в направлении вектора* $\vec{l} = \{cos\alpha, \cos\beta\}$ *называется предел отношения приращения функции в данном направлении к величине перемещения при условии, что последнее стремится к нулю и предел существует.*

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{M_1 \to M} \frac{u(M_1) - u(M)}{|MM_1|} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l}.$$

Напомним, что $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta$.

Для поля $u = u(x, y, z)$ производную вычисляют по формуле: $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$.

Итак, производная функции $u = u(x, y, z)$ в направлении вектора $\vec{l}$ определяет скорость изменения поля в направлении этого вектора. Модуль производной равен величине скорости, а знак производной определяет характер изменения функции.

***Пример.*** Найти производную поля $u = x^2 + y^2 - 4yz$ в точке $M(0,1,2)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $M_1(2,3,3)$.

***Решение.*** Определим координаты вектора $\vec{MM_1}$ и его направляющие косинусы: $\vec{MM_1} = \{2,2,1\}$; $\cos\alpha = \dfrac{x}{|\vec{MM_1}|} = \dfrac{2}{3}$; $\cos\beta = \dfrac{2}{3}$; $\cos\gamma = \dfrac{1}{3}$.

Найдем частные производные данной функции и вычислим их значение в точке *M*. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x, \dfrac{\partial u}{\partial x}(M) = 0; \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y - 4z, \dfrac{\partial u}{\partial y}(M) = -6; \dfrac{\partial u}{\partial z} = -4y, \dfrac{\partial u}{\partial z}(M) = -4.$

Определим искомую производную.

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 0 \cdot \frac{2}{3} - 6 \cdot \frac{2}{3} - 4 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{16}{3}.$$

Так как производная отрицательна, функция убывает в заданном направлении.

**3) *Градиент скалярного поля и его свойства***

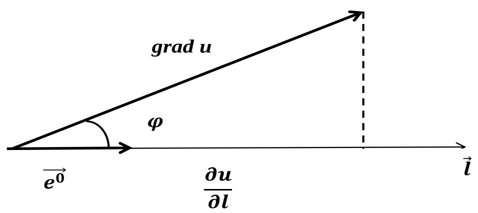
***<u>Определение.</u>*** *Градиентом функции* $u = u(x, y, z)$ *в точке М называется вектор, координатами которого являются значения частных производных этой функции в точке М.*

$$grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Говорят, что скалярное поле порождает векторное поле градиентов.

Легко видеть, что производная в направлении вектора $\vec{l}$ равна скалярному произведению градиента на орт вектора $\vec{l}$.

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = grad u \cdot \vec{l}^{\,0} = Пр_{\vec{l}^{\,0}} grad u = |grad u| \cdot \cos\varphi$$




Производная функции $u = u(x, y, z)$ в направлении вектора $\vec{l}$ равна проекции градиента на вектор $\vec{l}$. Поэтому она достигает наибольшего значения, когда $\cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$. Это означает, что градиент указывает направление наибыстрейшего возрастания функции. Наибольшая скорость изменения функции в точке *М* равна модулю градиента.

$$|grad u| = \sqrt{(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial u}{\partial z})^2}.$$

***Пример 1.*** Найти наибольшую скорость возрастания функции $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ в точке *А(-1,1,-1).*

***Решение.*** Найдем градиент функции в произвольной точке и определим его в точке *А*.

$$grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = (\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2})\vec{i} + (-\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z})\vec{j} + (-\frac{y}{z^2} + \frac{1}{x})\vec{k},$$

$$grad u(A) = (1+1)\vec{i} + (1-1)\vec{j} + (-1-1)\vec{k} = 2\vec{i} - 2\vec{k}.$$

Наибольшая скорость возрастания функции в точке *А* равна:

$$|grad u| = \sqrt{(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial u}{\partial z})^2} = \sqrt{4+0+4} = 2\sqrt{2}.$$

***Пример 2.*** Определить градиент потенциала электростатического поля, образованного точечным зарядом, помещенным в начало координат.

***Решение.*** Потенциал электростатического поля, образованного точечным зарядом, помещенным в начало координат, определяется формулой $u=\frac{q}{r}$, где $q$ – величина заряда, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

$$gradu=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}=-\frac{q}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i}-\frac{q}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}-\frac{q}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}=$$
$$=-\frac{q}{r^2}(\frac{x}{r}\vec{i}+\frac{y}{r}\vec{j}+\frac{z}{r}\vec{k})=-\frac{q}{r^3}(x\vec{i}+y\vec{j}+x\vec{k})=-\frac{q}{r^3}\cdot\tilde{r},$$

где $\tilde{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ – радиус-вектор точки $M(x,y,z)$, $\frac{\tilde{r}}{r}$ – единичный вектор в направлении радиуса-вектора $\vec{r}^{\,0}$. Тогда $gradu=-\frac{q}{r^2}\cdot\vec{r}^{\,0}$.

Вектор $\vec{E}=\frac{q}{r^2}\cdot\vec{r}^{\,0}$ называется вектором напряженности рассматриваемого электростатического поля в точке $M$.

Таким образом, $gradu=-\vec{E}$.

***Отметим важные свойства градиента***

1) Градиент направлен по нормали к поверхности уровня, проведенной через данную точку.
2) $grad(u+v)=gradu+gradv$.
3) $grad(uv)=v\cdot gradu+u\cdot gradv$.
4) $grad(\frac{u}{v})=\frac{v\cdot gradu-u\cdot gradv}{v^2}$.
5) $gradF(u)=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot gradu$.

## Векторное поле и его характеристики

Рассмотрим основные характеристики векторного поля.

**1)** ***Векторные линии поля***

***<u>Определение.</u>*** *Векторной линией поля называется линия, касательная к которой в каждой точке M имеет направление соответствующего вектора поля.*

Для конкретных полей векторные линии имеют следующий смысл.

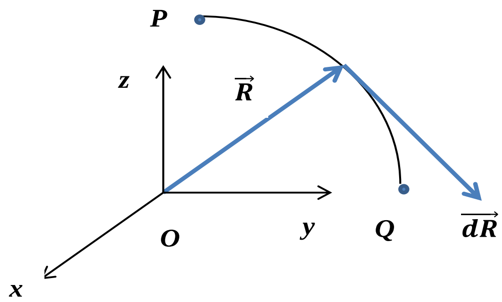
В поле скоростей движущейся жидкости векторными линиями будут линии, по которым движутся частицы жидкости (линии тока).

Для магнитного поля векторными (силовыми) линиями будут линии, выходящие из северного полюса и оканчивающиеся в южном полюсе.

***Определение.*** Совокупность векторных линий, проходящих через некоторую замкнутую кривую, называется *векторной трубкой.*

Найдем систему дифференциальных уравнений, определяющую векторные линии поля.

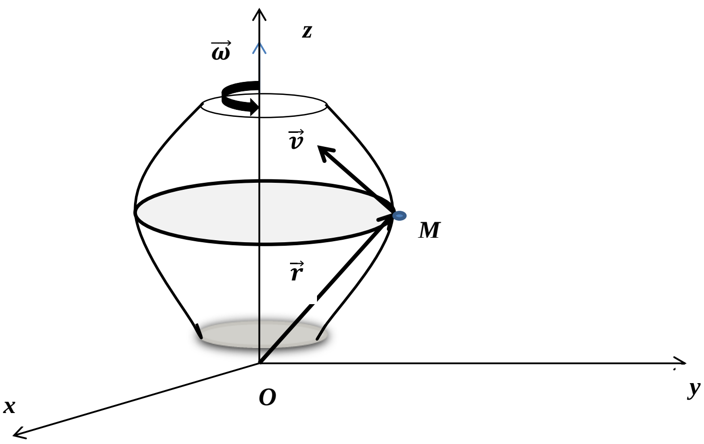
Пусть $\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радиус-вектор произвольной точки векторной линии. Тогда вектор $d\vec{R} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ направлен по касательной к ней.




По определению векторной линии векторы поля $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ вектор $d\vec{R} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ должны быть коллинеарны, откуда следует пропорциональность их координат. Следовательно, система дифференциальных уравнений векторных (силовых) линий имеет вид:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

***Пример 1.*** Пусть некоторое тело вращается вокруг оси $Oz$ с угловой скоростью $\vec{\omega} = \{0, 0, \omega\}$. Обозначим $\vec{r} = \{x, y, z\}$ радиус – вектор произвольной точки тела.



Из физики известно, что поле линейных скоростей такого тела можно найти по формуле:

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ x & y & z\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}0 & \omega\\ y & z\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}0 & \omega\\ x & z\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}0 & 0\\ x & y\end{vmatrix}=-y\omega\vec{i}+x\omega\vec{j}\,.$$

Составим уравнения векторных линий поля линейных скоростей точек вращающегося вокруг оси Oz тела:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}\Rightarrow\frac{dx}{-y\omega}=\frac{dy}{x\omega}=\frac{dz}{0}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dx}{-y\omega}=\dfrac{dy}{x\omega}\\ \dfrac{dy}{x\omega}=\dfrac{dz}{0}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xdx=-ydy\\ dz=0\end{cases}$$

Решая полученную систему дифференциальных уравнений, получим:

$$\frac{x^2}{2}=-\frac{y^2}{2}+\frac{c_1^2}{2};\,z=c_2\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=c_1^2\\ z=c_2\end{cases}.$$

Векторными линиями рассматриваемого векторного поля будут окружности, лежащие в плоскости, параллельной плоскости *XoY*.

***Пример 2.*** Найти векторные линии напряженности магнитного поля, образованного постоянным электрическим током силы *I*, текущим по бесконечно длинному прямолинейному проводу.

***Решение.*** Рассмотрим систему прямоугольных координат. За ось *oZ* примем провод. Известно, что вектор напряженности магнитного поля выражается формулой: $\vec{H}=\dfrac{2I}{\rho^2}(-y\cdot\vec{i}+x\cdot\vec{j})$ , где $\rho$ – расстояние точки М от провода.

Таким образом, координаты вектора напряженности имеют вид:

$$X=-\frac{2I}{\rho^2}y, Y=\frac{2I}{\rho^2}x, Z=0\,.$$

Получим уравнения векторных линий:

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}\Rightarrow\frac{dx}{\frac{-2I}{\rho^2}y}=\frac{dy}{\frac{2I}{\rho^2}x}=\frac{dz}{0}.$$

Эту систему можно представить в виде системы двух уравнений:

$$1)\ \frac{dx}{-\frac{2I}{\rho^2}y}=\frac{dy}{\frac{2I}{\rho^2}x},$$

$$2)\ \frac{dy}{\frac{2I}{\rho^2}x}=\frac{dz}{0},$$

или

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{-y}=\dfrac{dy}{x}\\ \dfrac{dy}{x}=\dfrac{dz}{0}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xdx=-ydy\\ dz=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=C,\\ z=C1.\end{cases}$$

таким образом, векторные линии напряженности рассматриваемого магнитного поля представляют собой окружности.

**2) *Поток векторного поля***

***<u>Определение.</u>*** *Потоком векторного поля* $\vec{F}=\{P,Q,R\}$ *через поверхность* $\sigma$ *называется поверхностный интеграл*

$$\Pi=\iint_{\sigma}(P\cos\alpha+Qcos\beta+R\cos\gamma)d\sigma=\iint_{\sigma}\vec{F}\cdot\vec{n}^0 d\sigma .$$

Физический смысл потока зависит от физического смысла функции $\vec{F}=\{P,Q,R\}$.

Поток поля скоростей движущейся жидкости равен объему жидкости, протекающей через поверхность $\sigma$ в единицу времени.

Особый интерес представляет случай, когда поверхность является замкнутой. В этом случае за направление нормали обычно берут ее внешнее направление и говорят о потоке изнутри поверхности. Если рассматривать поле скоростей текущей жидкости, то поток П через замкнутую поверхность дает разность между количеством жидкости, вытекающей из области, ограниченной поверхностью $\sigma$, и втекающей в нее за единицу времени.

**3) *Дивергенция (расходимость) векторного поля***

Пусть поле $\vec{F}=\{P,Q,R\}$ определено в некоторой пространственной области. Выберем в этой области замкнутую поверхность $\sigma$, ограничивающую область *V*. Вычислим поток поля через поверхность $\sigma$ и найдем его отношение к объему *V*:

$$\frac{\Pi}{V}=\frac{1}{V}\oiint_{\sigma}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma .$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $V\to 0$.

$$\lim_{V\to 0}\frac{\Pi}{V}=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iint\limits_{\sigma}\!\!\!\!\!\!\!\!\bigcirc\ \ \vec F\cdot\vec n\, d\sigma .$$

Доказано, что, если функции $P,Q,R$ непрерывны вместе со своими частными производными, этот предел существует. Он называется *дивергенцией (расходимость)* векторного поля $\vec F=\{P,Q,R\}$ и обозначается $div\vec F$.

С помощью формулы Остроградского

$$\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\oiint\limits_{\sigma}\vec F\cdot\vec n\, d\sigma .$$

можно показать, что $div\vec F=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$.

Итак, в каждой точке векторного поля определено число – дивергенция поля в этой точке.

Выясним физический смысл дивергенции. Рассмотрим поле скоростей несжимаемой жидкости. Движение жидкости может быть обусловлено наличием источников – точек, производящих жидкость, или стоков – точек, поглощающих жидкость. Поток поля через замкнутую поверхность дает количество жидкости, протекающей в единицу времени с внутренней стороны поверхности на внешнюю. Эта величина равна количеству жидкости, вырабатываемой в единицу времени всеми источниками в области $V$, т. е. равна мощности источников в этой области. Отношение $\dfrac{\Pi}{V}$ тогда характеризует среднюю плотность мощности источников в области $V$, а его предел есть плотность мощности источников в данной точке.

Если $\vec F=\{P,Q,R\}$ – поле вектора напряженности, создаваемое электрическими зарядами, то дивергенция характеризует плотность распределения зарядов в данной точке.

Пользуясь определением дивергенции, формулу Остроградского можно переписать в виде: $\oiint\limits_{\sigma}\vec F\cdot\vec n\, d\sigma=\iiint\limits_V div\vec F\, dV$.

Если $div\vec F$ =0, то и поток $\Pi=\oiint\limits_{\sigma}\vec F\cdot\vec n\, d\sigma=\iiint\limits_V div\vec F\, dV=0$. Это означает, что в области, ограниченной поверхностью $\sigma$, отсутствуют источники (или стоки). Возможно, что источники и стоки уравновешивают друг друга.

Исходя из физического смысла потока можно сказать: если $div\vec F(M)\succ 0$, то точка $M$ представляет собой источник; если $div\vec F(M)\prec 0$, то точка $M$ представляет собой сток, поглощающий жидкость.

Векторные поля, у которых $div\vec F$ =0, называются *соленоидальнми* (или трубчатыми). Такие поля не могут иметь ни источников, ни стоков, а значит и точек, где начинаются или кончаются векторные линии. Векторные линии соленоидального поля либо замкнуты, либо начинаются и кончаются у границ поля.

***Пример 3.*** Найти дивергенцию поля линейных скоростей точек вращающегося вокруг оси *Oz* тела.

***Решение.*** Мы показали ранее, что интересующее нас поле имеет вид:

$$\vec{V} = -y\omega\vec{i} + x\omega\vec{j} + 0\vec{k}\ .$$

Дивергенция этого поля равна: $div\vec{V} = \frac{\partial}{\partial x}(-\omega y) + \frac{\partial}{\partial y}(\omega x) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = 0$.

Поле $\vec{V}$ - соленоидальное.

***Пример 4.*** Найти дивергенцию и поток вектора напряженности электростатического поля через любую замкнутую поверхность.

***Решение.*** $\vec{E} = \frac{e}{r^3} \cdot \vec{r} = \frac{e}{r^3}(x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k})$.

Координаты вектора напряженности равны: $P = \frac{e}{r^3}x;\ Q = \frac{e}{r^3}y;\ R = \frac{e}{r^3}z$,

$$div\vec{E} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{e \cdot r^3 - e \cdot x \cdot 3r^2 \cdot \frac{\partial r}{\partial x}}{r^6} = \left| \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \end{array} \right| = e \cdot \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}.$$

Аналогично получим, что $\frac{\partial P}{\partial y} = e \cdot \frac{r^2 - 3y^2}{r^5};\quad \frac{\partial R}{\partial z} = e \cdot \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}$.

Тогда $div\vec{E} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = e \cdot \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = \frac{3r^2 - 3r^2}{r^5} = 0$.

Таким образом, дивергенция вектора напряженности электростатического поля равна нулю всюду, за исключением начала координат, где помещен заряд и вектор напряженности обращается в бесконечность. Если замкнутая поверхность не содержит внутри себя заряда, то внутри нее дивергенция вектора напряженности равна нулю. По теореме Остроградского – Гаусса поток вектора напряженности через эту поверхность равен нулю.

($\Pi = \oiint\limits_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint\limits_{v} div\vec{F} d\sigma$ .)

Иначе обстоит дело с объемным зарядом Q, распространенным по всему объему, ограниченному поверхностью S. Плотностью заряда Q в точке P называется $\lim\limits_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v} = \rho$, Δv – объем, включающий точку *P*.

В теории пространственного потенциала доказывается, что поток электростатического поля, образованного объемным зарядом, через произвольную замкнутую поверхность зависит исключительно от части заряда, находящегося внутри этой поверхности и равен $4\pi\Delta Q$. Тогда дивергенция вектора напряженности электростатического поля, образованного объемным зарядом Q, определяется пределом $\lim\limits_{\Delta v\to 0}\dfrac{4\pi\Delta Q}{\Delta v}=4\pi\rho$. Вне заряда дивергенция равна нулю.

***Пример 5.*** Найти дивергенцию вектора напряженности $H$ магнитного поля, создаваемого постоянным током $I$, текущим по бесконечному проводу.

***Решение.*** Известно, что вектор напряженности рассматриваемого магнитного поля: $\vec{H}=\dfrac{2I}{r^2}(-y\cdot\vec{i}+x\cdot\vec{j}+0\cdot\vec{k})$, где $r$ – расстояние точки от провода.

Координаты этого вектора равны:

$$P=\frac{-2I}{r^2}y;\ Q=\frac{2I}{r^2}x;\ R=0,$$

$$div\vec{H}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=-2I\frac{\partial}{\partial x}(\frac{y}{r^2})+2I\frac{\partial}{\partial y}(\frac{x}{r^2}),$$

$$div\vec{H}=-2I\frac{-2r\frac{\partial r}{\partial x}y}{r^4}+2I\frac{-2r\frac{\partial r}{\partial y}x}{r^4}=\left|\begin{array}{l} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{x}{r} \\ \dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{r}\end{array}\right|=$$

$$=4I\frac{r\frac{x}{r}y}{r^4}-4I\frac{r\frac{y}{r}x}{r^4}=0.$$

Максвелл автоматически перенес результаты, полученные в примерах 2 и 3, на случай электромагнитного поля.

**4)** ***Циркуляция векторного поля***

Пусть задано векторное поле $\vec{F}=\{P,Q,R\}$. Выберем в этом поле замкнутую кривую L и выберем на ней определенное направление.

***<u>Определение.</u>*** *Циркуляцией векторного поля $\vec{F}=\{P,Q,R\}$ вдоль замкнутого контура L называется криволинейный интеграл второго рода*: $Ц=\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz$.

Циркуляция имеет простой физический смысл: в силовом поле циркуляция равна работе сил поля при перемещении материальной точки вдоль замкнутого контура $L$.

***Пример 6.*** Найти циркуляцию поля линейных скоростей точек вращающегося вокруг оси $Oz$ тела вдоль окружности $x = a\cos t, y = a\sin t, z = c$.

***Решение.*** Интересующее нас поле имеет вид $\vec{V} = -y\omega\vec{i} + x\omega\vec{j} + 0\vec{k}$.

Циркуляция

$$Ц = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \oint_L -\omega ydx + \omega xdy + 0dz = \omega\int_0^{2\pi} -a\sin t(-a\sin t)dt + a\cos ta\cos tdt =$$

$$= \omega a^2\int_0^{2\pi} dt = 2\pi\omega a^2 = 2\omega S, где\, S = \pi a^2.$$

**5)** ***Ротор (вихрь) векторного поля***

***<u>Определение.</u>*** *Ротором (вихрем) векторного поля* $\vec{F} = \{P, Q, R\}$ *называется вектор, обозначаемый символом* $\mathrm{rot}\vec{F}$ *и определяемый формулой:*

$$rot\vec{F} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\vec{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\vec{k}.$$

Эту формулу можно записать в виде условного определителя:

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Чтобы понять физический смысл ротора, рассмотрим пример.

***Пример 7.*** Найти ротор поля линейных скоростей точек вращающегося вокруг оси Oz тела.

***Решение.*** Интересующее нас поле имеет вид $\vec{V} = -y\omega\vec{i} + x\omega\vec{j} + 0\vec{k}$.

$$rot\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(\frac{\partial}{\partial y}0 - \frac{\partial}{\partial z}(\omega x)) - \vec{j}(\frac{\partial}{\partial x}0 - \frac{\partial}{\partial z}(-\omega y)) + \vec{k}(\frac{\partial}{\partial x}(\omega x) - \frac{\partial}{\partial y}(-\omega y)) =$$

$$= \vec{i}\cdot 0 + \vec{j}\cdot 0 + \vec{k}\cdot 2\omega = 2\omega\vec{k}.$$

Таким образом, ротор поля направлен по оси вращения. Его модуль равен удвоенной угловой скорости вращения.

***Пример 8.*** Найти вихрь вектора напряженности H магнитного поля, создаваемого постоянным током I, текущим по бесконечному прямолинейному проводу.

*Решение:*

$$\vec{H} = \frac{2I}{r^2}(-y \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}),$$

где $r^2 = x^2 + y^2$.

$$rot\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{-2iy}{x^2+y^2} & \dfrac{2Ix}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix},$$

$$rot\vec{H} = \vec{i}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{2Ix}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{-2Iy}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{-2Iy}{x^2+y^2} & \dfrac{2Ix}{x^2+y^2} \end{vmatrix},$$

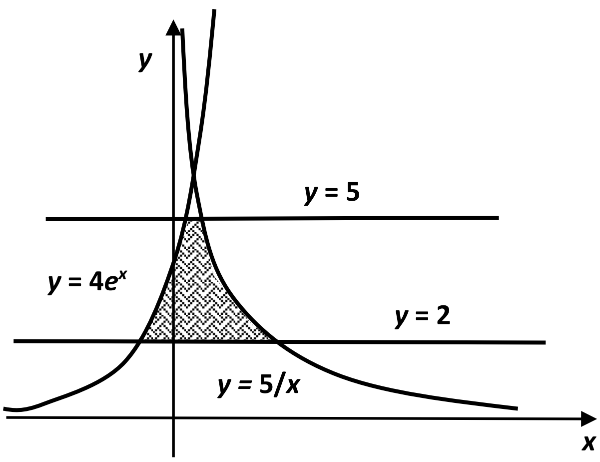
$$rot\vec{H} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 2I\left(\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) \cdot \vec{k} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}.$$

Таким образом, $rot\vec{H} = 0$ везде, кроме оси $oZ$.

**Решение типовых задач:**

С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры $D$, ограниченной линиями $y = \frac{1}{5}x, \quad y = 2, \quad y = 5 = 0 \quad y = 4e^x$ .

*Решение:*



Эту площадь удобно вычислять, считая $y$ внешней переменной. Тогда границы области задаются уравнениями: $y=\frac{1}{5}x, \quad x=\ln\frac{y}{4}$ и

$$S=\int_2^5 dy\int_{\ln\frac{y}{4}}^{\frac{5}{y}}dx=\int_2^5\left(x\ \Bigg|_{\ln\frac{y}{4}}^{\frac{5}{y}}\right)dy=\int_2^5\left(\frac{5}{y}-\ln\frac{y}{4}\right)dy=5\ln y\ \Bigg|_2^5-\int_2^5\ln\frac{y}{4}dy\ ,$$

где $\int_2^5\ln\frac{y}{4}dy$ вычисляется с помощью интегрирования по частям:

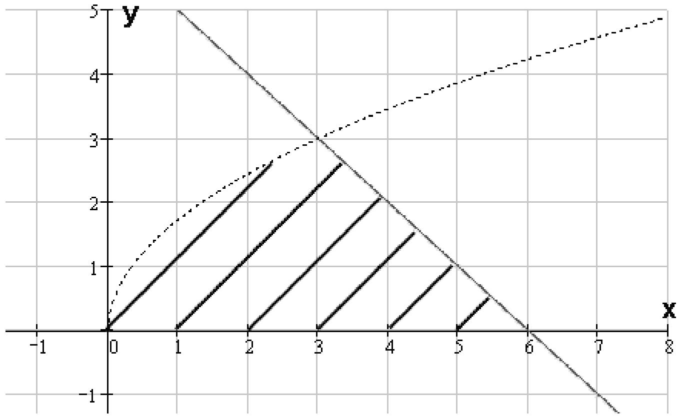
$$\int_2^5\ln\frac{y}{4}dy=\left|\begin{matrix} u=\ln\frac{y}{4} & dv=dy \\ du=\frac{1}{y}dy & v=y\end{matrix}\right|=y\ln\frac{y}{4}\ \Bigg|_2^5-\int_2^5 dy=5\ln\frac{5}{4}-2\ln\frac{1}{2}-3=5\ln 5-8\ln 2-3$$

Следовательно: $S=5\ln 5-5\ln 2-5\ln 5+8\ln 2+3=5\ln 2+3.$

С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x+y=6, y=\sqrt{3x}, z=4y, z=0.$ Сделать чертеж проекции данного тела на плоскость $Oxy$.

*Решение:*

Найдем проекцию тела на плоскость $Oxy$.




$$V=\int_0^3 dy\int_{\frac{1}{3}y^2}^{6-y}dx\int_0^{4y}dz=\int_0^3 dy\int_{\frac{1}{3}y^2}^{6-y}4ydx=\int_0^3\left(24y-4y^2-\frac{4}{3}y^3\right)dy=\left(12y^2-\frac{4}{3}y^3-\frac{1}{3}y^4\right)\Bigg|_9^3=45.$$

Вычислить криволинейный интеграл второго рода:

$\int_L(x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$ вдоль дуги $L$ дуга параболы $y=x^2$ от точки $A(1;-1)$ до точки $B(1;1)$. Сделать чертеж.

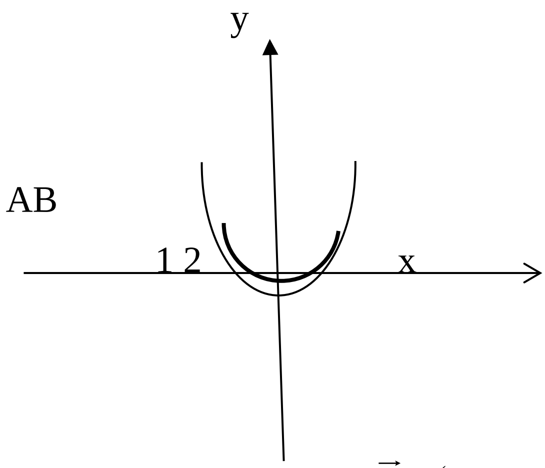
*Решение:*

Воспользуемся формулой:

$$\int_L P(x;y)dx+Q(x;y)dy=\int_a^b\left[P(x;y(x))+Q(x;y(x))\cdot y'(x)\right]\,dx$$

$$\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy=\int_{-1}^{1}\left(x^2-2xx^2+2x\left(x^4-2xx^2\right)\right)\,dx=$$

$$\int_{-1}^{1}\left(x^2-2x^3+2x^5-4x^4\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{4x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=-\frac{4}{15}$$




Даны векторное поле $\vec{F}=(3x+4y+2z)\vec{j}$ и плоскость $(\alpha)$: $x+y+2z-4=0$, которая совместно с координатными плоскостями образует пирамиду $V$. Пусть $\sigma$ – основание пирамиды, принадлежащее плоскости $\alpha$; $\lambda$ – контур, ограничивающий $\sigma$; *n* – нормаль к $\sigma$, направленная вне пирамиды $V$. Вычислить:

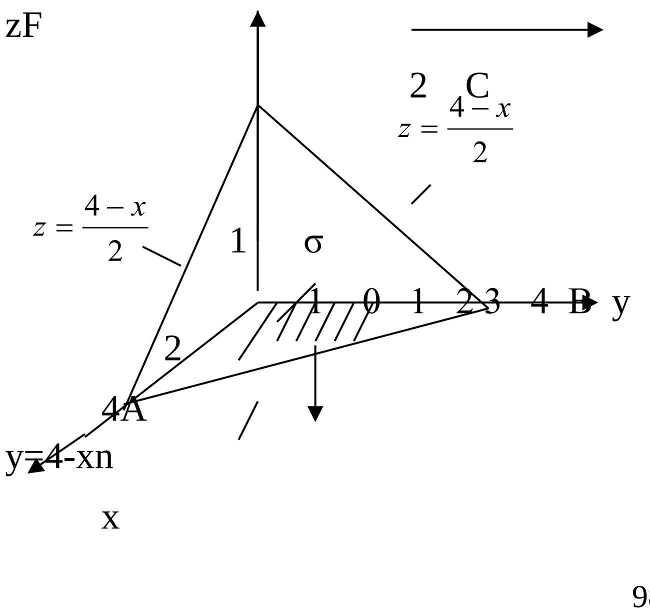
1) поток векторного поля $\vec{F}$ через поверхности $\sigma$ в направлении нормали *n*;

2) циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ по замкнутому контуру $\lambda$ непосредственно и применив формулу Стокса к контуру $\lambda$ и ограниченной им поверхности $\sigma$ с нормалью *n*;

3) поток векторного поля $\vec{F}$ через полную поверхность пирамиды $V$ в направлении внешней нормали к ее поверхности непосредственно и по формуле Остроградского. Сделать чертеж.

*Решение:*

$\vec{F}=(3x+4y+2z)\vec{j}$; $(\alpha)$: $x+y+2z-4=0$,



Векторная функция $\vec{F}$ направлена вдоль оси *Oy*.

1) Поток векторного поля $\vec{F}$ через поверхности $\sigma$ вычисляется по формуле:

$$\hat{O} = \iint_{\sigma} \left(Ðdydz + Qdzdx + Rdxdy\right).$$

Подставляем:

$$\hat{O} = \iint_{\sigma} F_y dxdz = -\int_0^4 dx \int_0^{4-x} (3x + 4y + 2z)dz$$

Так как вектор нормали $\vec{n} \perp \vec{F}$, то поток равен нулю: $\hat{O} = 0$;

2) Циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ по замкнутому контуру $\lambda$

Непосредственное вычисление.

$$C = \oint_{\lambda} (Pdx + Qdy + Rdz) = \oint_{\lambda} (3x + 4y + 2z)dy$$

Контур $\lambda$ состоит из трех отрезков: *OA, AB* и *BO*:

$$C = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO}$$

1. Отрезок *OA*

*z=0*; *y=0*;

$$\int_{OA} 3xdy = 0 .$$

2. Отрезок *AB*

*z=0.*

$$\int_{AB} = \int_0^4 (3x + 4y)dy = \int_0^4 (3(4 - y) + 4y)dy = \frac{1}{2}\int_0^4 (12 + y)dy = \left[\frac{y}{2}\left(12 + \frac{1}{2}y^2\right)\right]\Bigg|_0^4 = 48 + 8 = 56$$

3. Отрезок *BO*

$$\int_{BO} = \int_0^4 4ydy = -32 .$$

$$C = 0 + 56 - 32 = 24.$$

4. Циркуляция С. Теорема Стокса

$$C = \oint_{\lambda} (Pdx + Qdy + Rdz) = \iint_S \left(\vec{n}, rot\,\vec{F}\right)dS$$

Вычисляем $rot\,\vec{F}$ :

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 3x + 4y + 2z & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$C = \iint_S (rot\,\vec{F})_x\, dydz + \left(rot\,\vec{F}\right)_y dxdz + \left(rot\,\vec{F}\right)_z dxdy$$

Поток векторного поля $\vec{F}$ через поверхность $\sigma$ :

$C = 3\iint_{Dxy} dxdy$, где *Dxy* – область интегрирования, проекции поверхности S на плоскость $Oxy$.

$$C = 3\int_0^4 dx \int_0^{4-x} dy = 3\left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^4 = 3(16-8) = 24 .$$

3) Поток векторного поля $\vec{F}$ через полную поверхность пирамиды $V$. Теорема Остроградского – Гаусса

1. $\hat{O} = \iiint\limits_V div\vec{F}dV$

$$div\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 4$$

$$\hat{O} = 4\int_0^4 dx \int_0^{4-x} dy \int_0^{\frac{4-x-y}{2}} dz = \frac{1}{2}4\int_0^4 dx \int_0^{4-x}(4-x-y)dy = 2\int_0^4 dx\left[(4-x)^2 - \frac{1}{2}(4-x)^2\right] = \int_0^4 (4-x)^2 dx =$$

$$\frac{(4-x)^3}{3}\Bigg|_0^4 = \frac{64}{3}$$

2. Нахождение потока непосредственным вычислением

$$\hat{O} = \iint\limits_{\text{ÎÀÂ}} + \iint\limits_{\text{ÎÀÑ}} + \iint\limits_{\text{ÎÂÑ}} + \iint\limits_{\text{ÀÂÑ}}$$

Поток вектора $\vec{F}$ через грани $OBC$ и $OAB$ равен нулю, поскольку вектора нормали $\vec{n} \perp \vec{F}$

$$\hat{O}_1 = \iint\limits_{\text{ÎÀÑ}} = \iint\limits_{\text{ÎÀÑ}} Qdxdz = \int_0^4 dx \int_0^{\frac{4-x}{2}}(3x+2z)dz = \int_0^4 dx\left(3xz + z^2\right)\Bigg|_0^{\frac{4-x}{2}} = \frac{1}{2}\int_0^4\left(3x(4-x) + \frac{(4-x)^2}{2}\right)dx =$$

$$\frac{1}{4}\left(16x + 8x^2 - \frac{5}{3}x^3\right)\Bigg|_0^4 = \frac{64}{3}$$

## 2.12 Раздел 12. Ряды

**Вопросы для изучения**

1. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости ряда.
2. Теоремы сравнения.
3. Признаки Даламбера и Коши.
4. Интегральный признак сходимости ряда.
5. Теорема Лейбница. Оценка остатка знакочередующегося ряда.
6. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов.
7. Понятие равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса.
8. Теорема о непрерывности суммы функционального ряда.
9. Теоремы о почленном интегрировании и почленном дифференцировании функционального ряда.

10. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.

11. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. Непрерывность суммы ряда.

12. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

13. Разложение функции в степенной ряд. Ряд Тейлора.

14. Разложение по степеням $x$ бинома $(1+x)^m$.

15. Условия разложимости функции в ряд Тейлора.

16. Разложение по степеням $x$ функций $e, \cos x, \sin x, \ln(1+x)$.

**Методические указания**

Ряды являются обобщением обычных сумм и многочленов на бесконечное число слагаемых. Для изучения рядов используется частный случай функций: функций натурального аргумента – последовательностей – и их пределов при n→∞, понятие о которых дается в курсе дифференциального исчисления. Введение рядов позволяет изучать функции, не являющиеся элементарными, находить интегралы, которые невозможно вычислить методами, описанными в курсе интегрального исчисления. В дальнейшем ряды находят применение в курсе теории вероятностей.

**Рекомендуемые источники по теме:** */1, глава 10 §10.1-10.4/ и /2, глава 9 §1-4/.*

**Основные теоретические сведения**

**Основные понятия. Необходимый признак сходимости**

Выражение вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$ называется ***числовым рядом***, где $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ – числа.

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ называются *членами ряда*; выражение $a_n$ называется *общим членом ряда*.

Сумма $n$ первых членов ряда:

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

называется *n-й частичной суммой ряда*.

Ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n .$$

Число $S$ называется *суммой ряда*. Если конечного предела последовательности частичных сумм не существует, то ряд называется *расходящимся*.

**Необходимое условие сходимости ряда (но недостаточное)**

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то предел его общего члена стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Выполнение условия $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ не означает сходимости ряда: ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

В качестве примера рассмотрим ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$, называемый *гармоническим*.

Необходимый признак сходимости выполнен:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Однако доказано (и мы дальше докажем), что этот ряд расходится.

**Достаточное условие расходимости ряда**

Если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – *расходится*

**Признаки сходимости знакоположительных рядов**

Если все члены ряда $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ – положительные числа, то числовой ряд называется *знакоположительным*.

1-й признак сравнения

Пусть для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ выполняется условие $a_n \le b_n$ при любом $n$. Тогда

1) если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

2) если расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

2-ой признак сравнения

Пусть для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ выполняется условие

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0$,

то ряды сходятся или расходятся одновременно.

Ряд, с которым сравнивается исследуемый ряд, называют *эталонным.* Наиболее часто в качестве эталонного ряда используют гармонический ряд, либо ряд Дирехле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (который сходится при $p \le 1$ и расходится при *p>1),* либо геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ (сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \ge 1$).

**Признак Даламбера**

Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$.

Тогда при $l$<1 ряд сходится, при $l$>1ряд расходится, при $l = 1$ ряд может сходиться или расходиться и в этом случае требуется дополнительное исследование.

*Замечание*. Если $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, то ряд расходится.

**Радикальный признак Коши**

Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

Тогда при $l$<1ряд сходится, при $l$>1 ряд расходится, при $l = 1$ требуется дополнительное исследование.

**Интегральный признак Коши**

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Пусть функция $f(x)$не возрастающая при$x \geq 1$и $f(n) = a_n$. Тогда если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$расходится.

**Знакочередующиеся ряды**

Рассмотрим ряд с членами произвольного знака $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ряд с членами произвольного знака *называется абсолютно сходящимся*, если сходится как он сам, так и ряд, составленный из абсолютных величин его членов $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Ряд называется условно сходящимся, если сам он сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Если ряд сходится абсолютно, то он сходится и условно.

*Знакочередующимся* называется ряд вида

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots$, где $a_n > 0$.

**Признак Лейбница**

Если выполняются условия:

1) $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$,

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

то знакочередующийся ряд сходится, и его сумма не превосходит первого члена ряда: $S < u_1$.

**Степенные ряды**

*Степенным рядом* называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-x_0)^n = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \ldots + c_n(x-x_0)^n + \ldots,$$

числа $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ называются коэффициентами степенного ряда.

Множество всех значений *x*, при которых соответствующий числовой ряд сходится, называется *областью сходимости* ряда. Степенной ряд всегда сходится в точке $x = x_0$.

Число *R* – такое, что при $|x| < R$ степенной ряд сходится, а при $|x| > R$ – расходится, называется *радиусом сходимости* степенного ряда. Интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда. Радиус сходимости степенного ряда может быть найден по формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|.$$

Заметим, что вопрос о сходимости степенного ряда на границах интервала сходимости исследуется для каждого ряда отдельно.

**Решение типовых задач**

Задача 1. Исследовать на сходимость следующие ряды:

$$à)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{-n}$$

Вычислим:

$\lim\limits_{n\to\infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^{-1} =$ (используя второй замечательный предел) $= \frac{1}{e} \neq 0$.

Ряд расходится.

$$á)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

Имеем по признаку Даламбера: $u_n = \frac{3^n n!}{n^n}, \quad u_{n+1} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$.

Вычислим:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot 3^n n!} = \frac{3n^n}{(n+1)^n} = \frac{3}{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{3}{e}>1.$$

Ряд расходится.

â) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$

Для данного ряда, по радикальному признаку Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0<1.$$

Следовательно, ряд сходится.

ã) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{1+n^2}$

Для применения интегрального признака рассмотрим несобственный интеграл:

$$\int_1^{\infty}\frac{2}{1+x^2}dx=2\lim_{b\to\infty}\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\lim_{b\to\infty}arctgx\Big|_1^{\infty}=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Несобственный интеграл сходится, а значит сходится ряд.

Задача 2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)^3}.$$

Проверим условия теоремы Лейбница для знакочередующегося ряда:

1) его члены монотонно убывают $\left(1>\frac{1}{2^3}>\frac{1}{4^3}>\ldots\right)$,

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n)^3}=0$.

Следовательно, этот ряд сходится.

Этот ряд сходится абсолютно, так как сходится ряд из абсолютных величин членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^3}$.

Этот ряд сходится по признаку сравнения (сравнить его с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, который сходится).

Задача 3. Найти радиус сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 10^n}$$

*Решение:*

Радиус сходимости вычислим по формуле:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Имеем:

$$a_n=\frac{1}{n\cdot 10^n},\quad a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)\cdot 10^{n+1}}.$$

Поэтому

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 10^{n+1}}{n\cdot 10^n}=10\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=10.$$

Значит, данный ряд сходится при значениях, удовлетворяющих неравенству: $|x|<10$ или $-10<x<10$.

Исследуем поведение ряда на концах промежутка. Подставляя в данный ряд $x=10$, получим гармонический расходящийся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

При $x=-10$ получим числовой, знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, который сходится условно.

Таким образом, данный степенной ряд сходится при всех значениях $x$, удовлетворяющих неравенствам $-10\le x<10$.

Задача 4. Разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию $f(x)=1+|x|$, если $x\in(-1;1)$.

Данная функция является четной на интервале $(-1;1)$. Поэтому $b_n=0$.

$$a_0=\int_{-1}^{1}f(x)dx=2\int_0^1(1+x)dx=2\left(x+\tfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=2\left(1+\frac{1}{2}\right)=3;$$

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x dx=2\int_0^1(1+x)\cos n\pi x dx=\begin{vmatrix}u=x & dv=\cos n\pi x dx\\ du=dx & v=\dfrac{1}{n\pi}\sin n\pi x\end{vmatrix}=$$

$$2\int_0^1\cos n\pi x dx+2\left(\left(\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x\right)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x dx\right)=$$

$$\frac{2}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1+2\left(\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x+\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_0^1\right)=$$

$$\frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right).$$

Разложение в ряд Фурье имеет вид: $f(x)=\dfrac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)\cos n\pi x.$

Вычислить $\int\limits_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x} \cdot e^x dx$ с точностью до 0,001.

Имеем $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

Умножив все члены ряда на $\sqrt{x}$, получим функциональный ряд:

$$\sqrt{x}e^x = \sqrt{x} + x\sqrt{x} + \frac{x^2\sqrt{x}}{2!} + \ldots + \frac{x^n\sqrt{x}}{n!} + \ldots$$

Почленно проинтегрируем:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x}e^x dx = \int\limits_0^{\frac{1}{9}} \left( \sqrt{x} + x\sqrt{x} + \frac{x^2\sqrt{x}}{2!} + \ldots + \frac{x^n\sqrt{x}}{n!} + \ldots \right) dx =$$

$$= \left[ \frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + \frac{2x^3\sqrt{x}}{2!7} + \ldots + \frac{2x^{n-1}\sqrt{x}}{n!(2n+3)} + \ldots \right]\Bigg|_0^{\frac{1}{9}} =$$

$$= \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} + \frac{2}{2!7 \cdot 3^7} + \ldots + \frac{2}{n!(2n+3) \cdot 3^{2n+3}} + \ldots$$

Выясним, сколько членов числового ряда необходимо взять для вычисления интеграла с точностью до 0,001.

Оценим остаточный член:

$$R_n = \frac{2}{n!(2n+3) \cdot 3^{2n+3}} + \frac{2}{(n+1)!(2n+5) \cdot 3^{2n+5}} + \ldots <$$

$$< \frac{2}{n!(2n+3) \cdot 3^{2n+3}} \left[ 1 + \frac{1}{n \cdot 3^2} + \frac{1}{n^2 \cdot 3^4} + \ldots \right] = \frac{2}{n!(2n+3) \cdot 3^{2n+3}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n \cdot 3^2}} =$$

$$= \frac{2}{(n-1)!(2n+3) \cdot 3^{2n+1} \cdot (3^2 n - 1)}$$

Очевидно, что для вычисления интеграла с точностью до 0,001 достаточно взять два члена полученного числового ряда.

$$R_2 < \frac{2}{7 \cdot 3^5 \cdot 17} < 6 \cdot 10^{-5}.$$

Производя вычисления с точностью до 0,001, будем иметь:

0,0242+0,0016=0,0258.

Таким образом,

$$\int\limits_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x} \cdot e^x dx \approx 0,026.$$

## 2.13 Раздел 13. Теория вероятностей

**Вопросы для изучения**

1. Случайные события. Классическое, статистическое, геометрическое определения вероятности. Основные формулы комбинаторики.
2. Теорема сложения вероятностей.
3. Понятие условной вероятности события. Теорема умножения вероятностей.
4. Следствия из теорем сложения и умножения. Формула полной вероятности. Формулы Бейеса.
5. Повторение испытаний. Формула Бернулли.
6. Предельные случаи формулы Бернулли.
7. Дискретные случайные величины. Закон распределения. Функция распределения. Числовые характеристики и их свойства.
8. Основные дискретные распределения.
9. Непрерывные случайные величины. Дифференциальная функция распределения (плотность вероятности) и ее свойства. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.
10. Равномерный закон распределения.
11. Показательный закон распределения. Функция надежности.
12. Нормальный закон распределения, его свойства.
13. Функции нормальных случайных величин. Распределения, используемые в математической статистике.
14. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема.

**Методические указания**

Теория вероятностей – раздел высшей математики, изучающий в абстрактной форме закономерности, присущие массовым однородным случайным явлениям. Эти закономерности своеобразны и похожи на обычные законы физических явлений.

Теория вероятностей вначале развивалась как прикладная дисциплина. В связи с этим ее понятия и выводы имели окраску тех областей знаний, в которых они были получены. Лишь постепенно выкристаллизовалось то общее, что присуще вероятностным схемам, независимо от области их приложения – массовые случайные события, действия над ними и их вероятности, случайные величины и их числовые характеристики. Большой вклад в развитие теории вероятностей внесли русские ученые. Впервые законченную систему аксиом сформулировал в 1936 г. советский математик академик А.Н. Колмогоров в своей книге «Основные понятия теории вероятностей». Практические приложения способствовали зарождению теории вероятностей, они же питают ее развитие как науки, приводя к появлению все новых ее ветвей и разделов.

Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники: в теории надежности, теории массового обслуживания, в теоретической физике, геодезии, астрономии, теории стрельбы, теории ошибок наблюдений, теории автоматического управления, общей теории связи и во многих других теоретических и прикладных науках. Все это предопределяет необходимость овладения методами теории вероятностей и математической статистики как инструментом статистического анализа и прогнозирования экономических и технологических явлений и процессов.

**Рекомендуемые источники:** /*5, главы 1,2,4,5*/.

**Основные теоретические сведения**

При *классическом определении* за вероятность события *A* принимают отношение числа благоприятных этому событию исходов *m* к числу всех возможных исходов опыта *n*:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

При нахождении числа благоприятных или всех возможных исходов опыта используются формулы *комбинаторики*.

Пусть дано множество из *n* элементов.

*Перестановками* называются комбинации, составленные из всех *n* элементов данного множества, которые отличаются только порядком следования в них элементов. Общее число перестановок из *n* элементов определяется по формуле:

$$P_n = n!.$$

*Размещениями* из *n* элементов по *m* называются комбинации, которые отличаются составом элементов и порядком их следования. Их общее число находится по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

*Сочетаниями* из *n* элементов по *m* называются комбинации, которые отличаются только составом элементов. Общее число сочетаний определяется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

**Теоремы сложения и умножения вероятностей**

*Суммой* событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из рассматриваемых событий.

События называются *несовместными*, если они не могут появиться одновременно в одном опыте. В противном случае события называются *совместными*.

*Произведением* событий называется событие, состоящее в появлении всех рассматриваемых событий.

События называются *независимыми*, если появление одного события не влияет на вероятность появления другого. В противном случае события называются *зависимыми*.

Вероятность события $B$, вычисленная при условии, что произошло событие $A$, называется условной вероятностью и обозначается $P_A(B)$.

*Теорема сложения вероятностей несовместных событий*

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

*Теорема сложения вероятностей двух совместных событий*

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2).$$

*Теорема умножения вероятностей двух событий*

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Если события независимы, то

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

*Замечание.* Теорему умножения вероятностей можно обобщить на любое конечное число событий.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1, A_2}(A_3) \ldots P_{A_1, A_2, \ldots A_{n-1}}(A_n)$$

или для несовместных событий

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) P(A_2) \ldots P(A_n).$$

**Формула полной вероятности. Формула Байеса**

Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ – единственно возможные попарно несовместные события (гипотезы). Событие $B$ может произойти только с одним из $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Для нахождения вероятности события $B$ используется *формула полной вероятности*:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(B).$$

Для определения вероятности $H_i$ при условии, что событие $B$ наступило, используется *формула Байеса*:

$$P_B(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(B)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(B)}.$$

**Формула Бернули**

Пусть производится $n$ независимых испытаний, в каждом из которых событие *A* наступает с вероятностью $p$. Вероятность того, что событие *A* наступит ровно $m$ раз в $n$ испытаниях, определяется по *формуле Бернулли*:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad q = 1 - p,$$

вероятность того, что событие наступит

а) менее $m$ раз: $P = P_n(0) + P_n(1) + \ldots P_n(m-1)$,

б) более $m$ раз: $P = P_n(m+1) + P_n(m+2) + \ldots P_n(n)$,

в) не менее $m$ раз: $P = P_n(m) + P_n(m+1) + \ldots P_n(n)$,

г) не более $m$ раз: $P = P_n(0) + P_n(1) + \ldots P_n(m)$.

**Дискретные случайные величины**

*Случайной величиной* называется величина, которая в результате опыта может принять одно из множества своих возможных значений (заранее не известно какое). Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

*Дискретной случайной величиной* называется величина, множество всех возможных значений которой есть конечное или счетное множество фиксированных величин.

*Законом (рядом) распределения вероятностей* дискретной случайной величины называют последовательность возможных значений случайной величины и соответствующих им вероятностей:

| X | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| p | $p_1$ | $p_2$ | … | $p_n$ |

причем

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

*Функцией распределения* случайной величины называется функция $F(x)$, которая равна вероятности случайного события, состоящего в том, что дискретная случайная величина X примет значение, меньшее некоторого значения $x$, т.е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Для дискретной случайной величины функцию распределения можно задать в виде

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ p_1, & x_1 < x \le x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 1, & x > x_n \end{cases}$$

Основными числовыми характеристиками случайных величин являются математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение.

*Математическим ожиданием* дискретной случайной величины называется величина

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \ .$$

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины.

*Дисперсией* случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$D(X)=M(X-M(X))^2$.

Дисперсию целесообразно вычислять по формуле:

$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$.

*Средним квадратическим отклонением* называют величину

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение характеризуют рассеяние значений случайной величины около ее среднего значения.

**Непрерывные случайные величины**

*Непрерывной* называется случайная величина, множество всех возможных значений которой есть непрерывный конечный или бесконечный интервал.

*Функция распределения* вероятностей определяется формулой:

$F(x)=P(X<x)$.

Функция распределения непрерывной случайной величины является непрерывной функцией.

*Плотностью распределения или плотностью вероятностей* называется производная от функции распределения:

$f(x)=F'(x)$.

Плотность распределения должна удовлетворять следующим свойствам:

1) $f(x)\ge 0$ 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$

Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал определяется формулой:

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx.$$

*Математическое ожидание* непрерывной случайной величины определяется формулой:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx.$$

*Дисперсия* вычисляется по формулам:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-M(X)\right)^2 f(x)dx \quad \text{или} \quad D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\left(M(X)\right)^2.$$

**Нормальное распределение**

*Нормальным распределением* называют распределение непрерывной случайной величины, плотность распределения которой имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где $a$ – математическое ожидание, $\sigma$ –среднее квадратическое отклонение нормальной случайной величины.

Вероятность попадания нормальной случайной величины в интервал $(\alpha, \beta)$ находится по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где Ф(x) – интегральная функция Лапласа.

Вероятность отклонения от среднего на величину, меньшую δ, выражается равенством:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

**Решение типовых задач**

***Непосредственное вычисление вероятностей***

**Задача 1.** Из 30 студентов 10 имеют спортивные разряды. Какова вероятность того, что выбранные наудачу 3 студента – разрядники?

*Решение:*

Пусть событие $A$ – 3 выбранных наудачу студента являются разрядниками. Общее число случаев выбора трех студентов из тридцати равно $n = C_{30}^3$, так как комбинации представляют собой сочетания, ибо отличаются только составом студентов. Точно также число студентов, благоприятствующих событию $A$, равно $m = C_{10}^3$. Итак,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^3}{C_{30}^3} = \frac{61}{203} \approx 0{,}030.$$

**Задача 2**. В лифт на первом этаже девятиэтажного дома вошли 4 человека, каждый из которых может выйти независимо друг от друга на любом этаже. Какова вероятность того, что все пассажиры выйдут: а) на 6-м этаже; б) на одном этаже?

*Решение:*

а) Пусть событие $A$ – все пассажиры выйдут на 6-м этаже. Каждый пассажир может выйти со 2-го по 9-й этаж 8 способами. По правилу произведения общее число способов выхода четырех пассажиров из лифта равно $n = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$. Число случаев, благоприятствующих событию $A$, равно $m = 1$. Следовательно,

$$P(A)=\frac{1}{8^4}=0{,}00024.$$

б) Пусть событие $B$ – все пассажиры выйдут на одном этаже. Теперь событию $B$ будут благоприятствовать $m = 8$ случаев (все выйдут на 2 этаже, 3-м,…, 9-м этаже). Поэтому $P(B)=8/8^4=0{,}00195$.

**Задача 3.** По условиям лотереи «Спортлото 6 из 45» участник лотереи, угадавший 4, 5, 6 видов спорта из отобранных при случайном розыгрыше 6 видов спорта из 45, получает денежный приз. Найти вероятность того, что будут угаданы: а) все 6 цифр; б) 4 цифры.

*Решение:*

а) Пусть событие А – угадывание всех 6 видов спорта из 45. Общее число всех вариантов заполнения карточек спортлото есть $n=C_{45}^6$. Число случаев, благоприятствующих событию А, есть $m=1$. Поэтому

$$P(A)=\frac{1}{C_{45}^6}\approx 0{,}0000001\,.$$

б) Пусть событие В – угадывание 4 видов спорта из 6 выигравших из 45. Найдем число способов, какими можно выбрать 4 вида спорта из 6 выигравших, т.е. $C_6^4$. Но это еще не все: к каждой комбинации 4-х выигравших номеров следует присоединить комбинацию 2-х невыигравших номеров из 45 – 6 = 39; таких комбинаций $C_{39}^2$. По правилу произведения общее число случаев, благоприятствующих событию В, равно $m=C_6^4\cdot C_{39}^2$. Итак,

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{C_6^4\cdot C_{39}^2}{C_{45}^6}=0{,}00136\,.$$

***Формула полной вероятности. Формула Байеса***

**Задача 4.** Частица пролетает мимо трех счетчиков, причем она может попасть в каждый из них с вероятностью 0,3, 0,2, 0,4. Если частица попадает в первый счетчик, то она регистрируется с вероятностью 0,6, во второй – с вероятностью 0,5 и в третий – с вероятностью 0,55. Найти вероятность того, что частица будет зарегистрирована (событие А).

**Решение.** Выдвигаем гипотезы:

$H_1$ – частица попадает в первый счетчик $P(H_1) = 0{,}3$,

$H_2$ – частица попадает во второй счетчик $P(H_2) = 0{,}2$,

$H_3$ – частица попадает в третий счетчик $P(H_3) = 0{,}4$.

Эти события не пересекаются, но не составляют полной группы. Чтобы получить полную группу, добавим событие $H_4$ – частица не попадает ни в один счетчик:

$$P(H_4) = 1 - 0{,}3 - 0{,}2 - 0{,}4 = 0{,}1.$$

Условные вероятности равны:

$$P(A/H_1) = 0{,}6;\ P(A/H_2)=0{,}5;\ P(A/H_3)=0{,}55;\ P(A/H_4)=0.$$

По формуле полной вероятности имеем:

$$P(A) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}5 + 0{,}4 \cdot 0{,}55 + 0{,}1 \cdot 0 = 0{,}5.$$

**Задача 5.** Три завода выпускают одинаковые изделия, причем первый завод производит 50 %, второй – 20 %, третий – 30 % всей продукции. Первый завод выпускает 1 % брака, второй – 8 %, третий – 3 %. Наудачу выбранное изделие оказалось бракованным (событие А). Найти вероятность того, что оно изготовлено на втором заводе.

**Решение**

Гипотезы:

$H_1$ – изделие изготовлено на первом заводе, $P(H_1) = 0{,}5$;

$H_2$ – изделие изготовлено на втором заводе, $P(H_2) = 0{,}2$;

$H_3$ – изделие изготовлено на третьем заводе, $P(H_3) = 0{,}3$.

По условию задачи: $P(A/H_1) = 0{,}01$, $P(A/H_2) = 0{,}08$, $P(A/H_3) = 0{,}03$.

Окончательно имеем:

$$P(H_2/A) = 0{,}2 \cdot 0{,}08/(0{,}5 \cdot 0{,}01+0{,}2 \cdot 0{,}08+0{,}3 \cdot 0{,}03) = 8/15.$$

***Схема Бернулли: формула Бернулли, приближенные формулы Муавра – Лапласа и Пуассона***

**Задача 6.** Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка равна 0,8 и не зависит от номера выстрела. Требуется найти вероятность того, что при 5 выстрелах произойдет ровно 2 попадания в мишень.

*Решение:*

В этом примере $n=5$, $p=0{,}8$ *и* $m=2$; по формуле Бернулли находим:

$$P_5(2) = C_5^2 0{,}8^2 0{,}2^3 = 0{,}0512.$$

**Задача 7.** Вероятность наступления события А в каждом из 900 независимых испытаний равна $p=0{,}8$. Найдите вероятность того, что событие А произойдет: а) 750 раз; б) от 710 до 740 раз.

*Решение:*

а) Воспользуемся локальной формулой Муавра – Лапласа.

$x = \dfrac{750 - 900 \cdot 0{,}8}{\sqrt{900 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 2{,}5$. По приложению 1 пособия 2 находим: $\varphi(2{,}5) = 0{,}0175$.

Тогда

$$P_{900}(750) \approx \frac{0{,}0175}{\sqrt{900 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 0{,}00146.$$

б) $x_1 = \dfrac{710 - 900 \cdot 0{,}8}{\sqrt{900 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -0{,}83;$ $\qquad x_2 = \dfrac{740 - 900 \cdot 0{,}8}{\sqrt{900 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 1{,}67$

По приложению 2 пособия 2 находим:

$$\Phi(-0{,}83) = -\Phi(0{,}83) = -0{,}2967; \quad \Phi(1{,}67) = 0{,}4527.$$

Окончательно имеем:

$$P_{900}(710 \le m \le 740) = 0{,}4527 + 0{,}2967 = 0{,}7492.$$

**Задача 8.** В тираже «Спортлото 6 из 49» участвуют 10 000 000 карточек. Найти вероятность события A – хотя бы в одной из них зачеркнуты все 6 выигрышных номеров.

*Решение.* Перейдем к противоположному событию – ни на одну карточку не выпал максимальный выигрыш $\overline{A}$. В каждой карточке номера зачеркиваются случайным образом и не зависят от других карточек, поэтому применима схема Бернулли с параметрами $n = 10000000$, $p = \dfrac{C_6^6 C_{43}^0}{C_{49}^6} = 7 \cdot 10^{-8}$. Поскольку λ = np = 0,7, то для определения воспользуемся формулой Пуассона.

Тогда $P(\overline{A}) = P_{10000000}(0) \approx P(0;0{,}7) = 0{,}49659; P(A) = 0{,}50341$. Таким образом, вероятность, что из 10 000 000 карточек хотя бы одна окажется с максимальным выигрышем, чуть больше ½.

***Случайные величины. Основные законы распределения. Числовые характеристики случайных величин***

**Задача 9.** На зачете студент получил 4 задачи. Вероятность решить правильно каждую задачу равна 0,8. Определить ряд распределения случайной величины – числа правильно решенных задач и построить многоугольник распределения. Найти функцию распределения и построить ее график.

*Решение:*

Возможные значения случайной величины X: 0, 1, 2, 3, 4. Соответствующие вероятности вычисляем по формуле Бернулли:

$P(X = 0) = C_4^0 0{,}8^0 0{,}2^4 = 0{,}0016;$

$P(X = 1) = C_4^1 0{,}8^1 0{,}2^3 = 0{,}0256;$

$P(X = 2) = C_4^2 0{,}8^2 0{,}2^2 = 0{,}1536;$

$P(X = 3) = C_4^3 0{,}8^3 0{,}2^1 = 0{,}4096;$

$P(X = 4) = C_4^4 0{,}8^4 0{,}2^0 = 0{,}4096.$

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| p | 0,0016 | 0,0256 | 0,1536 | 0,4096 | 0,4096 |

Проверка: 0,0016 + 0,0256 + 0,1536 + 0,4096+ 0,4096 = 1.

Многоугольник распределения представлен на рисунке 3.

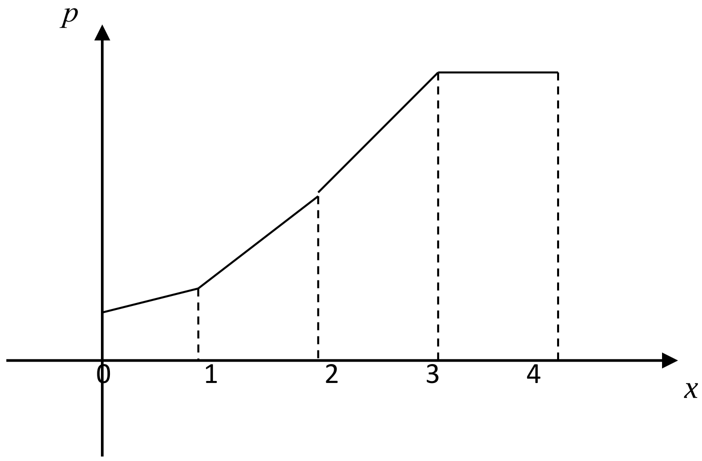



Рисунок 3

Используя данные из таблицы и формулу для функции распределения $F(x) = P(X < x). = \sum_{x_i < x} p_i$ , получим функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ 0{,}0016, 0 < x \le 1, \\ 0{,}0272, 1 < x \le 2, \\ 0{,}1808, 2 < x \le 3, \\ 0{,}5904, 3 < x \le 4, \\ 1, x > 4. \end{cases}$$

Построим ее график.

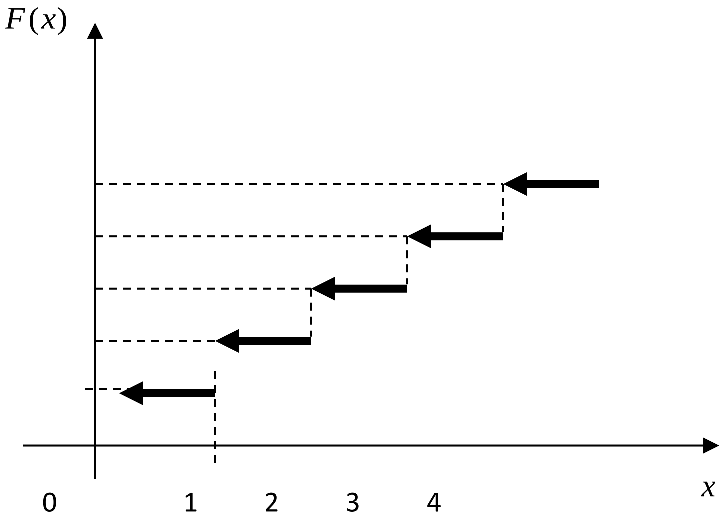



График функции распределения

**Задача 10.** Вероятность получить заданный эффект в физическом опыте равен 0,4. Определить ряд распределения случайной величины X, равной числу «пустых» опытов, которые должен произвести экспериментатор, прежде чем он получит необходимый эффект.

*Решение:*

Случайная величина распределена по геометрическому закону.

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | … |
|---|---|---|---|---|---|
| p | 0,4 | 0,4·06 | $0{,}4^2 \cdot 0{,}6$ | $0{,}4^3 \cdot 0{,}6$ | … |

**Задача 11.** Составить ряд распределения случайной величины X – числа угаданных номеров в «Спортлото 6 из 49».

*Решение.* $p_i = \dfrac{C_6^i C_{43}^{6-i}}{C_{49}^6}$ – гипергеометрический закон.

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| p | 0,4360 | 0,4130 | 0,1324 | 0,0176 | 0,00097 | $2 \cdot 10^{-5}$ | $7 \cdot 10^{-8}$ |

**Задача 12.** Задан закон распределения дискретной случайной величины:

| x | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| p | 0,1 | 0,3 | 0,5 | 0,1 |

Найти математическое ожидание и дисперсию.

*Решение:*

$$M(x) = -1 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}6$$

$$D(x) = (-1)^2 \cdot 0{,}1 + 0^2 \cdot 0{,}3 + 1^2 \cdot 0{,}5 + 2^2 \cdot 0{,}1 - 0{,}6^2 = 0{,}64$$

**Задача 13.** Случайная величина X имеет плотность вероятности (показательный закон) $f(x) = \begin{cases} 0, \textit{если}\ x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, \textit{если}\ x \ge 0 \end{cases}$. Найти математическое ожидание и дисперсию.

*Решение:*

$$M(x) = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = -xe^{-\lambda x}\Big| + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda},$$

$$D(x) = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

***Закон больших чисел. Предельные теоремы***

**Задача 14.** Среднее количество вызовов, поступающих на коммутатор завода в течение часа, равно 300. Оценить вероятность того, что в течение следующего часа число вызовов на коммутатор превысит 400.

*Решение.* По условию $M(X) = 300$. Согласно неравенству Маркова

$$P(X > 400) \le \frac{300}{400},$$

т.е. вероятность того, что число вызовов превысит 400, будет не более 0,75.

## 2.14 Раздел 14. Математическая статистика

**Вопросы для изучения**

1. Генеральная и выборочная совокупности. Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения и ее свойства.
2. Графическое изображение статистического распределения. Полигон и гистограмма.
3. Числовые характеристики статистического распределения: выборочная средняя, выборочная дисперсия, среднее квадратическое отклонение, размах, мода, медиана. Методы их вычисления.
4. Оценка неизвестных параметров распределения. Точечные оценки. Свойства оценок: несмещенность, состоятельность, эффективность. Точечные оценки математического ожидания и дисперсии. «Исправленная дисперсия».
5. Интервальные оценки. Доверительный интервал, доверительная вероятность.
6. Доверительный интервал для математического ожидания при известной генеральной дисперсии нормального распределения.
7. Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной генеральной дисперсии нормального распределения.
8. Доверительный интервал для дисперсии нормального распределения
9. Статистические гипотезы. Проверка статистических гипотез. Статистический критерий. Уровень значимости критерия. Критическая область.
10. Проверка гипотезы о нормальном распределении изучаемой случайной величины. Критерий Пирсона.
11. Функциональная, статистическая, корреляционная зависимости. Линейная корреляция. Уравнение регрессии. Коэффициент регрессии
12. Зависимые и независимые случайные величины. Корреляционный момент (ковариация). Коэффициент корреляции и его свойства.

**Методические указания**

Математическая статистика – раздел математики, в котором изучаются методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений для выявления существующих закономерностей.

Математическая статистика тесно связана с теорией вероятностей. Оба эти раздела изучают массовые случайные явления. Связующим звеном между ними являются предельные теоремы теории вероятностей. При этом теория вероятностей выводит из математической модели свойства реального процесса, а математическая статистика устанавливает свойства математической модели, исходя из данных наблюдений реального процесса (из статистических данных).

Средства математической статистики позволяют решать следующие задачи:

- провести предварительную обработку статистических данных и представить их в удобном для дальнейшего изучения и анализа виде;
- оценить неизвестные характеристики наблюдаемой случайной величины (например, неизвестную вероятность события, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию, параметры неизвестного распределения);
- осуществить проверку статистических гипотез, то есть дать обоснованные выводы о согласовании результатов оценивания с опытными данными.

Результаты исследования статистических данных методами математической статистики используются для принятия решений в задачах планирования, управления, прогнозирования в экономических и технических системах. Говорят, что математическая статистика – это теория принятия решений в условиях неопределенности.

**Рекомендуемые источники:** /*5, глава 6, 7*/.

**Основные теоретические сведения и решение типовых задач**

Основными понятиями математической статистики являются генеральная совокупность и выборка.

*Генеральная совокупность* – это совокупность всех мысленно возможных объектов данного вида, над которыми проводятся наблюдения с целью получения конкретных значений определенной случайной величины.

Генеральная совокупность может быть *конечной* или *бесконечной* в зависимости от того, конечна или бесконечна совокупность составляющих ее объектов.

*Выборкой (выборочной совокупностью)* называется совокупность случайно отобранных объектов из генеральной совокупности.

Выборка должна быть *репрезентативной (представительной)*, то есть ее объекты должны достаточно хорошо отражать свойства генеральной совокупности.

Выборка может быть *повторной*, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность, и *бесповторной*, при которой отобранный объект не возвращается в генеральную совокупность.

Число $N$ объектов генеральной совокупности и число $n$ объектов выборки называют объемами генеральной и выборочной совокупностей соответственно. При этом предполагают, что $N >> n$ (значительно больше).

**Вариационные ряды**

Полученные различными способами отбора данные образуют выборку, обычно это множество чисел, расположенных в беспорядке. По такой выборке трудно выявить какую-либо закономерность их изменения (*варьирования*).

Для обработки данных используют операцию *ранжирования*, которая заключается в том, что результаты наблюдений над случайной величиной, то есть наблюдаемые значения случайной величины, располагают в порядке возрастания.

**Пример 1.** Дана выборка: $2, 4, 7, 3, 1, 1, 3, 2, 7, 3$

Проведем ранжирование выборки: $1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 7, 7$ ●

После проведения операции ранжирования значения случайной величины объединяют в группы, то есть группируют так, что в каждой отдельной группе значения случайной величины одинаковы. Каждое такое значение называется *вариантом.* Варианты обозначаются строчными буквами латинского алфавита с индексами, соответствующими порядковому номеру группы $x_i$ , $y_j$ ,... .

Изменение значения варианта называется *варьированием*.

Последовательность вариантов, записанных в возрастающем порядке, называется *вариационным рядом*.

Число, которое показывает, сколько раз встречаются соответствующие значения вариантов в ряде наблюдений, называется *частотой* или *весом варианта* и обозначается $n_i$, где $i$ – номер варианта.

Отношение частоты данного варианта к общей сумме частот называется относительной частотой или *частостью* (*долей*) соответствующего варианта и обозначается $p_i^* = \left(\frac{n_i}{n}\right)$ или $p_i^* = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i}$, где $m$ – число вариантов. Частость является статистической вероятностью появления варианта $x_i$. Естественно считать частость $p_i^*$ аналогом вероятности $p_i$ появления значения $x_i$ случайной величины $X$.

*Дискретным статистическим рядом* называется ранжированная совокупность вариантов $(x_i)$ с соответствующими им частотами $(n_i)$ или частостями $(p_i^*)$.

Дискретный статистический ряд удобно записывать в виде таблицы

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 7 |
| $n_i$ | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| $\frac{n_i}{n}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{2}{10}$ |

$$\sum_{i=1}^{5} n_i = 10; \quad \sum_{i=1}^{5} p_i^* = 1.$$

**Характеристики дискретного статистического ряда:**

1. *Размах варьирования* $R = x_{max} - x_{min}$.

2. *Мода* $(M_0^*)$ – вариант, имеющий наибольшую частоту (в примере 1 $M_0^* = 3$).

3. *Медиана* $(M_e^*)$ – значение случайной величины, приходящееся на середину ряда.

Пусть $n$ – объем выборки.

Если $n = 2k$, то есть ряд имеет четное число членов, то $M_e^* = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$. Если $n = 2k+1$, то есть ряд имеет нечетное число членов, то $M_e^* = x_{k+1}$ (в примере 1 $M_e^* = 3$).

Если изучаемая случайная величина $X$ является непрерывной или число значений ее велико, то составляют *интервальный статистический ряд*.

Для его составления необходимо:

1. Определить число интервалов статистического ряда по формуле Стерджеса:

$$m \approx (1 + 3{,}322 \lg n).$$

2. Определить длину частичного интервала (шаг) $h$ :

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{m} \text{ или } h = \frac{x_{max} - x_{min}}{1 + 3{,}322\, lg\, n}.$$

Если шаг окажется дробным, то за длину интервала берут ближайшее целое число или ближайшую простую дробь (обычно берут интервалы, одинаковые по длине, но могут быть интервалы и разной длины).

3. Определить границы интервалов.

Начало первого интервала рекомендуется определять по формуле:

$$x_{нач} = x_{min} - \frac{h}{2};$$

конец последнего должен удовлетворять условию $x_{кон} - h \le x_{max} < x_{кон}$; промежуточные интервалы получают, прибавляя к концу предыдущего интервала шаг.

4. Определить частоты.

Просматривая результаты наблюдений, определяют сколько значений случайной величины попало в каждый конкретный интервал. При этом в интервал включают значения, большие или равные нижней границе интервала, и меньшие – верхней границы.

5. Составить таблицу интервального статистического ряда.

В первую строку таблицы вписывают частичные промежутки $[x_0, x_1), [x_1, x_2), \ldots, [x_{m-1}, x_m)$, во второю – количество наблюдений $n_i$ (где $i = \overline{1,m}$) попавших в каждый интервал; то есть частоты соответствующих интервалов.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $[x_0 - x_1)$ | $[x_1 - x_2)$ | $[x_2 - x_3)$ | $\ldots$ | $[x_{m-1} - x_m)$ |
| $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | $\ldots$ | $n_m$ |

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = 1.$$

Иногда интервальный статистический ряд, для простоты исследований условно заменяют дискретным. В этом случае серединное значение $i$-го интервала принимают за вариант $x_i$, а соответствующую интервальную частоту $n_i$ – за частоту этого варианта.

**Графическое изображение статистических данных**

Статистическое распределение изображается графически с помощью полигона и гистограммы.

*Полигоном частот* называют ломаную, отрезки которой соединяют точки с координатами $(x_i, n_i)$; *полигоном частостей* – с координатами $(x_i, p_i^*)$, где $p_i^* = \dfrac{n_i}{n}$, $i = \overline{1,m}$.

Полигон служит для изображения дискретного статистического ряда.

Полигон частостей является аналогом многоугольника распределения дискретной случайной величины в теории вероятностей.

*Гистограммой частот (частостей)* называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основания которых расположены на оси $Ox$ и длины их равны длинам частичных интервалов $(h)$, а высоты равны отношению $\dfrac{n_i}{h}$ – для гистограммы частот; $\dfrac{n_i}{n \cdot h}$ – для гистограммы частостей.

Гистограмма является графическим изображением интервального ряда.

Площадь гистограммы частот равна $n$, а гистограммы частостей равна 1.

Можно построить полигон для интервального ряда, если его преобразовать в дискретный ряд. В этом случае интервалы заменяют их серединными значениями и ставят в соответствие интервальные частоты (частости). Полигон получим, соединив отрезками середины верхних оснований прямоугольников гистограммы.

**Пример.** Дана выборка значений случайной величины $X$ объема 20:

12, 14, 19, 15, 14, 18, 13, 16, 17, 12
18, 17, 15, 13, 17, 14, 14, 13, 14, 16

Требуется:

- построить дискретный вариационный ряд;
- найти размах варьирования $R$, моду $M_0$, медиану $M_e$;
- построить полигон частостей.

1) Ранжируем выборку:

12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 16, 16, 17, 17, 17, 18, 18, 19.

2) Находим частоты вариантов и строим дискретный вариационный ряд (таблица 5)

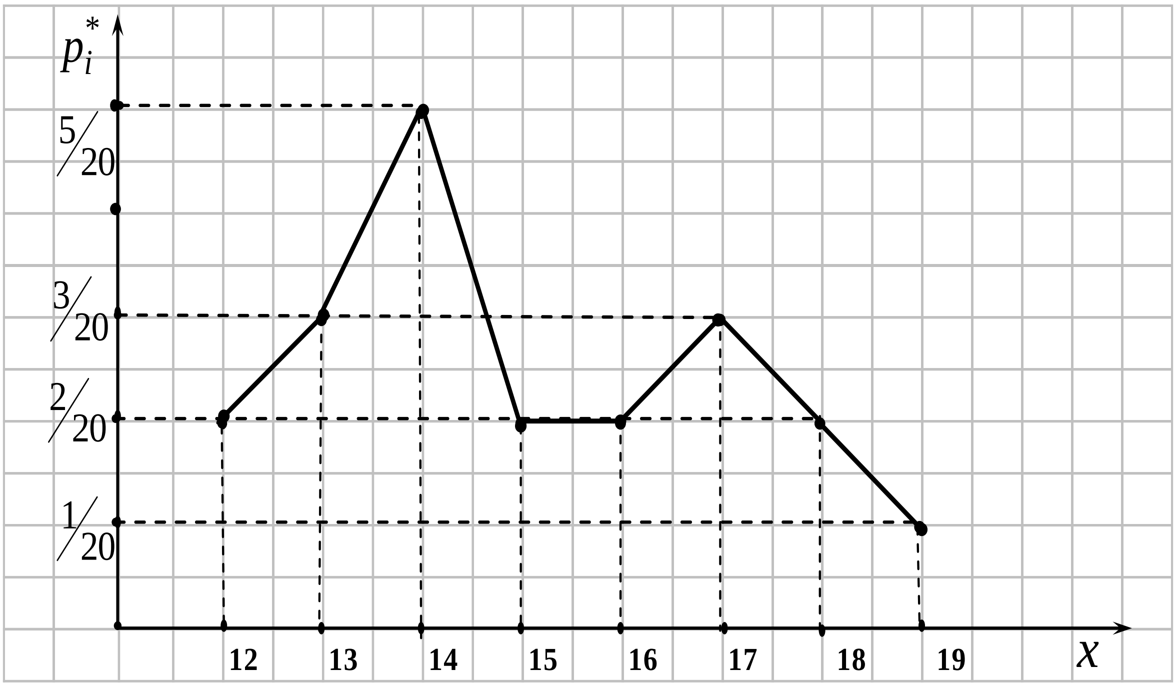
| Значения вариантов $x_i$ | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Частоты $n_i$ | 2 | 3 | 5 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| Частости $p_i^* = \dfrac{n_i}{n}$ | $\dfrac{2}{20}$ | $\dfrac{3}{20}$ | $\dfrac{5}{20}$ | $\dfrac{2}{20}$ | $\dfrac{2}{20}$ | $\dfrac{3}{20}$ | $\dfrac{2}{20}$ | $\dfrac{1}{20}$ |

$$\sum_{i=1}^{8} n_i = 20, \ \sum_{i=1}^{8} p_i = 1.$$

3) По результатам таблицы 5 находим:

$$R = 19 - 12 = 7, \ M_0 = 14, \ M_e = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{14 + 15}{2} = 14{,}5$$

4) Строим полигон частостей.




**Пример.** Результаты измерений отклонений от нормы диаметров 50 подшипников дали численные значения (в мкм).

Таблица 6

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| -1,760 | -0,291 | -0,110 | -0,450 | 0,512 |
| -0,158 | 1,701 | 0,634 | 0,720 | 0,490 |
| 1,531 | -0,433 | 1,409 | 1,740 | -0,266 |
| -0,058 | 0,248 | -0,095 | -1,488 | -0,361 |
| 0,415 | -1,382 | 0,129 | -0,361 | -0,087 |
| -0,329 | 0,086 | 0,130 | -0,244 | -0,882 |
| 0,318 | -1,087 | 0,899 | 1,028 | -1,304 |
| 0,349 | -0,293 | 0,105 | -0,056 | 0,757 |
| -0,059 | -0,539 | -0,078 | 0,229 | 0,194 |
| 0,123 | 0,318 | 0,367 | -0,992 | 0,529 |

Для данной выборки:
- построить интервальный вариационный ряд;
- построить гистограмму и полигон частостей.
1. Строим интервальный ряд.

По данным таблицы 6 определяем: $x_{min} = -1{,}76$ ; $x_{max} = 1{,}74$ .

Для определения длины интервала $h$ используем формулу Стерджеса:

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{1 + 3{,}322\, lg\, 50}.$$

Число интервалов $m \approx 1 + 3{,}322\, lg\, 50$ .

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{1 + 3{,}322\, lg\, 50} = \frac{1{,}74 - (-1{,}76)}{1 + 3{,}322\, lg\, 50} \approx \frac{3{,}5}{1 + 3{,}322\, lg\, 50} \approx \frac{3{,}5}{6{,}644} \approx 0{,}526$$

Примем $h$ =0,6 , $m = 7$ .

За начало первого интервала примем величину

$$x_{нач} = x_{min} - \frac{h}{2} = -1{,}76 - 0{,}3 = -2{,}06 .$$

Конец последнего интервала должен удовлетворять условию:

$x_{кон} - h \le x_{max} < x_{кон}$ .

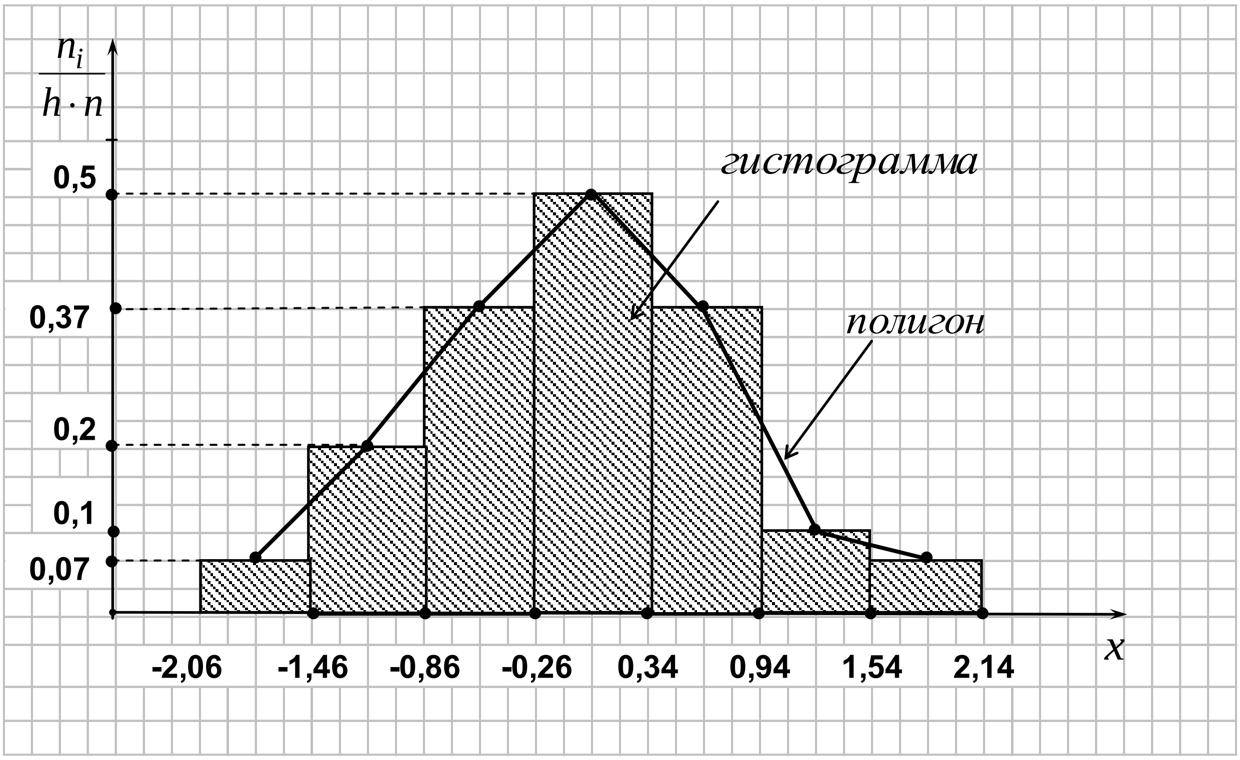
Действительно, $2{,}14 - 0{,}6 \le 1{,}74 < 2{,}14$ ; $1{,}54 \le 1{,}74 < 2{,}14$.

Строим интервальный ряд

| Интервалы | Частоты $n_i$ | Частости $p_i$ |
|---|---|---|
| $[-2{,}06; -1{,}46)$ | 2 | $\frac{2}{50}$ |
| $[-1{,}46; -0{,}86)$ | 6 | $\frac{6}{50}$ |
| $[-0{,}86; -0{,}26)$ | 11 | $\frac{11}{50}$ |
| $[-0{,}26;\ 0{,}34)$ | 15 | $\frac{15}{50}$ |
| $[0{,}34;\ 0{,}94)$ | 11 | $\frac{11}{50}$ |
| $[0{,}94; 1{,}54)$ | 3 | $\frac{3}{50}$ |
| $[1{,}54;\ 2{,}14)$ | 2 | $\frac{2}{50}$ |

$$\sum_{i=1}^{7} n_i = 50, \sum_{i=1}^{7} p_i = 1.$$

Строим гистограмму частостей.




Вершинами полигона являются середины верхних оснований прямоугольников гистограммы.

Убедимся, что площадь гистограммы равна 1.

$$S = h \cdot \left( \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_m}{n \cdot h} \right).$$

$S = 0{,}6(0{,}07 + 0{,}2 + 0{,}37 + 0{,}5 + 0{,}37 + 0{,}1 + 0{,}07) = 0{,}6 \cdot 1{,}68 = 1{,}008 \approx 1$ ●

**Выборочное среднее. Выборочная дисперсия. Выборочное среднее квадратическое отклонение**

В теории вероятностей определяются числовые характеристики для случайных величин, с помощью которых можно сравнивать однотипные случайные величины. Аналогично можно определить ряд числовых характеристик и для выборки. Поскольку эти характеристики вычисляются по статистическим данным (по данным, полученным в результате наблюдений), их называют *статистическими характеристиками.*

Пусть дано статистическое распределение выборки объема $n$:

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | ... | $x_m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | $n_4$ | ... | $n_m$ |

где $m$ – число вариантов.

*Выборочным средним* $\overline{x_в}$ называется среднее арифметическое всех значений выборки:

$$\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i n_i .$$

В случае интервального статистического ряда в качестве $x_i$ берут середины интервалов, а $n_i$ – соответствующие им частоты.

*Выборочной дисперсией* $D_в$ называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочного среднего $\overline{x_в}$ :

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{x_в}\right)^2 \cdot n_i$$

*Выборочное среднее квадратическое* выборки определяется формулой:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} .$$

Особенность $\sigma_в$ состоит в том, что оно измеряется в тех же единицах, что и данные выборки.

Если объем выборки мал ($n \le 30$), то пользуются *исправленной выборочной дисперсией*:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в .$$

Величина $S = \sqrt{S^2}$ называется *исправленным средним квадратическим отклонением.*

**Выборочные начальные и центральные моменты**

**Асимметрия. Эксцесс**

Приведем краткий обзор характеристик, которые наряду с уже рассмотренными применяются для анализа статистических рядов и являются аналогами соответствующих числовых характеристик случайной величины.

Среднее выборочное и выборочная дисперсия являются частным случаем более общего понятия – *момента* статистического ряда.

*Начальным выборочным моментом порядка* $l$ называется среднее арифметическое $l$ - х степеней всех значений выборки:

$$\nu_l^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^l \cdot n_i .$$

Из определения следует, что начальный выборочный момент первого порядка: $\nu_1^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot n_i = \overline{x_в}$ .

*Центральным выборочным моментом порядка* $l$ называется среднее арифметическое $l$ - х степеней отклонений наблюдаемых значений выборки от выборочного среднего $\overline{x_в}$ :

$$\mu_l^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} \left(x_i - \overline{x_в}\right)^l \cdot n_i .$$

Из определения следует, что *центральный выборочный момент второго порядка*:

$$\mu_2^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} \left(x_i - \overline{x_в}\right)^2 \cdot n_i = D_в = \sigma_в^2 .$$

*Выборочным коэффициентом асимметрии* называется число $A_s^*$ , определяемое формулой: $A_s^* = \frac{\mu_3^*}{\sigma_в^3}$ .

Выборочный коэффициент асимметрии служит для характеристики асимметрии полигона вариационного ряда. Если полигон асимметричен, то одна из ветвей его, начиная с вершины, имеет более пологий «спуск», чем другая.

Если $A_s^* < 0$ , то более пологий «спуск» полигона наблюдается слева; если $A_s^* > 0$ – справа. В первом случае асимметрию называют *левосторонней*, а во втором – *правосторонней*.

*Выборочным коэффициентом эксцесса* или *коэффициентом крутости* называется число $E_k^*$ , определяемое формулой:

$$E_k^* = \frac{\mu_4^*}{\sigma_в^4} - 3 .$$

Выборочный коэффициент эксцесса служит для сравнения на «крутость» выборочного распределения с нормальным распределением.

Коэффициент эксцесса для случайной величины, распределенной по нормальному закону, равен нулю.

Поэтому за стандартное значение выборочного коэффициента эксцесса принимают $E_k^* = 0$.

Если $E_k^* < 0$, то полигон имеет более пологую вершину по сравнению с нормальной кривой; если $E_k^* > 0$, то полигон более крутой по сравнению с нормальной кривой.

**Статистические оценки**

Одной из центральных задач математической статистики является задача оценивания теоретического распределения случайной величины на основе выборочных данных.

При этом часто предполагается, что вид закона распределения генеральной совокупности известен, но неизвестны параметры этого распределения, такие как математическое ожидание, дисперсия. Требуется найти приближенные значения этих параметров, то есть получить статистические оценки указанных параметров.

*Статистической оценкой* $\overline{\theta}$ параметра $\theta$ теоретического распределения называют его приближенное значение, зависящее от данных выборки.

Рассматривая выборочные значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как реализации случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, получивших конкретные значения в результате опытов, можно представить оценку $\overline{\theta}$ как функцию этих случайных величин: $\overline{\theta} = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Это означает, что оценка тоже является случайной величиной.

Если для оценки $\theta$ взять несколько $(k)$ выборок, то получим столько же случайных оценок $\overline{\theta}_1, \overline{\theta}_2, \ldots, \overline{\theta_k}$.

Если число наблюдений невелико, то замена неизвестного параметра $\theta$ оценкой $\overline{\theta}$ приводит к ошибке, которая тем больше, чем меньше число опытов.

**Точечные оценки**

Статистические оценки могут быть *точечными* и *интервальными*.

Точечные оценки представляют собой число или точку на числовой оси. Чтобы оценка $\overline{\theta}$ была близка к значению параметра $\theta$, она должна обладать свойствами состоятельности, несмещенности и эффективности.

Оценка $\overline{\theta}$ параметра $\theta$ называется *состоятельной*, если она сходится по вероятности к оцениваемому параметру, то есть для любого $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{\theta} - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Поясним смысл этого равенства.

Пусть $\varepsilon$ – очень малое положительное число. Тогда данное равенство означает, что чем больше объем выборки $n$, тем ближе оценка $\overline{\theta}$ приближается к оцениваемому параметру $\theta$.

Свойство состоятельности нужно проверять в первую очередь. Оно *обязательно* для любого правила оценивания. Несостоятельные оценки не используются.

Оценка $\overline{\theta}$ параметра $\theta$ называется *несмещенной*, если $M\left(\overline{\theta}\right)=\theta$, то есть математическое ожидание оценки равно оцениваемому параметру. Если $M\left(\overline{\theta}\right)\neq\theta$, то оценка $\theta$ называется *смещенной*.

Это свойство оценки желательно, но не обязательно. Часто полученная оценка бывает смещенной, но ее можно поправить так, чтобы она стала несмещенной.

Иногда оценка бывает *асимптотически несмещенной*, то есть $M\left(\overline{\theta}\right)\to\theta$.

Требования несмещенности особенно важно при малом числе опытов.

Несмещенная оценка $\overline{\theta}$ параметра $\theta$ называется *эффективной*, если она среди всех несмещенных оценок, в определенном классе оценок данного параметра, обладает наименьшей дисперсией.

Можно показать, что:

- $\overline{x_в}$ является состоятельной, несмещенной и эффективной оценкой $M(X)$ в классе линейных оценок;

- $D_в$ является состоятельной, смещенной оценкой $D(X)$;

- $S^2=\dfrac{n}{n-1}D_в$ является состоятельной, несмещенной оценкой $D(X)$ (при больших $n$ разница между $S^2$ и $D_в$ мала; $S^2$ используется при малых выборках, обычно при $n\leq 30$);

- относительная частота $\dfrac{n_A}{n}$ появления события $A$ в $n$ независимых испытаниях является состоятельной, несмещенной и эффективной оценкой, в классе линейных оценок, неизвестной вероятности $p=P(A)$ ($p$ – вероятность появления события $A$ в каждом испытании);

- эмпирическая функция распределения выборки $F^*(x)$ является состоятельной, несмещенной оценкой функции распределения $F(x)$ случайной величины $X$.

Для нахождения оценок неизвестных параметров используют различные методы. Наиболее распространенными являются: метод моментов, метод максимального правдоподобия (ММП), метод наименьших квадратов (МНК).

**Интервальные оценки**

При выборке малого объема точечная оценка может существенно отличаться от оцениваемого параметра. В этом случае целесообразно использовать интервальные оценки.

*Интервальной* называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала.

Пусть найденная по данным выборки величина $\overline{\theta}$ служит оценкой неизвестного параметра $\theta$. Оценка $\overline{\theta}$ определяет $\theta$ тем точнее, чем меньше $\left|\theta-\overline{\theta}\right|$, то есть чем меньше $\delta$ в неравенстве $\left|\theta-\overline{\theta}\right|<\delta\ \ (\delta>0)$.

Поскольку $\overline{\theta}$ – случайная величина, то и разность $\left|\theta-\overline{\theta}\right|$ – случайная величина. Поэтому неравенство $\left|\theta-\overline{\theta}\right|<\delta$ при заданном $\delta$ может выполняться только с некоторой вероятностью.

*Доверительной вероятностью (надежностью)* оценки $\overline{\theta}$ параметра $\theta$ называется вероятность $\gamma$, с которой выполняется неравенство $\left|\theta-\overline{\theta}\right|<\delta$.

Обычно задается надежность $\gamma$ и определяется $\delta$. Чаще всего надежность задается значениями от 0,95 и выше, в зависимости от конкретно решаемой задачи.

Неравенство $\left|\theta-\overline{\theta}\right|<\delta$ можно записать $\overline{\theta}-\delta<\theta<\overline{\theta}+\delta$.

*Доверительным интервалом* называется интервал $\left(\overline{\theta}-\delta;\,\overline{\theta}+\delta\right)$, который покрывает неизвестный параметр с заданной надежностью $\gamma$.

**Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии**

Пусть случайная величина $X$ имеет нормальное распределение $N(a;\sigma)$. Известно значение $\sigma$ и задана доверительная вероятность (надежность) $\gamma$.

Доверительный интервал для параметра $a$ по выборочному среднему $\overline{x_в}$ имеет вид:

$$\left(\overline{X_в}-t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\,\overline{X_в}+t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

**Пример.** Случайная величина имеет нормальное распределение с известным средним квадратическим отклонением $\sigma=3$. Найти доверительный интервал оценки неизвестного математического ожидания по выборочной средней $\overline{x_в}$, если объем выборки $n = 36$, а надежность оценки $\gamma = 0{,}95$.

1. Находим $t$: $2\Phi(t) = 0{,}95 \quad \Phi(t) = 0{,}475$.

По таблице значений функции Лапласа $t = 1{,}96$.

2. Определяем $\delta = t \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{36}} = 0{,}98$.

Доверительный интервал запишется в виде: $\left(\overline{x_в} - 0{,}98;\ \overline{x_в} + 0{,}98\right)$. ●

**Доверительный интервал для оценки математического ожидания при неизвестной дисперсии**

Пусть случайная величина $X$ имеет нормальное распределение: $N(a;\sigma)$, причем $\sigma$ – неизвестно, $\gamma$ – задана.

Доверительный интервал для оценки $a = M(X)$ имеет вид:

$$\left(\overline{X_в} - t_j \cdot \frac{S}{\sqrt{n}};\ \overline{X_в} + t_j \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right),$$

где $\overline{X_в}$ – выборочное среднее; $S$ – исправленное среднее квадратическое отклонение; $t_j$ – находим по таблице квантилей распределения Стьюдента (Приложение 4) в зависимости от числа степеней свободы и доверительной вероятности $\gamma$.

**Пример.** Произведено пять независимых наблюдений над случайной величиной $X \sim N(a;\sigma)$. Результаты наблюдений таковы:

$$x_1 = 35,\ \ x_2 = 20,\ \ x_3 = 15,\ \ x_4 = -12,\ \ x_5 = 42.$$

Построить для неизвестного $M(x) = a$ доверительный интервал, если $\gamma = 0{,}95$.

1. Находим $\overline{x_в}$: $\overline{x_в} = \dfrac{1}{5}(-35 + 20 + 15 - 12 + 42) = \dfrac{1}{5} \cdot 30 = 6$.

$\underline{\overline{x_в} = 6}$.

2. Находим $S^2$:

$$S^2 = \frac{1}{4}\left((-35-6)^2 + (20-6)^2 + (15-6)^2 + (-12-6)^2 + (42-6)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left((-41)^2 + 16^2 + 9^2 + (-18)^2 + 36^2\right) = \frac{1}{4}(1681 + 256 + 81 + 324 + 1296) =$$

$$=\frac{1}{4}3638=909{,}5.$$

$$\underline{S=\sqrt{909{,}5}\approx 30{,}2}.$$

3. По таблице квантилей распределения Стьюдента (Приложение 4) для $\gamma=0{,}95$ и $n-1=4$ находим $t_j$:

$$\underline{t_j=2{,}78}$$

Доверительный интервал:

$$\left(6-2{,}78\frac{30{,}2}{2{,}24};\,6+2{,}78\frac{30{,}2}{2{,}24}\right)\quad\text{или}\quad(31{,}5;\,43{,}5).\ \bullet$$

**Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения нормального распределения**

Если $M(X)=a$ неизвестно, то доверительный интервал для оценки $\sigma(X)$ имеет вид:

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\chi_2};\,\frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\chi_1}\right),$$

где $n$ – объем выборки; $S$ – исправленное среднее квадратическое отклонение:

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X_в}\right)^2,$$

$\chi_1^2=\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2};n-1}$, $\chi_2^2=\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2};n-1}$ – квантили $\chi^2$ – распределения, определяемые по таблице $\chi^2_{\alpha,k}$ при $k=n-1$ и $\alpha=\frac{1+\gamma}{2}$, $\alpha=\frac{1-\gamma}{2}$.

**Пример.** Для оценки параметра $\sigma(X)$ нормально распределенной случайной величины была сделана выборка объема в 25 единиц и вычислено $S=0{,}8$. Найти доверительный интервал, покрывающий $\sigma$ с вероятностью $\gamma=0{,}95$.

Имеем $n=25$, $\gamma=0{,}95$.

$$\chi_1^2=\chi^2_{\frac{1+0{,}95}{2};25-1}=\chi^2(0{,}975;\,24)=12{,}4.$$

$$\chi_2^2=\chi^2_{\frac{1-0{,}95}{2};-1}=\chi^2(0{,}025;\,24)=39{,}4$$

Доверительный интервал имеет вид:

$$\left(\frac{\sqrt{24}\cdot 0{,}8}{\sqrt{39{,}4}};\frac{\sqrt{24}\cdot 0{,}8}{\sqrt{12{,}4}}\right) \quad \text{или} \quad (0{,}79;1{,}4). \bullet$$

**Проверка статистических гипотез**

*Статистической гипотезой* называется всякое высказывание о генеральной совокупности (случайной величине), проверяемое по выборке (то есть по результатам наблюдений).

*Примеры* статистических гипотез:

- математическое ожидание случайной величины равно конкретному числовому значению;
- генеральная совокупность распределена по нормальному закону.

Гипотезы могут быть *параметрические* (гипотезы о параметрах распределения известного вида) и *непараметрические* (гипотезы о виде неизвестного распределения).

Процедура сопоставления гипотезы с выборочными данными называется *проверкой гипотезы*. Для проверки гипотез используют *аналитические* и *статистические* методы.

**Классический метод проверки гипотез**

В соответствии с поставленной задачей и на основании выборочных данных формулируется (выдвигается) гипотеза $H_0$, которая называется основной или *нулевой*. Одновременно с выдвинутой гипотезой $H_0$ рассматривается противоположная ей гипотеза $H_1$, которая называется конкурирующей или *альтернативной*.

Для проверки нулевой гипотезы вводят специально подобранную случайную величину $K$, распределение которой известно, и называют ее *критерием.*

Поскольку гипотеза $H_0$ для генеральной совокупности принимается по выборочным данным, то она может быть ошибочной. При этом возможны ошибки двух родов.

*Ошибка первого рода* состоит в том, что отвергается гипотеза $H_0$, когда она на самом деле верна.

*Ошибка второго рода* состоит в том, что отвергается альтернативная гипотеза $H_1$, когда она на самом деле верна.

1) Для определения вероятности ошибки первого рода вводится параметр $\alpha : \alpha = P_{H_0}(H_1)$ – вероятность того, что будет принята гипотеза $H_1$, при условии, что $H_0$ верна. Величину $\alpha$ называют *уровнем значимости*. Обычно $\alpha$ выбирают в пределах $0{,}001 - 0{,}1$.

2) Вероятность ошибки второго рода определяется параметром $\beta$: $\beta = P_{H_1}(H_0)$ – вероятность того, что будет принята гипотеза $H_0$, при условии, что $H_1$ верна. Величину $(1-\beta)$, то есть недопустимость ошибки второго рода (отвергнуть неверную и принять верную гипотезу $H_1$) называют *мощностью критерия*.

Суть метода

Множество всех значений критерия разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза $H_0$ отвергается; другое – при которых она принимается.

*Критической областью* называется совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают. Обозначим критическую область $\omega$.

*Областью принятия гипотезы* (областью допустимых значений) называется совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу принимают.

Если вычисленное по выборке значение критерия $K$ попадает в критическую область $\omega$, то гипотеза $H_0$ отвергается и принимается гипотеза $H_1$. В этом случае можно совершить ошибку первого рода, вероятность которой равна $\alpha$. Иначе вероятность того, что критерий $K$ примет значение из критической области $\omega$, должна быть равна заданному значению $\alpha$, то есть $P(K \in \omega) = \alpha$.

Критическая область $\omega$ определяется неоднозначно. Возможны три случая расположения $\omega$. Они определяются видом нулевой и альтернативной гипотез и законом распределения критерия $K$.

*Правосторонняя критическая область* (рисунок 4, а) состоит из интервала $\left(k_{пр.\alpha}^{кр}; +\infty\right)$, где $k_{пр.\alpha}^{кр}$ определяется из условия $P\left(K > k_{пр.\alpha}^{кр}\right) = \alpha$ и называется правосторонней критической точкой, отвечающей уровню значимости $\alpha$.

*Левосторонняя критическая область* (рисунок 4, б) состоит из интервала $\left(-\infty; k_{л.\alpha}^{кр}\right)$, где $k_{л.\alpha}^{кр}$ определяется из условия $P\left(K < k_{л.\alpha}^{кр}\right) = \alpha$ и называется левосторонней критической точкой, отвечающей уровню значимости $\alpha$.

*Двусторонняя критическая область* (рисунок 4, в) состоит из следующих двух интервалов: $\left(-\infty; k_{л.\alpha/2}^{кр}\right)$ и $\left(k_{пр.\alpha/2}^{кр}; +\infty\right)$, где точки $k_{л.\alpha/2}^{кр}$ и $k_{пр.\alpha/2}^{кр}$ определяются из условий $P\left(K < k_{л.\alpha/2}^{кр}\right) = \frac{\alpha}{2}$ и $P\left(K > k_{пр.\alpha/2}^{кр}\right) = \frac{\alpha}{2}$ и называются двусторонними критическими точками.

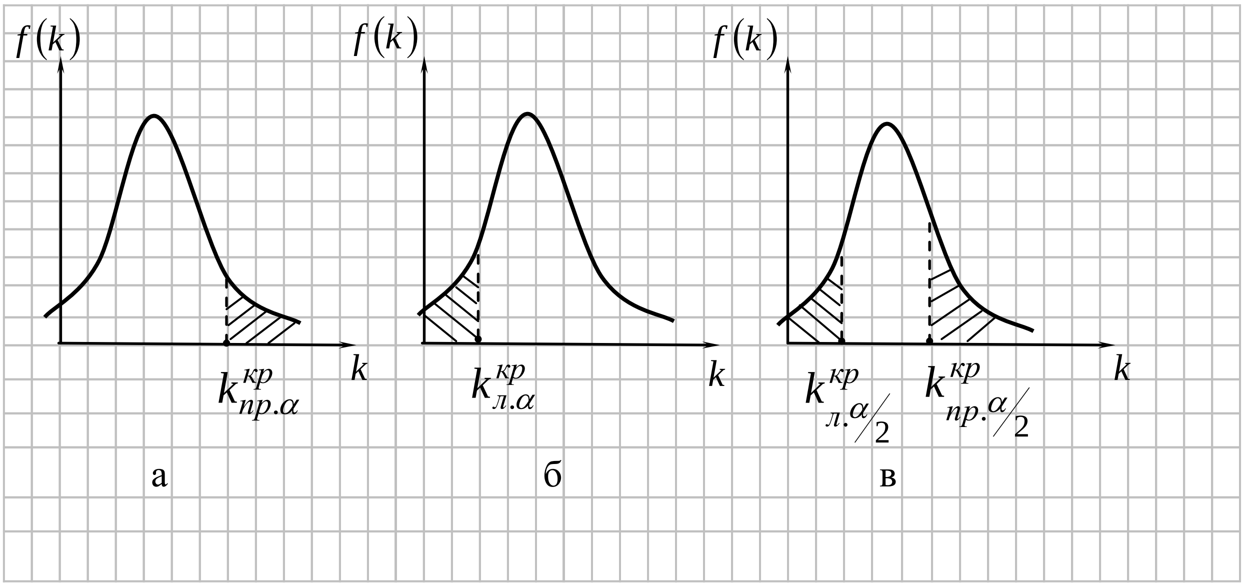



Рисунок 4

**Алгоритм проверки нулевой гипотезы**

**1.** Располагая выборкой, формулируют нулевую гипотезу $H_0$ и альтернативную гипотезу $H_1$.

**2.** Выбирают критерий проверки гипотезы $H_0$, зависящий от выборочных данных и условий рассматриваемой задачи. Наиболее часто используют случайные величины, имеющие следующие законы распределения: нормальный, Стьюдента, Фишера – Снедекора, хи-квадрат.

**3.** Задают уровень значимости выбранного критерия и определяют соответствующую ему критическую область. Для определения критической области достаточно найти критическую точку $t_{кр}$ – ее границу. Для каждого критерия имеются таблицы, по которым находят критическую точку.

**4.** Вычисляют значение критерия по результатам произведенных измерений и сравнивают с критической точкой.

**5.** Нулевую гипотезу *отвергают*, если вычисленное значение критерия попадает в критическую область, или считают *справедливой*, если оно окажется внутри области допустимых значений.

**Проверка гипотез о законе распределения**

Во многих случаях закон распределения изучаемой случайной величины $X$ неизвестен, но есть основания предположить, что он имеет вполне определенный вид: нормальный, экспоненциальный или какой-либо другой.

Пусть выдвинута гипотеза $H_0$ о каком-либо законе распределения. Для проверки этой гипотезы $H_0$ требуется по выборке сделать заключение, согласуются ли результаты наблюдений с высказанным предположением.

Статистический критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения называется *критерием согласия.* Он используется для проверки согласия предполагаемого вида распределения с опытными данными на основании выборки.

Существуют различные критерии согласия: Пирсона, Колмогорова, Фишера и другие. Наиболее часто применяется критерий Пирсона.

**Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности по критерию Пирсона**

Пусть выборка из генеральной совокупности $X$ задана в виде статистического интервального ряда:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $[x_1, x_2)$ | $[x_2, x_3)$ | $\ldots$ | $[x_m, x_{m+1})$ |
| $n_1$ | $n_2$ | $\ldots$ | $n_m$ |

где $n_i$ – интервальные частоты, $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$ – объем выборки, $m$ – число интервалов, $h$ – длина интервала, $x_i$ – середина интервала.

Требуется проверить гипотезу $H_0$ о том, что генеральная совокупность $X$ распределена по нормальному закону, применяя критерий Пирсона.

**Правило проверки**

**1.** Вычисляем $\overline{x_в}$ и $\sigma_в$.

**2.** Находим теоретические частоты $n_i'$: $n_i' = P_i \cdot n$, где $P_i = F(x_{i+1}) - F(x_i)$ – вероятность попадания рассматриваемой случайной величины в интервал $[x_i, x_{i+1})$.

$F(x)$ – функция распределения случайной величины, гипотеза о котором проверяется.

**3**. Сравниваем эмпирические $(n_i)$ и теоретические $(n_i')$ частоты с помощью критерия Пирсона.

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}.$$

2) Находим число степеней свободы $k$:

$$k = m - r - 1,$$

где $m$ – число интервалов; $r$ – число параметров предполагаемого распределения.

Для нормального распределения $k = m - 3$, так как $r = 2$ (нормальный закон распределения характеризуется двумя параметрами $a$ и $\sigma$).

**4.** В таблице критических точек (*квантилей*) распределения (Приложение 3) по заданному уровню значимости $\alpha$ и числу степеней свободы находим $\chi^2_{кр}(\alpha; k)$ правосторонней критической области.

**5**. Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$ – нет оснований отвергнуть гипотезу $H_0$ о нормальном распределении генеральной совокупности.

Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$ – гипотезу отвергаем.

Замечание

1) Объем выборки должен быть достаточно велик $(n \geq 50)$.

2) Малочисленные частоты $(n_i < 5)$ следует объединить. В этом случае и соответствующие им теоретические частоты также надо сложить. Если производилось объединение частот, то при определении числа степеней свободы по формуле $k = m - 3$ следует в качестве $m$ принять число интервалов, оставшихся после объединения частот.

С помощью критерия Пирсона можно проверить гипотезу о любом виде распределения, при этом алгоритм его применения не изменяется.

**Пример.** Пусть из генеральной совокупности $X$ задана выборка объемом 50. Требуется проверить гипотезу $H_0$ о нормальном распределении генеральной совокупности по данной выборке.

| Интервалы | $[-2{,}06; -1{,}46)$ | $[-1{,}46; -0{,}86)$ | $[-0{,}86; -0{,}26)$ | $[-0{,}26; 0{,}34)$ |
|---|---|---|---|---|
| Частоты $n_i$ | 2 | 6 | 11 | 15 |

| Интервалы | $[0{,}34; 0{,}94)$ | $[0{,}94; 1{,}54)$ | $[1{,}54; 2{,}14)$ |
|---|---|---|---|
| Частоты $n_i$ | 11 | 3 | 2 |

$\sum_{i=1}^{7} n_i = 50$.

Проверим гипотезу $H_0$ по критерию Пирсона.

1) $\overline{x_в} = -0{,}032$, $\sigma_в = 0{,}8195$.

2) Найдем теоретические частоты $n_i'$.

Интервальный ряд содержит интервалы с частотами, меньшими 5. Следовательно, два первых и два последних интервала объединяем, при этом соответствующие частоты суммируем.

Составим расчетную таблицу.

| $i$ | Границы интервала | | $n_i$ | Границы интервала | | $\Phi(z_i)$ | $\Phi(z_{i+1})$ | $P_i$ | $n_i'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_i$ | $x_{i+1}$ | | $z_i$ | $z_{i+1}$ | | | | |
| 1 | -2,06 | -0,86 | 8 | $-\infty$ | -1,01 | -0,5 | -0,3438 | 0,1562 | 7,81 |
| 2 | -0,86 | -0,26 | 11 | -1,01 | -0,28 | -0,3438 | -0,1103 | 0,2335 | 11,675 |
| 3 | -0,26 | 0,34 | 15 | -0,28 | 0,45 | -0,1103 | 0,1736 | 0,2839 | 14,195 |
| 4 | 0,34 | 0,94 | 11 | 0,45 | 1,19 | 0,1736 | 0,3830 | 0,2094 | 10,47 |
| 5 | 0,94 | 2,14 | 5 | 1,19 | $+\infty$ | 0,3830 | 0,5 | 0,1170 | 5,85 |
| $\sum$ | | | | | | | | **1** | **50** |

3) Сравним эмпирические ($n_i$) и теоретические ($n_i'$) частоты. Для этого составляем расчетную таблицу.

| $i$ | $n_i$ | $n_i'$ | $n_i - n_i'$ | $(n_i - n_i')^2$ | $\dfrac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$ | $n_i^2$ | $\dfrac{n_i^2}{n_i'}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 7,810 | 0,190 | 0,0361 | 0,0046 | 64 | 8,1946 |
| 2 | 11 | 11,675 | -0,675 | 0,4556 | 0,0390 | 121 | 10,3640 |
| 3 | 15 | 14,195 | 0,805 | 0,6480 | 0,0457 | 225 | 15,8507 |
| 4 | 11 | 10,470 | 0,530 | 0,2809 | 0,0268 | 121 | 11,5568 |
| 5 | 5 | 5,850 | -0,850 | 0,7225 | 0,1235 | 25 | 4,2735 |
| $\sum$ | | | | | **0,2396** | | **50,2396** |

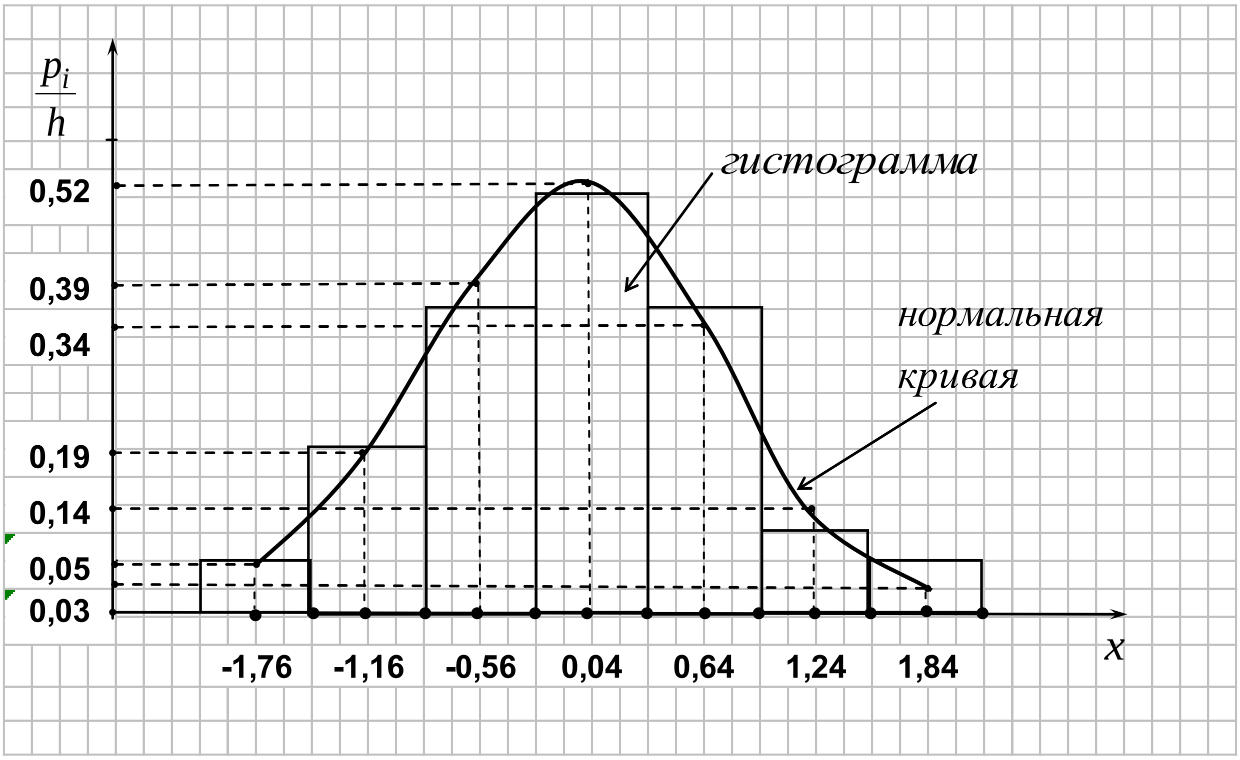
$\chi^2_{набл} = 0{,}2396$ .

4) Зададим $\alpha = 0{,}05$. Вычислим число степеней свободы $k = 5 - 3 = 2$ и найдем $\chi^2_{кр}(0{,}05; 2) = 6{,}0$ (таблица критических точек распределения «хи-квадрат»). Получим $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$.

Следовательно, нет оснований отвергать гипотезу $H_0$ о нормальном распределении генеральной совокупности $X$ .

Другими словами, различие между эмпирическими ($n_i$) и теоретическими ($n_i'$) частотами незначительное (случайное), которое можно объяснить малым объемом выборки.

Проведем визуальную проверку согласования опытных данных с нормальным законом распределения. Для этого построим нормальную кривую и гистограмму относительных частот на одном чертеже.




Так как гипотеза о нормальном распределении не отвергается, то нормальная кривая хорошо сглаживает гистограмму.

**Элементы регрессионного и корреляционного анализа**

Регрессионный и корреляционный анализ изучают форму и степень зависимости между случайными величинами. Степень зависимости можно определить с помощью *выборочного коэффициента корреляции:*

$$r_B = \frac{\mu_{xy}}{s_x s_y},$$

где $\mu_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i,j} x_i y_j n_{ij} - \overline{x}\cdot\overline{y}$ – *выборочный корреляционный момент*.

Если линия регрессии Y на X – прямая, то корреляцию называют линейной. *Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X* имеет вид:

$$y - \overline{y} = r_B \frac{s_y}{s_x}(x - \overline{x}),$$

где $\overline{x}$ и $\overline{y}$ – выборочные средние признаков *X* и *Y*; $s_x$ и $s_y$ – выборочные средние квадратические отклонения; $r_B$ – выборочный коэффициент корреляции.

**Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции**

Пусть двумерная генеральная совокупность (X,Y) распределена нормально. Из этой совокупности извлечена выборка объема n и по ней найден выборочный коэффициент корреляции $r_B \neq 0$. Требуется проверить нулевую гипотезу $H_0: r_г=0$ о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции.

Если нулевая гипотеза принимается, то это означает, что X и Y – некоррелированы; в противном случае – коррелированы.

Правило. *Для того чтобы, при уровне значимости $\alpha$ проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции нормальной двумерной случайной величины при конкурирующей гипотезе $H_1$: $r_г \neq 0$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия:*

$$T_{набл} = \frac{r_B\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_B^2}}$$

*и по таблице критических точек распределения Стьюдента по заданному уровню значимости $\alpha$ и числу степеней свободы $k=n-2$ найти критическую точку $t_{кр}(\alpha,k)$ двусторонней критической области.*

*Если $|T_{набл}|>t_{кр}$ - нулевую гипотезу отвергают.*

*Если $|T_{набл}|<t_{кр}$ - нет основания отвергнуть нулевую гипотезу.*

## 3 Методические указания по самостоятельной работе

Внеаудиторная самостоятельная работа в рамках данной дисциплины включает в себя:

- подготовку к аудиторным занятиям (лекциям, практическим занятиям, лабораторным работам) и выполнение соответствующих заданий;
- самостоятельную работу над отдельными темами учебной дисциплины в соответствии с тематическим планом;
- выполнение курсовой работы курсанта/студента для очной и заочной форм обучения;
- выполнение контрольной работы для студента заочной формы обучения;
- подготовку к зачету/экзамену.

**Подготовка к лекционным занятиям:**

При подготовке к лекции рекомендуется повторить ранее изученный материал, что дает возможность получить необходимые разъяснения преподавателя непосредственно в ходе занятия. Рекомендуется вести конспект, главное требование к которому – быть систематическим, логически связанным, ясным и кратким. По окончании занятия обязательно в часы самостоятельной подготовки, по возможности в этот же день, повторить изучаемый материал и доработать конспект.

**Подготовка к практическим занятиям**

Подготовка к практическим занятиям предусматривает: изучение теоретических положений, лежащих в основе решения типовых задач и выполнения практических заданий; проработку учебного материала, рекомендованной литературы и методической разработки на предстоящее занятие.

Задачи и практические задания, предназначенные для выполнения на практических занятиях под руководством преподавателя и самостоятельно в рамках домашнего задания для дополнительной проработки тем дисциплины, представляют собой подборки практических задач.

Список используемых источников: [4, 13, 14, 15, 16, 17, 24].

**Подготовка к лабораторным работам**

Лабораторные работы (ЛР) составляют компьютерный практикум по высшей математике в среде MathCAD Целью практикума является знакомство и приобретение навыков использования средств компьютерной математики для решения прикладных задач, проведения математических и инженерных расчетов. ЛР структурированы в соответствии с содержанием дисциплины «Математика» и содержат задания прикладного характера.

Задания лабораторного практикума, а также необходимые методические материалы для подготовки, выполнения заданий и подготовки отчета по лабораторным работам представлены в учебном пособии [21].

**Самостоятельная работа над отдельными темами учебной дисциплины**

При организации самостоятельного изучения ряда тем лекционного курса обучаемый работает в соответствии с указаниями, выданными преподавателем. Указания по изучению теоретического материала курса составляются дифференцированно по каждой теме и включают в себя следующие элементы: название темы; цели и задачи изучения темы; основные вопросы темы; характеристику основных понятий и определений, необходимых обучаемому для усвоения данной темы; список рекомендуемой литературы; наиболее важные фрагменты текстов рекомендуемых источников, в том числе таблицы, рисунки, схемы и т.п.; краткие выводы, ориентирующие обучаемого на определенную совокупность сведений, основных идей, ключевых положений, систему доказательств, которые необходимо усвоить; контрольные вопросы, предназначенные для самопроверки знаний.

**Выполнение курсовой работы**

Тема курсовой работы: «Математические методы обработки и анализа экспериментальных данных». Целью курсовой работы является закрепление, углубление и обобщение знаний, полученных в процессе изучения дисциплины, и применение этих знаний к решению профессиональных задач. Расчеты по курсовой работе выполняются в математической компьютерной среде (MathCAD).

Задание курсовой работы, методические указания по ее выполнению и представлению отчета определяются в соответствии с учебно-методическим пособием [8].

**Выполнение контрольных работ**

Учебным планом предусмотрено выполнение 3-х контрольных работ.

1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия.

2. Математический анализ.
3. Теория вероятностей.

Содержание и форма проведения контрольных работ ежегодно актуализируются и корректируется преподавателем.

**Выполнение контрольных работ курсантами заочной формы обучения**

Учебным планом предусмотрено выполнение 6 контрольных работ:

1-й семестр: контрольная работа № 1 (элементы линейной алгебры и аналитической геометрии); контрольная работа № 2 (введение в математический анализ, дифференциальное исчисление функции одной переменной).

2-й семестр: контрольная работа № 3 (интегральное исчисление функции одной переменной, дифференциальные уравнения); контрольная работа № 4 (ряды, дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных, элементы теории поля).

3-й семестр: контрольная работа № 5, 6 (теория вероятностей и математическая статистика).

Содержание контрольных работ и методические указания по их выполнению определяются в соответствии с учебными пособиями [9, 11].

**Подготовка к экзамену**

Промежуточная аттестация по дисциплине проводится в форме экзамена.

При подготовке к экзамену (зачету с оценкой) большую роль играют правильно подготовленные заранее записи и конспекты. В этом случае остается лишь повторить пройденный материал, учесть, что было пропущено, восполнить пробелы, закрепить ранее изученный материал.

В ходе самостоятельной подготовки к экзамену при анализе имеющегося теоретического и практического материала курсанту (студенту) также рекомендуется проводить постановку различного рода задач по изучаемой теме, что поможет в дальнейшем выявлять критерии принятия тех или иных решений, причины совершения определенного рода ошибок. При ответе на вопросы, поставленные в ходе самостоятельной подготовки, обучающийся вырабатывает в себе способность логически мыслить, искать в анализе событий причинно-следственные связи.

К экзамену допускаются студенты, положительно аттестованные по результатам текущего контроля.

Экзаменационные материалы включают: 1) перечень теоретических вопросов, 2) банк практических заданий.

Задания формируются в виде экзаменационного билета, содержащего два теоретических вопроса и три практических задания.

На усмотрение экзаменатора экзамен может быть проведен в письменной, устной или комбинированной форме.

Экзаменационные материалы перед проведением аттестации корректируются преподавателем. Актуальные экзаменационные материалы размещаются в ЭИОС.

Банк практических заданий для подготовки к экзамену размещен в ЭИОС.

## Библиографический список

### Основные источники


1. Баврин, И.И. Высшая математика: учебник для студентов высших учебных заведений / И.И. Баврин, В.Л. Матросов. - Москва: Владос, 2002. - 400 с.
2. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учебное пособие для студентов вузов / Г.Н. Берман. - 22-е изд., перераб. – Санкт-Петербург: Профессия, 2008. - 431 с.
3. Бокарева, Г.А. Алгебра и геометрия: теория и приложения. Краткий курс лекций по дисциплине "Линейная алгебра и аналитическая геометрия": учебник для студентов (курсантов) вузов, обучающихся по специальностям 180403 "Судовождение", 180405 "Эксплуатация судовых энергетических установок" / Г.А. Бокарева, М.Ю. Бокарев; БГАРФ. - Калининград: Изд-во БГАРФ, 2010. - 125 с.
4. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие / В.Е. Гмурман. - 9-е изд., стер. - Москва: Высшая школа, 2004. - 404 с.
5. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для студ. вузов / В.Е. Гмурман. - 12-е изд., перераб. - Москва: Высшее образование, 2008. - 479 с.
6. Усатова, В.М. Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании задач судовождения [Электронный ресурс]: учебное пособие для курсантов специальности 26.05.05 "Судовождение" очной и заочной форм обучения / В.М. Усатова; БГАРФ ФГБОУ ВО "КГТУ". - Калининград: Издательство БГАРФ, 2019. - 71 с.


### Дополнительные источники


7. Авдеева, Н.Н. Высшая математика. Векторный анализ и элементы теории поля: учебное пособие / Н.Н. Авдеева, А.И. Руденко. - Калининград, Изд-во БГАРФ, 2020. - 83 с.
8. Авдеева, Н.Н. Высшая математика: учебно-методическое пособие по выполнению курсовой работы / Н.Н. Авдеева - Калининград: Локальный электронный методический материал. - 2023.
9. Авдеева, Н.Н. Математика. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебно-методическое пособие для студентов заочной формы обучения / Н.Н. Авдеева, С.Н. Мухина. - Калининград: Изд-во БГАРФ, 2013. -

93 с.
10. Бокарев, М.Ю. Дифференциальные уравнения в частных производных (методы математического моделирования транспортных процессов): учебное пособие для обучения студентов (курсантов) по специальности 240200 "Судовождение" в вузах водного транспорта / М. Ю. Бокарев; БГАРФ. - Калининград: РИО БГАРФ, 2002. - 60 с.
11. Бокарев, М.Ю. Математика. Элементы линейной и векторной алгебры. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве. Основы математического анализа: учебное пособие для курсантов, обучающихся по специальностям: 26.05.05 «Судовождение»; 26.05.06 «Эксплуатация судовых энергетических установок»; 26.05.07 «Эксплуатация судового электрооборудования и средств автоматики»; 25.05.03 «Техническая эксплуатация транспортного радиооборудования» / М.Ю. Бокарев, В.М. Усатова. - Калининград: Издательство БГАРФ, 2021. – 156 с.
12. Бокарева, Г.А. Интегральное исчисление функции одного переменного: опорный конспект лекций для студентов вузов дневного и заочного обучения всех специальностей / Г.А. Бокарева, И.Л. Куликова; БГАРФ. - Калининград: РИО БГАРФ, 1998. - 83 с.
13. Бокарева, Г.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия в содержательных модулях [Электронный ресурс]: учеб. пособие для курсантов и студ. инж.-техн. спец.:180403, 180405, 162107, 090303, 190600, 180500, 180100, 41200, 230100, 190700 / Г.А. Бокарева, М.Ю. Бокарев, В.М. Усатова ; БГАРФ. - Калининград: Изд-во БГАРФ, 2012. - 107 с.
14. Бокарева, Г.А. Элементарная математика [Электронный ресурс]: учеб. пособие для абитуриентов и студ. (курсантов) БГАРФ / Г.А. Бокарева и др.; БГАРФ. - Калининград: Изд-во БГАРФ, 2012. - 132 с.
15. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч.: учебное пособие для вузов / П.Е. Данко [и др.]. - 7-е изд., испр. - Москва: ОНИКС: Мир и Образование. - Ч.1. - 2009. - 368 с.
16. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч.: учебное пособие для вузов / П.Е. Данко [и др.]. - 2-е изд., испр. - Москва: ОНИКС: Мир и Образование. - Ч.2. - 2009. - 448 с.
17. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии: учебное пособие для студентов втузов / Д.В. Клетеник; ред. Н.В. Ефимов. - 17-е изд., стер. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2014. - 224 с.
18. Мухина, С.Н. Математика. Руководство к решению олимпиадных задач: учебное пособие для курсантов и студентов, обучающихся в техническом вузе / С.Н. Мухина, Е.Ю. Скоробогатых; Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота. - Калининград: Издательство БГАРФ. - Ч.1. - 2019. - 88 с.

19. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2-х т.: учебное пособие для студентов втузов / Н.С. Пискунов. - Изд. стер. - Москва: Интеграл-Пресс. - Т.1. - 2002. - 416 с.
20. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2-х т.: учебное пособие для студентов втузов / Н.С. Пискунов. - Изд. стер. - Москва: Интеграл-Пресс. - Т.2. - 2002. - 544 с.
21. Усатова, В.М. Решение математических задач в вычислительной среде Mathcad: учебное пособие для курсантов и студентов специальности 26.05.05 «Судовождение» очной и заочной форм обучения / В.М. Усатова; БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ». – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2021. – 64 с.
22. Усатова, В.М. Теория поля в механических процессах и задачах: учебное пособие: пропедевтическое пособие для курсантов и студентов технических специальностей по направлениям:140500 "Техническая эксплуатация судов и судового оборудования", 160905 "Техническая эксплуатация транспортного радиооборудования", 180403 "Эксплуатация судовых энергетических установок" / В.М. Усатова; БГАРФ. - Калининград: Издательство БГАРФ, 2009. - 56 с.
23. Шипачев, В.С. Основы высшей математики: учебное пособие для вузов / В.С. Шипачев; ред. А.Н. Тихонов. - 3-е изд., стер. - Москва: Высшая школа, 1998. - 480 с.
24. Элементарная математика [Электронный ресурс]: учебное пособие для абитуриентов и студентов (курсантов) технических вузов, студентов, преподавателей и школьников лицеев и колледжей профильных школ / Г.А. Бокарева [и др.]; БГАРФ ФГБОУ ВО "КГТУ". - 2-е изд., испр. и доп. - Калининград: Изд-во БГАРФ, 2017. - 148 с.

**Приложение А**

**Перечень экзаменационных вопросов по дисциплине «Математика»**

1-й семестр

1. Матрицы. Виды матриц. Действия над матрицами.
2. Определители, их вычисление и свойства.
3. Обратная матрица. Алгоритмы ее нахождения.
4. Ранг матрицы: определение, способы нахождения. Исследование систем линейных уравнений с помощью ранга (теорема Кронеккера М.: Капелли).
5. Решение невырожденных систем линейных уравнений: метод обратной матрицы, формулы Крамера, метод Гаусса.
6. Исследование и решение однородных систем линейных уравнений.
7. Векторы. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось.
8. Координаты вектора. Действия над векторами, заданными своими координатами. Простейшие задачи на декартовы координаты вектора (координаты вектора по заданному началу и концу его, длина вектора, направляющие косинусы вектора, условие коллинеарности векторов).
9. Скалярное произведение векторов, определение и основные свойства. Скалярное произведение в координатной форме. Приложения скалярного произведения.
10. Векторное произведение двух векторов, определение и свойства. Векторное произведение в координатной форме. Физические и геометрические приложения векторного произведения.
11. Смешанное произведение трех векторов и его основные свойства. Приложения смешанного произведения и выражение его в координатной форме.
12. Простейшие задачи метода координат (расстояние между точками, деление отрезка в данном отношении). Понятие об уравнении линии.
13. Различные способы задания прямой на плоскости.
14. Основные задачи на прямую линию на плоскости (расстояние от точки до прямой, угол между прямыми и точка пересечения прямых, условия параллельности и перпендикулярности прямых).
15. Эллипс: определение, каноническое уравнение, определение формы кривой по каноническому уравнению, эксцентриситет эллипса.
16. Гипербола: определение, каноническое уравнение, определение формы кривой по каноническому уравнению, асимптоты, эксцентриситет.
17. Парабола: определение, каноническое уравнения, определение формы кривой по уравнению, способы расположения в системе координат.
18. Различные способы задания плоскости в пространстве.
19. Основные задачи на плоскость: расстояние от точки до плоскости; взаимное расположение плоскостей в пространстве; угол между плоскостями.
20. Различные виды уравнений прямой в пространстве.
21. Основные задачи на прямую в пространстве: взаимное расположение прямых в пространстве, угол между прямыми, расстояние от точки до прямой в пространстве.

22. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве; угол между прямой и плоскостью.

23. Поверхности второго порядка: виды поверхностей, канонические уравнения, геометрическая форма поверхностей.

24. Комплексные числа, их геометрическое изображение. Модуль и аргумент комплексного числа. Различные формы записи комплексных чисел.

25. Действия над комплексными числами.

26. Понятие функции. Основные свойства функций.

27. Основные элементарные функции их графики и свойства.

28. Понятие числовой последовательности, свойства. Предел бесконечной числовой последовательности (определение и его геометрический смысл). Теорема Вейерштрасса. Число е.

29. Определение предела функции и его геометрическое истолкование. Связь функции с ее пределом с бесконечно малой величиной. Арифметические операции над пределами. Понятие неопределенности. Способы раскрытия неопределенностей.

30. Первый замечательный предел, его следствия.

31. Второй замечательный предел, его следствия.

32. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства. Связь бесконечно малых и бесконечно больших функций.

33. Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые, их использование при нахождении пределов.

34. Понятие непрерывной функции в точке. Основные теоремы о непрерывных функциях.

35. Определение точек разрыва функции и их классификация.

2-й семестр

1. Определение производной. Геометрический и физический смысл производной. Уравнения касательной и нормали.

2. Основные правила дифференцирования (производная суммы, произведения, частного; производная сложной и обратной функций). Таблица производных.

3. Логарифмическая производная, производная функций, заданных неявно и параметрически.

4. Дифференциал функции, его геометрический смысл.

5. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора, ее смысл.

6. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши и их геометрическая интерпретация.

7. Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенностей $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $1^{\infty}$, $\infty^{0}$, $0^{\infty}$ с помощью правила Лопиталя.

8. Возрастание и убывание функции, необходимое и достаточное условия монотонности.

9. Точки экстремума. Необходимое условие экстремума. Критические точки. Достаточное условие экстремума.

10. Направление выпуклости, точки перегиба.

11. Асимптоты графика функции: вертикальные, горизонтальные, наклонные.

12. Общая схема исследования функции.

13. Неопределенный интеграл: определение, свойства, таблица основных интегралов.

14. Основные методы интегрирования: замена переменной, внесение под знак дифференциала, интегрирование по частям.

15. Интегрирование простейших дробей. Общее правило интегрирования рациональных функций.

16. Специальные методы интегрирования тригонометрических функций.

17. Специальные методы интегрирования иррациональных функций.

18. Определенный интеграл: определение, свойства.

19. Связь неопределенного интеграла с определенным. Формула Ньютона – Лейбница.

20. Основные методы вычисления определенного интеграла.

21. Геометрические приложения определенного интеграла.

22. Несобственный интеграл 1 рода, признаки сходимости.

23. Несобственный интеграл 2 рода, признаки сходимости.

24. Дифференциальные уравнения первого порядка (основные определения).

25. Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка и способы их решения.

26. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

27. ЛОДУ высшего порядка: определение, понятие фундаментальной системы решений, структура общего решения.

28. ЛОДУ высшего порядка с постоянными коэффициентами (характеристическое уравнение, вид общего решения в зависимости от вида корней характеристического уравнения).

29. ЛНДУ высшего порядка с постоянными коэффициентами: метод вариации произвольной постоянной.

30. ЛНДУ высшего порядка с постоянными коэффициентами: структура общего решения; виды частных решений для уравнений со специальной правой частью.

31. Функция нескольких переменных: определение и графическое изображение, область определения, линии уровня, предел, непрерывность.

32. Частные производные первого и второго порядков: определение, правила нахождения.

33. Экстремум функции двух переменных. Исследование на экстремум функции двух переменных.

34. Понятие интеграла по фигуре (интеграл Римана). Определение двойного интеграла, его свойства.

35. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.

36. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.

37. Приложения кратных интегралов.

38. Скалярное поле: определение, скалярные и векторные дифференциальные характеристики (производная по направлению, градиент).

39. Векторное поле: определение, скалярные и векторные дифференциальные характеристики (дивергенция, ротор).

40. Работа силового поля. Линейный интеграл, его вычисление. Условие независимости линейного интеграла от пути интегрирования.

41. Циркуляция векторного поля. Формула Грина.

42. Простейшие классы векторных полей и их характеристики.

3-й семестр

1. Понятие числового ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Необходимый признак сходимости числового ряда. Достаточный признак расходимости. Гармонический ряд.

2. Знакоположительные ряды. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.

3. Знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость. Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница.

4. Степенной ряд. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.

5. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора и ряд Маклорена. Разложение в степенной ряд основных элементарных функций.

6. Приложения рядов к приближенным вычислениям.

7. Тригонометрический ряд Фурье, Теорема Дирихле. Особенности разложения в ряд Фурье четных и нечетных функций.

8. Разложение в ряд Фурье функций с произвольным периодом. Представление рядом Фурье непериодических функций.

9. Понятие случайного события. Действия над событиями. Достоверное и невозможное события. Различные определения вероятности события.

10. Теорема сложения вероятностей для совместных и несовместных событий.

11. Теорема умножения вероятностей. Условная вероятность. Независимые события.

12. Вероятность наступления хотя бы одного события. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

13. Повторение испытаний. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число наступлений события.

14. Предельные формулы схемы Бернулли.

15. Дискретные случайные величины. Закон, многоугольник, функция распределения.

16. Числовые характеристики дискретных случайных величин и их свойства.

17. Основные законы распределения дискретных случайных величин.

18. Непрерывные случайные величины. Плотность и функция распределения и их свойства.

19. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

20. Равномерное распределение.

21. Показательное распределение.

22. Нормальное распределение.

23. Функции нормальных случайных величин (распределения «хи-квадрат», Стьюдента, Фишера).

24. Предельные теоремы теории вероятностей (закон больших чисел, центральная предельная теорема).

25. Основные задачи математической статистики. Понятие генеральной совокупности и выборочной совокупности (выборки); требования, предъявляемые к выборочным данным.

26. Статистическое распределение выборки: дискретный и интервальный статистический ряд, полигон, гистограмма.

27. Числовые характеристики выборки, их смысл (что характеризуют).

28. Понятие точечной оценки параметров распределения. Основные требования, предъявляемые к точечным оценкам. Наилучшие точечные оценки математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности.

29. Методы нахождения точечных оценок (суть метода, достоинства, недостатки).

30. Проверка статистических гипотез. Основные понятия. Общая схема проверки статистической гипотезы.

31. Проверка гипотезы о виде распределения. Критерий Пирсона, схема применения критерия.

32. Регрессионный анализ. Линейная среднеквадратическая регрессия.

33. Корреляционный анализ. Выборочный коэффициент корреляции, его свойства. Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции.

**Приложение Б**
**Пример оформления титульного листа**
**на курсовую работу**

Федеральное агентство по рыболовству
Калининградский государственный технический университет
Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота
Морской институт
Кафедра прикладной математики и информационных технологий

Курсовая работа по дисциплине «Математика»

Математические методы исследования и обработки экспериментальных данных

Вариант __

Выполнил студент группы ______________ Иванов И.И.
Допущена к защите _______________доцент Усатова В.М.
КР защищена с оценкой____________ доцент Усатова В.М.

Калининград 2023

Локальный электронный методический материал

Валентина Михайловна Усатова

МАТЕМАТИКА

*Редактор М. А. Дмитриева*

Уч.-изд. л. 7,0. Печ. л. 9,6.

Издательство федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Калининградский государственный технический университет».
236022, Калининград, Советский проспект, 1