

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО РЫБОЛОВСТВУ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Калининградский государственный технический университет»

Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота

Е.В. Волхонская
Е.В. Коротей

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В СРЕДЕ MATHCAD

Учебно-методическое пособие
по дисциплине «Основы статистической радиотехники»
для курсантов и студентов
специальности «Техническая эксплуатация
транспортного радиооборудования»
всех форм обучения

БГАРФ

Калининград
Издательство БГАРФ
2019

УДК 621.37:519.226(075)

Волхонская, Е.В. Моделирование случайных процессов в среде MathCAD: учебно-методическое пособие по дисциплине «Основы статистической радиотехники» / Е.В. Волхонская, Е.В. Коротей. – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2019. – 184 с.

В учебно-методическом пособии представлены виртуальные лабораторные работы по дисциплине «Основы статистической радиотехники». Каждая лабораторная работа снабжена подробным теоретическим материалом, охватывающим тему исследования, и элементами программного кода в среде MathCAD, позволяющими студентам и курсантам отрабатывать навыки модельных исследований и соответствующие компетенции не только в ходе аудиторных занятий, но и в рамках самостоятельной подготовки.

Тематика лабораторных работ охватывает вопросы генерации стандартных равномерно и нормально распределенных случайных величин, узкополосных случайных процессов, применение методов статистического анализа характеристик случайных процессов, экспериментальное определение корреляционной функции и спектральной плотности средней мощности, анализ прохождения случайных процессов через линейные и нелинейные радиотехнические цепи и вопросы согласованной фильтрации сигналов на фоне шумов.

Пособие разработано в соответствии с рабочей программой дисциплины «Основы статистической радиотехники» и предназначено для курсантов и студентов всех форм обучения по специальности «Техническая эксплуатация транспортного радиооборудования».

Методические указания рассмотрены и одобрены кафедрой теоретических основ радиотехники БГАРФ 12 декабря 2018 г., протокол № 4.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Балтийской государственной академии рыбопромыслового флота.

Рецензенты: **Синявский Н.Я.**, д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой физики ФГБОУ ВО «КГТУ»;
Карлов А.М., д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой инструментальных методов в экономике и управлении Института отраслевой экономики и управления ФГБОУ ВО «КГТУ»

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1. «Изучение методов генерации псевдослучайных числовых последовательностей с равномерным законом распределения»	7
1.1. Краткие теоретические сведения	7
1.1.1. Основные понятия теории случайных процессов	7
1.1.2. Линейный конгруэнтный метод	16
1.1.3. Метод Фибоначчи с запаздываниями	17
1.2. Лабораторное задание	18
1.2.1. Моделирование равномерно распределенной СВ	18
1.2.2. Проверка гипотезы о равномерном распределении СВ	21
1.2.3. Проверка случайности отсчетов СВ	24
1.2.4. Построение корреляционной функции СВ	24
1.2.5. Генерация и исследование последовательности отсчетов СВ с использованием метода Фибоначчи с запаздываниями	25
1.3. Содержание отчета	26
1.4. Контрольные вопросы и задания	26
1.5. Список использованных источников	28
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2. «Изучение методов генерации стандартных нормально распределенных случайных величин»	30
2.1. Краткие теоретические сведения	30
2.2. Лабораторное задание	35
2.2.1. Моделирование нормально распределенной СВ по методу Бокса-Мюллера	35
2.2.2. Проверка гипотезы о нормальном распределении СВ	36
2.2.3. Проверка случайности отсчетов СВ	38
2.2.4. Построение корреляционной функции СВ	38
2.2.5. Моделирование нормально распределенной СВ по модифицированному методу Бокса-Мюллера	39
2.3. Содержание отчета	41
2.4. Контрольные вопросы и задания	41
2.5. Список использованных источников	42
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3. «Изучение характеристик узкополосных случайных процессов»	43
3.1. Краткие теоретические сведения	43
3.2. Лабораторное задание	54
3.2.1. Моделирование нормально распределенной СВ	54
3.2.2. Моделирование узкополосного нормального СП	55
3.2.3. Проверка гипотезы о нормальном распределении узкополосного СП	59
3.2.4. Исследование корреляционных свойств узкополосного СП	63
3.2.5. Формирование квадратур узкополосного СП	65
3.2.6. Формирование огибающей и начальной фазы	67

3.3. Содержание отчета.....	69
3.4. Контрольные вопросы и задания.....	69
3.5. Список использованных источников.....	70
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4. «Экспериментальное определение корреляционной функции и спектральной плотности средней мощности стационарного случайного процесса».....	71
4.1. Краткие теоретические сведения.....	71
4.1.1. Способы экспериментального определения корреляционной функции... 71	
4.1.2. Спектральная плотность средней мощности..... 74	
4.1.3. Способы экспериментального определения спектральной плотности средней мощности..... 78	
4.2. Лабораторное задание.....	81
4.2.1. Формирование узкополосного СП..... 81	
4.2.2. Измерение корреляционной функции..... 82	
4.2.3. Измерение времени корреляции..... 86	
4.2.4. Измерение энергетического спектра СП..... 88	
4.2.5. Измерение эффективной ширины энергетического спектра..... 92	
4.3. Содержание отчета.....	93
4.4. Контрольные вопросы и задания.....	93
4.5. Список использованных источников.....	95
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5. «Исследование характеристик случайных процессов на выходе линейных радиотехнических цепей».....	96
5.1. Краткие теоретические сведения.....	96
5.1.1. Нормализация СП узкополосными системами..... 96	
5.1.2. Прохождение СП через линейные системы..... 98	
5.1.3. Дифференцирование СП..... 99	
5.1.4. Интегрирование СП..... 102	
5.2. Лабораторное задание.....	103
5.2.1. Исследование явления нормализации СП на выходе узкополосной цепи..... 103	
5.2.2. Исследование дифференцирования узкополосного СП..... 108	
5.2.3. Исследование интегрирования узкополосного СП..... 112	
5.3. Содержание отчета.....	113
5.4. Контрольные вопросы и задания.....	113
5.5. Список использованных источников.....	115
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6. «Исследование характеристик случайных процессов на выходе нелинейной радиотехнической цепи».....	116
6.1. Краткие теоретические сведения.....	116
6.1.1. Характеристики СП в виде огибающей аддитивной смеси сигнала и узкополосного шума..... 116	
6.1.2. Воздействие сигнала и узкополосного шума на амплитудный детектор..... 126	
6.2. Лабораторное задание.....	129
6.2.1. Создание модели узкополосного шума..... 129	
6.2.2. Создание модели АМ-радиосигнала..... 130	

6.2.3. Создание модели аддитивной смеси АМ-радиосигнала и узкополосного шума.....	131
6.2.4. Имитация прохождения аддитивной смеси АМ-радиосигнала и узкополосного шума через амплитудный детектор.....	132
6.2.5. Проверка гипотезы о законе распределения огибающей аддитивной смеси	134
6.2.6. Проверка корреляционных свойств огибающей аддитивной смеси.....	136
6.2.7. Проверка энергетического спектра огибающей аддитивной смеси.....	138
6.2.8. Исследование помехоустойчивости функционирования амплитудного детектора	139
6.2.9. Оценка адекватности модели линейной пороговой кривой	143
6.3. Содержание отчета.....	150
6.4. Контрольные вопросы и задания.....	150
6.5. Список использованных источников.....	152
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7. «Исследование согласованной фильтрации сигналов на фоне аддитивного белого шума».....	153
7.1. Краткие теоретические сведения.....	153
7.1.1. Постановка задачи согласованной фильтрации	153
7.1.2. Комплексный коэффициент передачи согласованного фильтра.....	154
7.1.3. Импульсная характеристика согласованного фильтра. Условие физической реализуемости	157
7.1.4. Сигнал и помеха на выходе согласованного фильтра.....	158
7.1.5. Примеры построения согласованных фильтров	160
7.1.6. Согласованная фильтрация сигналов при небелом шуме.....	165
7.2. Лабораторное задание	167
7.2.1. Формирование математических моделей импульсного сигнала, согласованного фильтра и фильтра нижних частот	167
7.2.2. Формирование математической модели смеси полезного сигнала и аддитивного белого гауссова шума.....	173
7.2.3. Прохождение смеси полезного сигнала и аддитивного шума через согласованный фильтр.....	175
7.2.4. Определение дисперсии шума на выходе согласованного фильтра.....	176
7.2.5. Исследование зависимости отношения сигнал / помеха на выходе согласованного фильтра от ОСШ на входе.....	178
7.2.6. Исследование зависимости отношения сигнал / помеха на выходе фильтра нижних частот от ОСШ на входе.....	180
7.2.7. Исследование зависимости отношения сигнал / помеха на выходе согласованного фильтра от амплитуды сигнала	180
7.3. Содержание отчета.....	181
7.4. Контрольные вопросы и задания.....	181
7.5. Список использованных источников.....	183
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Форма титульного листа отчета по лабораторной работе	184

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебно-методическое пособие предназначается для курсантов и студентов радиотехнического факультета, соответствует федеральному образовательному государственному стандарту специальности «Техническая эксплуатация транспортного радиооборудования» и рабочей программе дисциплины «Основы статистической радиотехники».

Пособие состоит из описания семи лабораторных работ, предусмотренных рабочей программой дисциплины «Основы статистической радиотехники». Описание каждой лабораторной работы содержит достаточный теоретический материал, снабженный вопросами для самопроверки и заданиями для самостоятельной проработки, выполнение которых необходимо для усвоения курса.

Лабораторные работы являются виртуальными и предполагают использование среды MathCAD. Выбор среды программирования обусловлен ее доступностью не только в рамках учебного заведения, но и благодаря наличию в Интернете бесплатной версии данного программного обеспечения для обучающихся.

Лабораторные работы содержат элементы программного кода для реализации процессов генерации случайных процессов, их прохождения через линейные и нелинейные радиотехнические цепи, измерения характеристик случайных процессов, а также методов статистической обработки результатов модельного эксперимента. Такой подход не только упрощает выполнение лабораторного задания всеми курсантами (студентами) в рамках аудиторного занятия, но и позволяет осуществлять дистанционное обучение, а также выполнять лабораторные задания в часы самостоятельной работы.

Навыки, полученные курсантами (студентами) при прохождении данного лабораторного практикума, будут серьезной базой при изучении таких дисциплин специальности, как «Радиотехнические цепи и сигналы», «Моделирование систем и процессов», «Системы связи и телекоммуникации», «Цифровое телевидение», «Системы мобильной связи».

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

«Изучение методов генерации псевдослучайных числовых последовательностей с равномерным законом распределения»

Цель работы: Изучить методы генерации псевдослучайных числовых последовательностей с равномерным законом распределения и способов их тестирования.

1.1. Краткие теоретические сведения

1.1.1. Основные понятия теории случайных процессов

При решении любой физической задачи возникает сложность учета всех факторов, влияющих на исход мысленного или физического эксперимента, например, учет влияния всех отражающих поверхностей и препятствий при расчете величины электромагнитного поля в месте расположения абонента в условиях урбанизированной (городской) среды. Зачастую учет большинства факторов невозможен и приводит к неоправданному усложнению решаемой задачи. В таких случаях наравне с исследуемым полезным сигналом (электрическим током или напряжением, электрической мощностью или напряженностью электрического и магнитного полей) вводят случайную составляющую сигнала с требуемыми статистическими характеристиками, наиболее точно отражающими физическую картину исследуемого явления.

Под **случайной величиной (СВ)** понимают физическую величину, которая в эксперименте со случайным исходом может принимать то или иное значение. Изменение такой случайной величины со временем носит название **случайного процесса (СП)**, а конкретный вид, принимаемый случайным процессом в эксперименте, называется **реализацией**. При проведении серии идентичных экспериментов формируется **семейство реализаций**. На рис. 1.1 представлен пример такого семейства.

Основной характеристикой СП является так называемая **функция распределения**, определить которую можно следующим образом [1]. Зафиксируем некоторый момент времени t_0 и выберем произвольное значение СВ x_0 (рис. 1.1). Рассматривая реализации СП, установим, выполняется ли для каждой из них условие вида:

$$x_i(t_0) < x_0.$$

Подсчитаем количество случаев $n(x_0, t_0)$, для которых это условие выполняется, и разделим на общее количество рассмотренных реализаций СП N . Тогда при неограниченном увеличении N результат будет описываться устойчивой функцией $F(x_0, t_0)$, называемой **функцией распределения**:

$$F(x_0, t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n(x_0, t_0)}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n(X(t_0) < x_0)}{N}. \quad (1.1)$$

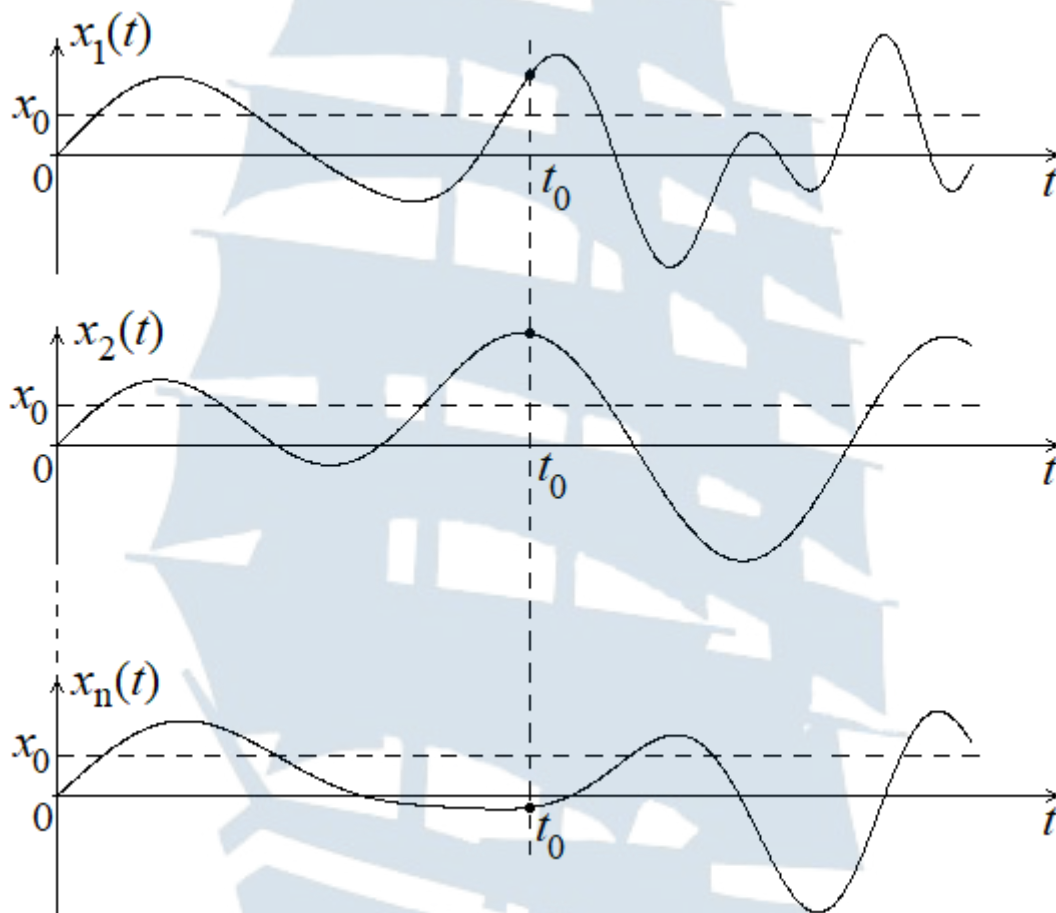


Рис. 1.1. Семейство реализаций случайного процесса

Данную функцию можно рассматривать как вероятность того, что случайный процесс $X(t)$ в момент времени t_0 не превысит уровень x_0 :

$$F(x_0, t_0) = P(X(t_0) < x_0). \quad (1.2)$$

Рассмотрим два близких уровня x_0 и $x_0 + \Delta x$. Для одного и того же момента времени t_0 можно выделить два значения функции распределения:

$$F(x_0, t_0) = P(X(t_0) < x_0) \text{ и } F(x_0 + \Delta x, t_0) = P(X(t_0) < x_0 + \Delta x).$$

Очевидно, что их разность описывает вероятность того, что случайный процесс $X(t)$ лежит в диапазоне $[x_0, x_0 + \Delta x]$:

$$F(x_0 + \Delta x, t_0) - F(x_0, t_0) = P(x_0 < X(t_0) < x_0 + \Delta x).$$

Тогда предел вида:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \Delta x, t_0) - F(x_0, t_0)}{\Delta x} = \frac{\partial F(x_0, t_0)}{\partial x_0} = W(x_0, t_0) \quad (1.3)$$

называется **плотностью вероятности** распределения СВ.

Функция распределения и плотность вероятности обладают очевидными свойствами:

$$F(x_0, t_0) \geq 0, F(-\infty, t_0) = 0, F(\infty, t_0) = 1; \quad (1.4)$$

$$W(x_0, t_0) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} W(x_0, t_0) dx_0 = 1. \quad (1.5)$$

На основе плотности вероятности определяются такие числовые характеристики СП как **математическое ожидание** и **дисперсия**:

$$m_x(t_0) = \langle x(t_0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x W(x, t_0) dx; \quad (1.6)$$

$$\sigma_x^2(t_0) \equiv D_x(t_0) = \langle [x(t_0) - m_x(t_0)]^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t_0)]^2 W(x, t_0) dx. \quad (1.7)$$

С физической точки зрения **математическое ожидание** есть не что иное, как постоянная составляющая случайной величины (например, тока или напряжения), а **дисперсия** – средняя мощность *флуктуационной составляющей* случайной величины (за вычетом постоянной составляющей). Корень квадратный из дисперсии СВ носит название **среднего квадратического отклонения** (СКО):

$$\sigma_x(t_0) = \sqrt{D_x(t_0)}. \quad (1.8)$$

Поскольку одномерная плотность вероятности $W(x_0, t_0)$ не описывает взаимосвязь отдельных сечений СП $X(t_1)$ и $X(t_2)$, то аналогичным образом могут быть введены **двумерная функция распределения** $F(x_1, x_2, t_1, t_2)$ и **двумерная плотность вероятности** $W(x_1, x_2, t_1, t_2)$ распределения СВ [1]:

$$F(x_1, x_2, t_1, t_2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n(x_1, x_2, t_1, t_2)}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n(X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2)}{N}; \quad (1.9)$$

$$W(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (1.10)$$

Двумерная плотность вероятности обладает следующими очевидными свойствами:

$$W(x_1, x_2, t_1, t_2) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} W(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 = W(x_2, t_2), \quad (1.11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 = 1.$$

С помощью введенной таким образом двумерной плотности вероятности распределения СВ строится ее **корреляционная функция**:

$$K_x(t_1, t_2) = \left\langle [x(t_1) - m_x(t_1)] \cdot [x(t_2) - m_x(t_2)] \right\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_x(t_1)] \cdot [x_2 - m_x(t_2)] W(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2. \quad (1.12)$$

Очевидна связь корреляционной функции и дисперсии СВ:

$$K_x(t_1, t_1) = \left\langle [x(t_1) - m_x(t_1)]^2 \right\rangle = \sigma_x^2(t_1). \quad (1.13)$$

Важное место среди случайных процессов занимают так называемые **стационарные СП** [2]. Для таких СП вероятностные характеристики не зависят от выбора точки отсчета времени. Различают СП стационарные **в узком и широком смысле**. СП является **стационарным в узком смысле**, если его n -мерная плотность вероятности $W(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots)$ зависит только от временных сдвигов $t_i - t_1$. Для СП, **стационарного в широком смысле**, достаточно, чтобы его двумерная плотность вероятности $W(x_1, x_2, t_1, t_2)$ зависела только от временного сдвига $\tau = t_2 - t_1$:

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2 - t_1) \equiv K_x(\tau). \quad (1.14)$$

Очевидно, что в этом случае математическое ожидание и дисперсия перестают зависеть от времени:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x W(x) dx, \quad \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x]^2 W(x) dx. \quad (1.15)$$

Корреляционная функция стационарного СП обладает рядом специфических свойств:

- функция корреляции четная

$$K_x(\tau) = K_x(-\tau); \quad (1.16)$$

- функция корреляции максимальна при $\tau = 0$

$$K_x(0) = K_{\max} = \sigma_x^2; \quad (1.17)$$

- при неограниченном росте τ функция корреляции убывает до нуля

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K_x(\tau) = 0. \quad (1.18)$$

Более узкий класс СП представляют **эргодические** СП [2]. Они относятся к стационарным СП и для них результат усреднения по ансамблю значений реализаций в данном сечении СП совпадает с результатом усреднения по времени в пределах одной бесконечно длинной реализации:

- математическое ожидание

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xW(x)dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)dt; \quad (1.19)$$

- дисперсия

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 W(x)dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - m_x)^2 dt; \quad (1.20)$$

- корреляционная функция

$$\begin{aligned} K_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - m_x)(x(t + \tau) - m_x)W(x)dx = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - m_x)(x(t + \tau) - m_x)dt. \end{aligned} \quad (1.21)$$

В зависимости от требуемых статистических характеристик случайной составляющей физической величины используют модели СВ с различными законами распределения:

- равномерный (модель случайных изменений начальной фазы напряжения на выходе генератора, шума квантования на выходе аналого-цифрового преобразователя (АЦП));
- нормальный или *Гаусса* (модель теплового и дробового шумов радиоэлектронной аппаратуры, космического, атмосферного

- и теплового шумов Земли (аддитивный шум), погрешности измерений (для большинства измерительных приборов));
- *Рэля* (модель мелкомасштабных замираний радиосигналов при их распространении в атмосфере Земли в отсутствии прямого луча (мультипликативный шум), сигнала на выходе амплитудного детектора при воздействии узкополосного шума);
 - *Райса* (модель мелкомасштабных замираний радиосигналов при их распространении в атмосфере Земли при наличии прямого луча);
 - *Лапласа* (модель отказов электрорадиоаппаратуры).

Равномерное распределение имеют СВ, значения которых заключены в ограниченном интервале, причем вероятность попадания в любую ее часть шириной Δx одинакова для всего интервала.

Одномерная плотность вероятности равномерно распределенной СВ описывается выражением вида [1; 3]:

$$W(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases} \quad (1.22)$$

Одномерная функция распределения такой СВ равна:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 1, & x > b. \end{cases} \quad (1.23)$$

а ее математическое ожидание и дисперсия определяются следующим образом:

$$m_x = \frac{a+b}{2}, \quad \sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (1.24)$$

Нормальное (гауссово) распределение имеют физические величины, подверженные влиянию большого числа случайных независимых факторов. Одномерная плотность вероятности таких СВ описывается выражением вида [1; 3]:

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \cdot e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}, \quad \sigma_x > 0, \quad (1.25)$$

где m_x – математическое ожидание, а σ_x^2 – дисперсия нормально распределенной СВ.

Впервые нормальное распределение (как предел биномиального распределения) появилось в 1738 г. в работе английского математика *Абрахама де Муавра* «Доктрина случайностей» [4]. Это было первое доказательство частного случая так называемой **центральной предельной теоремы**. А в 1809 г. немецкий математик *Карл Фридрих Гаусс* в сочинении «Теория движения небесных тел» ввёл это распределение как возникающее в результате многократных измерений движения небесных тел. Однако только в 1812 г. французский математик *Пьер-Симон де Лаплас* в **теореме Муавра-Лапласа** обобщил результат *А. де Муавра*.

Одномерная функция распределения нормально распределенной СВ описывается выражением вида:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right), \quad (1.26)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \text{функция Лапласа.}$$

Распределение Рэлея имеют СВ, одномерная плотность вероятности которых описывается выражением вида [1]:

$$W(x) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x \geq 0, \sigma > 0. \quad (1.27)$$

Такому распределению удовлетворяет СВ $x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, если x_1 и x_2 – нормально распределенные СВ с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми дисперсиями $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$.

Данное распределение впервые было введено в 1880 г. британским физиком *Джоном Уильямом Стреттом* (лордом *Рэлеем*) при решении задачи о сложении гармонических колебаний со случайными начальными фазами [5].

Одномерная функция распределения такой СВ описывается выражением вида:

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad (1.28)$$

а ее математическое ожидание и дисперсия соответственно равны:

$$m_x = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \sigma_x^2 = \sigma^2 \left(2 - \frac{\pi}{2} \right). \quad (1.29)$$

Распределение Райса имеют СВ, одномерная плотность вероятности которых описывается выражением вида [1]:

$$W(x) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2+v^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{xv}{\sigma^2}\right), \quad x \geq 0, \quad \sigma > 0, \quad (1.30)$$

где $I_0(x)$ – модифицированная функция *Бесселя* первого рода нулевого порядка (функция *Инфельда*).

Такому распределению удовлетворяет СВ $x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, если x_1 и x_2 – нормально распределенные СВ с ненулевыми математическими ожиданиями m_1, m_2 и одинаковыми дисперсиями $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, причем $v = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$.

Данное распределение введено как обобщение распределения *Рэля* американским ученым *Стефаном Райсом* в его работах «Математический анализ случайных шумов» и «Статистические свойства суммы гармонического сигнала и случайного шума» 1945 и 1948 гг. [6].

Математическое ожидание и дисперсия такой СВ могут быть определены в виде [7]:

$$m_x = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left(1 + \frac{v^2}{2\sigma^2} \right) I_0\left(\frac{v^2}{4\sigma^2}\right) + \frac{v^2}{2\sigma^2} I_1\left(\frac{v^2}{4\sigma^2}\right) \right\} \cdot e^{-\frac{v^2}{4\sigma^2}}; \quad (1.31)$$

$$\sigma_x^2 = 2\sigma^2 \left(1 + \frac{v^2}{2\sigma^2} \right) - m_x^2, \quad (1.32)$$

где $I_1(x)$ – модифицированная функция *Бесселя* первого рода первого порядка.

Данные выражения могут быть упрощены для случаев малого ($v < \sigma$) и большого ($v > 3\sigma$) отношений сигнал шум (ОСШ) [7]:

$$m_x \approx \begin{cases} \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{v^2}{4\sigma^2} \right), & v < \sigma \\ v, & v > 3\sigma \end{cases} \quad (1.33)$$

$$\sigma_x^2 \approx \begin{cases} \sigma^2 \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) \left(1 + \frac{v^2}{2\sigma^2} \right), v < \sigma \\ \sigma^2, v > 3\sigma. \end{cases} \quad (1.34)$$

Распределение Лапласа имеют СВ, одномерная плотность вероятности которых описывается выражением вида [8]:

$$W(x) = \frac{\lambda}{2} \cdot e^{-\lambda|x-a|}, \lambda > 0. \quad (1.35)$$

Такому распределению удовлетворяет СВ $x = x_1 - x_2 + a$, если x_1 и x_2 – экспоненциально распределенные СВ с одинаковым параметром λ [1]:

$$W(x_1) = \lambda \cdot e^{-\lambda x_1}, W(x_2) = \lambda \cdot e^{-\lambda x_2}, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \lambda > 0. \quad (1.36)$$

Данное распределение проявляется при суммировании случайного числа случайных слагаемых.

Одномерная функция распределения такой СВ описывается выражением вида:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot e^{\lambda|x-a|}, x \leq a \\ 1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-\lambda|x-a|}, x > a, \end{cases} \quad (1.37)$$

а ее математическое ожидание и дисперсия СВ соответственно равны:

$$m_x = a, \sigma_x^2 = \frac{2}{\lambda^2}. \quad (1.38)$$

При экспоненциальном распределении вида (1.36)

$$m_x = \frac{1}{\lambda}, \sigma_x^2 = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (1.39)$$

В качестве источников СВ могут рассматриваться физические шумы радиокомпонентов (тепловой и дробовой шум резистора, стабилитрона или транзистора) или космическое излучение. Однако проведение физического эксперимента по оценке статистических характеристик работы радиоаппаратуры различного назначения дорогостояще и, как правило, трудно реализуемо. С технической точки зрения более простым является проведение имитационного моделирования с ис-

пользованием пакетов прикладных программ. В этом случае для генерации случайных величин используют особые численные алгоритмы.

Эти алгоритмы заранее определены, а, следовательно, генерируют последовательность чисел, которая теоретически не может быть статистически случайной. Но при удачном выборе алгоритма, полученная численная последовательность (называемая псевдослучайной) будет удовлетворять большинству критериев случайности.

Одной из характеристик такой последовательности является период повторения, который должен быть больше рабочего интервала, из которого берутся псевдослучайные числа. Генератор псевдослучайных чисел включён в состав многих современных процессоров.

Наиболее распространенными алгоритмами генерации псевдослучайных чисел являются линейный конгруэнтный метод и метод *Фибоначчи* с запаздываниями.

1.1.2. Линейный конгруэнтный метод

Линейный конгруэнтный метод входит в стандартные библиотеки различных компиляторов. Данный метод был предложен американским математиком *Дерриком Генри Лемером* в 1949 г. Его суть сводится к вычислению последовательности псевдослучайных чисел по одному исходному значению в соответствии с алгоритмом [9]:

$$x_{i+1} = (ax_i + C) \bmod m, \quad (1.40)$$

где \bmod – функция нахождения остатка от деления. Например:

$$20 \bmod 3 = 2.$$

Период получаемой в рамках данного метода псевдослучайной последовательности равен m .

Если $C = 0$, то метод называется **мультипликативным конгруэнтным**, а если $C \neq 0$ – то **смешанным конгруэнтным методом**. Наиболее часто применяется смешанный конгруэнтный метод.

При выборе числа m необходимо учитывать, что оно должно быть довольно большим. На практике при реализации данного метода чаще всего выбирают $m = 2^p$, где p – число битов в машинном слове. Выбор множителя a и приращения C в основном обусловлен необходимостью достижения периода максимальной длины.

Ниже в табл. 1.1 приведены числовые параметры некоторых из известных алгоритмов, применяемых в различных компиляторах и библиотеках.

Таблица 1.1

Примеры числовых значений параметров a , C и m

Применение	m	a	C
Borland C/C++	2^{32}	22695477	1
Borland Delphi, Virtual Pascal	2^{32}	134775813	1
Microsoft Visual Basic	2^{24}	1140671485	12820163
Java	2^{48}	25214903917	11

Одна из рекомендаций при выборе числовых значений данных параметров состоит в следующем:

$$m = 2^p, 0,01m \leq a \leq m - \sqrt{m}, C \approx m \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right), \quad (1.41)$$

причем остаток от деления a на 8 должен составлять 3 или 5 (то есть $a \bmod 8 = 3$ или $a \bmod 8 = 5$), а число C должно быть целым нечетным.

1.1.3. Метод Фибоначчи с запаздываниями

В отличие от генераторов, использующих линейный конгруэнтный алгоритм, фибоначчиевы генераторы [10] можно использовать в статистических алгоритмах, требующих высокого разрешения и критичных к качеству случайных чисел.

Последовательность чисел, в которой каждое новое значение зависит более чем от одного из предыдущих и определяется выражением вида

$$x_{i+1} = (x_i + x_{i-1}) \bmod 2^n, \quad (1.42)$$

носит название последовательности *Фибоначчи*. Однако такая последовательность неэффективна. В начале 1950-х гг. данная последовательность была усовершенствована:

$$x_{i+1} = (x_i + x_{i-k}) \bmod 2^n, \quad (1.43)$$

но исследования показали ее эффективность только при $k \geq 16$.

В 1958 г. *Митчел Дж.Ж.* и *Мур Д.Ф.* вывели последовательность вида:

$$x_i = (x_{i-24} + x_{i-55}) \bmod 2^n, \quad (1.44)$$

где $i \geq 55$; n – четное число, а $x_0 \dots x_{54}$ – произвольные целые, но не все четные числа. Подобранные числа 24 и 55 называют *запаздыва-*

ниями, а последовательность $\{x_i\}$ – последовательностью Фибоначчи с запаздываниями.

Очевидными преимуществами данного алгоритма по сравнению с линейным конгруэнтным методом являются его быстрота, поскольку он не требует умножения чисел, а также большая длина периода $(2^{55} - 1)$, однако случайность полученных с помощью него чисел мало исследована.

В случае генерации псевдослучайной последовательности со значениями СВ в диапазоне от 0 до 1 наиболее часто применяют следующий фибоначчиевый генератор:

$$x_i = \begin{cases} x_{i-n} - x_{i-k}, & x_{i-n} \geq x_{i-k} \\ x_{i-n} - x_{i-k} + 1, & x_{i-n} < x_{i-k} \end{cases}, \quad (1.45)$$

где n и k – целые положительные числа. Для старта фибоначчиевому генератору требуется $\max\{n, k\}$ случайных чисел, которые могут быть сгенерированы линейным конгруэнтным методом.

Пары чисел n и k не следует выбирать произвольно. Рекомендуются следующие значения:

- $n = 17$ и $k = 5$ для простых приложений, не использующих векторы высокой размерности со случайными компонентами;
- $n = 55$ и $k = 24$ для большинства алгоритмов, требовательных к качеству случайных чисел;
- $n = 97$ и $k = 33$ для алгоритмов, работающих со случайными векторами высокой размерности.

1.2. Лабораторное задание

1.2.1. Моделирование равномерно распределенной СВ

Запустите приложение MathCAD.

Задайте максимальную длину формируемой кодовой последовательности псевдослучайных чисел, например:

$$m := 2^{16}$$

Знак присваивания $:=$ выбирается на панели *Calculator*, панели *Evaluation* или устанавливается комбинацией «горячих клавиш» Shift+ж при выборе английской раскладки на клавиатуре.

Задайте число отсчетов формируемой случайной величины N , которое должно быть не больше m , например:

$$N := m$$

Определите параметры a и C рекуррентного уравнения для генерации отсчетов СВ, исходя из условий (1.41).

С этой целью можно создать следующие процедуры:

– для поиска параметра a

$$a := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in \text{floor}(0.01 \cdot m) .. \text{ceil}(m - \sqrt{m}) \\ \quad a \leftarrow i \text{ if } \text{mod}(i, 8) = 5 \\ a \end{array} \right.$$

– для поиска параметра C

$$C := \left| \begin{array}{l} c \leftarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \cdot m \\ C \leftarrow \left| \begin{array}{l} \text{floor}(c) \text{ if } \frac{\text{floor}(c)}{2} - \text{round}\left(\frac{\text{floor}(c)}{2}\right) \neq 0 \\ \text{ceil}(c) \text{ otherwise} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Первая из процедур проверяет все целые числа между предшествующим по отношению к $0.01 \cdot m$ и следующим за $(m - \sqrt{m})$.

Вторая процедура проверяет, имеется ли остаток от деления на 2 предшествующего целого числа по отношению к $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \cdot m$

(проверяет его на четность), и выбирает его в качестве результата если оно нечетное, а в противном случае выбирает следующее за ним целое число.

При этом **функции** for, if, otherwise и **оператор** \leftarrow выбираются на панели *Programming*, а **функции** floor, ceil, round и mod прописываются вручную. **Знаки** условного равенства = и неравенства \neq должны быть взяты с панели *Boolean*, а знак многоточия .. – с панели *Vector and Matrix*. **Знак** вертикальной черты | реализуется функцией Add Line на панели *Programming*. Ее повторное применение добавляет строку под данным знаком. При отсутствии **панели** *Programming* или *Boolean* в рабочем окне среды MathCAD ее можно вызвать установлением флажка по адресу *View* \rightarrow *Toolbars* \rightarrow *Programming* или *View* \rightarrow *Toolbars* \rightarrow *Boolean*, соответственно [11]. Остальные функциональные панели вызываются аналогичным образом.

Процедура генерации отсчетов СВ начинается с произвольного первого значения, которое можно задать, например, с использованием функции встроенного генератора MathCAD `runif` [11]:

$$X_0 := \text{runif}(1, 0, 1)_0$$

Функция `runif(N, a, b)` прописывается вручную и генерирует вектор-столбец (матрицу) отсчетов случайной величины длиной N , равномерно распределенных в интервале от a до b .

После этого проведите генерацию отсчетов СВ в соответствии с выражением (1.40):

$$i := 1..N - 1$$

$$X_i := \text{mod}(a \cdot X_{i-1} + C, m)$$

Полученные в результате псевдослучайные отсчеты лежат в диапазоне от 0 до m . Чтобы отсчеты СВ лежали в диапазоне от 0 до 1 отнормируйте полученные отсчеты:

$$i := 1..N - 1$$

$$X_i := \frac{X_i}{m}$$

Для визуальной оценки полученного результата изобразите график полученной последовательности на некотором интервале (рис. 1.2). Для этого воспользуйтесь функцией X-Y Plot на панели *Graph* [11]:

$$i := 0..N - 1$$

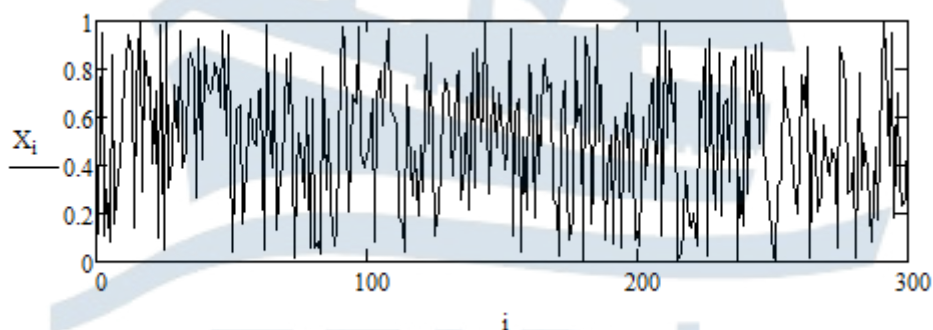


Рис. 1.2. Реализация СП

Чтобы результат был нагляднее можно построить не все значения СВ, ограничив их число прямо на графике (например, выставив предел 300). Настройка цветового решения для включения графика в отчет может быть проведена в свойствах созданного рисунка. Нажми-

те правой клавишей мыши на рисунок и выберите раздел *Format*. В открывшемся окне настроек выберите закладку *Traces* и измените свойство *Color* по собственному усмотрению [11].

1.2.2. Проверка гипотезы о равномерном распределении СВ

Задайте число интервалов разбиения диапазона возможных значений СВ, например:

$$M := 10$$

Задайте номера границ интервалов (на 1 больше, чем самих интервалов):

$$j := 0..M$$

Определите ширину интервалов. Поскольку область значений СВ строго определена как $[0, 1]$, то:

$$h := \frac{1}{M}$$

Определите границы интервалов:

$$\text{int}_j := j \cdot h$$

Используя встроенную функцию среды MathCAD *hist* [11], прописываемую вручную, определите количество попаданий отсчетов СВ в каждый из интервалов:

$$N_X := \text{hist}(\text{int}, X)$$

Проверьте, что суммарное число отсчетов равно N :

$$\sum_{j=0}^{M-1} N_X_j =$$
$$N =$$

Использованный здесь знак суммы располагается на панели *Calculus* [11].

Задайте переменную для построения закона распределения СВ:

$$x := 0, 0.01..1$$

где через запятую указано следующее значение переменной, определяющее шаг ее изменения.

Постройте гистограмму распределения СВ [3] и теоретический закон распределения (рис. 1.3). Теоретический закон распределения, описываемый в данном случае числом 1, вписывается через запятую после функции, определяющей построение гистограммы. При этом

в настройках рисунка необходимо выполнить следующие изменения: нажмите правой клавишей мыши на рисунок и выберите раздел *Format*; в открывшемся окне выберите закладку *Traces* и в свойстве *Type* для первой строки замените *lines* на *solidbar* [11].

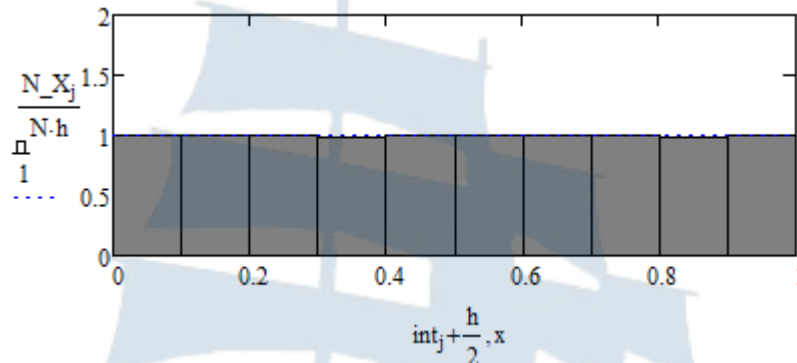


Рис. 1.3. Гистограмма распределения СВ и теоретический закон распределения

Проследите за изменениями в гистограмме при изменении введенного в начале кода количества отсчетов СВ: $N := 2^{10}$, $N := 2^{14}$ и $N := 2^{16}$. **Сделайте вывод по полученным результатам.**

Определите математическое ожидание и дисперсию СВ, используя встроенные функции среды MathCAD *mean* и *var* [11], прописываемые вручную:

$$X_{\text{cp}} := \text{mean}(X) \quad X_{\text{cp}} =$$

$$D_X := \text{var}(X) \quad D_X =$$

Сравните полученные значения с теоретическими (1.24) и сделайте вывод.

Рассчитайте модельное значение критерия χ^2 :

$$\chi := N \cdot \sum_{j=0}^{M-1} \frac{\left(\frac{N_X_j}{N} - h \right)^2}{h} \quad \chi =$$

В данном выражении дробь $\frac{N_X_j}{N}$ символизирует модельную частоту (оценку вероятность) попадания отсчетов СВ в j -ый интервал, а h – теоретическую вероятность попадания отсчетов СВ в тот же интервал.

Рассчитайте критическое значение критерия $\chi_{кр}^2$. Для этого определите количество степеней свободы:

$$s := M - 1$$

Данное число определяется как число интервалов в гистограмме распределения минус 1 (за счет выполнения условия нормировки) и минус число параметров, фигурирующих в теоретическом законе распределения (для равномерного закона таких параметров нет).

Задайте доверительную вероятность, например:

$$P0 := 0.95$$

Критическое значение критерия $\chi_{кр}^2$ определите с использованием встроенной функции среды MathCAD `qchisq` [11], прописываемой вручную:

$$\chi_{кр} := qchisq(P0, s) \quad \chi_{кр} =$$

Сравните модельное значение критерия χ^2 с критическим $\chi_{кр}^2$. Если выполняется условие $\chi^2 < \chi_{кр}^2$, то гипотезу о равномерном распределении СВ можно принять, а если $\chi^2 \geq \chi_{кр}^2$, то ее стоит отвергнуть [3].

Проведите серию модельных измерений значения критерия χ^2 при различных реализациях шума. С этой целью проводите повторную компиляцию программного кода с использованием комбинации клавиш `Ctrl+F9` или выполнив последовательность действий `Tools→Calculate→Calculate Worksheet`. Выполните 50 измерений и сведите результаты в матрицу вида:

$$\chi^n := \begin{pmatrix} 5.34 & 10.826 & 5.275 & 5.648 & 6.019 & 5.929 & 2.978 & 7.988 & 6.452 & 7.326 \\ 6.129 & 3.234 & 9.602 & 9.963 & 5.237 & 13.086 & 4.356 & 7.372 & 14.378 & 10.995 \\ 23.793 & 13.856 & 9.383 & 4.888 & 9.859 & 18.179 & 13.312 & 11.141 & 8.407 & 9.549 \\ 3.826 & 4.068 & 7.063 & 6.577 & 2.882 & 10.204 & 3.871 & 11.756 & 17.797 & 5.397 \\ 8.162 & 6.402 & 13.622 & 15.173 & 7.253 & 6.892 & 11.055 & 16.813 & 6.124 & 3.593 \end{pmatrix}$$

Оцените вероятность того, что гипотеза о равномерном распределении СВ будет принята. Для этого необходимо подсчитать количество значений критерия, для которых выполняется условие $\chi^2 < \chi_{кр}^2$. Это можно сделать, используя следующую процедуру:

$$P := \frac{1}{50} \cdot \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^9 \left(\begin{array}{l} 1 \text{ if } \chi_{n_{i,j}} < \chi_{\text{кр}} \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \right) \quad P =$$

Сравните полученное значение вероятности с доверительной вероятностью и сделайте вывод.

1.2.3. Проверка случайности отсчетов СВ

Для проверки отсутствия связи между отсчетами СВ (их случайности) постройте зависимость между соседними отсчетами [12]. Если такая зависимость существует, то точки расположатся вдоль некоторой гладкой кривой, а если такой зависимости нет – то равномерно распределятся в квадрате 1×1 (рис. 1.4). Для удобства визуального наблюдения возьмите неполный объем отсчетов СВ (например, 2^{11}). Чтобы результат отображался точками в настройках рисунка в закладке *Traces* замените в свойстве *Type* значение переменной *lines* на *points* [11].

$$k := 0..2^{11} - 1$$

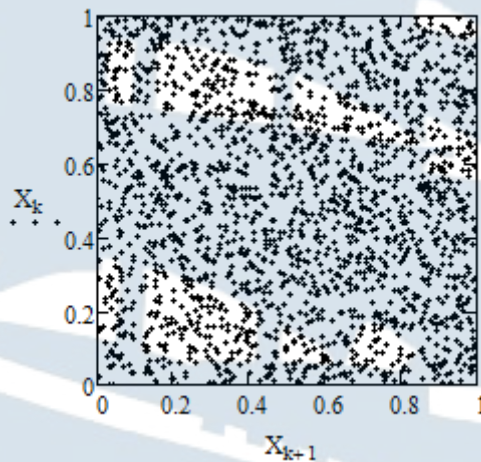


Рис. 1.4. Результат применения графического теста

1.2.4. Построение корреляционной функции СВ

Ожидаемый для данного случая (равномерного распределения СВ) вид корреляционной функции описывается моделью δ -функции, а поэтому при оценке корреляционной функции нет необходимости проводить расчет всех ее значений, сильно удаленных от начала координат. Визуально результаты будут отличаться незначительно, а затрачиваемое на расчет машинное время будет расти. Ограничьтесь, например, 100 точками:

$$n := 0..99$$

$$K_n := \frac{2}{N} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} [(X_i - X_{\text{cp}}) \cdot (X_{i+n} - X_{\text{cp}})]$$

Не старайтесь поставить квадратные скобки под знаком суммы. Форма скобок меняется автоматически.

Постройте график корреляционной функции. Помните, что данная функция всегда является четной. Отобразите график четным образом на отрицательные значения n (рис. 1.5). Части графика в положительной и отрицательной областях аргумента отобразятся разным цветом и типом линии. Поменять цвет и тип линии можно, как и ранее, в свойствах графика в закладке *Traces*. Тип линии меняется в свойстве *Line*. **Сделайте вывод о форме графика корреляционной функции.**

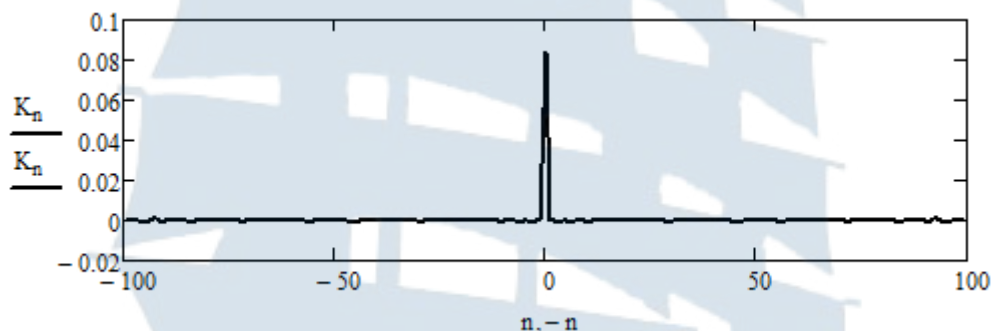


Рис. 1.5. Корреляционная функция СВ

1.2.5. Генерация и исследование последовательности отсчетов СВ с использованием метода Фибоначчи с запаздываниями

Выполните следующие действия:

- задайте число отсчетов СВ N :

$$N := 2^{16}$$

- задайте запаздывания из пункта кратких теоретических сведений «Метод Фибоначчи с запаздываниями», например:

$$n := 55$$

$$k := 24$$

- сформируйте начальный вектор значений СВ с использованием встроенной функции среды MathCAD $\text{runif}(p, 0, 1)$, где p – наибольшее из чисел n и k :

$$p := \max(n, k)$$

$$X := \text{runif}(p, 0, 1)$$

- сформируйте в цикле оставшиеся $(N - p)$ значений в соответствии с выражением (1.45):

$$X := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in p..N-1 \\ \quad X_i \leftarrow \left| \begin{array}{l} X_{i-n} - X_{i-k} \text{ if } X_{i-n} \geq X_{i-k} \\ X_{i-n} - X_{i-k} + 1 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ X \end{array} \right.$$

- проведите исследования свойств сформированной псевдослучайной последовательности аналогично пунктам 1.2.1 – 1.2.4, скопировав соответствующие фрагменты программного кода;
- *сделайте необходимые выводы.*

1.3. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- титульный лист (см. Приложение А);
- цель работы, название пунктов лабораторного задания;
- результаты машинного эксперимента (листинг программного кода с графическими результатами: осциллограмма псевдослучайной последовательности, гистограммы распределения при различном количестве отсчетов, результат графического теста, график корреляционной функции для обеих исследованных псевдослучайных последовательностей);
- выводы по проделанной работе.

1.4. Контрольные вопросы и задания

1. Что понимают под случайным процессом, случайной величиной, реализацией случайного процесса? Приведите примеры случайных величин в области радиотехники.
2. Дайте определение одномерной функции и одномерной плотности вероятности распределения случайной величины. Как они связаны между собой? Какими свойствами они обладают?
3. Как, имея выражение для одномерной функции или одномерной плотности вероятности распределения случайной величины, определить вероятность попадания ее значений в конечный интервал?

4. Приведите выражения, определяющие математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Какой физический смысл имеют эти величины?
5. Дайте определение двумерной функции и двумерной плотности вероятности распределения случайной величины. Как они связаны между собой?
6. Дайте определение корреляционной функции случайной величины. Как она связана с дисперсией этой случайной величины?
7. Какие случайные процессы называют стационарными (в узком и широком смысле)? Как определяются математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция стационарного случайного процесса?
8. Какой случайный процесс называется эргодическим? Как определяются математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция эргодического случайного процесса?
9. Покажите, что гармонический сигнал $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \theta)$ с равномерно распределенной амплитудой $A \in [0, A_{\max}]$ и детерминированными угловой частотой ω и начальной фазой θ не является стационарным.
10. Покажите, что гармонический сигнал $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \theta)$ с равномерно распределенной начальной фазой $\theta \in [-\pi, \pi]$ и детерминированными амплитудой A и угловой частотой ω является стационарным и эргодическим.
11. Воспользовавшись результатами доказательства вопроса 10, покажите, что гармонический сигнал $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \theta)$ с равномерно распределенными амплитудой $A \in [0, A_{\max}]$ и начальной фазой $\theta \in [-\pi, \pi]$ и детерминированной угловой частотой ω является стационарным, но не является эргодическим.
12. Перечислите свойства корреляционной функции стационарного случайного процесса. Докажите их.
13. Приведите выражение для одномерной плотности вероятности равномерно распределенной случайной величины. Получите выражение для функции распределения этой случайной величины.
14. Приведите выражение для одномерной плотности вероятности равномерно распределенной случайной величины. Получите выражения для математического ожидания и дисперсии этой случайной величины.

15. Приведите выражение для одномерной плотности вероятности нормально распределенной (гауссовой) случайной величины. Получите выражение для функции распределения этой случайной величины.
16. Приведите выражение для одномерной плотности вероятности нормально распределенной (гауссовой) случайной величины. Получите выражения для математического ожидания и дисперсии этой случайной величины.
17. Приведите выражение для одномерной плотности вероятности случайной величины, распределенной по закону *Рэля*. Получите выражение для функции распределения этой случайной величины.
18. Приведите выражение для одномерной плотности вероятности случайной величины, распределенной по закону *Рэля*. Получите выражения для математического ожидания и дисперсии этой случайной величины.
19. Приведите выражение для одномерной плотности вероятности случайной величины, распределенной по закону *Лапласа*. Получите выражение для функции распределения этой случайной величины.
20. Приведите выражение для одномерной плотности вероятности случайной величины, распределенной по закону *Лапласа*. Получите выражения для математического ожидания и дисперсии этой случайной величины.
21. Какая последовательность чисел называется псевдослучайной? Как и с какой целью она создается?
22. Поясните суть линейного конгруэнтного метода и метода *Фибоначчи* с запаздыванием, использованных в лабораторной работе для генерации псевдослучайных последовательностей.
23. По каким критериям проводится верификация (проверка) псевдослучайных последовательностей?

1.5. Список использованных источников

1. Карлов А.М., Кологривов А.Г. Случайные сигналы в радиотехнических цепях: Учеб. пособие. – Калининград: БГАРФ, 1996. – 99 с.
2. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учебник / Е.С. Вентцель. – 11-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2010. – 664 с.

4. Нормальное распределение. [Электронный ресурс] // Википедия. Свободная энциклопедия. 2018. 11 января. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Нормальное_распределение (дата обращения: 23.01.2018).
5. Распределение Рэлея. [Электронный ресурс] // Википедия. Свободная энциклопедия. 2018. 09 марта. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Распределение_Рэлея (дата обращения: 20.03.2018).
6. Быховский, М.А. Пионеры информационного века. – М.: Техносфера, 2006. – С. 117-126. [Электронный ресурс] // StudFiles. Файловый архив студентов. URL: <https://studfiles.net/preview/3054129/> (дата обращения: 15.09.2017).
7. Узкополосные случайные процессы [Текст]: монография / Е.В. Волхонская, А.М. Карлов. – Калининград: РИО БГАРФ, 2004. – 168 с.
8. Распределение Лапласа. [Электронный ресурс] // Википедия. Свободная энциклопедия. 2017. 08 декабря. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Распределение_Лапласа (дата обращения: 15.12.2017).
9. Линейный конгруэнтный метод. [Электронный ресурс] // Википедия. Свободная энциклопедия. 2017. 01 декабря. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Линейный_конгруэнтный_метод (дата обращения: 15.12.2017).
10. Метод Фибоначчи с запаздываниями. [Электронный ресурс] // Википедия. Свободная энциклопедия. 2017. 11 декабря. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_Фибоначчи_с_запаздываниями (дата обращения: 15.12.2017).
11. Кирьянов Д.В. Mathcad 14. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 704 с.
12. Иванов М.А., Чугунков И.В. Теория, применение и оценка качества генераторов псевдослучайных последовательностей. – М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, 2003. – 240 с.

БГАРФ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

«Изучение методов генерации стандартных нормально распределенных случайных величин»

Цель работы: Изучить методы на основе преобразования *Бокса-Мюллера*, применяемые для генерации стандартных нормально распределенных случайных величин.

2.1. Краткие теоретические сведения

Рассмотренные в предыдущей лабораторной работе методы генерации псевдослучайных последовательностей позволяют сформировать массивы отсчетов СВ с равномерным законом распределения. Однако при решении большинства практических задач требуется случайная (шумовая) составляющая с нормальным законом распределения. Основу всех методов преобразования равномерного закона распределения в любой другой закон составляет **метод обратного преобразования функции распределения** [1].

Применение данного метода основано на нахождении функции, обратной по отношению к функции необходимого распределения. Если в качестве аргумента такой функции использовать равномерно распределенную на отрезке $(0, 1)$ случайную величину, то получится СВ с требуемым законом распределения.

Поскольку функция распределения для гауссовой СВ не описывается в элементарных функциях, то найти для нее обратную функцию невозможно. Поэтому по отношению к данной задаче метод обратного преобразования функции распределения был модифицирован в трудах британского статистика *Джорджа Бокса* и *Мервина Мюллера*, опубликовавших работу в 1958 г.

Авторами было замечено, что распределение суммы квадратов двух независимых нормально распределенных СВ подчиняется экспоненциальному закону и является частным случаем χ^2 - **распределения** (или распределения *Пирсона*, [2]). С другой стороны такая сумма квадратов имеет простую геометрическую трактовку – это квадрат длины радиус-вектора, соединяющего начало системы координат с точкой на плоскости, причем декартовы координаты этой точки описываются значениями независимых СВ (рис. 2.1).

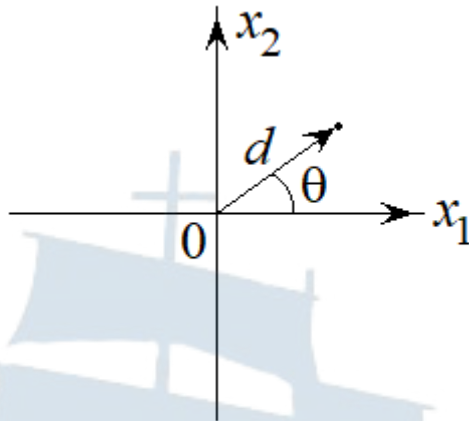


Рис. 2.1. Расположение точки со случайными координатами на декартовой плоскости

Таким образом, если координаты точки на декартовой плоскости будут распределены равномерно, то квадрат длины радиус-вектора, соединяющего точку с началом координат, будет распределен по экспоненциальному закону. Очевидно, что в любом направлении на декартовой плоскости найдется пара случайных величин (x_1, x_2) , характеризующаяся одним и тем же значением квадрата длины радиус-вектора, а, значит, все значения угла θ равновероятны и распределены по равномерному закону в интервале $[0, 2\pi]$.

Но тогда является справедливым и обратное утверждение. Если квадрат длины радиус-вектора точки на плоскости распределен по экспоненциальному закону, а угол, под которым радиус-вектор расположен к оси абсцисс, распределен равномерно в интервале $[0, 2\pi]$, то декартовы координаты точки распределены по нормальному закону. Этот факт и лежит в основе преобразования Бокса-Мюллера [1].

Для получения процедуры преобразования равномерно распределенной СВ в экспоненциально распределенную воспользуемся одним из выражений (1.36), определяющих необходимый вид плотности распределения вероятности:

$$W(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}, x = d^2 \geq 0, \lambda > 0. \quad (2.1)$$

Тогда функция распределения будет иметь вид:

$$F(x) = \int_0^x W(x) dx = 1 - e^{-\lambda x}. \quad (2.2)$$

Функция, обратная по отношению к $F(x)$ имеет вид:

$$y = 1 - e^{-\lambda x} \Rightarrow x = d^2 = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1 - y). \quad (2.3)$$

С учетом того, что распределение СВ y равномерное, а значит симметричное, обратную функцию можно заменить на

$$x = d^2 = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(y). \quad (2.4)$$

Величина x , определенная выражением (2.4), будет иметь экспоненциальное распределение и описывать квадрат длины радиус-вектора.

Угол, под которым радиус-вектор расположен к оси абсцисс, может быть сформирован из второй равномерно распределенной на интервале $(0, 1)$ СВ z умножением на 2π :

$$\theta = 2\pi z. \quad (2.5)$$

Таким образом, декартовы координаты точки на плоскости соответственно равны:

$$\begin{cases} x_1 = d \cdot \cos(\theta) = \sqrt{-\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(y)} \cdot \cos(2\pi z), \\ x_2 = d \cdot \sin(\theta) = \sqrt{-\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(y)} \cdot \sin(2\pi z), \end{cases} \quad (2.6)$$

и имеют нормальный закон распределения.

Величина λ в выражениях (2.6) определяет дисперсию нормально распределенных СВ x_1 и x_2 . Совместная плотность распределения вероятности для них может быть найдена следующим образом:

$$W(x_1, x_2) = W(y, z) \cdot |J|, \quad (2.7)$$

где $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_2} \\ \frac{\partial z}{\partial x_1} & \frac{\partial z}{\partial x_2} \end{vmatrix}$ – якобиан преобразования.

Решив систему уравнений (2.6) относительно y и z , нетрудно получить:

$$\begin{cases} y = e^{-\lambda(x_1^2 + x_2^2)}, \\ z = \frac{1}{2\pi} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x_2}{x_1}\right). \end{cases} \quad (2.8)$$

Тогда якобиан преобразования оказывается равным:

$$J = \begin{vmatrix} -2\lambda x_1 e^{-\lambda(x_1^2+x_2^2)} & -2\lambda x_2 e^{-\lambda(x_1^2+x_2^2)} \\ \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2} & \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} \end{vmatrix} = -\frac{\lambda}{\pi} e^{-\lambda(x_1^2+x_2^2)}.$$

Учитывая, что y и z независимые равномерно распределенные в интервале $(0, 1)$ СВ, получаем:

$$W(y, z) = 1 \Rightarrow W(x_1, x_2) = |J| = \frac{\lambda}{\pi} e^{-\lambda(x_1^2+x_2^2)}.$$

Тогда одномерная плотность распределения вероятности x_1 :

$$W(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x_1, x_2) dx_2 = \frac{\lambda}{\pi} e^{-\lambda x_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x_2^2} dx_2 = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} e^{-\lambda x_1^2}. \quad (2.9)$$

Аналогичную плотность распределения вероятности имеет СВ x_2 :

$$W(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x_1, x_2) dx_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} e^{-\lambda x_2^2}. \quad (2.10)$$

Сравнивая (2.9) и (2.10) с выражением (1.25), приходим к выводу, что СВ x_1 и x_2 имеют нулевое математическое ожидание и дисперсию $1/(2\lambda)$. Выбирая $\lambda = 1/2$, получаем нормированные нормально распределенные СВ, имеющие нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию.

Таким образом, преобразование *Бокса-Мюллера* принимает вид [1]:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{-2 \cdot \ln(y)} \cdot \cos(2\pi z), \\ x_2 = \sqrt{-2 \cdot \ln(y)} \cdot \sin(2\pi z). \end{cases} \quad (2.11)$$

Если требуется сформировать отсчеты СВ с другими числовыми характеристиками, то можно осуществить линейное преобразование вида:

$$\sigma \cdot x_1 + m \text{ и } \sigma \cdot x_2 + m,$$

где σ и m – требуемые значения СКО и математического ожидания соответственно.

Существует модификация преобразования *Бокса-Мюллера*, позволяющая избавиться от вычислений тригонометрических функций [1].

Она получается, если выразить $\cos(2\pi z)$ и $\sin(2\pi z)$ через координаты случайной точки (x'_1, x'_2) на плоскости, равномерно распределенные в диапазоне $[-1, 1]$, и длину радиус-вектора $s = \sqrt{v} = \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2}$:

$$\begin{cases} \cos(2\pi z) = \frac{x'_1}{\sqrt{v}}, \\ \sin(2\pi z) = \frac{x'_2}{\sqrt{v}}. \end{cases} \sqrt{v}$$

При этом стоит отбрасывать те пары точек, которые не попадают в круг радиусом 1.

Квадрат $v = s^2$ записанной таким образом длины радиус-вектора оказывается равномерно распределенным в диапазоне от 0 до 1, в чем достаточно легко убедиться. Поскольку точки в круге будут распределены равномерно, то плотность вероятности распределения длины s радиус-вектора будет пропорциональна длине окружности $2\pi s$, где $0 < s \leq 1$:

$$W(s) = A \cdot 2\pi s,$$

где A – такой нормировочный множитель, что:

$$\int_0^1 W(s) ds = A \cdot \int_0^1 2\pi s ds = A \cdot \pi s^2 \Big|_0^1 = A \cdot \pi = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\pi}.$$

Таким образом, $W(s) = 2s$, а поскольку $v = s^2$, то [2]

$$W(v) = W(s) \cdot \left| \frac{ds}{dv} \right| = 2s \cdot \frac{d\sqrt{v}}{dv} = \frac{2s}{2\sqrt{v}} = 1.$$

Поскольку переменная v , также как и переменная y , распределена равномерно в диапазоне от 0 до 1, то простая замена $v = y$ переводит записанные выше выражения (2.11) в следующую форму записи [1]:

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 \sqrt{-2 \cdot \frac{\ln(y)}{y}}, \\ x_2 = x'_2 \sqrt{-2 \cdot \frac{\ln(y)}{y}}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Причем получаемые в результате значения будут вещественными, если:

$$y = x_1'^2 + x_2'^2 \in (0,1]. \quad (2.13)$$

Таким образом, для выполнения преобразования *Бокса-Мюллера* вида (2.12) необходимо выбирать пару значений (x_1', x_2') , проверять, принадлежит ли она внутренности круга единичного радиуса, вычислять квадрат длины радиус-вектора (2.13) и проводить расчет новой пары отсчетов СВ в соответствии с (2.12).

Недостатком данной модификации преобразования *Бокса-Мюллера* является необходимость отбрасывания части пар значений (x_1', x_2') , не удовлетворяющих условию (2.13), то есть использования лишь 78,5 % сгенерированных пар отсчетов СВ. Данное число не является случайным, а является следствием геометрической трактовки вероятности [2]. В рассматриваемом случае это отношение вероятностей попадания случайной точки в круг единичного радиуса и в квадрат со стороной 2. Очевидно, что отношение площадей этих фигур равно:

$$\frac{S_{\text{кр}}}{S_{\text{кв}}} = \frac{\pi \cdot 1^2}{2^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0,785.$$

2.2. Лабораторное задание

2.2.1. Моделирование нормально распределенной СВ по методу Бокса-Мюллера

Запустите приложение MathCAD.

Задайте число отсчетов равномерно распределенной СВ, например:

$$N := 2^{16}$$

Сгенерируйте 2 массива отсчетов равномерно распределенных СВ с использованием функции `runif` встроенного генератора MathCAD [3]:

$$X := \text{runif}(N, 0, 1) \quad Y := \text{runif}(N, 0, 1)$$

Примените к сгенерированным массивам отсчетов преобразование *Бокса-Мюллера*, используя следующую процедуру:

$$i := 0..N - 1$$

$$Z1_i := \sqrt{-2 \cdot \ln(X_i + 10^{-20})} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot Y_i)$$

$$Z2_i := \sqrt{-2 \cdot \ln(X_i + 10^{-20})} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot Y_i)$$

В отличие от выражений (2.11) в данной процедуре под логарифмом добавлено малое число 10^{-20} , чтобы избежать исключения при появлении $\ln(0)$.

2.2.2. Проверка гипотезы о нормальном распределении СВ

Постройте гистограмму распределения отсчетов СВ $Z1$ (рис. 2.2) в соответствии с алгоритмом, изложенным в п.1.2.2 лабораторного задания **лабораторной работы № 1**. При этом необходимо внести некоторые корректировки.

Число интервалов гистограммы выберите равным:

$$M := 30$$

Ввиду неограниченности значений нормально распределенной СВ при выборе шага интегрирования опирайтесь на минимальное и максимальное значения сгенерированной СВ, которые могут быть определены с использованием встроенных функций среды MathCAD \min и \max [3], прописываемых вручную:

$$h_{Z1} := \frac{\max(Z1) - \min(Z1)}{M}$$

При определении границ интервалов гистограммы необходимо учесть, что первая граница равна не 0, а $\min(Z1)$. Таким образом их стоит определять как:

$$j := 0..M \quad \text{int}_{Z1_j} := \min(Z1) + j \cdot h_{Z1}$$

Переменную для построения теоретического закона распределения СВ задайте исходя из тех же соображений, что и границы интервалов:

$$z1 := \min(Z1), \min(Z1) + \frac{\max(Z1) - \min(Z1)}{100} .. \max(Z1)$$

Для построения теоретического закона (рис. 2.2) вычислите математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение (СКО) СВ:

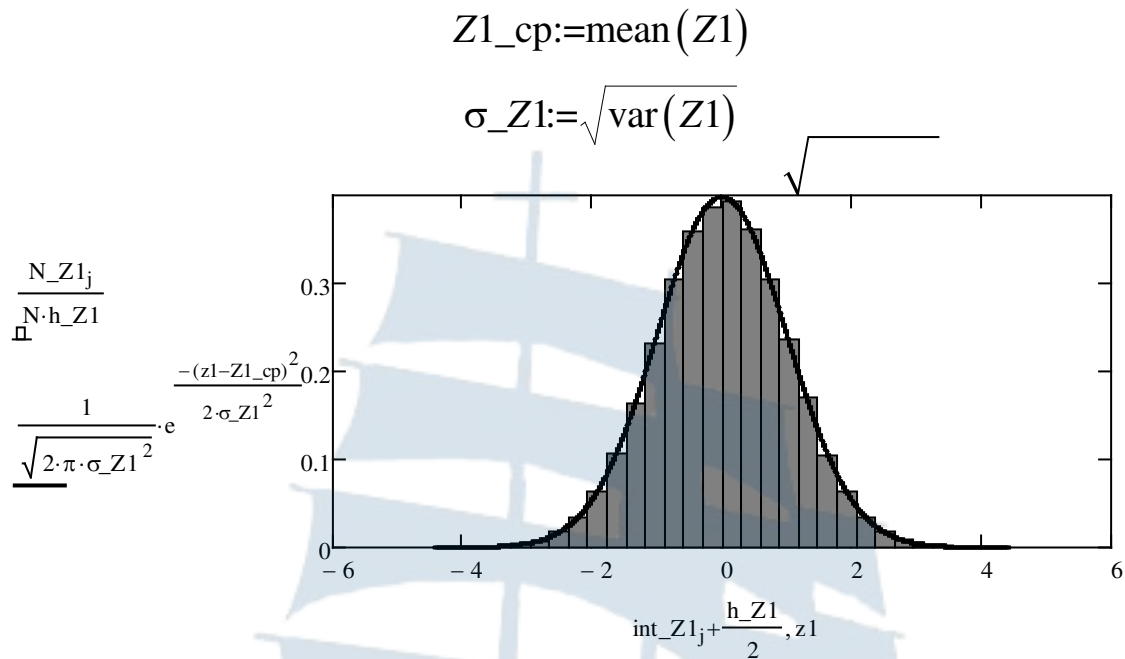


Рис. 2.2. Гистограмма распределения отсчетов СВ и теоретический закон распределения

Проверьте гипотезу о нормальном законе распределения отсчетов СВ. Для этого при доверительной вероятности 0,95 и $M - 3$ степенях свободы (в теоретическом законе два параметра – математическое ожидание и дисперсия) вычислите критическое значение критерия $\chi_{кр}^2$, используя встроенную функцию среды MathCAD $qchisq$ [3].

Рассчитайте вероятности попадания отсчетов СВ в каждый из сформированных интервалов гистограммы:

$$j := 0..M - 1$$

$$P_Z1_j := \int_{\text{int_Z1}_j}^{\text{int_Z1}_{j+1}} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_Z1^2}} \cdot e^{-\frac{(z - Z1_cp)^2}{2 \cdot \sigma_Z1^2}} dz$$

а также модельное значение критерия χ^2 в соответствии с процедурой:

$$\chi_Z1 := N \cdot \sum_{j=0}^{M-1} \frac{\left(\frac{N_Z1_j}{N} - P_Z1_j \right)^2}{P_Z1_j} \quad \chi_Z1 =$$

Сравнив полученное значение критерия с вычисленным критическим, **сделайте вывод о том, верна ли гипотеза о нормальном распределении СВ.**

2.2.3. Проверка случайности отсчетов СВ

Для проверки отсутствия связи между отсчетами СВ (их случайности) постройте зависимость между соседними отсчетами [4]. Если такая зависимость существует, то точки расположатся вдоль некоторой гладкой кривой, а если такой зависимости нет – то большинство из них (теоретически 95 %) попадет внутрь круга радиусом $3\sigma = 3$ (рис. 2.3).

Для отображения пар значений СВ точками на диаграмме, а также для настройки цветовой гаммы и формы и толщины линии полуокружностей воспользуйтесь рекомендациями пп. 1.2.1 и 1.2.3 лабораторного задания **лабораторной работы №1**.

Для наглядности результата построения можно использовать не весь объем значений СВ, а ограничиться некоторым значением, например:

$$k := 0..999 \quad x := -3, -2.999..3$$

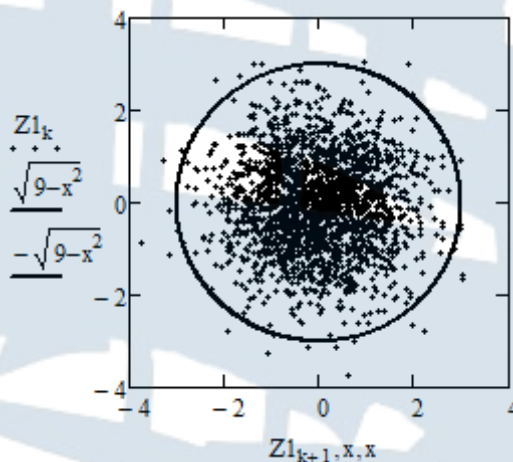


Рис. 2.3. Результат применения графического теста

2.2.4. Построение корреляционной функции СВ

Ожидаемый для данного случая вид корреляционной функции описывается моделью δ -функции. Ограничьтесь, как и ранее, 100 отсчетами корреляционной функции:

$$n := 0..99$$

$$K_{Z1_n} := \frac{2}{N} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} [(Z1_i - Z1_{cp})(Z1_{i+n} - Z1_{cp})]$$

Постройте график корреляционной функции. Отобразите график четным образом на отрицательные значения n (рис. 2.4). Для отображения обеих частей корреляционной функции линиями одного типа и цвета измените соответствующие настройки в свойствах рисунка. **Сделайте вывод о виде корреляционной функции.**

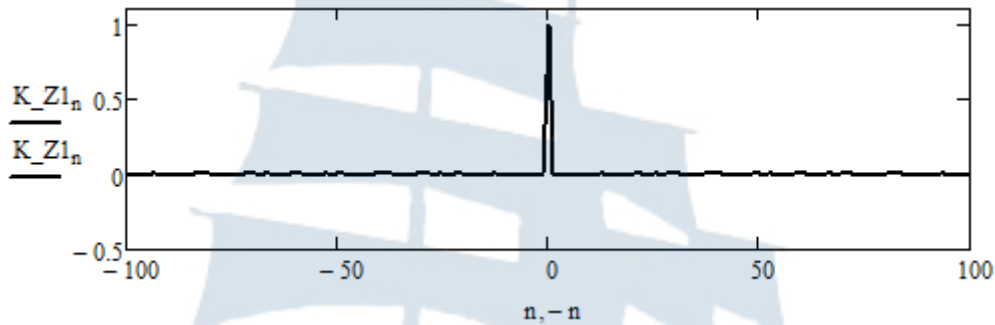


Рис. 2.4. Корреляционная функция СВ

Повторите пункты 2.2.1 – 2.2.4 лабораторного задания по отношению к СВ Z_2 .

С этой целью скопируйте созданный программный код в данный файл ниже или в отдельный файл и замените индекс «1» на индекс «2» во всех рабочих выражениях. Убедитесь, что вторая сгенерированная СВ обладает теми же свойствами, что и первая:

- имеет нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию;
- распределена нормально;
- ее отсчеты статистически независимы;
- корреляционная функция СВ описывается моделью δ -функции.

2.2.5. Моделирование нормально распределенной СВ по модифицированному методу Бокса-Мюллера

Сформируйте два массива отсчетов СВ X и Y , равномерно распределенных на интервале от -1 до 1. Используйте для этого встроенный генератор среды MathCAD `runif` :

$$X := \text{runif}(N, -1, 1) \quad Y := \text{runif}(N, -1, 1)$$

Опираясь на выражения (2.12), сформируйте пары отсчетов нормально распределенных СВ Z_1 и Z_2 из пар отсчетов равномерно распределенных СВ X и Y при условии, что они удовлетворяют условию (2.13). С этой целью создайте процедуру вида:

```

XY := | s ← 0
      | for i ∈ 0..100·N
      |   | n1 ← round(runif(1,0,N-1)0)
      |   | n2 ← round(runif(1,0,N-1)0)
      |   | d ← (Xn1)2 + (Yn2)2
      |   | if d ≤ 1
      |   |   | Z1s ← Xn1 · √ $\frac{-2 \cdot \ln(d + 10^{-20})}{d + 10^{-20}}$ 
      |   |   | Z2s ← Yn2 · √ $\frac{-2 \cdot \ln(d + 10^{-20})}{d + 10^{-20}}$ 
      |   |   | s ← s + 1
      |   |   | p ← i
      |   |   | break if s > N - 1
      |   | (Z1 Z2 p)

```

Чтобы число пар отсчетов нормально распределенных СВ не превышало заданного значения, в данной процедуре использован простой счетчик (переменная s), значение которого *инкрементируется* при каждом выполнении условия (2.13). Расчет прекращается при превышении ею значения $N - 1$. Для того, чтобы случайные номера отсчетов величин X и Y лежали в диапазоне от 0 до $N - 1$, они формируются путем округления случайных чисел, задаваемых встроенной функцией среды MathCAD `runif`. Переменная p используется для подсчета общего числа протестированных пар отсчетов СВ X и Y .

Тогда массивы отсчетов нормально распределенных СВ $Z1$ и $Z2$ могут быть выделены из полученной трехмерной матрицы следующим образом:

$$\begin{aligned}
 i &:= 0..N - 1 \\
 Z1_i &:= (XY_{0,0})_i \\
 Z2_i &:= (XY_{0,1})_i
 \end{aligned}$$

Оцените эффективность метода, разделив число отсчетов любого из сформированных массивов на значение переменной p :

$$\frac{N}{XY_{0,2}} =$$

и *сравните полученное значение с теоретическим 0,785*.

По аналогии с п. 2.2.2 – 2.2.4 постройте гистограммы распределений и проверьте гипотезу о нормальном распределении сформированных СВ, проверьте статистическую независимость отсчетов внутри каждого из массивов, постройте корреляционную функцию и убедитесь, что она соответствует модели δ -функции. *Сделайте необходимые выводы.*

2.3. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- титульный лист (см. Приложение А);
- цель работы, название пунктов лабораторного задания;
- результаты машинного эксперимента (листинг программного кода с графическими результатами);
- выводы по проделанной работе.

2.4. Контрольные вопросы и задания

1. Какой физический смысл имеет функция распределения СВ?
2. В чем состоит метод обратного преобразования функции распределения?
3. Получите выражение, определяющее преобразование СВ, равномерно распределенной на интервале $[0, 1]$ в СВ, распределенную [4]:
 - экспоненциально;
 - по закону Рэлея;
 - по закону арксинуса с плотностью распределения вероятности вида:

$$W(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

- по закону Вейбулла с плотностью распределения вероятности вида:

$$W(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-\sqrt{x}}, \quad x \geq 0;$$

– по логистическому закону с плотностью распределения вероятности вида:

$$W(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2};$$

– по закону Коши с плотностью распределения вероятности вида:

$$W(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2};$$

– по закону Парето с плотностью распределения вероятности вида:

$$W(x) = \frac{2}{x^3}, x \geq 1.$$

Осуществите верификацию полученного преобразования, сформировав соответствующий программный код в среде MathCAD, используя результаты лабораторного исследования.

4. В чем суть преобразования Бокса-Мюллера?
5. Докажите выражения (2.6), описывающие преобразование Бокса-Мюллера.
6. Докажите, что преобразование Бокса-Мюллера дает пару нормально распределенных СВ. От чего зависит дисперсия этих СВ?
7. Как изменить математическое ожидание и дисперсию нормально распределенных СВ, определенных преобразованием Бокса-Мюллера?
8. В чем суть модифицированного преобразования Бокса-Мюллера?
9. Докажите выражения (2.12), описывающие модифицированное преобразование Бокса-Мюллера.
10. В чем достоинство и недостаток модифицированного преобразования Бокса-Мюллера?

2.5. Список использованных источников

1. Преобразование равномерно распределенной случайной величины в нормально распределенную. [Электронный ресурс] // habr. 2014. 12 января. URL: <https://habr.com/post/208684/> (дата обращения: 20.10.2017)
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учебник / Е.С. Вентцель. – 11-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2010. – 664 с.
3. Кирьянов Д.В. Mathcad 14. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 704 с.
4. Вероятностные распределения и их свойства. [Электронный ресурс] // HR-Portal: HR Сообщество и публикации. URL: <http://hr-portal.ru/statistica/gl3/gl3.php> (дата обращения: 24.11.2017)

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

«Изучение характеристик узкополосных случайных процессов»

Цель работы: Провести модельные исследования числовых, вероятностных, энергетических и корреляционных характеристик узкополосных случайных процессов.

3.1. Краткие теоретические сведения

Типовые шумовые процессы, имеющие место в канале связи, как правило, описываются моделью «**белого шума**».

Под «**белым шумом**» принято понимать случайный процесс, имеющий следующие характеристики [1]:

- нормальный закон распределения с нулевым математическим ожиданием и бесконечной дисперсией;
- равномерную во всем диапазоне частот спектральную плотность средней мощности;
- δ -коррелированные отсчеты (отсчеты, взятые в различные моменты времени, статистически независимы).

Термин «**белый шум**» является аналогом понятия «**белого цвета**» в оптике, представляющего собой совокупность электромагнитных колебаний со всевозможными частотами.

Такой модели в подавляющем большинстве случаев удовлетворяют собственные шумы радиоаппаратуры (тепловой шум резисторов и дробовой шум полупроводниковых приборов), а также атмосферные шумы (тепловое излучение Земли и ее атмосферы, космические шумы других планет, звезд и межзвездного пространства).

Причиной **теплового шума** [2] является тепловое (хаотическое) движение носителей заряда в проводниках и проводящих электрорадиоэлементах (обладающих активным сопротивлением¹), в результате которого на концах проводника возникает флуктуирующая разность потенциалов (имеющая нулевое среднее значение). Закономерности этого вида шума были впервые установлены экспериментально в 1928 г. *Джоном Б. Джонсоном* и объяснены в работе шведского ученого *Гарри Найквиста* «Тепловое движение электрических зарядов в проводниках».

¹ Емкости и индуктивности не являются источниками теплового шума.

Мощность теплового шума не зависит ни от приложенного напряжения, ни от величины силы тока, ни от конкретного значения частоты приложенного напряжения, а зависит только от температуры и ширины полосы частот, в которой происходит ее измерение. Средний квадрат напряжения теплового шума может быть определен в соответствии с формулой *Найквиста*:

$$\overline{u^2} = 4kTR\Delta f, \quad (3.1)$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж / К – постоянная *Больцмана*; T – температура проводника; R – активное сопротивление проводника; Δf – ширина полосы частот, в которой проводятся измерения.

Спектральная плотность средней мощности теплового шума может считаться равномерной и равной:

$$S(f) = \frac{\overline{u^2}}{\Delta f} = 4kTR \quad (3.2)$$

вплоть до частот порядка

$$f_{\max} \approx \frac{kT}{h}, \quad (3.3)$$

где $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная *Планка*. При комнатной температуре $T = 293$ К эта частота составляет порядка $6 \cdot 10^{12}$ Гц.

Тепловой шум определяет нижнюю границу шумов любого детектора, источника сигнала или усилителя. От него невозможно полностью избавиться, но его можно уменьшить, понизив температуру, уменьшив активное сопротивление источника теплового шума и сузив полосу пропускания регистрирующего сигнал устройства.

Флуктуации шумового напряжения на концах проводника, вызванные тепловым движением отдельных электронов, представляют собой последовательность независимых случайных событий, имеющих одинаковый закон распределения (в силу одинаковой природы их возникновения). При достаточно большом числе таких событий распределение их суммы стремится к нормальному закону распределения.

Дробовой шум [2] представляет собой флуктуации напряжений и токов относительно их среднего значения, являющиеся следствием дискретности электрического заряда. Перемещение каждого такого носителя сопровождается импульсом электрического тока в цепи. В отличие от теплового шума дробовой шум не зависит от температуры.

Термин «**дробовой шум**» возник в связи с тем, что благодаря ему в громкоговорителе, подключённом к выходу усилителя или радиоприёмника, появляется акустический шум, воспринимаемый ухом как напоминающий шум сыплющихся дробинок. Он также проявляется в виде «снега» на экране телевизора, а также помех так называемой «травки» на радиолокационном индикаторе и т. п.

Спектральная плотность средней мощности дробового шума определяется формулой Шоттки:

$$S(f) = \frac{\overline{i^2}}{\Delta f} = e \cdot I_0, \quad (3.4)$$

где $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ – элементарный заряд, а I_0 – среднее значение тока в электрической цепи.

Поскольку переход отдельных носителей через область пространственного заряда в р-п-переходе или через барьер Шоттки представляет собой совокупность независимых случайных событий, то дробовой шум, также как и тепловой, характеризуется нормальным законом распределения.

Ввиду неизменности спектральной плотности средней мощности теплового и дробового шумов в широком (теоретически бесконечном) частотном диапазоне такие шумы называют **широкополосными**. В процессе прохождения через избирательные электрические цепи приемных устройств диапазон частот, занимаемый энергетическим спектром случайного процесса (СП), ограничивается, и при хорошей избирательности ширина спектра становится много меньше центральной частоты:

$$\Delta f \ll f_0. \quad (3.5)$$

Случайный процесс, образующийся на выходе избирательной цепи, принято называть **узкополосным**.

Комплексный коэффициент передачи узкополосных цепей, как правило, представляют в виде одной из двух моделей [3]:

– идеальный фильтр¹

¹ Символ j , использованный в данном и последующих выражениях обозначает мнимую единицу.

$$K(f) = \begin{cases} K_0 \cdot \exp\left(j \cdot \frac{f - f_0}{\Delta f} \cdot \frac{\pi}{2}\right), & |f - f_0| \leq \frac{\Delta f}{2} \\ 0, \text{если } |f - f_0| > \frac{\Delta f}{2}; \end{cases} \quad (3.6)$$

– гауссовский фильтр

$$K(f) = K_0 \cdot \exp\left(-4 \cdot \left(\frac{f - f_0}{\Delta f}\right)^2 \cdot \ln(\sqrt{2})\right) \cdot \exp\left(-j \cdot \frac{f - f_0}{\Delta f} \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.7)$$

где первый экспоненциальный множитель описывает форму амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) полосового фильтра (множитель $\ln(\sqrt{2})$ обеспечивает заданную неравномерность АЧХ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ в пределах полосы пропускания), а второй экспоненциальный множитель описывает линейную ФЧХ фильтра и обеспечивает сдвиг фаз $\pm \frac{\pi}{4}$ на границах полосы пропускания фильтра по сравнению с нулевым значением для центральной частоты полосы пропускания.

В соответствии со спектральным методом, спектральная плотность средней мощности узкополосного случайного процесса на выходе избирательной цепи с комплексным коэффициентом передачи $K(f)$ при действии на входе белого шума будет иметь вид:

$$S(f) = S_0 |K(f)|^2 \quad (3.8)$$

и для рассмотренных выше аппроксимаций $K(f)$ она равна:

– для узкополосного СП на выходе идеального полосового фильтра

$$S(f) = \begin{cases} S_{\max}, \text{если } |f - f_0| \leq \frac{\Delta f}{2} \\ 0, \text{если } |f - f_0| > \frac{\Delta f}{2}; \end{cases} \quad (3.9)$$

– для узкополосного СП на выходе гауссовского полосового фильтра

$$S(f) = S_{\max} \cdot \exp\left(-4 \cdot \left(\frac{f - f_0}{\Delta f}\right)^2 \cdot \ln(2)\right). \quad (3.10)$$

Поскольку в выражениях (3.6) и (3.7) присутствуют только положительные частоты, то записанные спектральные плотности средней мощности (3.9) и (3.10) представляют собой так называемые **физические спектры** [4].

Центральная частота энергетического спектра узкополосного СП может быть оценена в соответствии с выражением [3]:

$$f_0 = \frac{\int_0^{\infty} f \cdot S(f) df}{\int_0^{\infty} S(f) df} \quad (3.11)$$

и совпадает с использованным в выражениях (3.9) и (3.10) обозначением для центральной частоты полосы пропускания полосового фильтра.

При определении ширины энергетического спектра используют два подхода [3]:

- эффективную ширину спектра (энергетический подход)

$$\Delta f_{\text{эфф}} = \frac{1}{S_{\text{max}}} \int_0^{\infty} S(f) df; \quad (3.12)$$

- среднеквадратическую ширину спектра (статистический подход)

$$\frac{\Delta f_{\text{ск}}}{2} = \sqrt{\frac{\int_0^{\infty} (f - f_0)^2 S(f) df}{\int_0^{\infty} S(f) df}}. \quad (3.13)$$

Подстановка (3.9) и (3.10) в выражения (3.12) и (3.13) дает следующие значения ширины спектра:

- для узкополосного СП на выходе идеального полосового фильтра

$$\Delta f_{\text{эфф}} = \Delta f, \quad \Delta f_{\text{ск}} = \frac{\Delta f}{\sqrt{3}}; \quad (3.14)$$

- для узкополосного СП на выходе гауссовского полосового фильтра

$$\Delta f_{\text{эфф}} = \frac{\Delta f}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\ln(2)}}, \quad \Delta f_{\text{ск}} = \frac{\Delta f}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\ln(2)}}. \quad (3.15)$$

С учетом явления нормализации СП при прохождении через узкополосную цепь, которое подробнее будет рассмотрено в **лабораторной работе № 5**, узкополосный СП будет характеризоваться нормальным распределением с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией.

Известно, что корреляционная функция СП связана со спектральной плотностью средней мощности преобразованиями *Винера-Хинчина* [14]:

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot \exp(j\omega\tau) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot \exp(j2\pi f\tau) df,$$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \cdot \exp(-j2\pi f\tau) d\tau.$$

В случае использования в качестве $S(f)$ физического спектра, данные выражения принимают вид [1]:

$$K_x(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S(f) \cdot \cos(2\pi f\tau) df; \quad S(f) = 2 \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cdot \cos(2\pi f\tau) d\tau. \quad (3.16)$$

Подстановка (3.9) и (3.10) в первое из выражений (3.16) приводит к следующему виду корреляционной функции узкополосного СП на выходе полосового фильтра с идеальной и гауссовой формой АЧХ:

– для узкополосного СП на выходе идеального полосового фильтра

$$K_x(\tau) = S_{\max\text{эфф}} \Delta f \cdot \frac{\sin(\pi\Delta f\tau)}{(\pi\Delta f\tau)} \cdot \cos(2\pi f\tau); \quad (3.17)$$

– для узкополосного СП на выходе гауссовского полосового фильтра

$$K_x(\tau) = S_{\max\text{эфф}} \Delta f \cdot \exp\left(-\frac{(\pi\Delta f\tau)^2}{4 \cdot \ln(2)}\right) \cdot \cos(2\pi f\tau). \quad (3.18)$$

Вид данных корреляционных функций приведен на рис. 3.1, где сплошной линией изображен периодический множитель $\cos(2\pi f_0\tau)$, а пунктиром – показаны медленно меняющаяся огибающая корреляционной функции и ее зеркальное отображение.

Дисперсия таких узкополосных процессов будет равна:

$$\sigma_x^2 = K_x(0) = S_{\max\text{эфф}} \Delta f. \quad (3.19)$$

На рис. 3.2 приведена возможная реализация узкополосного СП.

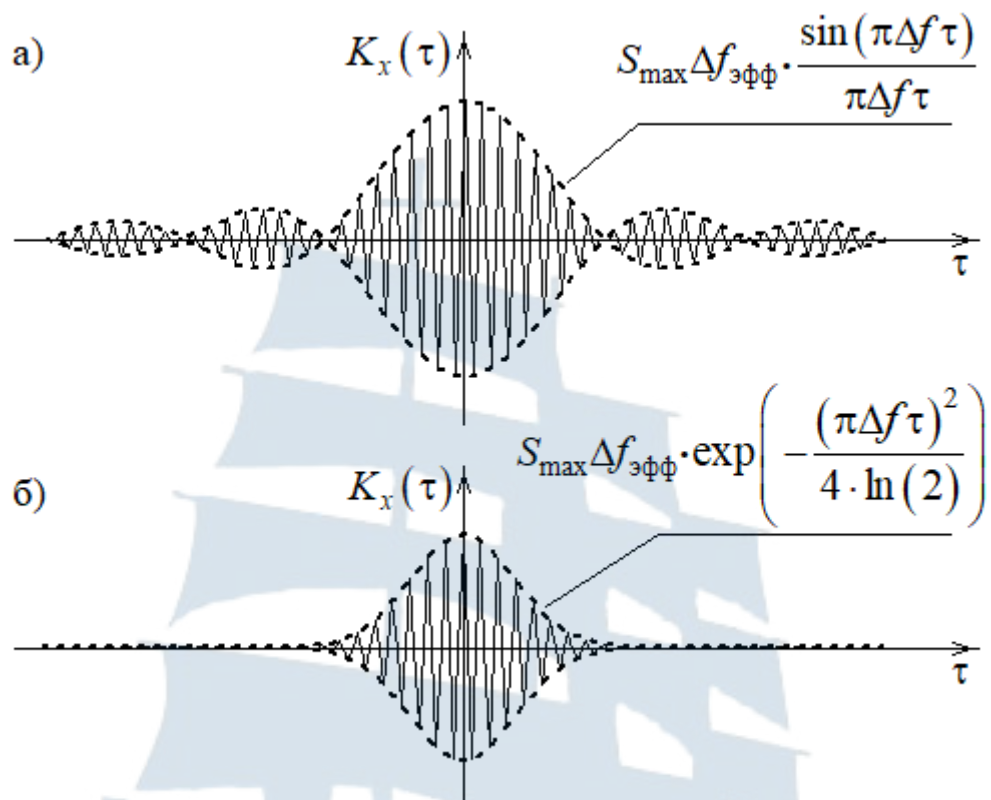


Рис. 3.1. Вид корреляционных функций узкополосных СП на выходе полосового фильтра:
 а) с идеальной формой АЧХ; б) с гауссовой формой АЧХ

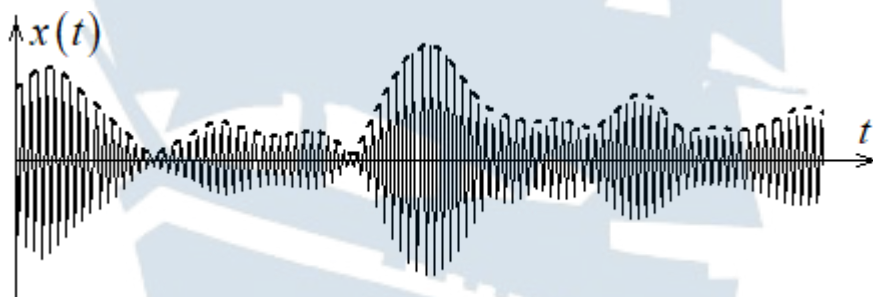


Рис. 3.2. Реализация узкополосного СП

Вид временной диаграммы, приведенной на рис. 3.2, говорит о том, что такой случайный сигнал подобен амплитудно-модулированному радиосигналу и может быть записан в виде [3]:

$$x(t) = A(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \theta(t)), \quad (3.20)$$

где $A(t)$ и $\theta(t)$ – случайные функции, медленно меняющиеся со временем по сравнению с частотой f_0 . Функция $A(t)$ носит название

огибающей узкополосного СП, а $\theta(t)$ – начальной фазы узкополосного СП. На рис. 3.2 огибающая изображена пунктиром, а $\cos(2\pi f_0 t + \theta(t))$ – сплошной линией. Такое представление реализации СП носит название **квазигармонического представления**.

Путем простых тригонометрических преобразований выражение (3.20) может быть переписано в виде [2]:

$$x(t) = A_c(t) \cos(2\pi f_0 t) - A_s(t) \sin(2\pi f_0 t), \quad (3.21)$$

где $A_c(t) = A(t) \cos(\theta(t))$ и $A_s(t) = A(t) \sin(\theta(t))$ носят название **квадратурных составляющих узкополосного СП**.

Низкочастотные квадратуры $A_c(t)$ и $A_s(t)$ могут быть выражены через узкополосный СП $x(t)$ и сопряженный ему по Гильберту СП $\tilde{x}(t)$ [2]:

$$\tilde{x}(t) = A_c(t) \sin(2\pi f_0 t) + A_s(t) \cos(2\pi f_0 t). \quad (3.22)$$

Тогда

$$A_c(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t) + \tilde{x}(t) \sin(2\pi f_0 t); \quad (3.23)$$

$$A_s(t) = -x(t) \sin(2\pi f_0 t) + \tilde{x}(t) \cos(2\pi f_0 t). \quad (3.24)$$

Поскольку преобразование Гильберта является линейным, то сопряженный сигнал $\tilde{x}(t)$ является нормальным СП с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma_{\tilde{x}}^2 = \sigma_x^2$. Действительно

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t_1)}{t - t_1} dt_1 \Rightarrow m_{\tilde{x}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m_x}{t - t_1} dt_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{0}{t - t_1} dt_1 = 0. \quad (3.25)$$

Равенство дисперсий следует из равенства спектральных плотностей средней мощности, а значит, и корреляционных функций. Последнее можно продемонстрировать следующим образом. Обозначим прямые преобразования Фурье низкочастотных квадратур как $F_{Ac}(j\omega)$ и $F_{As}(j\omega)$. Произведение реализаций квадратур на гармонические функции $\cos(2\pi f_0 t)$ и $\sin(2\pi f_0 t)$ приводит к разделению преобразования Фурье на две составляющие, симметрично расположенные по обе стороны от $f = 0$:

$$A_c(t) \cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2} F_{Ac}(j[\omega - 2\pi f_0]) + \frac{1}{2} F_{Ac}(j[\omega + 2\pi f_0]),$$

$$A_c(t) \sin(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2j} F_{Ac}(j[\omega - 2\pi f_0]) - \frac{1}{2j} F_{Ac}(j[\omega + 2\pi f_0]);$$

$$A_s(t) \cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2} F_{As}(j[\omega - 2\pi f_0]) + \frac{1}{2} F_{As}(j[\omega + 2\pi f_0]),$$

$$A_y(t) \sin(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2j} F_{As}(j[\omega - 2\pi f_0]) - \frac{1}{2j} F_{As}(j[\omega + 2\pi f_0]),$$

где первые слагаемые отвечают за положительную область частот, а вторые – за отрицательную область частот.

Тогда в области положительных частот спектральные плотности средней мощности СП $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ будут равны соответственно:

$$S_x(f) = \frac{1}{2} \left| F_{Ac}(j[\omega - 2\pi f_0]) + j \cdot F_{As}(j[\omega - 2\pi f_0]) \right|^2;$$

$$S_{\tilde{x}}(f) = \frac{1}{2} \left| F_{As}(j[\omega - 2\pi f_0]) - j \cdot F_{Ac}(j[\omega - 2\pi f_0]) \right|^2.$$

Если вынести из последнего выражения за скобки $-j$, то с учетом равенства $|-j|^2 = 1$ выражения станут одинаковыми. Аналогичное равенство выполняется и в области отрицательных частот:

$$S_x(f) = \frac{1}{2} \left| F_{Ac}(j[\omega + 2\pi f_0]) - j \cdot F_{As}(j[\omega + 2\pi f_0]) \right|^2;$$

$$S_{\tilde{x}}(f) = \frac{1}{2} \left| F_{As}(j[\omega + 2\pi f_0]) + j \cdot F_{Ac}(j[\omega + 2\pi f_0]) \right|^2.$$

Если вынести из последнего выражения за скобки j , то с учетом равенства $|j|^2 = 1$ выражения опять станут одинаковыми.

Таким образом, выполняется равенство вида:

$$S_x(f) = S_{\tilde{x}}(f). \quad (3.26)$$

Тогда в соответствии с выражением (3.16) выполняется равенство корреляционных функций $K_x(\tau) = K_{\tilde{x}}(\tau)$, значит, и дисперсий:

$$\sigma_{\tilde{x}}^2 = K_{\tilde{x}}(0) = K_x(0) = \sigma_x^2. \quad (3.27)$$

Определим взаимную корреляционную функцию СП $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$:

$$\begin{aligned} K_{x\tilde{x}}(\tau) &= \langle x(t)\tilde{x}(t-\tau) \rangle = \left\langle x(t) \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t_1)}{t-\tau-t_1} dt_1 \right\rangle = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\langle x(t)x(t_1) \rangle}{t-\tau-t_1} dt_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_x(t-t_1)}{t-\tau-t_1} dt_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_x(t_2)}{\tau-t_2} dt_2. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Нетрудно показать, что данная функция является нечетной:

$$\begin{aligned} K_{x\tilde{x}}(-\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_x(t_2)}{-\tau-t_2} dt_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_x(-t_2)}{-\tau-t_2} dt_2 = \left| \begin{array}{l} -t_2 = t_3 \\ dt_2 = -dt_3 \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_x(t_3)}{-\tau+t_3} dt_3 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_x(t_3)}{\tau-t_3} dt_3 = -K_{x\tilde{x}}(\tau) \end{aligned}$$

Таким образом, выполняется равенство нулю взаимной корреляционной функции при равенстве нулю ее аргумента $K_{x\tilde{x}}(0) = 0$, а, значит, СП $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ являются некоррелированными в один и тот же момент времени, а следовательно, они независимы.

Выражения (3.23) и (3.24) также описывают линейные преобразования от пары СП $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ к паре СП $A_c(t)$ и $A_s(t)$, значит, и квадратуры $A_c(t)$ и $A_s(t)$ являются нормальными СП.

Очевидно, что их математические ожидания равны нулю:

$$m_{A_c} = \langle A_c(t) \rangle = \langle x(t) \rangle \cos(2\pi f_0 t) + \langle \tilde{x}(t) \rangle \sin(2\pi f_0 t) = 0;$$

$$m_{A_s} = \langle A_s(t) \rangle = -\langle x(t) \rangle \sin(2\pi f_0 t) + \langle \tilde{x}(t) \rangle \cos(2\pi f_0 t) = 0.$$

Дисперсии квадратур оказываются равными следующим значениям:

$$\begin{aligned} \sigma_{A_c}^2 &= \langle (A_c(t))^2 \rangle = \langle x^2(t) \rangle \cos^2(2\pi f_0 t) + \langle \tilde{x}^2(t) \rangle \sin^2(2\pi f_0 t) + \\ &+ 2\langle x(t)\tilde{x}(t) \rangle \cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 t) = \sigma_x^2 \cos^2(2\pi f_0 t) + \sigma_{\tilde{x}}^2 \sin^2(2\pi f_0 t) + \\ &+ K_{x\tilde{x}}(0) \sin(4\pi f_0 t) = \sigma_x^2 \cos^2(2\pi f_0 t) + \sigma_x^2 \sin^2(2\pi f_0 t) = \sigma_x^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{A_s}^2 &= \left\langle (A_s(t))^2 \right\rangle = \left\langle x^2(t) \right\rangle \sin^2(2\pi f_0 t) + \left\langle \tilde{x}^2(t) \right\rangle \cos^2(2\pi f_0 t) - \\ &- 2 \left\langle x(t) \tilde{x}(t) \right\rangle \cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 t) = \sigma_x^2 \sin^2(2\pi f_0 t) + \sigma_x^2 \cos^2(2\pi f_0 t) - \\ &- K_{x\tilde{x}}(0) \sin(4\pi f_0 t) = \sigma_x^2 \cos^2(2\pi f_0 t) + \sigma_x^2 \sin^2(2\pi f_0 t) = \sigma_x^2.\end{aligned}$$

Таким образом, дисперсии квадратур равны между собой и совпадают с дисперсией узкополосного СП:

$$\sigma_{A_c}^2 = \sigma_{A_s}^2 = \sigma_x^2. \quad (3.29)$$

Кроме того, СП $A_c(t)$ и $A_s(t)$ являются независимыми. Это напрямую следует из независимости СП $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$. Действительно, если взять квадратуры в совпадающие моменты времени, то:

$$\begin{aligned}K_{A_c A_s}(0) &= \left\langle A_c(t) A_s(t) \right\rangle = - \left\langle x^2(t) \right\rangle \sin(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 t) + \\ &+ \left\langle \tilde{x}^2(t) \right\rangle \sin(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 t) + \left\langle x(t) \tilde{x}(t) \right\rangle \cos^2(2\pi f_0 t) - \\ &- \left\langle x(t) \tilde{x}(t) \right\rangle \sin^2(2\pi f_0 t) = -\sigma_x^2 \sin(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 t) + \\ &+ \sigma_x^2 \sin(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 t) + K_{x\tilde{x}}(0) \left[\cos^2(2\pi f_0 t) - \sin^2(2\pi f_0 t) \right] = 0.\end{aligned}$$

Тогда в соответствии с **теоремой о перемножении плотностей распределения вероятности независимых СП** двумерная плотность распределения вероятности квадратур будет равна:

$$W(A_c, A_s) = W(A_c) W(A_s) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \cdot \exp\left[-\frac{A_c^2 + A_s^2}{2\sigma_x^2}\right]. \quad (3.30)$$

Для определения статистических свойств огибающей $A(t)$ и начальной фазы $\theta(t)$ узкополосного СП необходимо вычислить якобиан преобразования от переменных (A_c, A_s) к переменным (A, θ) :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial A_c}{\partial A} & \frac{\partial A_c}{\partial \theta} \\ \frac{\partial A_s}{\partial A} & \frac{\partial A_s}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -A \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & A \cdot \cos(\theta) \end{vmatrix} = A \cdot \{ \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \} = A. \quad (3.31)$$

Тогда в соответствии с **правилом преобразования плотности распределения вероятности СП**:

$$W(A, \theta) = W(A \cos(\theta), A \sin(\theta)) \cdot |J| = \frac{A}{2\pi\sigma_x^2} \cdot \exp\left[-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right]. \quad (3.32)$$

Одномерные плотности распределения вероятностей огибающей $W(A)$ и начальной фазы $W(\theta)$ получаются интегрированием выражения (3.32) по лишним переменным:

$$W(A) = \int_{-\pi}^{\pi} W(A, \theta) d\theta = \frac{A}{\sigma_x^2} \cdot \exp\left[-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right], \quad A \geq 0, \quad (3.33)$$

$$W(\theta) = \int_0^{\infty} W(A, \theta) dA = \frac{1}{2\pi}, \quad \theta \in [-\pi, \pi]. \quad (3.34)$$

В соответствии с выражение (3.33) огибающая узкополосного СП характеризуется распределением *Рэля* с математическим ожиданием и дисперсией:

$$m_A = \int_0^{\infty} A \cdot W(A) dA = \sigma_x \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad (3.35)$$

$$\sigma_A^2 = \int_0^{\infty} (A - m_A)^2 W(A) dA = \sigma_x^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right).$$

В соответствии с выражением (3.34) начальная фаза узкополосного СП характеризуется равномерным распределением с нулевым математическим ожиданием и дисперсией:

$$m_\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \theta \cdot W(\theta) d\theta = 0, \quad \sigma_\theta^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (\theta - m_\theta)^2 W(\theta) d\theta = \frac{\pi^2}{3}. \quad (3.36)$$

3.2. Лабораторное задание

3.2.1. Моделирование нормально распределенной СВ

Запустите приложение MathCAD.

Задайте число отсчетов широкополосного нормального СП, например:

$$N := 2^{16}$$

Процедура генерации отсчетов нормально распределенной СВ может быть осуществлена с использованием функции встроенного генератора MathCAD `norm` [4], прописываемой вручную:

$$Z := \text{norm}(N, 0, 1)$$

Приведенная функция позволяет сгенерировать массив отсчетов СВ объемом N с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Проверьте числовые характеристики (математическое ожидание и дисперсию) сформированной СВ, используя встроенные функции среды MathCAD mean и var [4]:

$$Z_{\text{cp}} := \text{mean}(Z) \quad Z_{\text{cp}} =$$

$$\sigma_Z := \sqrt{\text{var}(Z)} \quad \sigma_Z =$$

3.2.2. Моделирование узкополосного нормального СП

Для перехода от широкополосного СП к узкополосному СП необходимо симитировать его прохождение через узкополосную цепь. Оптимальным методом для решения данной задачи является **спектральный метод**. Постройте массив значений комплексного спектра реализации широкополосного СП Z с использованием встроенной функции среды MathCAD fft [4], прописываемой вручную. Данная функция осуществляет процедуру быстрого преобразования Фурье (БПФ) и имеет единственное ограничение – число отсчетов СП Z должно быть степенью двойки, что учтено в начале п. 3.2.1:

$$S_Z := \text{fft}(Z)$$

Убедиться в широкополосности СП Z можно построив амплитудный спектр¹, как это показано на рис. 3.3.

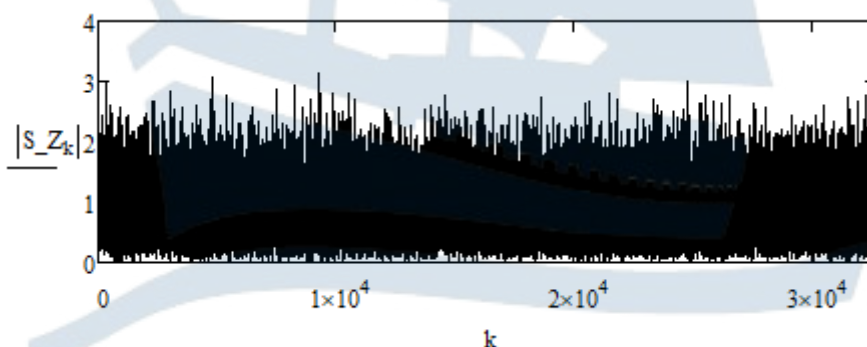


Рис. 3.3. Амплитудный спектр реализации широкополосного СП

¹ При желании можно отложить вдоль оси абсцисс отсчеты частоты $f_k := \frac{k}{N \cdot \Delta t}$, где Δt – шаг дискретизации широкополосного СП по времени, который определяет максимальную частоту в спектре. Без ограничения общности далее все амплитудные спектры приводятся в зависимости от номера отсчета комплексного спектра СП, а все временные диаграммы – в зависимости от номера отсчета временной реализации СП.

При построении графика необходимо помнить, что число отсчетов S_Z в 2 раза меньше, чем у самого процесса Z , или воспользоваться встроенной функцией среды MathCAD `last` [4] для определения максимального номера в массиве $\{S_Z_k\}$. Данная функция прописывается вручную:

$$k := 0..last(S_Z)$$

Задайте полуширину полосы пропускания узкополосной цепи, выраженную в количестве отсчетов комплексного спектра S_Z , например:

$$L := last(S_Z) \quad \Delta := \frac{L}{64}$$

В соответствии с выражениями (3.6) и (3.7) сформируйте отсчеты комплексных коэффициентов передачи узкополосных цепей с идеальной и гауссовой формами АЧХ. Используйте для этого следующие процедуры¹:

$$T1_k := \begin{cases} e^{-i \cdot \frac{k - \frac{L}{2}}{\Delta} \cdot \frac{\pi}{4}} & \text{if } \left| k - \frac{L}{2} \right| \leq \Delta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$T2_k := e^{-\left(\frac{k - \frac{L}{2}}{\Delta}\right)^2 \cdot \ln(\sqrt{2})} \cdot e^{-i \cdot \frac{k - \frac{L}{2}}{\Delta} \cdot \frac{\pi}{4}}$$

Для возможности выбора формы АЧХ узкополосной цепи введите переменную, отвечающую за тип фильтра, и объедините отсчеты комплексных коэффициентов передачи в одну функцию, например:

$$Tip := 1 \quad T_k := \begin{cases} T1_k & \text{if } Tip = 1 \\ T2_k & \text{if } Tip = 2 \end{cases}$$

В соответствии со спектральным методом сформируйте отсчеты узкополосного (*narrowband*) СП на выходе узкополосной цепи:

$$S_{Znb_k} := S_{Z_k} \cdot T_k$$

Постройте сформированный амплитудный спектр реализации узкополосного СП (рис. 3.4), ограничив область построения отсчета-

¹Символ i , использованный в последнем выражении, представляет собой мнимую единицу $\sqrt{-1}$ и выбирается на панели *Calculator*.

ми с номерами от $\frac{L}{2} - 5\Delta$ до $\frac{L}{2} + 5\Delta$. Отобразите в одних координатных осях, как это показано на рис. 3.4, амплитудный спектр и АЧХ узкополосной цепи:

$$k := \frac{L}{2} - 5 \cdot \Delta .. \frac{L}{2} + 5 \cdot \Delta$$

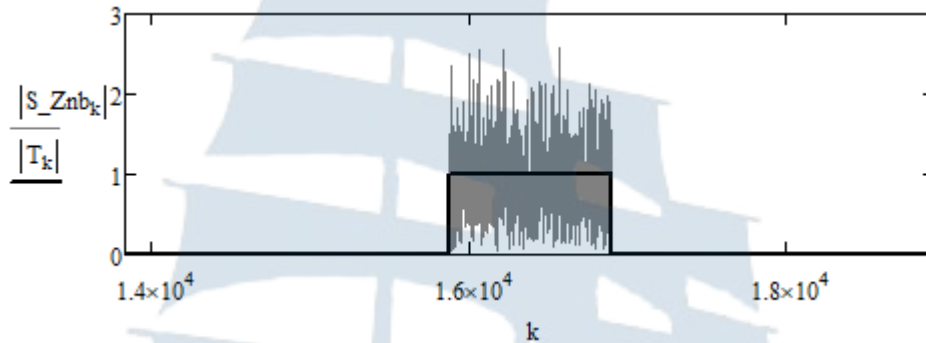


Рис. 3.4. Амплитудный спектр реализации узкополосного СП на выходе узкополосной цепи с идеальной формой АЧХ

Сформируйте массив отсчетов реализации узкополосного СП, перейдя от комплексного спектра S_Znb к временной реализации Znb с использованием встроенной функции среды MathCAD $ifft$ [4], осуществляющей процедуру обратного быстрого преобразования Фурье (ОБПФ). Данная функция прописывается вручную:

$$Znb := ifft(S_Znb)$$

Постройте временную реализацию сформированного узкополосного СП (рис. 3.5). Для удобства наблюдения осциллограммы ограничьте область построения, например, 1500 отсчетами:

$$n := 0..1500$$

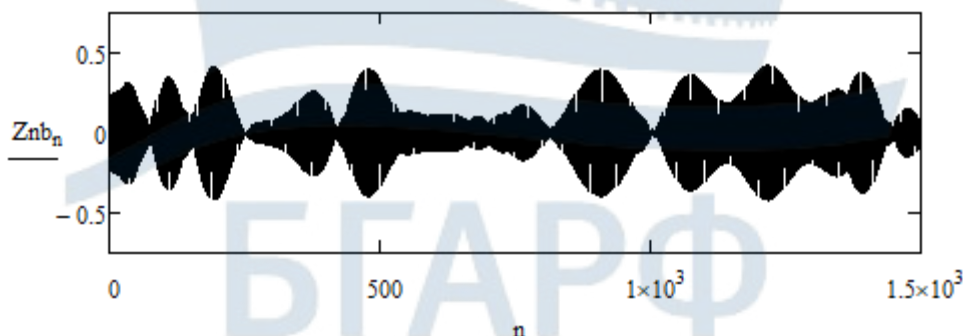


Рис. 3.5. Временная реализация узкополосного СП на выходе узкополосной цепи с идеальной формой АЧХ

Повторите проделанные процедуры для гауссовой формы АЧХ узкополосной цепи, поменяв значение введенной выше переменной *Tip*:

Tip := 2

Постройте амплитудный спектр реализации узкополосного СП (рис. 3.6). Убедитесь, что временная реализация СП по-прежнему описывает узкополосный СП.

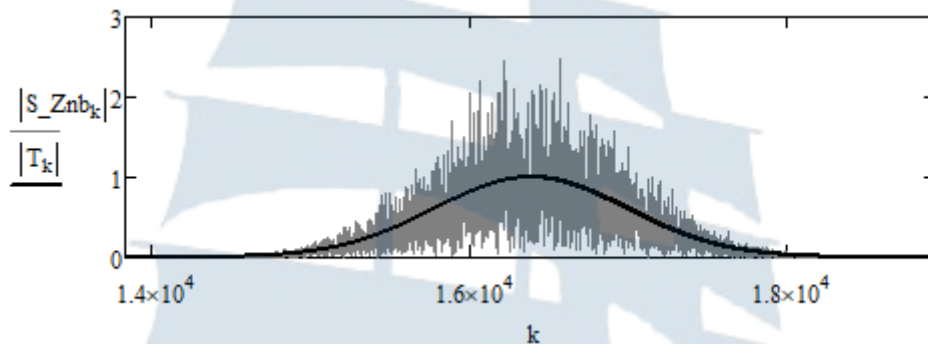


Рис. 3.6. Амплитудный спектр реализации узкополосного СП на выходе узкополосной цепи с гауссовой формой АЧХ

Для выделения квадратурных составляющих узкополосного СП необходимо знать центральную частоту спектра СП. Приведенные на рис. 3.4 и 3.6 амплитудные спектры представляют собой СП в частотной области. Поэтому необходимо провести усреднение достаточно большого числа таких спектров. С этой целью можно воспользоваться процедурой, приведенной ниже.

```

S :=
for i ∈ 0..(N/2)-1
  S1_i ← 0
for n ∈ 0..99
  Z ← rnorm(N,0,1)
  S_Z ← fft(Z)
  for i ∈ 0..(N/2)-1
    S1_i ← S1_i + 1/100 · (|S_Z_i|)^2 · (|T_i|)^2
S1

```

В данной процедуре первоначально в ячейки вектор-столбца $S1$ записываются нули, а с каждым новым шагом добавляется взвешенное значение энергетического спектра СП на выходе узкополосной цепи. Случайность реализаций обеспечивается формированием СП Z в цикле. К окончанию 100-го шага формируется усредненный по 100 реализациям энергетический спектр.

Постройте усредненный энергетический спектр узкополосного СП (рис. 3.7 и 3.8). **Убедитесь, что различие форм усредненного энергетического спектра СП и квадрата АЧХ узкополосной цепи меньше, чем амплитудного спектра реализации СП и АЧХ.**

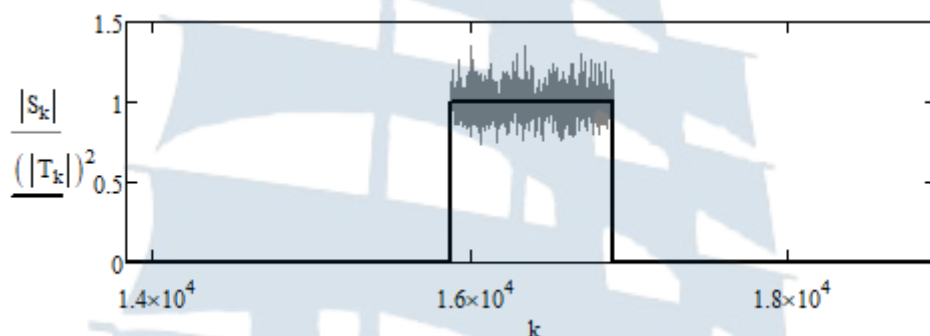


Рис. 3.7. Усредненный энергетический спектр узкополосного СП на выходе узкополосной цепи с идеальной формой АЧХ

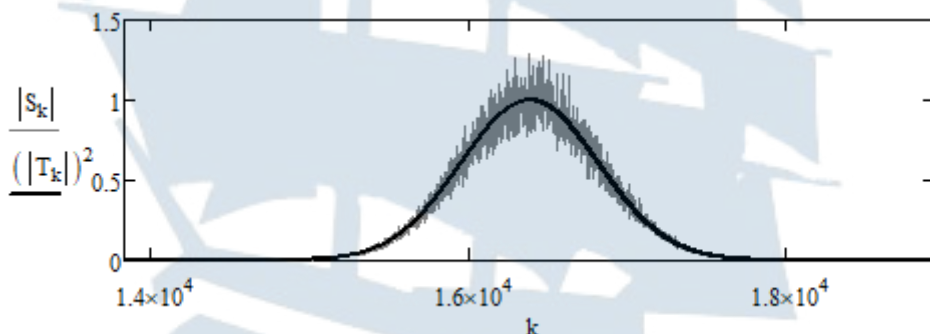


Рис. 3.8. Усредненный энергетический спектр узкополосного СП на выходе узкополосной цепи с гауссовой формой АЧХ

3.2.3. Проверка гипотезы о нормальном распределении узкополосного СП

Постройте гистограмму распределения отсчетов узкополосного СП (рис. 3.9) в соответствии с алгоритмом, изложенным в п. 1.2.2 лабораторного задания **лабораторной работы № 1**. При этом необходимо внести следующие корректировки. Число интервалов гистограммы выберите равным:

$$M := 30$$

При выборе шага интегрирования опирайтесь на минимальное и максимальное значения СВ, которые могут быть определены с использованием встроенных функций среды MathCAD \min и \max [4]:

$$h := \frac{\max(Znb) - \min(Znb)}{M}$$

При определении границ интервалов гистограммы необходимо учесть, что первая граница равна не 0, а $\min(Znb)$.

Таким образом, их стоит определять как:

$$j := 0..M \quad \text{int_Znb}_j := \min(Znb) + j \cdot h_Znb$$

Переменную для построения теоретического закона распределения СВ задайте исходя из тех же соображений, что и границы интервалов:

$$z := \min(Znb), \min(Znb) + \frac{\max(Znb) - \min(Znb)}{100} .. \max(Znb)$$

Для построения теоретического закона вычислите математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение (СКО) узкополосного СП:

$$\begin{aligned} Znb_cp &:= \text{mean}(Znb) & Znb_cp &= \\ \sigma_Znb &:= \sqrt{\text{var}(Znb)} & \sigma_Znb &= \end{aligned}$$

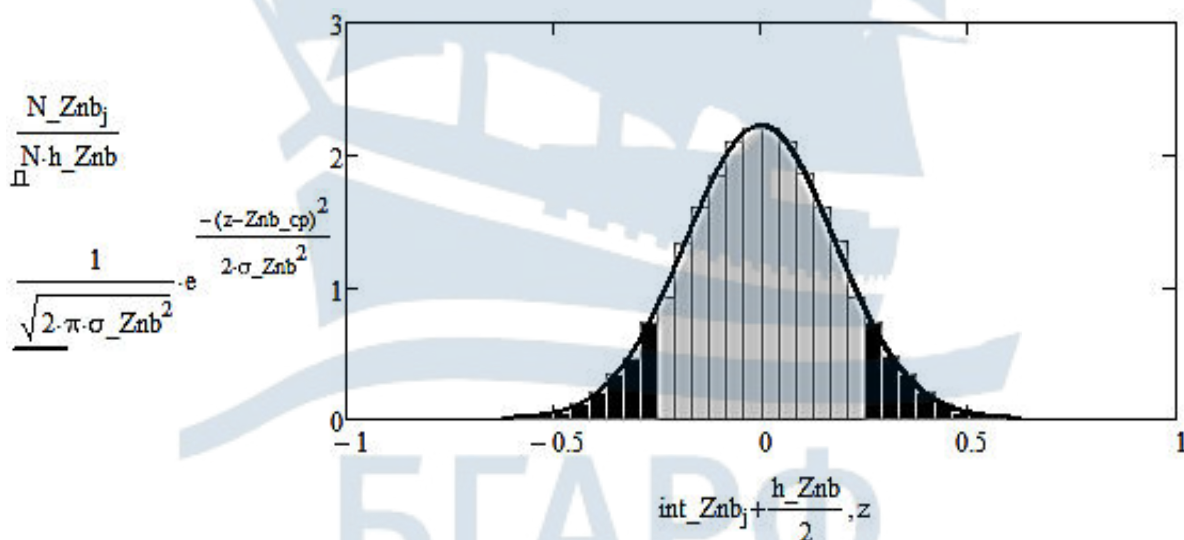


Рис. 3.9. Гистограмма распределения отсчетов узкополосного СП и теоретический закон распределения

Сравните полученное значение СКО со следующей оценкой:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot \Delta}{L}} =$$

где L – ширина спектра широкополосного СП с единичной дисперсией;
 2Δ – ширина спектра узкополосного СП.

Проверьте гипотезу о нормальном законе распределения отсчетов узкополосного СП. Для этого при доверительной вероятности 0,95 и $M - 3$ степенях свободы вычислите критическое значение критерия $\chi_{кр}^2$, используя встроенную функцию среды MathCAD `qchisq` [4].

Рассчитайте вероятности попадания отсчетов узкополосного СП в каждый из сформированных интервалов гистограммы:

$$j := 0..M - 1$$

$$P_Znb_j := \int_{int_Znb_j}^{int_Znb_{j+1}} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_Znb^2}} \cdot e^{-\frac{(z - Znb_cp)^2}{2 \cdot \sigma_Znb^2}} dz$$

а также модельное значение критерия χ^2 в соответствии с процедурой:

$$\chi_Znb := N \cdot \sum_{j=0}^{M-1} \frac{\left(\frac{N_Znb_j}{N} - P_Znb_j \right)^2}{P_Znb_j} \quad \chi_Znb =$$

Результаты расчета, скорее всего, покажут, что $\chi^2 > \chi_{кр}^2$ и гипотезу о нормальном распределении следовало бы отвергнуть. Однако причина завышенного результата вычисления χ^2 в увеличении вклада в общее значение критерия от интервалов, расположенных в хвостах гауссова распределения (черные области на рис. 3.9) [5]. Это увеличение связано с резким уменьшением значения знаменателя P_Znb_j при переходе к «хвостам» распределения. Чтобы этого избежать оцените для начала значение χ^2 для интервалов, лежащих в светлой области рисунка. Для этого можно воспользоваться следующей процедурой:

$$\chi_Znb0 := N \cdot \sum_{j=0}^{M-1} \left[\frac{\left(\frac{N_Znb_j}{N} - P_Znb_j \right)^2}{P_Znb_j} \text{ if } P_Znb_j > \frac{h_Znb}{3 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_Znb^2}} \right. \\ \left. 0 \text{ otherwise} \right]$$

Для оценки вкладов от интервалов в левом и правом «хвостах» распределения объедините их в два широких интервала. Рассчитайте их вклады, используя процедуры:

- для числа отсчетов узкополосного СП, попавших в первый широкий интервал

$$N_Znb1 := \sum_{j=0}^{\text{round}\left(\frac{M}{2}\right)} \left(\begin{array}{l} N_Znb_j \text{ if } P_Znb_j < \frac{h_Znb}{3 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_Znb^2}} \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \right)$$

- для числа отсчетов узкополосного СП, попавших во второй широкий интервал

$$N_Znb2 := \sum_{j=\text{round}\left(\frac{M}{2}\right)}^{M-1} \left(\begin{array}{l} N_Znb_j \text{ if } P_Znb_j < \frac{h_Znb}{3 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_Znb^2}} \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \right)$$

- для теоретической вероятности попадания отсчетов узкополосного СП в первый широкий интервал

$$P_Znb1 := \sum_{j=0}^{\text{round}\left(\frac{M}{2}\right)} \left(\begin{array}{l} P_Znb_j \text{ if } P_Znb_j < \frac{h_Znb}{3 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_Znb^2}} \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \right)$$

- для теоретической вероятности попадания отсчетов узкополосного СП во второй широкий интервал

$$P_Znb2 := \sum_{j=\text{round}\left(\frac{M}{2}\right)}^{M-1} \left(\begin{array}{l} P_Znb_j \text{ if } P_Znb_j < \frac{h_Znb}{3 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_Znb^2}} \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \right)$$

- для вклада в модельное значение критерия χ^2 от первого широкого интервала

$$\chi_Znb1 := N \cdot \frac{\left(\frac{N_Znb1}{N} - P_Znb1 \right)^2}{P_Znb1}$$

- для вклада в модельное значение критерия χ^2 от второго широкого интервала

$$\chi_{_Znb2} := N \cdot \frac{\left(\frac{N_Znb2}{N} - P_Znb2 \right)^2}{P_Znb2}$$

– для модельного значения критерия χ^2

$$\chi_{_Znb} := \chi_{_Znb0} + \chi_{_Znb1} + \chi_{_Znb2} \quad \chi_{_Znb} =$$

Убедитесь, что полученное значение критерия меньше критического. **Сделайте вывод по проверке гипотезы о нормальном законе распределения отсчетов узкополосного СП.**

3.2.4. Исследование корреляционных свойств узкополосного СП

Поскольку корреляционная функция достаточно быстро убывает, то нет необходимости рассчитывать ее значения для больших времен сдвига (больших номеров отсчетов времени сдвига). Ограничьте их число, например, следующим образом:

$$n := 0..3 \cdot \frac{L}{\Delta}$$

Сформируйте массив отсчетов корреляционной функции узкополосного СП, используя следующую процедуру:

$$K_Znb_n := \frac{2}{N} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{N-1}{2}} \left[(Znb_i - Znb_cp) \cdot (Znb_{i+n} - Znb_cp) \right]$$

Убедитесь, что максимальное значение корреляционной функции совпадает с дисперсией узкополосного СП. Для этого вычислите следующие величины:

$$\max(K_Znb) = \quad \text{var}(Znb) =$$

Задайте отсчеты теоретической огибающей корреляционной функции узкополосного СП в соответствии с выражениями (3.17) и (3.18) с учетом доказанного равенства:

– для узкополосного СП на выходе узкополосной цепи с идеальной формой АЧХ¹

¹ При записи данного и последующего выражений в соответствии с (3.17) и (3.18) учтено, что: $\tau = n \cdot \Delta t$, $\Delta f = \delta f \cdot 2\Delta = \frac{2\Delta}{N \cdot \Delta t} = \frac{2\Delta}{2L \cdot \Delta t} \Rightarrow \pi \cdot \Delta f \cdot \tau = \frac{\pi \cdot \Delta \cdot n}{L}$. Аналогично можно показать,

что: $2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t = 2 \cdot \pi \cdot L0 \cdot \delta f \cdot n \cdot \Delta t = 2 \cdot \pi \cdot L0 \cdot n \cdot \frac{1}{N \cdot \Delta t} \cdot \Delta t = \frac{2 \cdot \pi \cdot L0}{N} \cdot n$.

$$B1_n := \text{var}(Znb) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot \Delta \cdot n}{L}\right)}{\frac{\pi \cdot \Delta \cdot n}{L}}$$

– для узкополосного СП на выходе узкополосной цепи с гауссовой формой АЧХ

$$B2_n := \text{var}(Znb) \cdot e^{-\left(\frac{\pi \cdot \Delta \cdot n}{N \cdot \ln(2)}\right)^2 \cdot \ln(2)}$$

Для автоматизации построения графика объедините оба массива в один следующим образом:

$$B_n := \begin{cases} B1_n & \text{if } Tip = 1 \\ B2_n & \text{if } Tip = 2 \end{cases}$$

Тогда по заданному выше значению переменной *Tip* будет автоматически определяться вид огибающей корреляционной функции узкополосного СП.

Постройте график корреляционной функции узкополосного СП, отобразив на нем теоретическую огибающую (рис. 3.10):

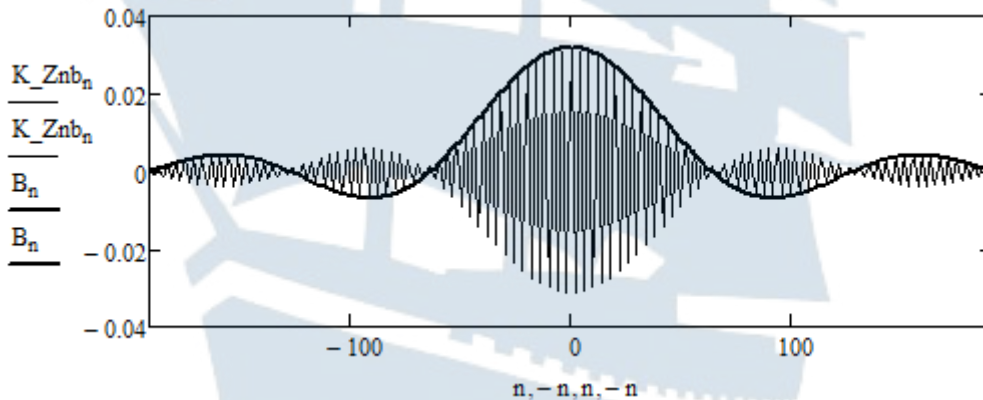


Рис. 3.10. График корреляционной функции узкополосного СП на выходе узкополосной цепи с идеальной формой АЧХ и ее огибающей

Сделайте вывод о характере временной зависимости корреляционной функции узкополосного СП.

Повторите вычисления корреляционной функции узкополосного СП для случая гауссовой формы АЧХ узкополосной цепи, поменяв значение введенной выше переменной *Tip*. Постройте график корреляционной функции узкополосного СП, отобразив на нем теоретическую огибающую (рис. 3.11).

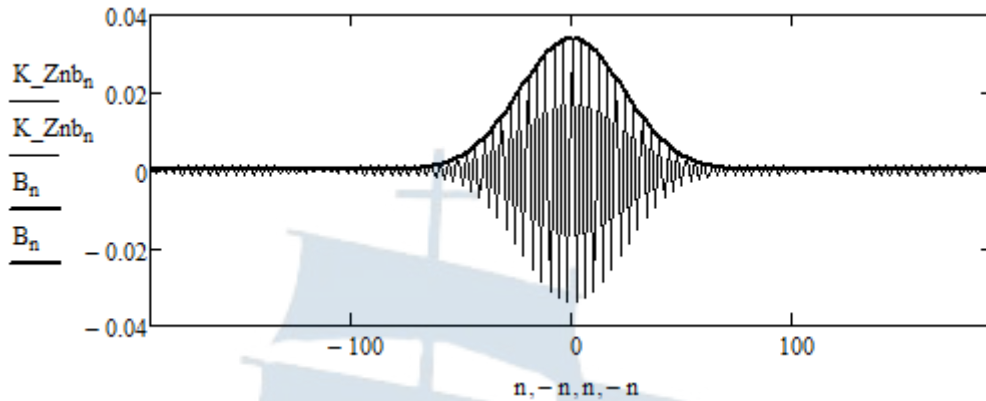


Рис. 3.11. График корреляционной функции узкополосного СП на выходе узкополосной цепи с гауссовой формой АЧХ и ее огибающей

Сделайте вывод о характере временной зависимости корреляционной функции узкополосного СП.

3.2.5. Формирование квадратур узкополосного СП

Для выделения квадратур узкополосного СП сформируйте отсчеты сопряженного по Гильберту СП. С этой целью воспользуйтесь связью спектральных плотностей узкополосного СП и сопряженного ему:

$$k: = 0..L$$

$$S_Znb1_k := -i \cdot S_Znb_k$$

$$Znb1: = \text{ifft}(S_Znb1)$$

Определите «номер» отсчета, соответствующий центральной частоте усредненного энергетического спектра узкополосного СП, в соответствии с выражением (3.11).

Сравните полученное значение с выбранным ранее $\frac{L}{2}$ и сделайте вывод.

$$L0: = \frac{\sum_{i=0}^{\frac{N-1}{2}} (i \cdot S_i)}{\sum_{i=0}^{\frac{N-1}{2}} S_i} \quad L0 =$$

Сформируйте отсчеты квадратур в соответствии с выражениями (3.23) и (3.24):

$$n: = 0..N-1$$

$$A_{c_n} := Znb_n \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot L0}{N} \cdot n\right) + Znb1_n \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot L0}{N} \cdot n\right)$$

$$A_{s_n} := -Znb_n \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot L0}{N} \cdot n\right) + Znb1_n \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot L0}{N} \cdot n\right)$$

Постройте временные реализации сформированных квадратур узкополосного СП (рис. 3.12 и 3.13), ограничив интервал наблюдения на графике, например, 5000 отсчетов.

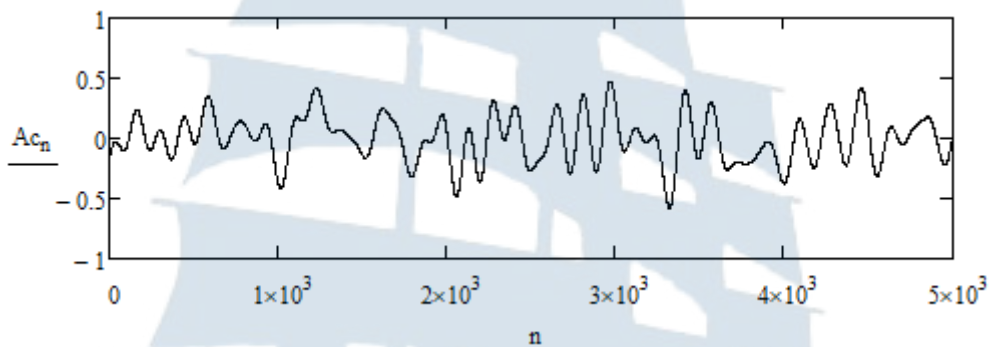


Рис. 3.12. Временная реализация низкочастотной синфазной составляющей узкополосного СП

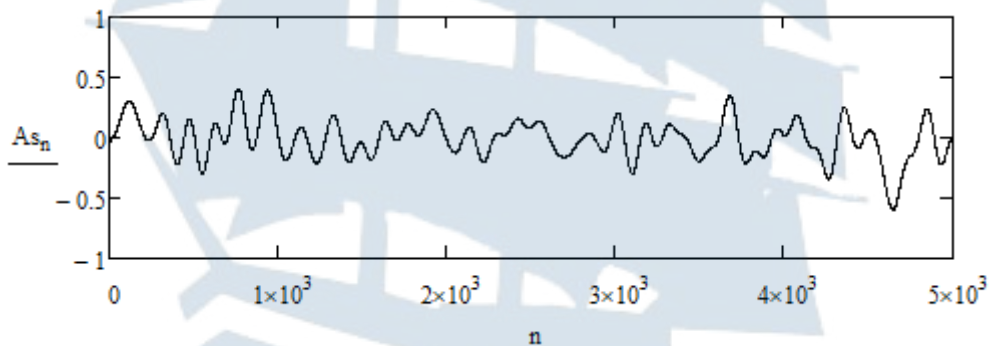


Рис. 3.13. Временная реализация низкочастотной квадратурной составляющей узкополосного СП

По аналогии с пунктом 3.2.3 постройте гистограммы распределения низкочастотных синфазной и квадратурной составляющих узкополосного СП. Отобразите в тех же координатных осях теоретические законы распределения, считая квадратуры нормально распределенными. Математические ожидания и дисперсии квадратур вычислите с использованием встроенных функций среды MathCAD `mean` и `var`. Сравните данные параметры между собой и с параметрами узкополосного СП.

Сделайте вывод о законе распределения квадратур узкополосного СП и о соотношении между дисперсиями квадратур и узкополосного СП.

3.2.6. Формирование огибающей и начальной фазы

Сформируйте отсчеты огибающей и начальной фазы узкополосного СП:

$$n: = 0..N-1$$

$$V_n := \sqrt{(Ac_n)^2 + (As_n)^2} \quad \Phi_n := \arg(Ac_n + i \cdot As_n)$$

Постройте временные реализации сформированных огибающей и начальной фазы узкополосного СП (рис. 3.14 и 3.15), ограничив интервал наблюдения на графике, например, 5000 отсчетов.

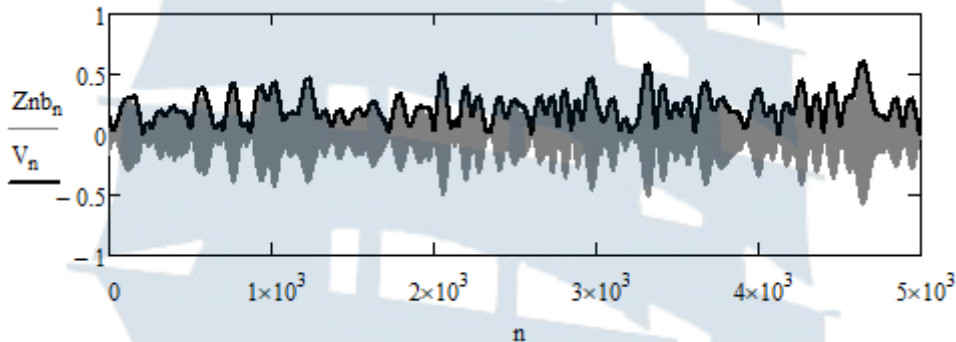


Рис. 3.14. Временная реализация огибающей узкополосного СП

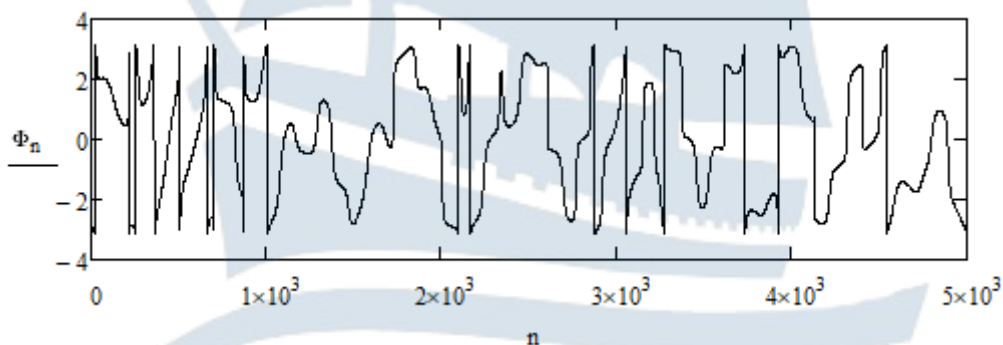


Рис. 3.15. Временная реализация начальной фазы узкополосного СП

По аналогии с пунктом 3.2.3 постройте гистограммы распределения огибающей (рис. 3.16) и начальной фазы (рис. 3.17) узкополосного СП. Отрадите в тех же координатных осях теоретические законы распределения, считая огибающую распределенной по закону Рэля, а начальную фазу – равномерно распределенной в интервале $[-\pi, \pi]$.

Параметр σ в распределении Рэлея выберите, исходя из математического ожидания и дисперсии огибающей:

$$\sigma_1 := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \text{mean}(V) \quad \sigma_2 := \sqrt{\frac{\text{var}(V)}{2 - \frac{\pi}{2}}} \quad \sigma_0 := \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

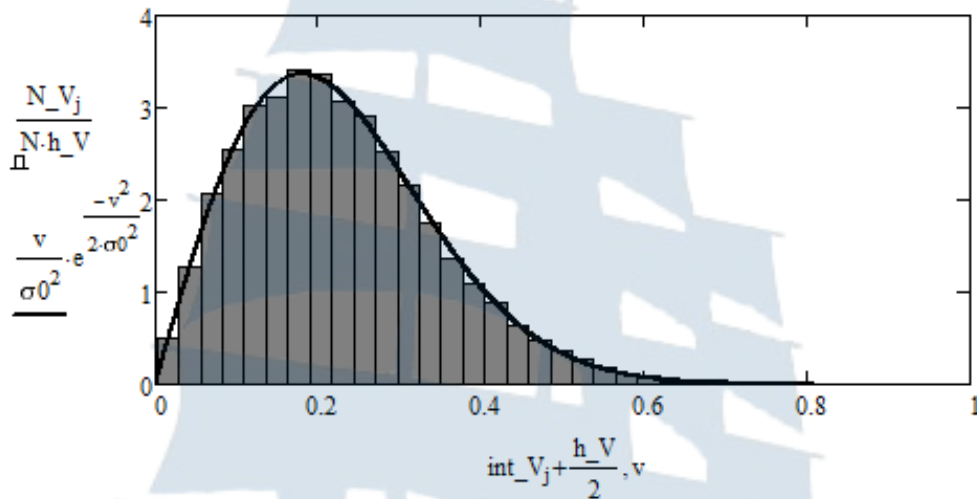


Рис. 3.16. Гистограмма распределения огибающей узкополосного СП и теоретический закон распределения

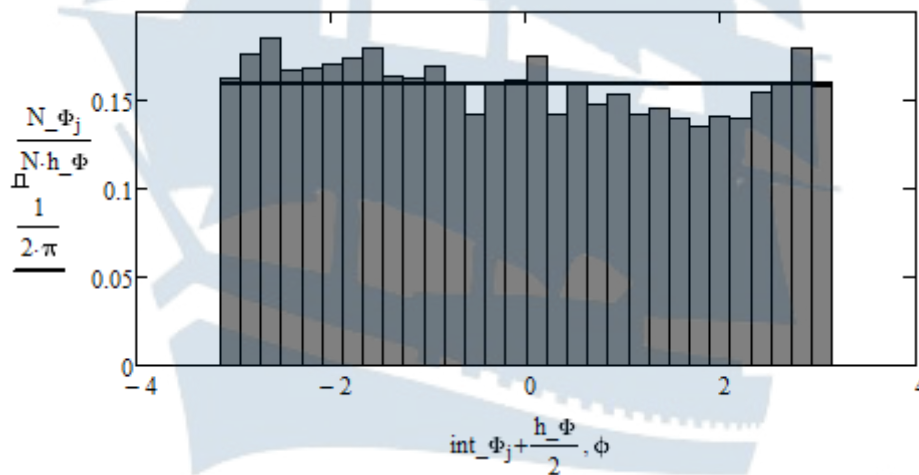


Рис. 3.17. Гистограмма распределения начальной фазы узкополосного СП и теоретический закон распределения

Оцените математическое ожидание и дисперсию начальной фазы узкополосного СП:

$$\text{mean}(\Phi) =$$

$$\text{var}(\Phi) =$$

и сравните полученные значения с теоретическими значениями (1.24). Сделайте вывод о законе распределения огибающей и начальной фазы узкополосного СП.

3.3. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- титульный лист (см. Приложение А);
- цель работы, название пунктов лабораторного задания;
- результаты машинного эксперимента (листинг программного кода с графическими результатами);
- выводы по проделанной работе.

3.4. Контрольные вопросы и задания

1. Что собой представляет модель «белого шума» и каковы ее характеристики?
2. Какие виды шумов, близких по характеристикам к модели «белого шума», вам известны?
3. Что собой представляет тепловой шум и какова его природа? От чего зависит спектральная плотность средней мощности теплового шума?
4. Что собой представляет дробовой шум и какова его природа? От чего зависит спектральная плотность средней мощности дробового шума?
5. Какой СП называют узкополосным? Как из «белого шума» получить узкополосный СП?
6. Как определяются центральная частота и ширина спектра узкополосного СП?
7. Докажите равенства (3.14) для СП на выходе узкополосной цепи с идеальной формой АЧХ.
8. Докажите равенства (3.15) для СП на выходе узкополосной цепи с гауссовой формой АЧХ.
9. Покажите, что огибающая корреляционной функции СП на выходе узкополосной цепи с идеальной формой АЧХ описывается функцией $\frac{\sin(x)}{x}$.
10. Покажите, что огибающая корреляционной функции СП на выходе узкополосной цепи с гауссовой формой АЧХ описывается функцией Гаусса.

11. Что понимают под огибающей и начальной фазой узкополосного СП?
12. Что понимают под низкочастотными квадратурными составляющими (квadrатурами) узкополосного СП? Как они связаны с огибающей и начальной фазой такого СП?
13. Какой узкополосный радиосигнал называется сопряженным по Гильберту? Как связаны спектры узкополосного радиосигнала и сопряженного по Гильберту радиосигнала?
14. Определите сопряженные сигналы для гармонических колебаний вида:

$$x_1(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t) \text{ и } x_2(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t).$$

Используя полученный результат, запишите сопряженный сигнал для радиосигнала вида:

$$x(t) = A_c(t) \cdot \cos(\omega_0 t) - A_s(t) \cdot \sin(\omega_0 t).$$

15. По какому закону распределены квадратуры узкополосного СП? Как связаны их числовые характеристики с характеристиками самого узкополосного СП?
16. Покажите, что огибающая узкополосного СП распределена по закону Рэлея, а начальная фаза имеет равномерный закон распределения.
17. Как связаны числовые характеристики огибающей узкополосного СП и самого узкополосного СП?
18. Каковы значения числовых характеристик начальной фазы узкополосного СП?

3.5. Список использованных источников

1. Карлов А.М., Кологривов А.Г. Случайные сигналы в радиотехнических цепях: Учеб. пособие. – Калининград, БГАРФ, 1996. – 99 с.
2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 2000. – 462 с.
3. Узкополосные случайные процессы [Текст]: монография / Е.В. Волхонская, А.М. Карлов. – Калининград: РИО БГАРФ, 2004. – 168 с.
4. Кирьянов Д.В. Mathcad 14. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 704 с.
5. ГОСТ Р 50.1.033-2001. Прикладная статистика. Правила проверки согласия распределения с теоретическим. Часть 1. Критерий типа хи-квадрат. – М., 2006. – 87 с. (ИПК Издательство стандартов).

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

«Экспериментальное определение корреляционной функции и спектральной плотности средней мощности стационарного случайного процесса»

Цель работы: Ознакомиться со способами измерения корреляционной функции и спектральной плотности средней мощности стационарного СП, определения времени корреляции и эффективной ширины энергетического спектра.

4.1. Краткие теоретические сведения

4.1.1. Способы экспериментального определения корреляционной функции

Одной из важнейших характеристик эргодических СП является корреляционная функция, описывающая статистическую связь между различными сечениями СП. Для ее экспериментального определения используется один из двух подходов:

- последовательное во времени измерение отсчетов;
- параллельный принцип измерения.

Устройство для измерения отсчетов корреляционной функции носит название **коррелометра**. Схема такого устройства строится на основе выражения вида [1]:

$$K_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - m_x)(x(t + \tau) - m_x) dt. \quad (4.1)$$

В соответствии с данным выражением схема коррелометра должна содержать:

- линию задержки с переменным временем задержки;
- перемножитель двух сигналов;
- интегратор.

Теоретически длительность T исследуемой реализации должна быть бесконечно большой, однако для многих практически важных случаев интегрирование может проводиться в конечных пределах. На практике достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$T \geq 2\tau_k. \quad (4.2)$$

Для возможности изменения величины временного сдвига τ в пределах от 0 до τ_k линия задержки должна иметь достаточно большое количество отводов:

$$n = N + 1 = \frac{\tau_k}{\Delta\tau} + 1. \quad (4.3)$$

На рис. 4.1 приведена схема устройства, реализующего последовательное измерение отсчетов корреляционной функции [1].



Рис. 4.1. Схема устройства, реализующего последовательное измерение отсчетов корреляционной функции

Достоинством данной схемы является ее простота, а **недостатком** – длительное время измерения:

$$T_{\text{изм}} = n \cdot T. \quad (4.4)$$

Альтернативой является одновременное измерение значений корреляционной функции для всех значений временного сдвига от 0 до $N\Delta t$. Такой способ измерения может быть реализован с помощью устройства, схема которого изображена на рис. 4.2.

Очевидным **преимуществом** схемы является возможность одновременного измерения всех отсчетов корреляционной функции $K_x(0), K_x(\Delta\tau) \dots K_x(N\Delta\tau)$. Время измерения при этом составляет:

$$T_{\text{изм}} = T. \quad (4.5)$$

Недостатком данной схемы является ее конструктивная сложность в сравнении с предыдущим устройством. Однако все элементы

схемы являются однотипными, и это позволяет выполнить ее в интегральном виде. Поэтому второй вариант измерителя корреляционной функции является предпочтительным [1].

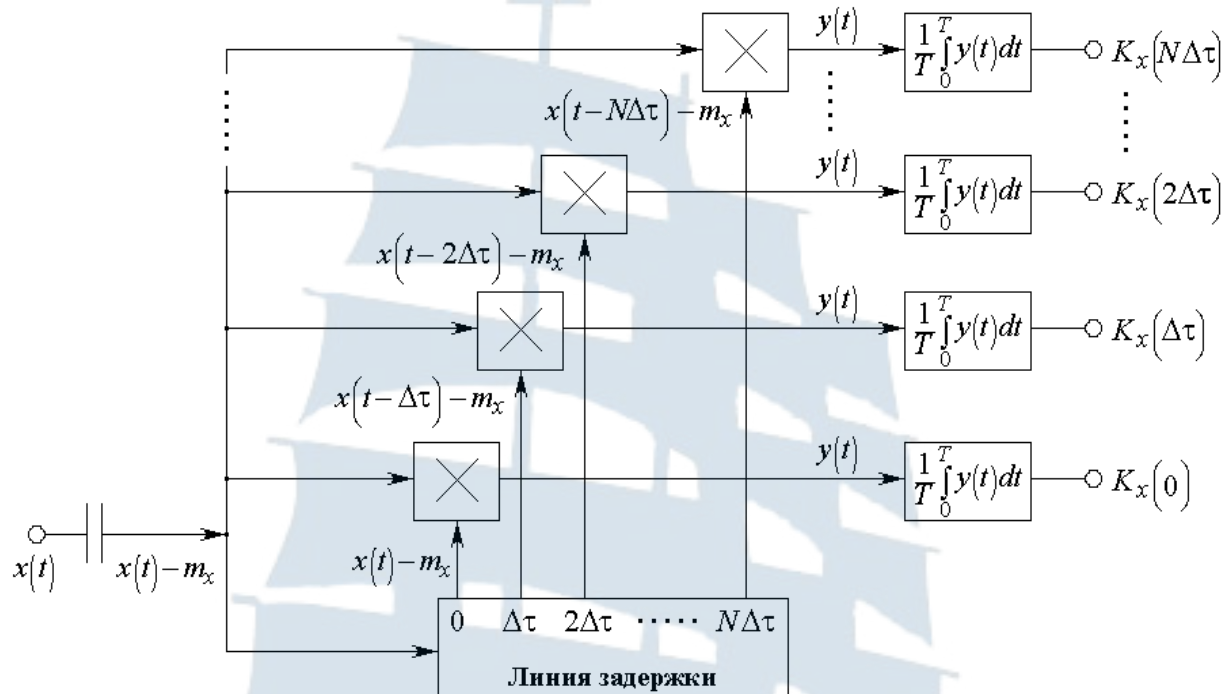


Рис. 4.2. Схема устройства, реализующего параллельное измерение отсчетов корреляционной функции

При построении коррелометра важно, чтобы шаг дискретизации временного сдвига $\Delta\tau$ был достаточно мал по сравнению со временем корреляции τ_k . Это условие будет выполняться тем лучше, чем больше время корреляции τ_k . Как будет показано ниже, время корреляции τ_k обратно пропорционально ширине энергетического спектра СП $\Delta f_{эфф}$, а из **теоремы Котельникова** [2] следует, что шаг дискретизации по времени $\Delta\tau$ обратно пропорционален ширине рассматриваемой полосы частот Δf :

$$\tau_k \sim \frac{1}{\Delta f_{эфф}}; \quad \Delta\tau \sim \frac{1}{\Delta f}. \quad (4.6)$$

Таким образом, измерение корреляционной функции будет происходить адекватно для СП, медленно меняющихся со временем или, так называемых, **узкополосных СП**.

Если рассматриваемый СП является узкополосным, то время измерения будет тем меньше, чем больше эффективная ширина спектра $\Delta f_{\text{эфф}}$.

4.1.2. Спектральная плотность средней мощности

Альтернативным способом описания свойств СП по отношению к корреляционной функции является использование спектрального метода.

В рамках данного метода каждой реализации СП $x(t)$ может быть поставлена в соответствие случайная функция частоты, определяемая прямым преобразованием Фурье. Если реализация измерена на интервале времени $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, то спектральная плотность реализации будет равна [2]:

$$F_x(j\omega, T) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (4.7)$$

Пусть для определенности входной сигнал имеет нулевое математическое ожидание ($m_x = 0$). В противном случае можно всегда составить новый СП с нулевым математическим ожиданием:

$$Y(t) = X(t) - m_x.$$

Тогда математическое ожидание спектральной плотности реализаций СП будет равно нулю, а, значит, не будет иметь физического смысла:

$$\langle F_x(j\omega, T) \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \langle x(t) \rangle e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} m_x e^{-j\omega t} dt = 0.$$

Физический смысл имеет среднее значение квадрата модуля спектральной плотности реализаций СП вида [1]:

$$\frac{1}{T} \cdot \left\langle |F_x(j\omega, T)|^2 \right\rangle,$$

имеющее размерность мощности, выделяющейся на сопротивлении 1 Ом.

При неограниченном росте длительности реализаций T эта величина стремится к устойчивому выражению, называемому **спектральной плотностью средней мощности СП** [1]:

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\langle |F_x(j\omega, T)|^2 \right\rangle. \quad (4.8)$$

Для установления связи между спектральной плотностью средней мощности СП $S_x(\omega)$ и его корреляционной функцией $K_x(\tau)$ воспользуемся выражением (4.7):

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\langle |F_x(j\omega, T)|^2 \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\langle F_x(j\omega, T) \cdot F_x^*(j\omega, T) \right\rangle = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\langle \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t_1) e^{-j\omega t_1} dt_1 \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t_2) e^{j\omega t_2} dt_2 \right\rangle. \end{aligned}$$

Поскольку случайными являются только отсчеты реализаций $x(t_1)$ и $x(t_2)$, то операции усреднения и интегрирования можно поменять местами:

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \langle x(t_1) \cdot x(t_2) \rangle e^{-j\omega(t_1-t_2)} dt_2 dt_1.$$

Если случайный процесс $X(t)$ является стационарным, то $\langle x(t_1) \cdot x(t_2) \rangle = K_x(t_1 - t_2)$ и спектральная плотность средней мощности будет равна:

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} K_x(t_1 - t_2) e^{-j\omega(t_1-t_2)} dt_2 dt_1.$$

Выполнив замену $t_1 - t_2 = \tau$, можно исключить один из интегралов, например:

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt_2 = 1,$$

и с учетом неограниченности длительности реализаций ($T \rightarrow \infty$) переписать выражение для спектральной плотности средней мощности в виде:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (4.9)$$

Таким образом, спектральная плотность средней мощности есть прямое преобразование *Фурье* от корреляционной функции СП. Значит, справедливо и обратное утверждение и корреляционная функция может быть определена как обратное преобразование *Фурье* от спектральной плотности средней мощности:

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (4.10)$$

Определенная выражением (4.9) спектральная плотность существует как при положительных, так и при отрицательных значениях частоты. Более того, с учетом четности корреляционной функции, она также является четной:

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau - j \cdot \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau = 2 \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \end{aligned}$$

С физической точки зрения логичнее использовать функцию $S(\omega)$, определенную только для положительных значений частоты. Для сохранения значения дисперсии СП при таких изменениях:

$$\sigma_x^2 = K_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2 \cdot S_x(\omega) d\omega, \quad (4.11)$$

необходимо, чтобы выполнялось равенство:

$$S(\omega) = \begin{cases} 2 \cdot S_x(\omega), & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}. \quad (4.12)$$

Определенная таким образом спектральная плотность средней мощности носит название **физического спектра** СП [1]. Такой спектр определяется выражением вида:

$$S(\omega) = 4 \cdot \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (4.13)$$

Как правило, с ростом частоты физический спектр $S(\omega)$ в среднем убывает и, в основном, сосредоточен в некоторой полосе частот. Для оценки ширины этой полосы частот вводят понятие эффективной ширины спектра $\Delta f_{\text{эфф}}$, которую определяют по **методу эквивалентного прямоугольника** (рис. 4.3) [3]:

$$\Delta\omega_{\text{эфф}} = \frac{1}{S(0)} \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega = \frac{1}{S_x(0)} \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega, \quad (4.14)$$

$$\Delta f_{\text{эфф}} = \frac{1}{S(0)} \int_0^{\infty} S(f) df = \frac{1}{S_x(0)} \int_0^{\infty} S_x(f) df.$$

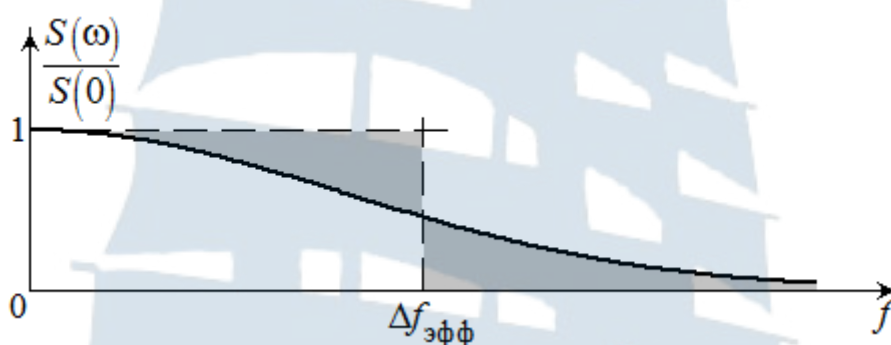


Рис. 4.3. Определение эффективной ширины спектра по методу эквивалентного прямоугольника

По тому же принципу определяется временной интервал (рис. 4.4), в пределах которого сосредоточена основная часть корреляционной функции (без «хвостов»).

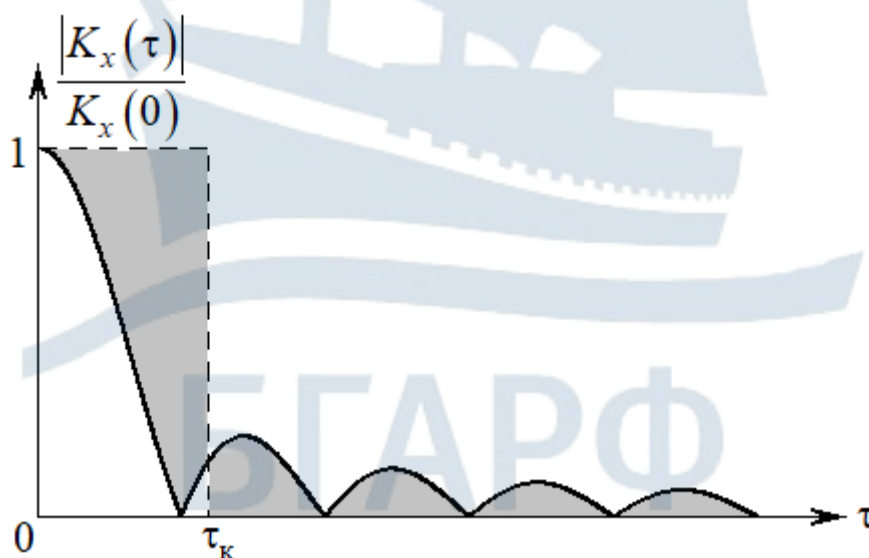


Рис. 4.4. Определение интервала корреляции по методу эквивалентного прямоугольника

Однако в отличие от спектральной плотности средней мощности корреляционная функция может принимать отрицательные значения. Поэтому интервал (время) корреляции определяют по абсолютной величине корреляционной функции [3]:

$$\tau_k = \frac{1}{K_x(0)} \int_0^{\infty} |K_x(\tau)| d\tau. \quad (4.15)$$

Можно показать, что произведение эффективной ширины спектра на время корреляции представляет собой константу. Пусть корреляционная функция положительна на всем интервале изменения временного сдвига. Тогда:

$$\begin{aligned} \Delta\omega_{\text{эфф}} &= \frac{1}{S_x(0)} \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega = \frac{1}{S_x(0)} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} d\omega = \\ &= \frac{1}{S_x(0)} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \left\{ \int_0^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\omega \right\} d\tau = \frac{1}{S_x(0)} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \{ \pi \cdot \delta(\tau) \} d\tau = \\ &= \pi \cdot \frac{K_x(0)}{S_x(0)} = \pi \cdot \frac{K_x(0)}{\int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) d\tau} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{K_x(0)}{\int_0^{\infty} |K_x(\tau)| d\tau} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{K_x(0)} \cdot \int_0^{\infty} |K_x(\tau)| d\tau} = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\tau_k} \Rightarrow \Delta\omega_{\text{эфф}} \cdot \tau_k = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta f_{\text{эфф}} \cdot \tau_k = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Если же корреляционная функция принимает, как положительные, так и отрицательные значения, то произведение эффективной ширины спектра на время корреляции остается константой, но величина константы возрастает, так как:

$$S_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) d\tau \leq \int_{-\infty}^{\infty} |K_x(\tau)| d\tau.$$

4.1.3. Способы экспериментального определения спектральной плотности средней мощности

Способы измерения спектральной плотности средней мощности базируются на выражении, определяющем дисперсию узкополосного СП [1]:

$$\sigma_x^2(\omega_0, \Delta\omega) = K_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} S_x(\omega) d\omega \approx S_x(\omega_0) \frac{\Delta\omega}{2\pi} = S_x(f_0) \Delta f. \quad (4.16)$$

Для измерения дисперсии в узкой полосе частот испытуемый сигнал должен быть пропущен через полосовой фильтр, настроенный на частоту f_0 и имеющий полосу пропускания шириной Δf .

С другой стороны, дисперсия того же узкополосного сигнала, измеренная по его реализации достаточно большой длительности T , будет равна [1]:

$$\sigma_x^2(f_0, \Delta f) = K_x(0) = \frac{1}{K_0^2 \cdot T} \int_0^T x^2(f_0, \Delta f, t) dt, \quad (4.17)$$

где K_0 – коэффициент передачи полосового фильтра, учитывающий изменение амплитуды сигнала при фильтрации.

Сопоставляя выражения (4.16) и (4.17) можно получить выражение, определяющее методику измерения спектральной плотности средней мощности [1]:

$$S_x(f_0) = \frac{1}{K_0^2 \cdot \Delta f \cdot T} \int_0^T x^2(f_0, \Delta f, t) dt. \quad (4.18)$$

Устройство для измерения отсчетов спектральной плотности средней мощности носит название **анализатора спектра**.

На рис. 4.5 приведена схема анализатора спектра, реализующего последовательное измерение отсчетов спектральной плотности средней мощности [1].

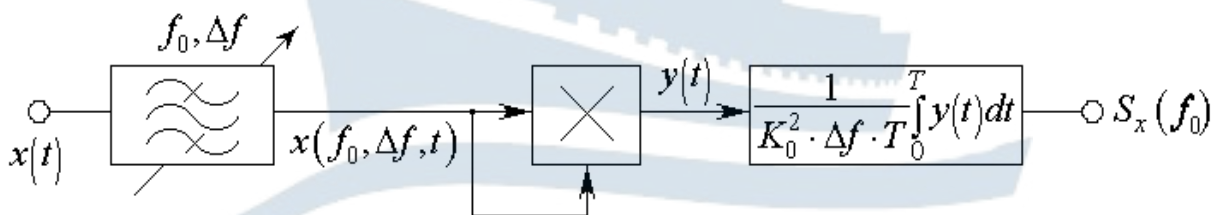


Рис. 4.5. Схема анализатора спектра, реализующего последовательное измерение отсчетов спектральной плотности средней мощности

При проведении измерений весь исследуемый диапазон частот (полоса обзора) разбивается на n интервалов шириной Δf каждый. Поэтому время измерения всех отсчетов спектральной плотности средней мощности составляет nT .

Достоинством приведенной схемы является ее простота, а **недостатком** – длительное время измерения.

Как и при измерении корреляционной функции, альтернативой является одновременное измерение всех значений спектральной плотности средней мощности. Такой способ измерения может быть реализован с помощью анализатора спектра, схема которого изображена на рис. 4.6 [1].

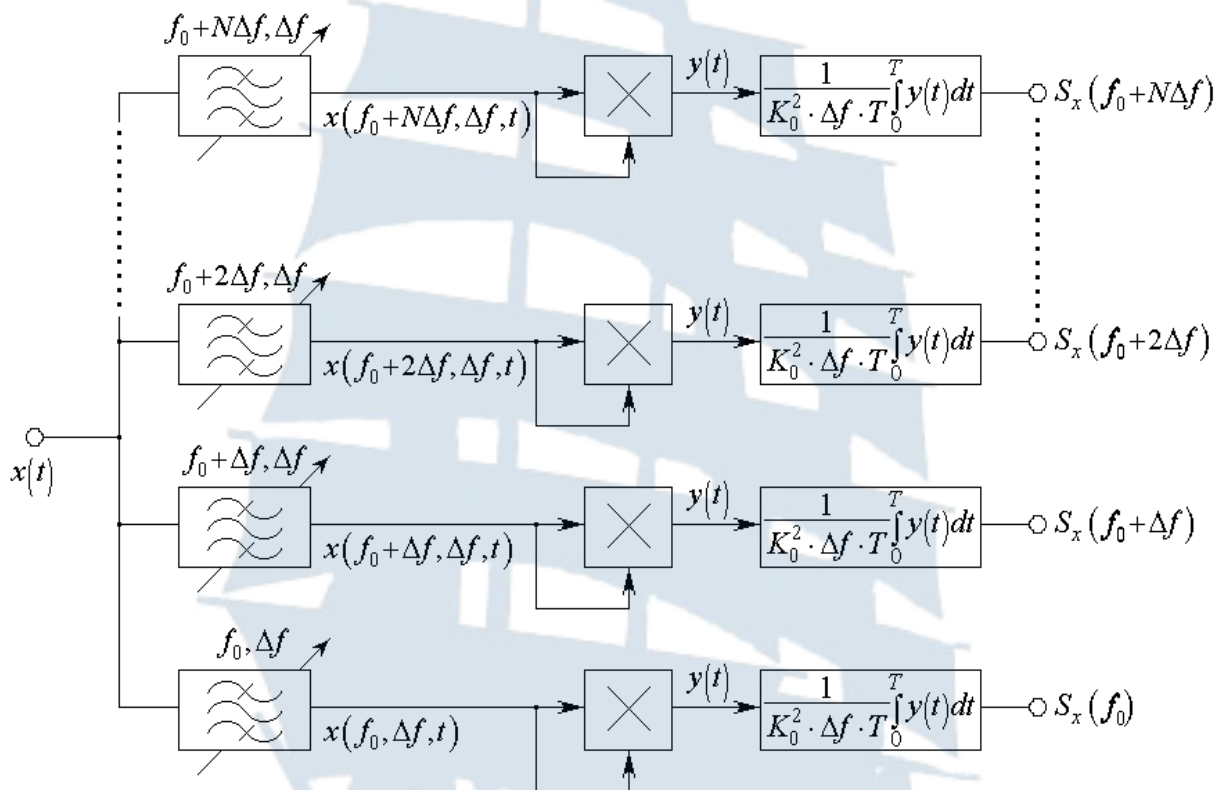


Рис. 4.6. Схема устройства, реализующего параллельное измерение отсчетов спектральной плотности средней мощности

Очевидным **преимуществом** схемы является возможность одновременного измерения всех отсчетов спектральной плотности средней мощности $S_x(f_0), S_x(f_0 + \Delta f) \dots S_x(f_0 + N\Delta f)$. Время измерения при этом составляет $T_{\text{изм}} = T$.

Недостатком данной схемы является ее конструктивная сложность в сравнении с предыдущим устройством. Этот недостаток усугубляется при широкой полосе обзора $N\Delta f$, так как в этом случае добротность фильтров, определяемая выражением вида:

$$Q_k = \frac{f_0 + k \cdot \Delta f}{\Delta f} = \frac{f_0}{\Delta f} + k \quad (4.19)$$

может меняться в широких пределах, что приводит к неидентичности таких элементов.

При построении анализатора спектра важно, чтобы шаг дискретизации частоты Δf был достаточно мал по сравнению с эффективной шириной спектра $\Delta f_{\text{эфф}}$. Это условие будет выполняться тем лучше, чем больше эффективная ширина спектра $\Delta f_{\text{эфф}}$. Поскольку время корреляции τ_k обратно пропорционально ширине энергетического спектра СП $\Delta f_{\text{эфф}}$, то измерение спектральной плотности средней мощности будет происходить адекватно для СП с малым временем корреляции τ_k , то есть для быстро меняющихся со временем или, так называемых, широкополосных СП.

Если рассматриваемый СП является широкополосным, то время измерения будет тем меньше, чем меньше эффективная ширина спектра $\Delta f_{\text{эфф}}$.

4.2. Лабораторное задание

4.2.1. Формирование узкополосного СП

Запустите приложение MathCAD.

Задайте число отсчетов широкополосного нормального СП, например:

$$N := 2^{18}$$

Сформируйте массив отсчетов нормально распределенной СВ с использованием функции встроенного генератора MathCAD `rnorm` [4]:

$$X := \text{rnorm}(N, 0, 1)$$

Для перехода от широкополосного СП к узкополосному СП постройте массив значений комплексного спектра реализации широкополосного СП X с использованием встроенной функции среды MathCAD `fft` [4]:

$$S_X := \text{fft}(X)$$

Задайте полуширину полосы пропускания узкополосной цепи и ее центральную частоту, выраженные в количестве отсчетов комплексного спектра S_X , например:

$$L := \text{last}(S_X) \quad \Delta := \frac{L}{256} \quad L0 := \frac{L}{2}$$

Сформируйте отсчеты комплексных коэффициентов передачи узкополосных цепей с лоренцевой и гауссовой формами АЧХ. Используйте для этого следующие процедуры:

$$k := 0..L$$

$$T1_k := \frac{\Delta}{\Delta + i \cdot \left(k - \frac{L0}{2}\right)} \quad T2_k := e^{-\left(\frac{k-L0}{\Delta}\right)^2 \cdot \ln(\sqrt{2})} \cdot e^{-i \cdot \frac{k-L0}{\Delta} \cdot \frac{\pi}{4}}$$

Для возможности выбора формы АЧХ узкополосной цепи введите переменную, отвечающую за тип фильтра, и объедините отсчеты комплексных коэффициентов передачи в одну функцию, например:

$$Tip := 1$$

$$T_k := \begin{cases} T1_k & \text{if } Tip = 1 \\ T2_k & \text{if } Tip = 2 \end{cases}$$

В соответствии со спектральным методом сформируйте отсчеты узкополосного (narrowband) СП на выходе узкополосной цепи:

$$S_Xnb_k := S_X_k \cdot T_k$$

Сформируйте массив отсчетов реализации узкополосного СП, перейдя от комплексного спектра S_Xnb к временной реализации Xnb с использованием встроенной функции среды MathCAD $ifft$ [4]:

$$Xnb := ifft(S_Xnb)$$

4.2.2. Измерение корреляционной функции

Поскольку параллельный алгоритм измерения корреляционной функции можно реализовать только при наличии нескольких виртуальных машин, то ниже будет рассмотрен только последовательный способ измерения. При этом, поскольку реализация СП представлена дискретным набором отсчетов, то интеграл в (4.1) должен быть заменен суммой.

Для сравнения времени измерения корреляционной функции СП с одинаковой шириной занимаемой полосы частот, но различной формой энергетического спектра, введите переменную, отвечающую за время корреляции СП, выраженное в количестве отсчетов реализации СП:

$$\tau := \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{L}{\Delta} & \text{if } Tip = 1 \\ \sqrt{\frac{\ln(2)}{\pi}} \cdot \frac{L}{\Delta} & \text{if } Tip = 2 \end{cases} \quad \tau =$$

Машинное время проведения измерения корреляционной функции можно определить с помощью встроенной функции среды MathCAD `time` [4], прописываемой вручную. Для этого в начале и в конце фрагмента программного кода, в рамках которого определяются отсчеты корреляционной функции, необходимо прописать функцию `time(0)`. Создайте следующую процедуру:

$$\begin{aligned} t0 &:= \text{time}(0) \\ i &:= 0..2 \cdot \tau \\ K_Xnb_i &:= \frac{2}{N} \cdot \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} (Xnb_j \cdot Xnb_{j+i}) \\ t1 &:= \text{time}(0) \end{aligned}$$

Тогда время измерения (`measure`) может быть найдено следующим образом:

$$Tmeas := t1 - t0 \quad Tmeas =$$

Убедитесь, что в результате измерения получена корреляционная функция с требуемой формой огибающей. Для этого создайте модель огибающей корреляционной функции. Введите следующие параметры модели, описывающие скорость затухания огибающей:

$$a := \pi \cdot \frac{\Delta}{L} \quad c := \pi \cdot \frac{\Delta}{2 \cdot L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln(2)}}$$

Задайте модель с учетом значения переменной `Tip`:

$$K(i) := \begin{cases} \text{var}(Xnb) \cdot e^{-a \cdot i} & \text{if } Tip = 1 \\ \text{var}(Xnb) \cdot e^{-c^2 \cdot i^2} & \text{if } Tip = 2 \end{cases}$$

Постройте график полученной корреляционной функции, отобразив на нем записанную модель огибающей (рис. 4.7). **Убедитесь, что огибающая касается графика корреляционной функции в точках локальных максимумов.** Поменяйте значение переменной `Tip`, введенное

выше, и наблюдайте график корреляционной функции и ее огибающей для случая гауссовой формы энергетического спектра (рис. 4.8).

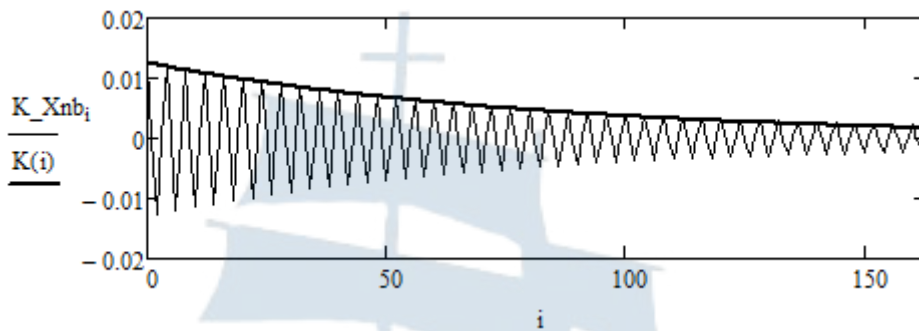


Рис. 4.7. Корреляционная функция и ее теоретическая огибающая для узкополосного СП с лоренцевой формой энергетического спектра

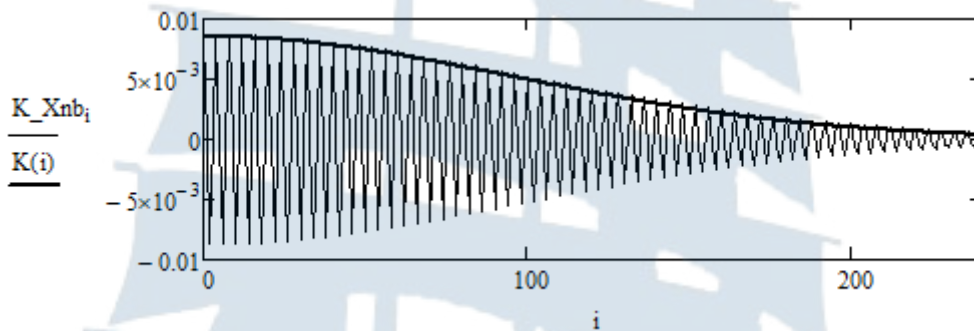


Рис. 4.8. Корреляционная функция и ее теоретическая огибающая для узкополосного СП с гауссовой формой энергетического спектра

Изменяя значение полуширины полосы пропускания Δ , проведите серию из 10 измерений машинного времени T_{meas} для каждой из форм спектра. Полагайте полуширину спектра равной $L/8$, $L/16$, $L/32$, $L/64$, $L/128$, $L/256$ и $L/512$. При этом при смене данного значения необходима повторная компиляция кода. Для проведения повторного измерения времени T_{meas} используйте комбинацию клавиш Ctrl+F9. Результаты измерений занесите в две таблицы вида:

$$T1 = \begin{pmatrix} 0.123 & 0.104 & 0.109 & 0.112 & 0.120 & 0.103 & 0.118 & 0.116 & 0.111 & 0.113 \\ 0.192 & 0.189 & 0.181 & 0.180 & 0.182 & 0.210 & 0.183 & 0.201 & 0.204 & 0.202 \\ 0.346 & 0.392 & 0.376 & 0.383 & 0.400 & 0.371 & 0.357 & 0.358 & 0.403 & 0.354 \\ 0.674 & 0.689 & 0.655 & 0.745 & 0.715 & 0.726 & 0.680 & 0.711 & 0.686 & 0.763 \\ 1.367 & 1.537 & 1.335 & 1.465 & 1.455 & 1.347 & 1.563 & 1.380 & 1.313 & 1.321 \\ 2.633 & 2.911 & 2.734 & 2.990 & 2.671 & 2.994 & 2.797 & 2.786 & 3.129 & 2.636 \\ 5.533 & 5.282 & 5.622 & 5.298 & 5.212 & 5.286 & 5.501 & 5.312 & 5.325 & 5.312 \end{pmatrix}$$

Осуществите усреднение машинного времени по 10 измерениям:

$$i := 0..6 \qquad j := 0..9$$

$$T1_cp_i := \frac{1}{10} \cdot \sum_{j=0}^9 T1_{i,j} \qquad T2_cp_i := \frac{1}{10} \cdot \sum_{j=0}^9 T2_{i,j}$$

Постройте графики зависимости машинного времени измерения корреляционной функции от полуширины полосы частот, занимаемой СП (рис. 4.9).

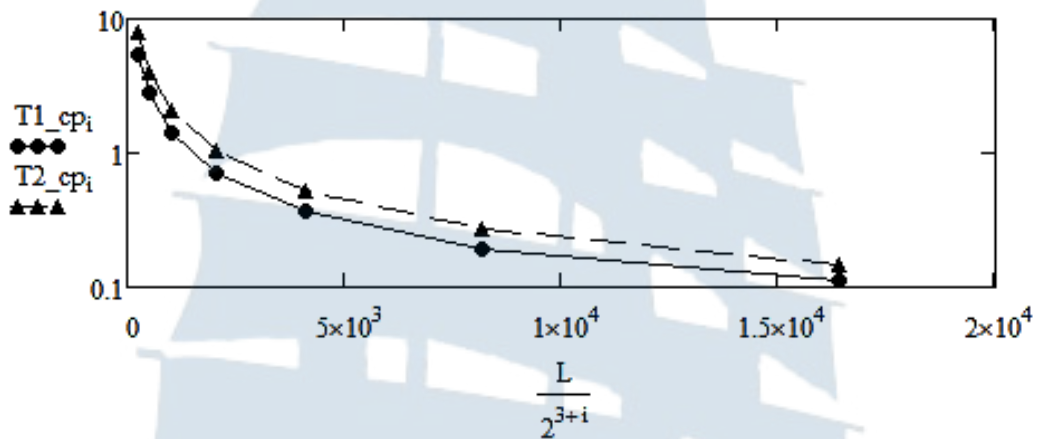


Рис. 4.9. Зависимость машинного времени измерения корреляционной функции от полуширины полосы частот, занимаемой СП:
 лоренцева форма линии (пунктирная линия);
 гауссова форма линии (сплошная линия)

Для визуализации разницы между значениями лучше использовать логарифмический масштаб по оси ординат, как это показано на рис. 4.9. При этом в настройках рисунка необходимо выполнить следующие изменения: нажмите правой клавишей мыши на рисунок и выберите раздел *Format*; в открывшемся окне в закладке *X-Y Axis* необходимо в свойствах оси ординат *Primary Y Axis* установить флажок на свойстве *Log scale* [4].

Сравните значения времени измерения корреляционной функции с различной формой энергетического спектра при одинаковой ширине спектра. Как вы думаете, в чем причина их различия? Что происходит со значением машинного времени измерения при увеличении ширины спектра?

4.2.3. Измерение времени корреляции

Для измерения времени корреляции может быть использован один из двух подходов:

- использование сопряженного по Гильберту сигнала;
- метод когерентного приема.

Первый из данных методов был продемонстрирован в **лабораторной работе № 3** при выделении квадратур с последующим нахождением огибающей СП. Оба метода эквивалентны и дают совершенно одинаковый результат. С целью расширения набора программных средств измерения проиллюстрируем действие второго подхода на данном примере. С этой целью сформируем набор отсчетов корреляционной функции, число которых является степенью двойки:

$$p := 2^{\text{ceil}(\log(2 \cdot \tau, 2))}$$

$$i := 0..p - 1$$

$$K_Xnb_i := \frac{2}{N} \cdot \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} (Xnb_j \cdot Xnb_{j+i})$$

Полагая известной центральную частоту спектра узкополосного СП, умножьте полученную корреляционную функцию на удвоенный косинус и удвоенный синус с такой же частотой соответственно:

$$K_Xnb_i := K_Xnb_i \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot i}{2}\right)$$

$$K_Xnbs_i := K_Xnb_i \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot i}{2}\right)$$

В данных выражениях учтено, что:

$$2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t = 2 \cdot \pi \cdot \frac{L}{2} \cdot \delta f \cdot i \cdot \Delta t = \pi \cdot L \cdot i \cdot \frac{1}{N \cdot \Delta t} \cdot \Delta t = \frac{\pi \cdot L}{N} \cdot i = \frac{\pi}{2} \cdot i.$$

Полученные в результате данных преобразований, реализации содержат как полезную низкочастотную составляющую (квадратуры комплексной огибающей корреляционной функции), так и ненужную высокочастотную составляющую. Последняя может быть исключена с помощью фильтра нижних частот. Для этого необходимо перейти от

временных реализаций к комплексным спектрам с помощью встроенной функции среды MathCAD fft :

$$S_{K_Xnb} := \text{fft}(X_{nbc})$$

$$S_{K_Xnbs} := \text{fft}(K_Xnbs)$$

Задайте комплексный коэффициент передачи идеального фильтра нижних частот (ФНЧ, *low pass filter*) в виде:

$$m := \text{last}(S_{K_Xnb})$$

$$K_{LPF_k} := \begin{cases} e^{-i \cdot \frac{k \cdot \pi}{m \cdot 2}} & \text{if } k \leq \frac{m}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Тогда комплексные спектры квадратур комплексной огибающей корреляционной функции могут быть определены в виде:

$$k := 0..m$$

$$S_{K_Xnb_k} := S_{K_Xnbc} \cdot K_{LPF_k}$$

$$S_{K_Xnbs_k} := S_{K_Xnbs} \cdot K_{LPF_k}$$

Сами квадратуры могут быть определены с помощью встроенной функции среды MathCAD ifft :

$$K_Xnbc := \text{ifft}(S_{K_Xnb})$$

$$K_Xnbs := \text{ifft}(S_{K_Xnbs})$$

Тогда нормированная огибающая корреляционной функции может быть записана в виде:

$$j := 0..\text{last}(K_Xnb)$$

$$R_{K_Xnb_j} := c \frac{1}{\text{var}(X_{nbc})} \sqrt{(K_Xnb_j)^2 + (-j)^2}$$

По полученной нормированной огибающей может быть определено время корреляции в виде:

$$\tau_k := \sum_{j=0}^{\text{last}(K_Xnb)} R_{K_Xnb_j} \quad \tau_k =$$

Сравните полученное значение с введенным выше теоретическим значением для обеих форм энергетического спектра и сделайте вывод.

4.2.4. Измерение энергетического спектра СП

Создайте новый рабочий файл в приложении MathCAD для предотвращения переполнения виртуальной памяти персонального компьютера (ПК).

Задайте число отсчетов широкополосного нормального СП, например:

$$N := 2^{18}$$

Сформируйте массив отсчетов нормально распределенной СВ с использованием функции встроенного генератора MathCAD rnorm:

$$X := \text{rnorm}(N, 0, 1)$$

Постройте массив значений комплексного спектра реализации широкополосного СП X с использованием встроенной функции среды MathCAD fft:

$$S_X := \text{fft}(X)$$

Задайте полуширину полосы пропускания узкополосной цепи и ее центральную частоту, выраженные в количестве отсчетов комплексного спектра S_X , равными:

$$L := \text{last}(S_X) \quad \Delta := \frac{L}{8} \quad L0 := \frac{L}{2}$$

Сформируйте отсчеты комплексных коэффициентов передачи узкополосных цепей с лоренцевой и гауссовой формами АЧХ. Используйте для этого следующие процедуры:

$$k := 0..L$$

$$T1_k := \frac{\Delta}{\Delta + i \cdot \left(k - \frac{L0}{2}\right)} \quad T2_k := e^{-\left(\frac{k-L0}{\Delta}\right)^2 \cdot \ln(\sqrt{2})} \cdot e^{-i \cdot \frac{k-L0}{\Delta} \cdot \frac{\pi}{4}}$$

Для возможности выбора формы АЧХ узкополосной цепи введите переменную, отвечающую за тип фильтра, и объедините отсчеты комплексных коэффициентов передачи в одну функцию, например:

$$Tip := 1$$

$$T_k := \begin{cases} T1_k & \text{if } Tip = 1 \\ T2_k & \text{if } Tip = 2 \end{cases}$$

В соответствии со спектральным методом сформируйте отсчеты узкополосного (narrowband) СП на выходе узкополосной цепи:

$$S_Xnb_k := S_X_k \cdot T_k$$

Как и в случае корреляционной функции, в рамках среды MathCAD оказывается возможным реализовать лишь последовательный способ измерения. При этом, поскольку реализация СП представлена дискретным набором отсчетов, интеграл в (4.18) должен быть заменен суммой.

Для сравнения времени измерения энергетического спектра СП с одинаковой шириной занимаемой полосы частот, но различной формой введите переменную, отвечающую за ширину полосы обзора, выраженное в количестве отсчетов реализации СП. Если выбрать полосу обзора так, чтобы в ее пределах энергетический спектр затухал до уровня «шумовой дорожки» (в 10 раз), то соответствующую переменную стоит задать в виде:

$$\Delta f := \begin{cases} 6 \cdot \Delta & \text{if } Tip = 1 \\ 2 \cdot \sqrt{\log(10,2)} \cdot \Delta & \text{if } Tip = 2 \end{cases} \quad \Delta f =$$

Задайте ширину полосы пропускания полосового фильтра (ПФ) в составе анализатора спектра, например:

$$\Delta F := \frac{\Delta}{4}$$

Определите требуемое число интервалов разбиения полосы обзора. Помните, что чем меньше заданная ширина полосы пропускания ПФ, тем больше число данных интервалов и тем дольше идет обработка:

$$M := \text{round} \left(\frac{\Delta f}{\Delta F} \right)$$

Задайте центральную частоту полосы пропускания ПФ (*band-stop filter*) и его комплексный коэффициент передачи для каждого из выбранных интервалов:

$$i := 0..M - 1 \quad f0_i := L0 - \frac{\Delta f}{2} + \frac{\Delta f}{2 \cdot M} + \frac{\Delta f}{M} \cdot i$$

$$T_BPF(k,i) := \begin{cases} e^{-i \cdot \frac{k-f0_i \cdot M \cdot \pi}{\Delta f}} & \text{if } |k - f0_i| \leq \frac{\Delta f}{2 \cdot M} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Машинное время проведения измерения энергетического спектра СП определите, как и в случае измерения корреляционной функции СП, с помощью встроенной функции среды MathCAD `time`. Для этого пропишите функцию `time(0)` в начале фрагмента программного кода:

$$t0 := \text{time}(0)$$

Далее симулируйте прохождение СП через ПФ для случая его настройки на каждый из выбранных интервалов. Для этого создайте процедуру вида:

$$X := \begin{cases} \text{for } i \in 0..M-1 \\ \quad \begin{cases} \text{for } k \in 0..L \\ \quad S_k \leftarrow S_Xnb_k \cdot T_BPF(k,i) \\ \quad X_i \leftarrow \text{ifft}(S) \end{cases} \\ X \end{cases}$$

Далее в соответствии со схемой на рис. 4.5 полученный сигнал должен быть умножен сам на себя. Реализуйте данную процедуру в виде (как и ранее форма скобки трансформируется автоматически):

$$j := 0..N-1 \quad Y_{i,j} := \left[(X_i)_j \right]^2$$

Тогда величина спектральной плотности средней мощности СП может быть найдена следующим образом:

$$S_meas_i := \frac{1}{\Delta F \cdot N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} Y_{i,j}$$

Для определения времени проведения измерения энергетического спектра СП пропишите функцию `time(0)` в конце фрагмента программного кода:

$$t1 := \text{time}(0)$$

Тогда время измерения (`measure`) может быть найдено следующим образом:

$$Tmeas := t1 - t0 \quad Tmeas =$$

Убедитесь, что в результате измерения получен энергетический спектр с требуемой формой. Для этого создайте модель такого спектра как результат усреднения 100 реализаций прямого быстрого преобразования *Фурье* спектра узкополосного СП, как это было сделано при определении центральной частоты спектра в **лабораторной работе № 3**:

```

S_aver :=
  for i ∈ 0.. $\frac{N}{2}-1$ 
    S1i ← 0
  for n ∈ 0..99
    X ← rnorm(N,0,1)
    S_X ← fft(X)
    for i ∈ 0.. $\frac{N}{2}-1$ 
      S1i ← S1i +  $\frac{1}{100} \cdot (|S_{X_i}|)^2 \cdot (|T_i|)^2$ 
  S1

```

Из-за специфической нормировки в процедуре быстрого преобразования *Фурье* для сравнения усредненного спектра с измеренным последний необходимо нормировать. Величина нормировочного множителя определяется максимальным значением энергетического спектра:

$$S_{max} := \max(S_{meas})$$

Постройте графики усредненного и измеренного энергетического спектра СП с лоренцевой (рис. 4.10) и гауссовой (рис. 4.11) формы линии и убедитесь в адекватности построенной модели анализатора спектра.

$$j := 0..last(S_{aver})$$

БГАРФ

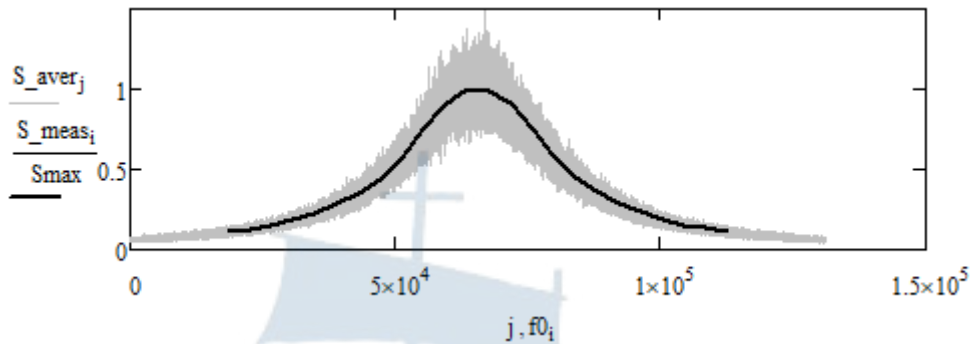


Рис. 4.10. Усредненный энергетический спектр (жирная линия) и измеренный энергетический спектр (тонкая линия) узкополосого СП при лоренцевой форме линии

Цвет, тип линии и ее толщина, как и ранее, могут быть изменены в настройках рисунка. Не меняйте местами функции на рисунке, так как в противном случае измеренный спектр окажется под теоретическим и будет невиден.

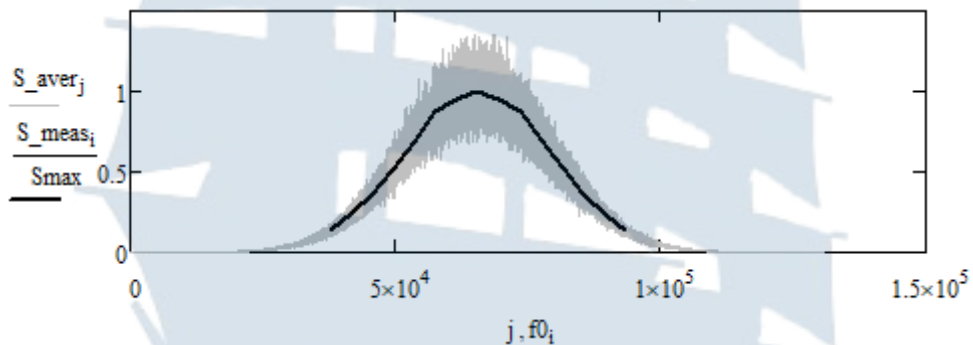


Рис. 4.11. Усредненный энергетический спектр (жирная линия) и измеренный энергетический спектр (тонкая линия) узкополосого СП при гауссовой форме линии

Сравните значения времени измерения энергетического спектра с различной формой, но при одинаковой ширине занимаемой полосы частот по результатам однократных измерений. Как вы думаете, в чем причина их различия?

4.2.5. Измерение эффективной ширины энергетического спектра

Для определения эффективной ширины энергетического спектра СП в соответствии с выражением (4.14) можно использовать нормированный измеренный энергетический спектр. Поскольку данный спектр располагается в высокочастотной области, то нормировка

должна производиться не на $S_{meas}(0)$, как в указанном выражении, а на $S_{meas}(L0) = S_{max}$:

$$\Delta f_{eff} := \frac{\Delta F}{M} \cdot \sum_{i=0}^{M-1} \left(\frac{S_{meas_i}}{S_{max}} \right)$$

Для сравнения полученного результата с известным теоретическим значением введите переменную, отвечающую за теоретическое значение данного параметра:

$$\Delta f_{theor} := \begin{cases} \pi \cdot \Delta & \text{if } Tip = 1 \\ \sqrt{\frac{\pi}{\ln(2)}} \cdot \Delta & \text{if } Tip = 2 \end{cases}$$

Сравните теоретическое и измеренное значение эффективной ширины энергетического спектра с различной формой линии. Обратите внимание на то, что различие данных значений минимально для гауссовой формы и существенно для лоренцевой. С чем вы это связываете? Можно ли эту разницу уменьшить?

4.3. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- титульный лист (см. Приложение А);
- цель работы, название пунктов лабораторного задания;
- результаты машинного эксперимента (листинг программного кода с графическими результатами);
- выводы по проделанной работе.

4.4. Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение корреляционной функции. Как определяется корреляционная функция эргодического СП?
2. Какой должна быть минимальная длительность реализации СП, чтобы можно было говорить об экспериментальном измерении корреляционной функции?
3. Какие способы измерения корреляционной функции вам известны? В чем их достоинства и недостатки?

4. Дайте определение спектральной плотности средней мощности СП. Как она связана с корреляционной функцией СП?
5. Какие способы измерения спектральной плотности средней мощности вам известны? В чем их достоинства и недостатки?
6. Что понимают под физическим спектром СП? Как связан физический спектр с корреляционной функцией и спектральной плотностью средней мощности СП?
7. Как определяется время (интервал) корреляции СП?
8. Определите время корреляции СП с корреляционной функцией вида:

$$- K_x(\tau) = K_{\max} \cdot e^{-\beta \cdot |\tau|};$$

$$- K_x(\tau) = K_{\max} \cdot e^{-\beta \cdot |\tau|} \cdot (1 + \beta \cdot |\tau|);$$

$$- K_x(\tau) = K_{\max} \cdot e^{-\beta \cdot |\tau|} \cdot (1 - \beta \cdot |\tau|);$$

$$- K_x(\tau) = K_{\max} \cdot e^{-\beta^2 \tau^2};$$

$$- K_x(\tau) = \frac{K_{\max}}{1 + \beta^2 \tau^2}.$$

9. Как определяется эффективная ширина энергетического спектра СП?
10. Определите эффективную ширину энергетического спектра СП со спектральной плотностью средней мощности вида:

$$- S_x(\omega) = S_{\max} \cdot e^{-|\omega|/\alpha};$$

$$- S_x(\omega) = S_{\max} \cdot \left(1 + \frac{|\omega|}{\alpha}\right) \cdot e^{-|\omega|/\alpha};$$

$$- S_x(\omega) = S_{\max} \cdot e^{-\omega^2/\alpha^2};$$

$$- S_x(\omega) = S_{\max} \cdot \left(1 + \frac{\omega^2}{\alpha^2}\right) \cdot e^{-\omega^2/\alpha^2};$$

$$- S_x(\omega) = \frac{S_{\max} \alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

11. Докажите, что произведение эффективной ширины энергетического спектра СП на его интервал корреляции является константой, зависящей только от свойств СП. Каково минимальное значение данной константы?
12. Покажите, что корреляционная функция аддитивной смеси гармонического сигнала и шума с ростом временного сдвига стремится к детерминированной гармонической функции. Как можно использовать данный факт для обнаружения слабого гармонического сигнала на фоне сильного аддитивного шума?

4.5. Список использованных источников

1. Карлов А.М., Кологривов А.Г. Случайные сигналы в радиотехнических цепях: Учеб. пособие. – Калининград: БГАРФ, 1996. – 99 с.
2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 2000. – 462 с.
3. Горяинов В.Т., Журавлев А.Г., Тихонов В.И. Статистическая радиотехника: Примеры и задачи: учеб. пособие для вузов / Под ред. В.И. Тихонова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Сов. радио, 1980. – 544 с.
4. Кирьянов Д.В. Mathcad 14. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 704 с.



БГАРФ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

«Исследование характеристик случайных процессов на выходе линейных радиотехнических цепей»

Цель работы: Ознакомиться с явлением нормализации случайного процесса узкополосными радиотехническими цепями, исследовать числовые характеристики случайного процесса на выходе дифференцирующей и интегрирующей цепей.

5.1. Краткие теоретические сведения

5.1.1. Нормализация СП узкополосными системами

Для анализа статистических свойств СП на выходе линейной системы важно знать закон распределения случайной (шумовой) составляющей выходного сигнала, который в общем случае не совпадает с законом распределения этой составляющей на входе системы. С этой целью удобно воспользоваться методом интеграла наложения для представления выходного сигнала $y(t)$ через отсчеты входного сигнала $x(t)$ и импульсной характеристики системы $g(t)$ [1]:

$$y(t) = \int_0^t x(t-T) g(T) dT \quad (5.1)$$

или в дискретном виде:

$$y(k \cdot \Delta t) = \sum_{i=0}^k x((k-i) \cdot \Delta t) g(i \cdot \Delta t) \cdot \Delta t, \quad (5.2)$$

где Δt – временной шаг дискретизации входного сигнала;

$k = 0..N - 1$ – номера отсчетов входного сигнала;

N – число отсчетов выходного сигнала.

Из теории линейных электрических цепей известно, что со временем импульсная характеристика убывает до нуля [1]. Если выполняется условие, при котором шаг дискретизации входного сигнала Δt много меньше постоянной времени системы τ_c ,

$$\text{где } \Delta t \ll \tau_c, \quad (5.3)$$

то каждый отсчет выходного сигнала представляет собой сумму достаточно большого числа слагаемых.

Возможны *три варианта сигнала на входе системы*:

- гауссовский случайный процесс со временем корреляции $\tau_k \ll \tau_c$;
- случайный процесс с произвольным законом распределения и временем корреляции $\tau_k \ll \tau_c$;
- случайный процесс с произвольным законом распределения и временем корреляции, не удовлетворяющим условию $\tau_k \ll \tau_c$.

В первом случае, в соответствии с выражением (5.2), СП на выходе линейной системы представляет собой сумму гауссовских СП, умноженных на постоянные величины вида $g(i \cdot \Delta t) \cdot \Delta t$. Из теории вероятностей известно, что такая сумма также представляет собой гауссовский СП [2].

Во втором случае СП на выходе линейной системы представляет собой сумму достаточно большого числа одинаково распределенных СП, умноженных на постоянные величины вида $g(i \cdot \Delta t) \cdot \Delta t$. В этом случае выполняются условия **центральной предельной теоремы** [2], согласно которой закон распределения такой суммы неограниченно приближается к нормальному закону при увеличении числа слагаемых, если среди них отсутствуют доминирующие по значению величины.

Таким образом, СП на выходе линейной системы будет гауссовским.

В третьем случае закон распределения СП на выходе линейной системы зависит от закона распределения СП на входе системы и импульсной характеристики самой системы.

Условие (5.3) может быть переписано в несколько ином виде, если воспользоваться связями временных и частотных параметров линейной системы и СП, а именно:

$$\tau_k \sim \frac{1}{\Delta f_{\text{эфф}}} \quad \text{и} \quad \tau_c \sim \frac{1}{\Delta f}, \quad (5.4)$$

где $\Delta f_{\text{эфф}}$ – эффективная ширина энергетического спектра СП на входе линейной системы, а Δf – ширина полосы пропускания линейной системы. Тогда условие (5.3) принимает вид:

$$\Delta f \ll \Delta f_{\text{эфф}}. \quad (5.5)$$

Таким образом, **свойство нормализации СП** при прохождении через линейные системы сводится к следующему: *если линейная си-*

стема является узкополосной по отношению к СП на ее входе, то закон распределения СП на выходе системы тем ближе к гауссовскому, чем сильнее выполняется свойство узкополосности (5.5) вне зависимости от статистики входного СП.

5.1.2. Прохождение СП через линейные системы

Выражение (5.1), устанавливающее взаимосвязь входного и выходного СП позволяет оценить характеристики СП на выходе линейной системы. В частности, математическое ожидание выходного СП равно:

$$m_y(t) = \langle y(t) \rangle = \int_0^t \langle x(t-T) \rangle g(T) dT = \int_0^t m_x(t-T) g(T) dT, \quad (5.6)$$

а его корреляционная функция определяется выражением вида:

$$\begin{aligned} K_y(t_1, t_2) &= \langle [y(t_1) - m_y(t_1)] \cdot [y(t_2) - m_y(t_2)] \rangle = \\ &= \left\langle \int_0^{t_1} \{x(t_1 - T_1) - m_x(t_1 - T_1)\} g(T_1) dT_1 \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^{t_2} \{x(t_2 - T_2) - m_x(t_2 - T_2)\} g(T_2) dT_2 \right\rangle = \\ &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \langle [x(t_1 - T_1) - m_x(t_1 - T_1)] \cdot [x(t_2 - T_2) - m_x(t_2 - T_2)] \rangle g(T_1) g(T_2) dT_2 dT_1 \\ &\text{или } K_y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_x(t_1 - T_1, t_2 - T_2) g(T_1) g(T_2) dT_2 dT_1. \quad (5.7) \end{aligned}$$

Дисперсия СП на выходе линейной системы связана с корреляционной функцией простым соотношением:

$$\sigma_y^2(t) = K_y(t, t) = \int_0^t \int_0^t K_x(t - T_1, t - T_2) g(T_1) g(T_2) dT_2 dT_1. \quad (5.8)$$

Взаимная корреляционная функция СП на входе и выходе линейной системы может быть определена по аналогии с корреляционной функцией в виде:

$$\begin{aligned}
K_{xy}(t_1, t_2) &= \left\langle [x(t_1) - m_x(t_1)] \cdot [y(t_2) - m_y(t_2)] \right\rangle = \\
&= \left\langle \{x(t_1) - m_x(t_1)\} \cdot \int_0^{t_2} \{x(t_2 - T_2) - m_x(t_2 - T_2)\} g(T_2) dT_2 \right\rangle = \\
&= \int_0^{t_2} \left\langle [x(t_1) - m_x(t_1)] \cdot [x(t_2 - T_2) - m_x(t_2 - T_2)] \right\rangle g(T_2) dT_2
\end{aligned}$$

$$\text{или } K_{xy}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} K_x(t_1, t_2 - T_2) g(T_2) dT_2. \quad (5.9)$$

Важными с практической точки зрения являются случаи дифференцирования и интегрирования СП. Рассмотрим их по очереди.

5.1.3. Дифференцирование СП

При дифференцировании СП, как и любого детерминированного сигнала, операторное изображение сигнала $X(p)$ умножается на оператор Лапласа p , то есть:

$$Y(p) = p \cdot X(p).$$

Таким образом, операторная функция системы равна [3]:

$$T(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = p.$$

Операторная функция представляет собой изображение импульсной характеристики системы и в соответствии с **теоремой дифференцирования** может быть представлена через δ -функцию в виде:

$$g(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}. \quad (5.10)$$

Тогда математическое ожидание СП на выходе дифференцирующей цепи будет равно:

$$\begin{aligned}
m_y(t) &= \int_0^t m_x(t-T) \frac{d\delta(T)}{dT} dT = \int_0^t m_x(t-T) d\delta(T) = \\
&= m_x(t-T) \delta(T) \Big|_0^t + \int_0^t m'_x(t-T) \delta(T) dT = m'_x(t),
\end{aligned} \quad (5.11)$$

где штрих обозначает производную по времени.

Таким образом, математическое ожидание СП на выходе дифференцирующей цепи равно производной от математического ожидания СП на входе этой цепи.

Корреляционная функция СП на выходе дифференцирующей цепи может быть найдена подстановкой (5.10) в (5.7). Действительно:

$$\begin{aligned}
 K_y(t_1, t_2) &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_x(t_1 - T_1, t_2 - T_2) g(T_1) \frac{d\delta(T_2)}{dT_2} dT_2 dT_1 = \\
 &= \int_0^{t_1} g(T_1) \left\{ \int_0^{t_2} K_x(t_1 - T_1, t_2 - T_2) d\delta(T_2) \right\} dT_1 = \\
 &= \int_0^{t_1} g(T_1) \left\{ K_x(t_1 - T_1, t_2 - T_2) \delta(T_2) \Big|_0^{t_2} - \int_0^{t_2} \frac{\partial K_x}{\partial T_2} \delta(T_2) dT_2 \right\} dT_1 = \\
 &= \int_0^{t_1} g(T_1) \left\{ \int_0^{t_2} \frac{\partial K_x}{\partial t_2} \delta(T_2) dT_2 \right\} dT_1 = \int_0^{t_1} g(T_1) \frac{\partial K_x(t_1 - T_1, t_2)}{\partial t_2} dT_1.
 \end{aligned}$$

Повторная подстановка дает:

$$\begin{aligned}
 K_y(t_1, t_2) &= \int_0^{t_1} \frac{\partial K_x(t_1 - T_1, t_2)}{\partial t_2} \frac{d\delta(T_1)}{dT_1} dT_1 = \int_0^{t_1} \frac{\partial K_x(t_1 - T_1, t_2)}{\partial t_2} d\delta(T_1) = \\
 &= \frac{\partial K_x(t_1 - T_1, t_2)}{\partial t_2} \cdot \delta(T_1) \Big|_0^{t_1} - \int_0^{t_1} \frac{\partial^2 K_x(t_1 - T_1, t_2)}{\partial t_2 \partial T_1} \delta(T_1) dT_1 = \\
 &= - \int_0^{t_1} \frac{\partial^2 K_x(t_1 - T_1, t_2)}{\partial t_2 \partial T_1} \delta(T_1) dT_1 = \int_0^{t_1} \frac{\partial^2 K_x(t_1 - T_1, t_2)}{\partial t_2 \partial t_1} \delta(T_1) dT_1.
 \end{aligned}$$

Таким образом:

$$K_y(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_2 \partial t_1} = \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}. \quad (5.12)$$

Тогда дисперсия СП на выходе дифференцирующей цепи равна:

$$\sigma_y^2(t) = K_y(t, t) = \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \Big|_{t_1 = t_2 = t}. \quad (5.13)$$

Аналогично, подстановка (5.10) в (5.9) позволяет получить выражение для взаимной корреляционной функции СП на входе и выходе дифференцирующей цепи:

$$\begin{aligned}
K_{xy}(t_1, t_2) &= \int_0^{t_2} K_x(t_1, t_2 - T_2) \frac{d\delta(T_2)}{dT_2} dT_2 = \\
&= \int_0^{t_2} K_x(t_1, t_2 - T_2) d\delta(T_2) = K_x(t_1, t_2 - T_2) \cdot \delta(T_2) \Big|_0^{t_2} - \\
&- \int_0^{t_2} \frac{\partial K_x(t_1, t_2 - T_2)}{\partial T_2} \delta(T_2) dT_2 = - \int_0^{t_2} \frac{\partial K_x(t_1, t_2 - T_2)}{\partial T_2} \delta(T_2) dT_2 = \\
&= \int_0^{t_2} \frac{\partial K_x(t_1, t_2 - T_2)}{\partial t_2} \delta(T_2) dT_2 = \frac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_2}.
\end{aligned}$$

Таким образом:

$$K_{xy}(t_1, t_2) = \frac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_2}. \quad (5.14)$$

Для случая стационарного СП на входе дифференцирующей цепи корреляционная функция СП на выходе цепи может быть найдена следующим образом:

$$K_y(\tau = t_2 - t_1) = \frac{\partial^2 K_x(t_2 - t_1)}{\partial t_1 \partial t_2} = - \frac{d^2 K_x(\tau)}{d\tau^2} = -K_x''(\tau), \quad (5.15)$$

где двойной штрих обозначает вторую производную по времени.

Тогда дисперсия СП на выходе дифференцирующей цепи равна:

$$\sigma_y^2 = -K_x''(\tau) \Big|_{\tau=0}. \quad (5.16)$$

Аналогично, выражение для взаимной корреляционной функции СП на входе и выходе дифференцирующей цепи принимает вид:

$$K_{xy}(\tau = t_2 - t_1) = K_{xy}(t_2 - t_1) = \frac{\partial K_x(t_2 - t_1)}{\partial t_2} = \frac{\partial K_x(\tau)}{\partial \tau} = K_x'(\tau), \quad (5.17)$$

где штрих обозначает производную.

Таким образом, если СП на входе дифференцирующей цепи является стационарным, то СП на выходе этой цепи будет также стационарным. Иначе говоря, *дифференцирующая цепь не нарушает стационарности СП.*

На практике узкополосные СП часто имеют корреляционную функцию одного из двух видов:

а) с огибающей вида $\frac{\sin(x)}{x}$;

б) экспоненциально-косинусоидальную [4]:

$$K_{x1}(\tau) = K_{\max} \cdot \frac{\sin(\alpha\tau)}{\alpha\tau} \cdot \cos(\omega_0\tau), \quad K_{x2}(\tau) = K_{\max} \cdot e^{-\beta^2\tau^2} \cdot \cos(\omega_0\tau).$$

В первом случае выражение (5.16) дает:

$$\sigma_y^2 = K_{\max} \left(\frac{\alpha^2}{3} + \omega_0^2 \right) = \sigma_x^2 \left(\frac{\alpha^2}{3} + \omega_0^2 \right), \quad (5.18)$$

а во втором случае:

$$\sigma_y^2 = K_{\max} (2\beta^2 + \omega_0^2) = \sigma_x^2 (2\beta^2 + \omega_0^2). \quad (5.19)$$

5.1.4. Интегрирование СП

При интегрировании СП, как и любого детерминированного сигнала, операторное изображение сигнала $X(p)$ делится на оператор Лапласа p , то есть:

$$Y(p) = \frac{X(p)}{p}.$$

Таким образом, операторная функция системы равна [3]:

$$T(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{p}.$$

Операторная функция представляет собой изображение импульсной характеристики системы и таким образом равна:

$$g(t) = 1(t). \quad (5.20)$$

Тогда математическое ожидание СП на выходе интегрирующей цепи будет равно:

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(t-T) 1(T) dT = \int_0^t m_x(T) dT \quad (5.21)$$

и даже если СП на входе интегрирующей цепи является стационарным и $m_x(t) = const$, СП на выходе этой цепи будет нестационарным:

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(T) dT = \int_0^t m_x dT = m_x \cdot t. \quad (5.22)$$

Единственное исключение из данного правила составляет случай, когда математическое ожидание СП на входе интегрирующей цепи равно нулю. Тогда $m_y(t) = 0$ и сделать заключение о нестационарности СП по математическому ожиданию не возможно, но возможно по остальным статистическим характеристикам.

Таким образом, *интегрирующая цепь нарушает стационарность СП.*

Корреляционная функция СП на выходе интегрирующей цепи принимает вид:

$$K_y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_x(t_1 - T_1, t_2 - T_2) dT_2 dT_1 = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_x(T_1, T_2) dT_2 dT_1 \quad (5.23)$$

и даже если СП на входе интегрирующей цепи стационарный и $K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2 - t_1)$ значение интегралов зависят непосредственно от t_1 и t_2 , значит, СП на выходе интегрирующей цепи является нестационарным.

Дисперсия СП на выходе интегрирующей цепи равна:

$$\sigma_y^2(t) = K_y(t, t) = \int_0^t \int_0^t K_x(T_1, T_2) dT_2 dT_1. \quad (5.24)$$

И, наконец, взаимная корреляционная функция СП на входе и выходе интегрирующей цепи равна:

$$K_{xy}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} K_x(t_1, t_2 - T_2) dT_2 = \int_0^{t_2} K_x(t_1, T_2) dT_2. \quad (5.25)$$

5.2. Лабораторное задание

5.2.1. Исследование явления нормализации СП на выходе узкополосной цепи

Запустите приложение MathCAD.

Сформируйте случайные величины, распределенные нормально, равномерно, экспоненциально и по закону Рэлея. С этой целью выполните следующие процедуры.

Задайте число отсчетов равномерно распределенной СВ, например:

$$N := 2^{16}$$

Сгенерируйте 2 массива отсчетов: нормально распределенной СВ с использованием функции встроенного генератора MathCAD $rnorm$ и равномерно распределенной СВ с использованием функции встроенного генератора MathCAD $runif$ [5]:

$$X1 := rnorm(N, 0, 1)$$

$$X2 := runif(N, 0, 1)$$

В первой процедуре 0 означает математическое ожидание, а 1 – СКО СВ, а во второй процедуре 0 и 1 означают границы интервала, в котором СВ распределена равномерно.

Сформируйте отсчеты СВ, распределенных экспоненциально и по закону *Рэля*, используя метод **обратного преобразования функции распределения**, изложенный в п. 2.1 лабораторной работы № 2. Для этого выполните следующие процедуры:

$$i := 0..N - 1$$

$$X3_i := -2 \cdot \ln(X2_i + 10^{-20})$$

$$X4_i := \sqrt{-2 \cdot \ln(X2_i + 10^{-20})}$$

Для возможности использования любой из сформированных СВ в качестве СП на входе узкополосной цепи введите переменную, отвечающую за тип распределения СВ, например:

$$Tip1 := 1$$

Объедините сформированные СВ в одну функцию с помощью следующей процедуры:

$$X_i := \begin{cases} X1_i & \text{if } Tip1 = 1 \\ X2_i & \text{if } Tip1 = 2 \\ X3_i & \text{if } Tip1 = 3 \\ X4_i & \text{if } Tip1 = 4 \end{cases}$$

Изменяя значение переменной $Tip1$ можно менять закон распределения СП на входе узкополосной цепи.

Постройте гистограммы распределений СВ для всех четырех случаев в соответствии с методикой, изложенной в п. 1.2.2 лабораторной работы № 1. Отобразите в тех же координатных осях теоретические законы распределения.

Число интервалов гистограммы выберите равным:

$$M := 30$$

При выборе шага интегрирования опирайтесь на минимальное и максимальное значения СВ, которые могут быть определены с использованием встроенных функций среды MathCAD \min и \max [5]:

$$h_X := \frac{\max(X) - \min(X)}{M}$$

Переменную для построения закона распределения СВ задайте исходя из тех же соображений:

$$x := \min(X), \min(X) + \frac{\max(X) - \min(X)}{100} .. \max(X)$$

Для построения теоретического закона вычислите математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение (СКО) СВ, а также параметр σ для закона распределения Рэлея:

$$X_{\text{cp}} := \text{mean}(X) \quad \sigma_X := \sqrt{\text{var}(X)} \quad \sigma := \sigma_X \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Теоретический закон может быть записан в рамках единой процедуры в виде:

$$W(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_X^2}} \cdot e^{-\frac{(x - X_{\text{cp}})^2}{2 \cdot \sigma_X^2}} & \text{if } Tip1 = 1 \\ 1 & \text{if } Tip1 = 2 \\ \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} & \text{if } Tip1 = 3 \\ \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}} & \text{if } Tip1 = 4 \end{cases}$$

Постройте гистограммы распределения (рис. 5.1) для всех четырех типов распределения СП на входе узкополосной цепи. **Сделайте вывод о соответствии законов распределения сформированных СП теоретически ожидаемым.**

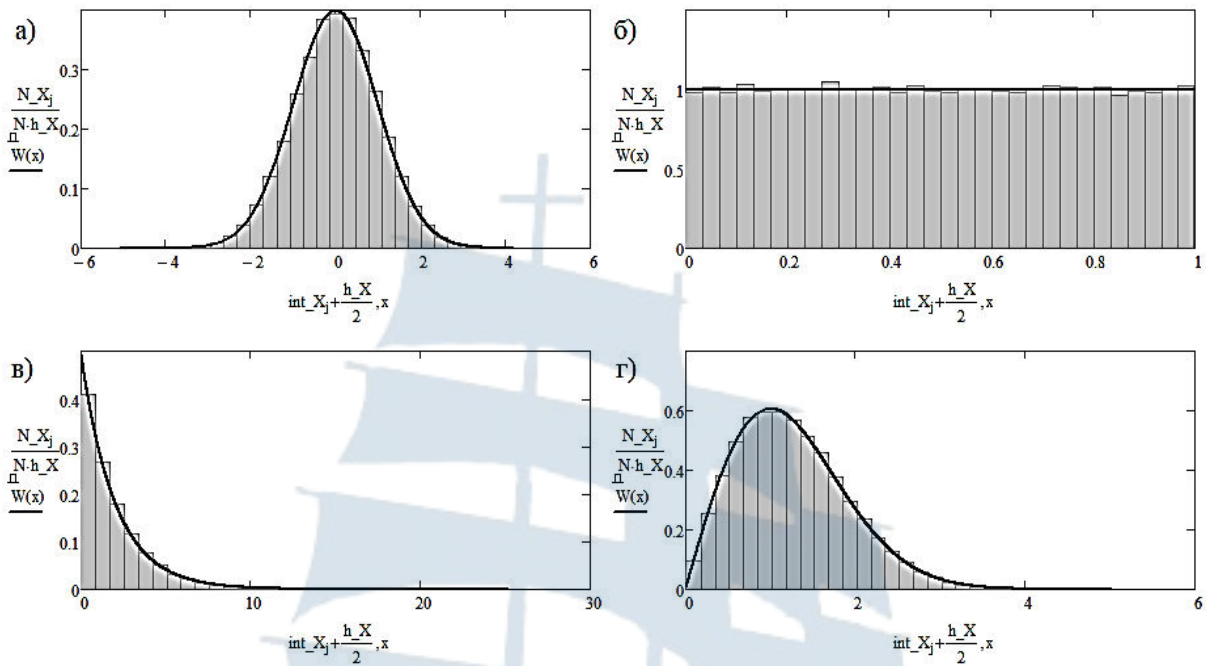


Рис. 5.1. Гистограмма распределения отсчетов СВ и теоретический закон распределения СП на входе узкополосной цепи:
 а) нормальный закон; б) равномерный закон;
 в) экспоненциальный закон; г) закон Рэля

Смоделируйте прохождение данных СП через узкополосную цепь. С этой целью сформируйте массив отсчетов комплексного спектра СП X на входе узкополосной цепи, используя встроенную функцию среды MathCAD fft [5]:

$$S_X := \text{fft}(X)$$

Ширина данного спектра определяется номером последнего элемента массива, который может быть определен с помощью встроенной функции среды MathCAD last [5]:

$$L := \text{last}(S_X)$$

Задайте полуширину полосы пропускания узкополосной цепи, выраженную в количестве отсчетов комплексного спектра S_X , например:

$$\Delta := \frac{L}{64}$$

Сформируйте отсчеты комплексных коэффициентов передачи узкополосных цепей с идеальной и гауссовой формами АЧХ. Используйте для этого следующие процедуры:

$$k := 0..L$$

$$T1_k := \begin{cases} e^{-i \cdot \frac{k-L}{\Delta} \cdot \frac{\pi}{4}} & \text{if } \left| k - \frac{L}{2} \right| \leq \Delta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$T2_k := e^{-\left(\frac{k-L}{\Delta}\right)^2 \cdot \ln(\sqrt{2})} \cdot e^{-i \cdot \frac{k-L}{\Delta} \cdot \frac{\pi}{4}}$$

Для возможности выбора формы АЧХ узкополосной цепи введите переменную, отвечающую за тип фильтра, и объедините отсчеты комплексных коэффициентов передачи в одну функцию, например:

$$Tip2 := 1$$

$$T_k := \begin{cases} T1_k & \text{if } Tip2 = 1 \\ T2_k & \text{if } Tip2 = 2 \end{cases}$$

В соответствии со спектральным методом сформируйте отсчеты узкополосного (narrowband) СП на выходе узкополосной цепи:

$$S_Xnb_k := S_X_k \cdot T_k$$

Сформируйте массив отсчетов реализации узкополосного СП, перейдя от комплексного спектра S_Xnb к временной реализации Xnb с использованием встроенной функции среды MathCAD $ifft$ [5], осуществляющей процедуру обратного быстрого преобразования Фурье (ОБПФ):

$$Xnb := ifft(S_Xnb)$$

Постройте гистограмму распределения узкополосного СП Xnb в соответствии с методикой, приведенной выше при построении гистограммы распределения СП на входе узкополосной цепи.

Считая СП Xnb гауссовым, постройте в тех же координатных осях теоретический закон распределения с математическим ожиданием и СКО, определенных процедурами вида:

$$Xnb_cp := \text{mean}(Xnb)$$

$$\sigma_Xnb := \sqrt{\text{var}(Xnb)}$$

Убедитесь, что гистограмма распределения соответствует нормальному закону вне зависимости от закона распределения СП на входе узкополосной цепи и формы АЧХ этой цепи. Сохраните любой из результатов построения (рис. 5.2).

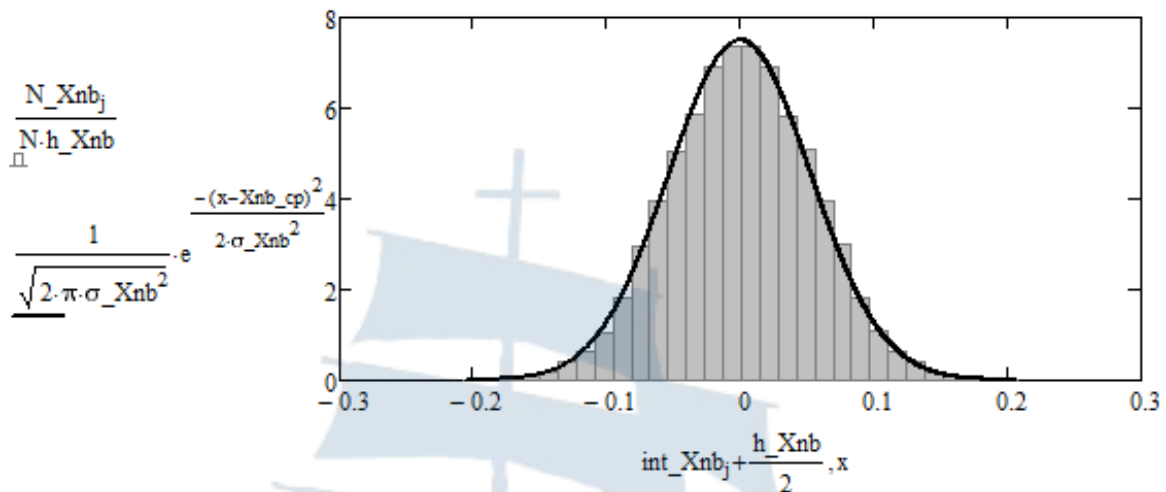


Рис. 5.2. Гистограмма распределения СП на выходе узкополосной цепи с гауссовой формой АЧХ при равномерном законе распределения СП на входе цепи

5.2.2. Исследование дифференцирования узкополосного СП

Задайте ненулевое значение математического ожидания узкополосного случайного процесса на входе дифференцирующей цепи, например:

$$mx := 1$$

С помощью встроенной функции среды MathCAD `fft` сформируйте массив отсчетов реализации спектра узкополосного случайного процесса с таким математическим ожиданием:

$$S_Xnb := \text{fft}(Xnb + mx)$$

Осуществите дифференцирование СП в частотной области. Для этого воспользуйтесь процедурой вида:

$$j := 0..last(S_Xnb)$$

$$S_Y_j := i \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot j}{N} \cdot S_Xnb_j$$

Сформируйте массив отсчетов производной СП, осуществив обратное БПФ с использованием встроенной функции среды MathCAD `ifft`:

$$Y := \text{ifft}(S_Y)$$

Полученный массив значений описывает реализацию производной СП.

Таким образом, номер элемента массива эквивалентен времени наблюдения за данной реализацией.

Полагая, что СП на выходе является стационарным, воспользуйтесь свойством эргодичности для нахождения математического ожидания и дисперсии данного процесса. В каждый момент времени оцените данные параметры по сформированным к этому моменту отсчетам реализации СП. Для этого воспользуйтесь следующими процедурами:

– для поиска математического ожидания

$$\begin{array}{l}
 M_Ynb := \left| \begin{array}{l}
 M_Ynb_0 \leftarrow Ynb_0 \\
 \text{for } i = 1..last(Ynb) \\
 \quad M_Ynb_i \leftarrow M_Ynb_{i-1} + Ynb_i \\
 \text{for } i = 1..last(Ynb) \\
 \quad M_Ynb_i \leftarrow \frac{M_Ynb_i}{i+1} \\
 M_Ynb
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

– для поиска дисперсии

$$\begin{array}{l}
 D_Ynb := \left| \begin{array}{l}
 D_Ynb_0 \leftarrow (Ynb_0 - M_Ynb_0)^2 \\
 \text{for } i = 1..last(Ynb) \\
 \quad D_Ynb_i \leftarrow D_Ynb_{i-1} + (Ynb_i - M_Ynb_i)^2 \\
 \text{for } i = 1..last(Ynb) \\
 \quad D_Ynb_i \leftarrow \frac{D_Ynb_i}{i+1} \\
 D_Ynb
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Постройте графики зависимости математического ожидания и дисперсии производной СП от времени (рис. 5.3). Поскольку при отыскании спектра реализации производной СП был использован единичный шаг дискретизации по времени, то по оси абсцисс следует откладывать номер соответствующего элемента массива.

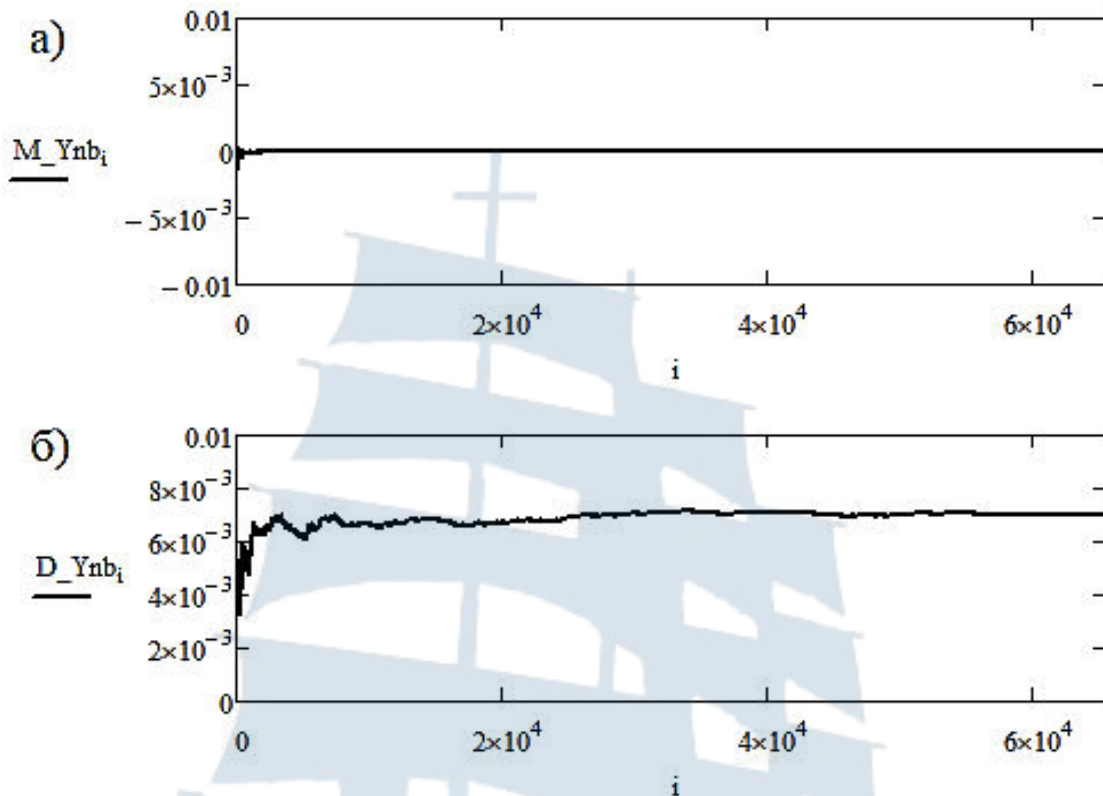


Рис. 5.3. Временные зависимости математического ожидания (а) и дисперсии (б) для реализации производной СП

Сделайте вывод о стационарности или нестационарности СП на выходе дифференцирующей цепи. С чем вы связываете непостоянство значений математического ожидания и дисперсии на начальных участках графиков?

Сравните установившиеся значения математического ожидания и дисперсии с теоретическими значениями. Установившиеся значения определите с помощью встроенных функций mean и var среды MathCAD [5]:

$$\text{mean}(Ynb) =$$

$$\text{var}(Ynb) =$$

Теоретическое значение математического ожидания определите с использованием выражения (5.11) и оператора \rightarrow с панели *Evaluation*:

$$\frac{d}{dt} mx \rightarrow$$

Теоретическое значение дисперсии определите с использованием выражений (5.18) и (5.19). Для этого определите значение пара-

метров α , β и ω_0 , входящих в эти выражения с помощью следующих процедур:

$$\alpha := \frac{\pi}{L} \cdot \Delta \quad \beta := \frac{\pi}{2 \cdot L} \cdot \Delta \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln(2)}} \quad \omega_0 := \frac{\pi}{L} \cdot \frac{L}{2}$$

Данные выражения получены с использованием выражений (3.17) и (3.18) и с учетом того, что при единичном шаге дискретизации по времени шаг дискретизации по частоте составляет:

$$\delta f = \frac{1}{N \cdot \Delta t} = \frac{1}{N} = \frac{1}{2 \cdot L},$$

откуда следует, что:

$$\alpha = \pi \Delta f = \pi \delta f \cdot 2L = \frac{\pi}{L} \cdot \Delta,$$

$$\beta = \frac{\pi \Delta f}{2 \sqrt{\ln(2)}} = \frac{\pi \delta f \cdot 2L}{2 \sqrt{\ln(2)}} = \frac{\pi}{2L} \cdot \Delta \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln(2)}},$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \delta f \cdot \frac{L}{2} = \frac{\pi}{L} \cdot \frac{L}{2}.$$

Вычислите теоретическое значение дисперсии, используя следующую процедуру:

$$D_{dXnb} := \begin{cases} -\sigma_{Xnb}^2 \cdot \left(\frac{\alpha^2}{3} + \omega_0^2 \right) & \text{if } Tip2 = 1 \\ -\sigma_{Xnb}^2 \cdot \left(2 \cdot \beta^2 + \omega_0^2 \right) & \text{if } Tip2 = 2 \end{cases}$$

Выведите результат на экран:

$$D_{dXnb} =$$

Попробуйте изменить величину m_x математического ожидания узкополосного СП на входе дифференцирующей цепи для любой из рассмотренных форм АЧХ. Сравните полученные значения математического ожидания и дисперсии с предыдущими значениями. **Сделайте вывод о том, от чего зависят математическое ожидание и дисперсия производной СП.**

5.2.3. Исследование интегрирования узкополосного СП

Реализуйте процедуру интегрирования узкополосного СП в дискретном виде. С этой целью воспользуйтесь процедурой вида:

$$Znb := \left| \begin{array}{l} Znb_0 \leftarrow Xnb_0 + mx \\ \text{for } i = 1..last(Xnb) \\ \quad Znb_i \leftarrow Znb_{i-1} + Xnb_i + mx \\ Znb \end{array} \right.$$

Несмотря на ожидаемую нестационарность интеграла от СП, оцените математическое ожидание и дисперсию в каждый момент времени по сформированным к этому моменту отсчетам реализации СП. Для этого воспользуйтесь теми же процедурами, что и для случая дифференцирования узкополосного СП. Постройте графики временных зависимостей математического ожидания и дисперсии интеграла от СП (рис. 5.4). **Сделайте вывод о стационарности СП в виде интеграла от узкополосного СП.**

Процедура для поиска математического ожидания имеет вид:

$$M_Znb := \left| \begin{array}{l} M_Znb_0 \leftarrow Znb_0 \\ \text{for } i = 1..last(Znb) \\ \quad M_Znb_i \leftarrow M_Znb_{i-1} + Znb_i \\ \text{for } i = 1..last(Znb) \\ \quad M_Znb_i \leftarrow \frac{M_Znb_i}{i+1} \\ M_Znb \end{array} \right.$$

а для поиска дисперсии следующий вид:

$$D_Znb := \left| \begin{array}{l} D_Znb_0 \leftarrow (Znb_0 - M_Znb_0)^2 \\ \text{for } i = 1..last(Znb) \\ \quad D_Znb_i \leftarrow D_Znb_{i-1} + (Znb_i - M_Znb_i)^2 \\ \text{for } i = 1..last(Znb) \\ \quad D_Znb_i \leftarrow \frac{D_Znb_i}{i+1} \\ D_Znb \end{array} \right.$$

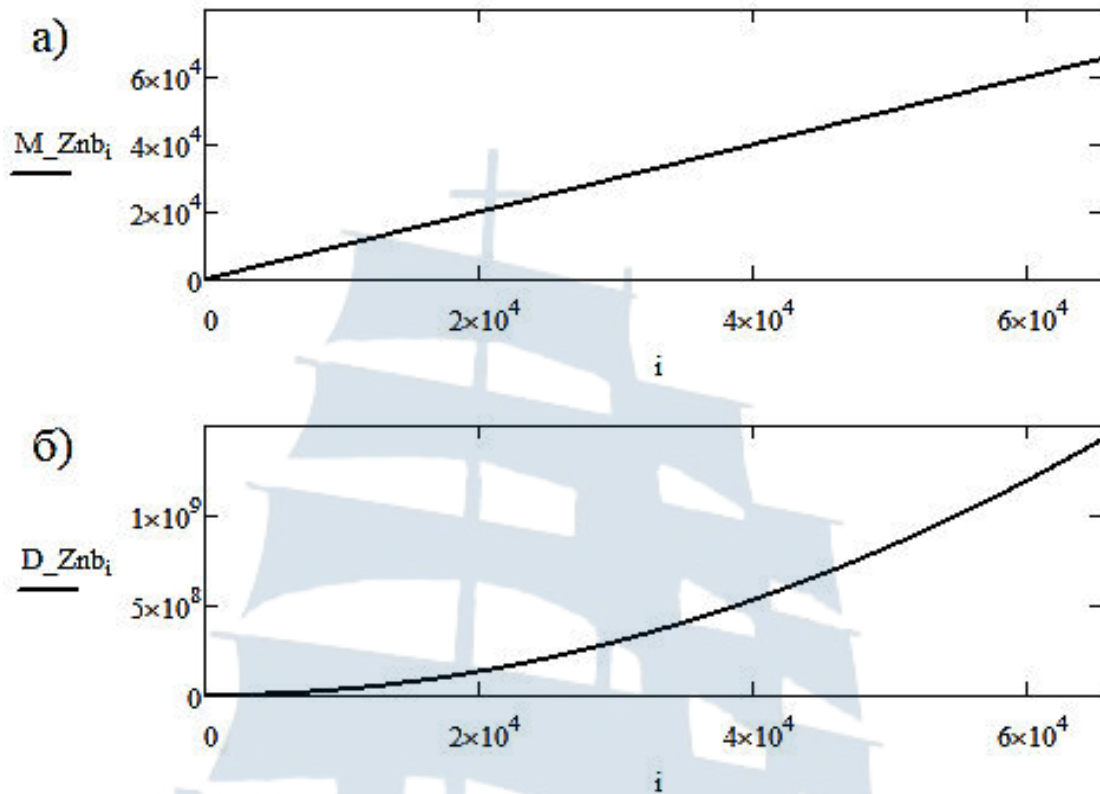


Рис. 5.4. Временные зависимости математического ожидания (а) и дисперсии (б) для реализации интеграла от СП

5.3. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- титульный лист (см. Приложение А);
- цель работы, название пунктов лабораторного задания;
- результаты машинного эксперимента (листинг программного кода с графическими результатами);
- выводы по проделанной работе.

5.4. Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте центральную предельную теорему.
2. При каком условии СП на выходе линейной системы будет гауссовским? Принципиально ли, чтобы система была линейной? Играет ли роль вид закона распределения СП на входе системы?
3. Как связаны математические ожидания СП на входе и выходе дифференцирующей цепи?
4. Как связаны корреляционные функции стационарного СП на входе дифференцирующей цепи и СП на выходе такой цепи?

5. Пусть задана корреляционная функция стационарного СП на входе дифференцирующей цепи:

$$- K_x(\tau) = K_{\max} \cdot e^{-\beta \cdot |\tau|};$$

$$- K_x(\tau) = K_{\max} \cdot e^{-\beta \cdot |\tau|} \cdot (1 + \beta \cdot |\tau|);$$

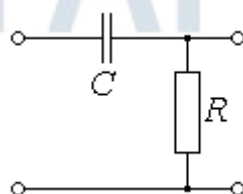
$$- K_x(\tau) = K_{\max} \cdot e^{-\beta \cdot |\tau|} \cdot (1 - \beta \cdot |\tau|);$$

$$- K_x(\tau) = K_{\max} \cdot e^{-\beta^2 \tau^2};$$

$$- K_x(\tau) = \frac{K_{\max}}{1 + \beta^2 \tau^2}.$$

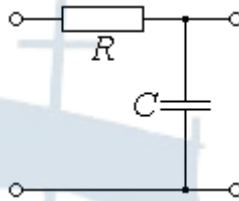
Определите корреляционную функцию и дисперсию СП на выходе такой цепи.

6. Как связаны корреляционная функция стационарного СП на входе дифференцирующей цепи и взаимная корреляционная функция СП на входе и выходе такой цепи?
7. Для корреляционной функции СП на входе дифференцирующей цепи из условия вопроса 5 определите взаимную корреляционную функцию случайных процессов на входе и выходе такой цепи.
8. Докажите, что СП на выходе дифференцирующей цепи является стационарным в широком смысле, если корреляционная функция стационарного СП на входе цепи абсолютно гладкая.
9. Как связаны математические ожидания СП на входе и выходе интегрирующей цепи?
10. Как связаны корреляционные функции СП на входе и выходе интегрирующей цепи?
11. Как связаны корреляционная функция СП на входе интегрирующей цепи и взаимная корреляционная функция СП на входе и выходе такой цепи?
12. Докажите, что СП на выходе интегрирующей цепи является нестационарным, даже если СП на входе цепи стационарный. Нарушается ли стационарность СП, если математическое ожидание СП на входе цепи равно нулю?
13. Покажите, что RC-цепь вида:



может выполнять функцию дифференцирующей цепи для СП. Как должна быть выбрана постоянная времени такой цепи?

14. Покажите, что RC-цепь вида:



может выполнять функцию интегрирующей цепи для СП. Как должна быть выбрана постоянная времени такой цепи?

15. Можно ли в качестве дифференцирующей цепи для СП использовать RL-цепь? Приведите схему такой цепи. Как должна быть выбрана постоянная времени такой цепи?

16. Можно ли в качестве интегрирующей цепи для СП использовать RL-цепь? Приведите схему такой цепи. Как должна быть выбрана постоянная времени такой цепи?

5.5. Список использованных источников

1. Волхонская Е. В., Коротей Е. В. Сборник задач и упражнений по дисциплине «Электротехника и электроника». Часть 1. Переходные процессы в линейных электрических цепях. – Калининград: БГАРФ, 2010. – 166 с.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учебник / Е.С. Вентцель. – 11-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2010. – 664 с.
3. Крюков И.Н., Шрейдер Б.Г., Щепеткин Ф.В. Основы теории цепей. Книга 2: для студентов и курсантов высших учебных заведений. – Москва «Граница», 2002. – 152 с.
4. Узкополосные случайные процессы [Текст]: монография / Е.В. Волхонская, А.М. Карлов. – Калининград: БГАРФ, 2004. – 168 с.
5. Кирьянов Д.В. Mathcad 14. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 704 с.

БГАРФ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

«Исследование характеристик случайных процессов на выходе нелинейной радиотехнической цепи»

Цель работы: Провести модельные исследования характеристик СП на выходе амплитудного детектора при воздействии на него аддитивной смеси полезного сигнала и узкополосного шума.

6.1. Краткие теоретические сведения

6.1.1. Характеристики СП в виде огибающей аддитивной смеси сигнала и узкополосного шума

Одним из видов аналоговой модуляции, которые могут применяться для передачи информации, является **амплитудная модуляция (АМ)**. В общем виде амплитудно-модулированный радиосигнал описывается следующей математической моделью [1]:

$$u(t) = U_m [1 + k_{\text{АМ}} \cdot s(t)] \cos(\omega_0 t + \theta_0), \quad (6.1)$$

где A_m , ω_0 и θ_0 – амплитуда, угловая частота и начальная фаза немодулированного высокочастотного колебания, называемого **несущим колебанием**; $s(t)$ – информационный сигнал, а $k_{\text{АМ}}$ – коэффициент амплитудной модуляции.

Если модулирующий сигнал $s(t)$ может принимать только значения, принадлежащие множеству $\{s_k, k = 0..N - 1\}$, то такой вид модуляции называют **амплитудой манипуляцией (ASK – amplitude shift keying)**.

При распространении сигнала в пространстве в виде электромагнитной волны на сигнал накладываются шумы и помехи, и он принимает вид радиосигнала со случайной **амплитудно-угловой модуляцией**.

Для выделения информации на приемной стороне применяют процедуру, обратную модуляции – **демодуляцию (детектирование)**. В данном процессе происходит выделение низкочастотного сигнала, пропорционального так называемой **огибающей радиосигнала**. При отсутствии шумов такая огибающая имеет вид [1]:

$$U(t) = U_m [1 + k_{\text{АМ}} \cdot s(t)]. \quad (6.2)$$

Из-за влияния шумов и помех огибающая смеси полезного радиосигнала и шума является случайной величиной. Выясним статистические свойства, корреляционные и энергетические характеристики огибающей аддитивной смеси АМ-радиосигнала и узкополосного гауссова шума. Математическая модель такой аддитивной смеси имеет вид:

$$y(t) = u(t) + x(t) = U(t) \cos(\omega_0 t + \theta_0) + x(t), \quad (6.3)$$

где $x(t)$ – аддитивный узкополосный гауссов шум, имеющий квазигармоническое представление вида [1]:

$$x(t) = A_c(t) \cos(\omega_0 t) - A_s(t) \sin(\omega_0 t), \quad (6.4)$$

где $A_c(t)$ и $A_s(t)$ – низкочастотные квадратуры.

Тогда математическая модель аддитивной смеси может быть переписана в виде:

$$y(t) = E_c(t) \cos(\omega_0 t) - E_s(t) \sin(\omega_0 t), \quad (6.5)$$

где $E_c(t)$ и $E_s(t)$ – низкочастотные квадратуры аддитивной смеси, определяемые системой уравнений вида:

$$\begin{cases} E_c(t) = E(t) \cdot \cos(\psi(t)) = U(t) \cos(\theta_0) + A_c(t), \\ E_s(t) = E(t) \cdot \sin(\psi(t)) = U(t) \sin(\theta_0) + A_s(t). \end{cases} \quad (6.6)$$

Получим выражение для двумерной плотности распределения вероятности $W(E, \psi)$ огибающей и начальной фазы аддитивной смеси. С этой целью воспользуемся выражением (3.30), определяющим двумерную плотность распределения вероятности низкочастотных квадратур аддитивного шума и вычислим якобиан преобразования:

$$W(E, \psi) = W(A_c, A_s) \cdot |J|,$$

где с учетом соотношений (6.6)

$$W(A_c, A_s) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \cdot \exp\left[-\frac{E^2 + U^2 - 2EU \cos(\psi - \theta_0)}{2\sigma_x^2}\right],$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial A_c}{\partial E} & \frac{\partial A_c}{\partial \psi} \\ \frac{\partial A_s}{\partial E} & \frac{\partial A_s}{\partial \psi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\psi) & -E \cdot \sin(\psi) \\ \sin(\psi) & E \cdot \cos(\psi) \end{vmatrix} = E \cdot \{\cos^2(\psi) + \sin^2(\psi)\} = E.$$

Таким образом:

$$W(E, \psi) = \frac{E}{2\pi\sigma_x^2} \cdot \exp\left[-\frac{E^2 + U^2 - 2EU \cos(\psi - \theta_0)}{2\sigma_x^2}\right]. \quad (6.7)$$

Одномерная плотность распределения вероятности огибающей может быть найдена из (6.7) интегрированием по всей области возможных значений начальной фазы ψ :

$$W(E) = \int_0^{2\pi} W(E, \psi) d\psi = \frac{E}{2\pi\sigma_x^2} \cdot \exp\left[-\frac{E^2 + U^2}{2\sigma_x^2}\right] \cdot \int_0^{2\pi} e^{\frac{EU \cos(\psi - \theta_0)}{\sigma_x^2}} d\psi.$$

Тогда с учетом равенства [3]:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\frac{EU \cos(\psi - \theta_0)}{\sigma_x^2}} d\psi = I_0\left(\frac{EU}{\sigma_x^2}\right)$$

выражение для одномерной плотности распределения вероятности огибающей принимает вид:

$$W(E) = \frac{E}{\sigma_x^2} \cdot \exp\left[-\frac{E^2 + U^2}{2\sigma_x^2}\right] \cdot I_0\left(\frac{EU}{\sigma_x^2}\right). \quad (6.8)$$

Если ввести безразмерные огибающие полезного сигнала и аддитивной смеси, то выражение (6.8) примет следующий вид [2]:

$$W(V) = V \cdot \exp\left[-\frac{V^2 + a^2}{2}\right] \cdot I_0(a \cdot V), \quad (6.9)$$

где $V = \frac{E}{\sigma_x}$, $a = \frac{U}{\sigma_x}$ и учтен якобиан преобразования $J = \frac{dE}{dV} = \sigma_x$.

Таким образом, результат не зависит от величины начальной фазы полезного сигнала θ_0 . В связи с этим для упрощения дальнейших вычислений будем полагать $\theta_0 = 0$.

На рис. 6.1 приведены графики плотности распределения вероятности огибающей аддитивной смеси полезного сигнала и узкополосного шума при различных значениях параметра a , играющего роль отношения сигнал/шум (ОСШ).

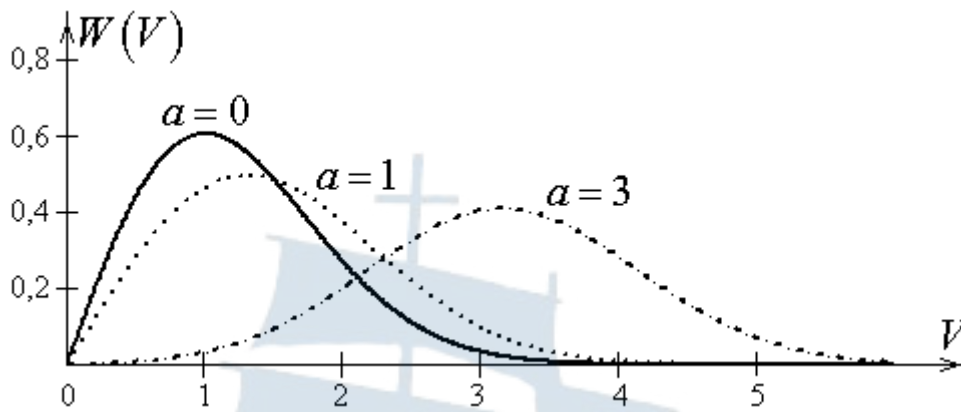


Рис. 6.1. Вид плотности распределения вероятности СВ для закона Райса при различных значениях параметра a

Из рисунка видно, что при $a = 0$ распределение Райса переходит в распределение Рэлея, а по мере увеличения данного параметра – стремится по форме к нормальному распределению.

Определим математическое ожидание и дисперсию огибающей аддитивной смеси полезного сигнала и узкополосного шума при значениях параметра $a \ll 1$ (малое значение ОСШ). В этом случае экспонента в интегральном представлении функции Бесселя может быть разложена в ряд Тейлора. Тогда с учетом того, что все четные степени $\cos(\psi)$ имеют ненулевое среднее значение, а среднее значение всех нечетных степеней $\cos(\psi)$ равно нулю, модифицированная функция Бесселя принимает вид:

$$\begin{aligned}
 I_0(a \cdot V) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{aV \cos(\psi)} d\psi = \left| e^{aV \cos(\psi)} = 1 + aV \cos(\psi) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} a^2 V^2 \cos^2(\psi) + \dots \right| = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi + \frac{aV}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\psi) d\psi + \frac{a^2 V^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(\psi) d\psi + \dots = \\
 &= 1 + \frac{a^2 V^2}{4} + \dots
 \end{aligned}$$

В дальнейшем ограничимся этими двумя слагаемыми.

Экспонента в выражении (6.9) также должна быть разложена в ряд Тейлора по параметру a :

$$\exp\left[-\frac{a^2}{2}\right] = 1 - \frac{a^2}{2} + \dots$$

Тогда математическое ожидание оказывается равным:

$$\begin{aligned}
 m_V &= \int_0^{\infty} V \cdot W(V) dV \approx \int_0^{\infty} V^2 \cdot e^{-\frac{V^2}{2}} \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) \left(1 + \frac{a^2 V^2}{4}\right) dV = \\
 &= \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) \left\{ \int_0^{\infty} V^2 \cdot e^{-\frac{V^2}{2}} dV + \frac{a^2}{4} \int_0^{\infty} V^4 \cdot e^{-\frac{V^2}{2}} dV \right\} = \\
 &= \left[\int_0^{\infty} V^2 \cdot e^{-\frac{V^2}{2}} dV = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \int_0^{\infty} V^4 \cdot e^{-\frac{V^2}{2}} dV = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \right] = \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) \left(1 + \frac{3a^2}{4}\right) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{a^2}{2} + \frac{3a^2}{4}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{a^2}{4}\right).
 \end{aligned}$$

Если вернуться от безразмерной величины V к огибающей аддитивной смеси $E = \sigma_x V$, то математическое ожидание окажется равным [2]:

$$m_E = \sigma_x m_V = \sigma_x \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{a^2}{4}\right). \quad (6.10)$$

Для нахождения дисперсии определим сначала математическое ожидание квадрата V^2 :

$$\begin{aligned}
 m_{V^2} &= \int_0^{\infty} V^2 \cdot W(V) dV \approx \int_0^{\infty} V^3 \cdot e^{-\frac{V^2}{2}} \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) \left(1 + \frac{a^2 V^2}{4}\right) dV = \\
 &= \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) \left\{ \int_0^{\infty} V^2 \cdot e^{-\frac{V^2}{2}} d\left(\frac{V^2}{2}\right) + \frac{a^2}{4} \int_0^{\infty} V^4 \cdot e^{-\frac{V^2}{2}} d\left(\frac{V^2}{2}\right) \right\} = \left| \frac{V^2}{2} = t \right| \\
 &= \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) \left\{ 2 \cdot \int_0^{\infty} t \cdot e^{-t} dt + a^2 \int_0^{\infty} t^2 \cdot e^{-t} dt \right\} = \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) (2 + 2a^2) \approx \\
 &\approx 2 \left(1 - \frac{a^2}{2} + a^2\right) = 2 \left(1 + \frac{a^2}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Тогда дисперсия оказывается равной:

$$D_V = m_{V^2} - m_V^2 = 2 \left(1 + \frac{a^2}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{a^2}{4}\right)^2 \approx \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \left(1 + \frac{a^2}{2}\right),$$

где учтено, что в силу малости параметра a выполняется равенство:

$$\left(1 + \frac{a^2}{4}\right)^2 = 1 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16} \approx 1 + \frac{a^2}{2}.$$

Если вернуться от безразмерной величины V к огибающей аддитивной смеси $E = \sigma_x V$, то дисперсия окажется равной [2]:

$$D_E = \sigma_x^2 D_V = \sigma_x^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \left(1 + \frac{a^2}{2}\right). \quad (6.11)$$

Соответственно СКО будет равно [2]:

$$\sigma_E = \sqrt{D_E} = \sigma_x \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{a^2}{4}\right). \quad (6.12)$$

Если внимательно рассмотреть форму плотности вероятности распределения огибающей на рис. 6.1, то можно заметить, что с ростом значения параметра a она становится все более симметричной и напоминает гауссову форму линии. Это можно показать, если воспользоваться аппроксимацией модифицированной функции *Бесселя* для больших значений ее аргумента [3]:

$$I_0(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot z}} \cdot e^z.$$

Тогда распределение *Райса* принимает вид:

$$W(V) \approx \sqrt{\frac{V}{2\pi a}} \cdot \exp\left[-\frac{(V-a)^2}{2}\right]. \quad (6.13)$$

Учитывая, что затухание данной кривой определяется экспонентой, то в множителе перед экспонентой можно положить $V \approx a$, так как значение нормированной огибающей V несущественно отклоняется от значения a в интервале существенного затухания $W(V)$. Если это учесть, то распределение *Райса* (6.9) перейдет в распределение *Гаусса* с математическим ожиданием, равным a , и единичной дисперсией:

$$W(V) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{(V-a)^2}{2}\right]. \quad (6.14)$$

Если вернуться от безразмерной величины V к огибающей аддитивной смеси $E = \sigma_x V$, то математическое ожидание и дисперсия окажутся соответственно равными [2]:

$$m_E = \sigma_x m_V = \sigma_x a = U, \quad D_E = \sigma_x^2 D_V = \sigma_x^2. \quad (6.15)$$

Соответственно СКО будет равно [2]:

$$\sigma_E = \sqrt{D_E} = \sigma_x. \quad (6.16)$$

Таким образом, математическое ожидание огибающей будет определяться амплитудой полезного сигнала, а дисперсия огибающей будет равна дисперсии узкополосного шума.

Определим корреляционную функцию огибающей аддитивной смеси для случая большого значения ОСШ. С этой целью запишем выражение для данной огибающей и разложим его в ряд *Тейлора* [2]:

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{E_c^2 + E_s^2} = \sqrt{(U + A_c)^2 + A_s^2} = (U + A_c) \sqrt{1 + \frac{A_s^2}{(U + A_c)^2}} \approx \\ &\approx (U + A_c) \left[1 + \frac{A_s^2}{2(U + A_c)^2} \right] = U + A_c + \frac{A_s^2}{2(U + A_c)} \approx U + A_c + \frac{A_s^2}{2U}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

где учтено, что при большом ОСШ $U \gg A_c, A_s$.

Для простоты будем полагать, что $U(t) = U = const$, то есть отсутствует модуляция. Тогда:

$$\begin{aligned} E(t)E(t+\tau) &= \left(U + A_c(t) + \frac{A_s^2(t)}{2U} \right) \left(U + A_c(t+\tau) + \frac{A_s^2(t+\tau)}{2U} \right) = \\ &= U^2 + A_c(t)A_c(t+\tau) + \frac{A_s^2(t)A_s^2(t+\tau)}{4U^2} + U \cdot A_c(t) + U \cdot A_c(t+\tau) + \\ &+ \frac{A_s^2(t)}{2} + \frac{A_s^2(t+\tau)}{2} + \frac{A_c(t+\tau)A_s^2(t)}{2U} + \frac{A_c(t)A_s^2(t+\tau)}{2U}. \end{aligned}$$

С учетом того, что $\langle U^2 \rangle = U^2$, $\langle A_c(t)A_c(t+\tau) \rangle = \sigma_x^2 R_x(\tau)$, $\langle A_c(t) \rangle = \langle A_c(t+\tau) \rangle = 0$, $\langle A_s^2(t) \rangle = \langle A_s^2(t+\tau) \rangle = \sigma_x^2$ и вследствие независимости квадратур $\langle A_c(t+\tau)A_s^2(t) \rangle = \langle A_c(t+\tau) \rangle \cdot \langle A_s^2(t) \rangle = 0$,

$\langle A_c(t) A_s^2(t+\tau) \rangle = \langle A_c(t) \rangle \cdot \langle A_s^2(t+\tau) \rangle = 0$, среднее значение данного выражения принимает вид:

$$\langle E(t) E(t+\tau) \rangle = U^2 + \sigma_x^2 + \sigma_x^2 R_x(\tau) + \frac{\langle A_s^2(t) A_s^2(t+\tau) \rangle}{4U^2},$$

где σ_x^2 – дисперсия узкополосного шума, а $R_x(\tau)$ – его коэффициент корреляции.

Для вычисления последнего слагаемого в данном выражении воспользуемся тем, что квадратуры узкополосного СП в несовпадающие моменты времени представляют собой пару гауссовых СВ с коэффициентом корреляции $R_x(\tau)$. Двумерная плотность распределения вероятности пары таких СВ имеет вид [1]:

$$W(A_{s1}, A_{s2}) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2 \sqrt{1-R_x^2(\tau)}} \cdot \exp\left[-\frac{A_{s1}^2 + A_{s2}^2 - 2R_x(\tau) A_{s1} A_{s2}}{2\sigma_x^2 (1-R_x^2(\tau))}\right]. \quad (6.18)$$

Тогда искомое среднее значение равно:

$$\begin{aligned} \langle A_s^2(t) A_s^2(t+\tau) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s1}^2 A_{s2}^2 W(A_{s1}, A_{s2}) dA_{s1} dA_{s2} = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_x^2 \sqrt{1-R_x^2(\tau)}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s1}^2 A_{s2}^2 \exp\left[-\frac{A_{s1}^2 + A_{s2}^2 - 2R_x(\tau) A_{s1} A_{s2}}{2\sigma_x^2 (1-R_x^2(\tau))}\right] dA_{s1} dA_{s2}. \end{aligned}$$

Если выполнить замену переменной вида:

$$A_{s1} = t + R_x(\tau) A_{s2},$$

то выражение примет вид:

$$\begin{aligned} \langle A_s^2(t) A_s^2(t+\tau) \rangle &= \frac{1}{2\pi\sigma_x^2 \sqrt{1-R_x^2(\tau)}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} A_{s2}^2 \cdot \exp\left[-\frac{A_{s2}^2}{2\sigma_x^2}\right] \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} (t + R_x(\tau) A_{s2})^2 \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma_x^2 (1-R_x^2(\tau))}\right] dA_{s1} dA_{s2}. \end{aligned}$$

Разложим квадрат суммы во внутреннем интеграле

$$(t + R_x(\tau) A_{s2})^2 = t^2 + 2tR_x(\tau) A_{s2} + R_x^2(\tau) A_{s2}^2$$

и воспользуемся табличными интегралами Пуассона вида [3]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\alpha t^2} dt = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^4 e^{-\alpha t^2} dt = \frac{3}{4\alpha^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \quad (6.19)$$

Тогда выражение примет вид:

$$\langle A_s^2(t) A_s^2(t+\tau) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s2}^2 \left[\sigma_x^2 (1 - R_x^2(\tau)) + R_x^2(\tau) A_{s2}^2 \right] e^{-\frac{A_{s2}^2}{2\sigma_x^2}} dA_{s2}.$$

Окончательно, с учетом выражений (6.19), получаем:

$$\langle A_s^2(t) A_s^2(t+\tau) \rangle = \sigma_x^4 (1 - R_x^2(\tau)) + 3\sigma_x^4 R_x^2(\tau) = \sigma_x^4 (1 + 2R_x^2(\tau)).$$

Таким образом:

$$\langle E(t) E(t+\tau) \rangle = U^2 + \sigma_x^2 + \sigma_x^2 R_x(\tau) + \frac{\sigma_x^4 (1 + 2R_x^2(\tau))}{4U^2}.$$

Тогда корреляционная функция огибающей аддитивной смеси равна:

$$K_E(\tau) = \langle E(t) E(t+\tau) \rangle - m_E^2 = \sigma_x^2 R_x(\tau) + \frac{\sigma_x^4}{2U^2} R_x^2(\tau), \quad (6.20)$$

где m_E – математическое ожидание огибающей аддитивной смеси, определяемое выражением вида [2]:

$$m_E = U + \langle A_c \rangle + \frac{\langle A_s^2 \rangle}{2U} = U + \frac{\sigma_x^2}{2U}. \quad (6.21)$$

Знание корреляционной функции позволяет определить энергетический спектр огибающей аддитивной смеси. Будем полагать, что энергетический спектр узкополосного случайного процесса имеет прямоугольную форму. Тогда коэффициент корреляции в выражении (6.20) может быть записан в виде (см. выражение (3.17)):

$$R_x(\tau) = \frac{\sin(\pi \Delta f \tau)}{(\pi \Delta f \tau)}, \quad (6.22)$$

где Δf – эффективная ширина спектра узкополосного СП. В соответствии с выражением (4.13) физический спектр огибающей аддитивной смеси может быть найден следующим образом:

$$S_E(f) = 4 \int_0^{\infty} K_E(\tau) \cos(2\pi f \tau) d\tau. \quad (6.23)$$

Подстановка (6.20) и (6.22) в выражение (6.23) дает:

$$S_E(f) = S_{E1}(f) + S_{E2}(f), \quad (6.24)$$

где введены обозначения:

$$S_{E1}(f) = 4\sigma_x^2 \int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi\Delta f \tau)}{(\pi\Delta f \tau)} \cos(2\pi f \tau) d\tau = \begin{cases} 0, & f \geq \frac{\Delta f}{2} \\ \frac{2\sigma_x^2}{\Delta f}, & f < \frac{\Delta f}{2}, \end{cases}$$

в котором учтено, что

$$\sin(\pi\Delta f \tau) \cos(2\pi f \tau) = \frac{1}{2} \sin\left(2\pi\left[f + \frac{\Delta f}{2}\right]\tau\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2\pi\left[f - \frac{\Delta f}{2}\right]\tau\right)$$

и использован табличный интеграл вида [3]:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\beta\tau)}{\tau} d\tau = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \beta > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \beta < 0, \end{cases}$$

а также

$$S_{E2}(f) = \frac{2\sigma_x^4}{U^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\pi\Delta f \tau)}{(\pi\Delta f \tau)^2} \cos(2\pi f \tau) d\tau = \begin{cases} 0, & f \geq \Delta f \\ \frac{\sigma_x^4}{U^2 \Delta f} \left(1 - \frac{f}{\Delta f}\right), & f < \Delta f, \end{cases}$$

в котором осуществлено интегрирование по частям и использованы приведенные выше выражения и тригонометрическая формула понижения степени вида:

$$\sin^2(\pi\Delta f \tau) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\pi\Delta f \tau).$$

Если ввести обозначение для ОСШ по мощности в виде $a_0^2 = \frac{U^2}{2\sigma_x^2}$, то выражение для физического спектра огибающей аддитивной смеси примет вид [2]:

$$S_E(f) = \begin{cases} \frac{\sigma_x^2}{2a_0^2 \Delta f} \left(1 + 4a_0^2 - \frac{f}{\Delta f} \right), & f < \frac{\Delta f}{2} \\ \frac{\sigma_x^2}{2a_0^2 \Delta f} \left(1 - \frac{f}{\Delta f} \right), & \frac{\Delta f}{2} < f < \Delta f \\ 0, & f \geq \Delta f. \end{cases} \quad (6.25)$$

Вид физического спектра для различных значений ОСШ схематично приведен на рис. 6.2.

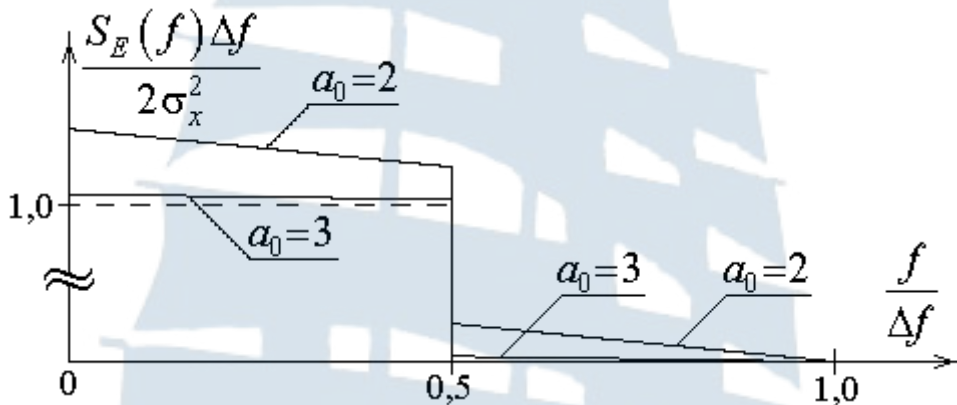


Рис. 6.2. Вид физического спектра огибающей аддитивной смеси при различных значениях ОСШ a_0

Из рис. 6.2 видно, что форма физического спектра огибающей аддитивной смеси незначительно отличается от прямоугольной и приближается к ней по мере роста ОСШ.

6.1.2. Воздействие сигнала и узкополосного шума на амплитудный детектор

Рассмотрим воздействие на амплитудный детектор аддитивной смеси полезного сигнала и узкополосного шума. Без потери общности выводов будем полагать, что полезный сигнал представляет собой немодулированное колебание [1].

Будем считать передаточную характеристику детектора линейной. Тогда мгновенное значение выходного напряжения может быть записано в виде:

$$U_{\text{вых}}(t) = k_d \cdot E(t), \quad (6.26)$$

где k_d – коэффициент передачи амплитудного детектора. При дальнейших вычислениях для простоты будем полагать, что $k_d = 1$.

Для определения средней мощности полезного сигнала на выходе детектора воспользуемся выражениями (6.10), (6.11) и (6.15) для математического ожидания и дисперсии огибающей аддитивной смеси для малых и больших значений ОСШ. Из выражения (6.10) следует, что при отсутствии полезного сигнала $a_0^2 = 0$ и математическое ожидание огибающей равно:

$$m_A = \sigma_x \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Тогда при малых значениях ОСШ ($a_0^2 \ll 1$) величина полезной составляющей данной огибающей может быть оценена как разность вида [1]:

$$m_E - m_A = \sigma_x \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{a^2}{4}\right) - \sigma_x \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sigma_x \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{a^2}{4} = \sigma_x \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{a_0^2}{2}.$$

Следовательно, мощность полезного сигнала на выходе детектора будет равна [1]:

$$P_c = (m_E - m_A)^2 = \sigma_x^2 \frac{\pi \cdot a_0^4}{8}. \quad (6.27)$$

Для отыскания мощности шума воспользуемся выражением (6.11) для дисперсии огибающей аддитивной смеси при малых значениях ОСШ:

$$P_{ш} = \sigma_x^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \left(1 + \frac{a^2}{2}\right) \approx \sigma_x^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right). \quad (6.28)$$

Тогда отношение сигнал / шум на выходе линейного амплитудного детектора при малых значениях ОСШ на входе детектора будет равно [1]:

$$SNR = \frac{P_c}{P_{ш}} = \frac{\sigma_x^2 \frac{\pi \cdot a_0^4}{8}}{\sigma_x^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\pi}{16 - 4\pi} \cdot a_0^4 \approx 0,91 a_0^4 \approx a_0^4. \quad (6.29)$$

Таким образом, при слабом полезном сигнале ($a_0^2 \ll 1$) значение ОСШ на выходе амплитудного детектора пропорционально квадрату значения ОСШ на входе детектора и имеет место подавление слабого сигнала шумами.

При выполнении условия $a_0^2 \gg 1$ средняя мощность полезной составляющей огибающей аддитивной смеси и мощность шума в соответствии с выражениями (6.15) и (6.27) принимают вид:

$$P_c = U^2 = 2\sigma_x^2 a_0^2, \quad P_{\text{ш}} = \sigma_x^2. \quad (6.30)$$

Тогда отношение сигнал / шум на выходе линейного амплитудного детектора при больших значениях ОСШ на входе детектора будет равно [1]:

$$SNR = \frac{P_c}{P_{\text{ш}}} = \frac{2\sigma_x^2 a_0^2}{\sigma_x^2} = 2a_0^2. \quad (6.31)$$

Таким образом, при сильном полезном сигнале ($a_0^2 \gg 1$) значение ОСШ на выходе амплитудного детектора пропорционально значению ОСШ на входе детектора.

Общее выражение для ОСШ на выходе амплитудного детектора описывается с использованием модифицированных функций *Бесселя* первого рода нулевого и первого порядков [1]:

$$SNR = \frac{P_c}{P_{\text{ш}}} = \left(m_E - \sigma_x \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)^2 / D_E, \quad (6.32)$$

где введены обозначения:

$$m_E = \sigma_x \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ I_0 \left(\frac{a_0^2}{2} \right) + a_0^2 \left[I_0 \left(\frac{a_0^2}{2} \right) + I_1 \left(\frac{a_0^2}{2} \right) \right] \right\} \cdot e^{-\frac{a_0^2}{2}}, \quad (6.33)$$

$$D_E = 2\sigma_x^2 \left[1 + a_0^2 - \frac{m_E^2}{2\sigma_x^2} \right]. \quad (6.34)$$

Ниже на рис. 6.3 приведена зависимость ОСШ на выходе амплитудного детектора от значения ОСШ на его входе.

БГАРФ

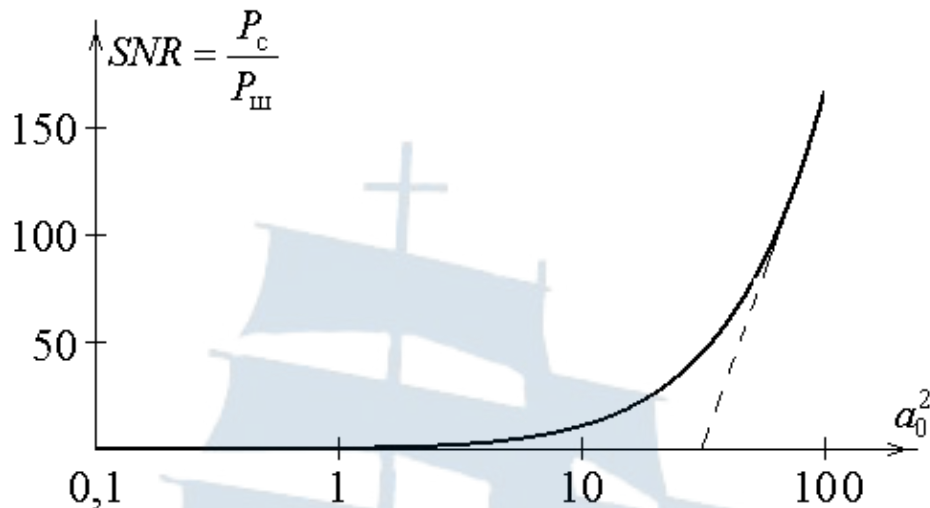


Рис. 6.3. Зависимость ОСШ на выходе амплитудного детектора от значения ОСШ на его входе

6.2. Лабораторное задание

6.2.1. Создание модели узкополосного шума

Запустите приложение MathCAD.

Задайте число отсчетов формируемой аддитивной смеси:

$$N := 2^{16}$$

Сформируйте отсчеты нормально распределенной СВ с использованием функции встроенного генератора MathCAD rnorm [4]:

$$X := \text{rnorm}(N, 0, 1)$$

Для перехода от широкополосного СП к узкополосному СП симитируйте его прохождение через узкополосную цепь в рамках **спектрального метода**. Постройте массив значений комплексного спектра реализации широкополосного СП X с использованием встроенной функции среды MathCAD fft [4]:

$$S_X := \text{fft}(X)$$

Задайте полуширину полосы пропускания узкополосной цепи, выраженную в количестве отсчетов комплексного спектра S_X , например:

$$L := \text{last}(S_X)$$

$$\Delta := \frac{L}{64}$$

Сформируйте отсчеты комплексного коэффициента передачи узкополосной цепи с идеальной формой АЧХ. Используйте для этого следующую процедуру:

$$k := 0..L$$

$$K_k := \begin{cases} e^{-i \cdot \frac{k-L}{\Delta} \cdot \frac{\pi}{4}} & \text{if } \left| k - \frac{L}{2} \right| \leq \Delta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

В соответствии со спектральным методом сформируйте отсчеты узкополосного (narrowband) СП на выходе узкополосной цепи:

$$S_Xnb_k := S_X_k \cdot K_k$$

Сформируйте массив отсчетов реализации узкополосного СП, перейдя от комплексного спектра S_Xnb к временной реализации Xnb с использованием встроенной функции среды MathCAD $ifft$ [4], осуществляющей процедуру обратного быстрого преобразования Фурье (ОБПФ):

$$Xnb := ifft(S_Xnb)$$

6.2.2. Создание модели АМ-радиосигнала

Задайте параметры АМ-радиосигнала, например равными:

– амплитуда в режиме ожидания (амплитуда несущего колебания)

$$Um := 3$$

– глубина амплитудной модуляции

$$Ma := 0.5$$

– частота модуляции

$$F := 5000$$

Рассчитайте период модуляции:

$$T := \frac{1}{F}$$

Выберите интервал наблюдения (observation) в несколько периодов модуляции, например:

$$To := 5 \cdot T$$

Рассчитайте шаг дискретизации по времени:

$$\Delta t := \frac{T_0}{N}$$

Для создания аддитивной смеси полезного сигнала и узкополосного шума должно выполняться равенство центральной частоты спектра шума и несущей частоты АМ-радиосигнала. Поскольку шум задан в виде дискретного набора значений с центральным отсчетом спектра $k = \frac{L}{2}$, то для задания несущей частоты необходимо задать шаг дискретизации спектра по частоте. Как известно, он обратно пропорционален интервалу наблюдения:

$$\Delta F := \frac{1}{T_0}$$

Задайте несущую частоту АМ-радиосигнала:

$$f_0 := \frac{L}{2} \cdot \Delta F$$

Убедитесь, что выполняется теорема Котельникова. Для этого определите максимально допустимый шаг дискретизации и сравните его с введенным выше:

$$\Delta t_{\max} := \frac{1}{2 \cdot (f_0 + F)} \quad \Delta t_{\max} =$$

Сформируйте отсчеты АМ-радиосигнала с заданными параметрами:

$$n := 0..N-1$$

$$a_n := Um \cdot (1 + Ma \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F \cdot n \cdot \Delta t)) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot n \cdot \Delta t)$$

6.2.3. Создание модели аддитивной смеси АМ-радиосигнала и узкополосного шума

Для создания аддитивной смеси, пригодной для проведения модельных исследований, необходимо реализовать возможность задания ОСШ в ней. Для этого вычислите среднюю мощность немодулированного сигнала:

$$P_c := \frac{Um^2}{2}$$

Задайте желаемое значение ОСШ по мощности (в диапазоне от 0,1 до 100), например:

$$a0 := 10$$

Рассчитайте требуемое значение СКО шума:

$$\sigma_x := \sqrt{\frac{P_c}{a0}}$$

Вычислите наблюдаемое значение СКО шума:

$$\sigma_{Xnb} := \sqrt{\text{var}(Xnb)}$$

Сформируйте отсчеты аддитивной смеси АМ-радиосигнала и узкополосного шума с заданным значением ОСШ в смеси:

$$u_n := a_n + \sigma_x \cdot \frac{Xnb_n}{\sigma_{Xnb}}$$

Постройте временную диаграмму сформированной аддитивной смеси (рис. 6.4). Для определения границ построения воспользуйтесь встроенными функциями среды MathCAD \min и \max [4]:

$$u_{\max} := \max(u) \quad u_{\min} := \min(u)$$

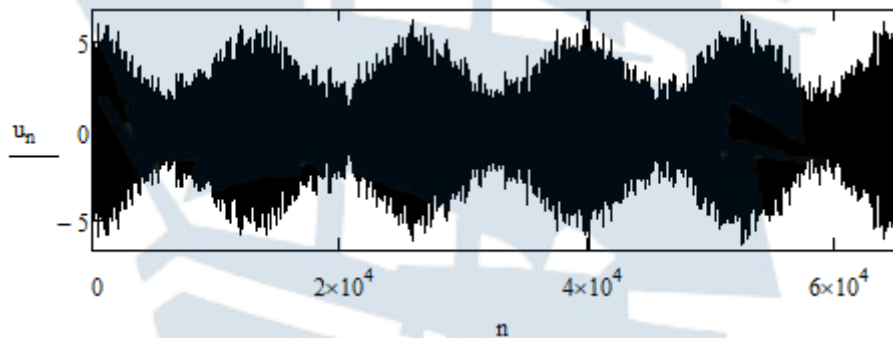


Рис. 6.4. Временная диаграмма аддитивной смеси АМ-радиосигнала и узкополосного шума

6.2.4. Имитация прохождения аддитивной смеси АМ-радиосигнала и узкополосного шума через амплитудный детектор

Поскольку линейный амплитудный детектор должен выделять огибающую аддитивной смеси, то имитация его действия должна состоять в формировании отсчетов сопряженного по Гильберту сигнала с последующим вычислением отсчетов огибающей. Воспользуйтесь процедурой вида:

$$S_u := \text{fft}(u)$$

$$S_{u1} := -i \cdot S_u$$

$$u1 := \text{ifft}(S_{u1})$$

Сформируйте отсчеты огибающей аддитивной смеси:

$$n := 0..N-1$$

$$E_n := \sqrt{(u_n)^2 + (u1_n)^2}$$

Постройте временную диаграмму огибающей аддитивной смеси (рис. 6.5). Для определения верхней границы построения воспользуйтесь встроенной функцией среды MathCAD \max :

$$E_{\max} := \max(E)$$

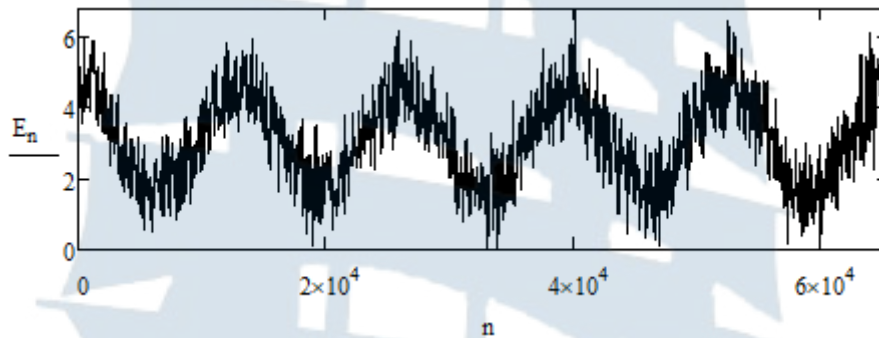


Рис. 6.5. Временная диаграмма огибающей аддитивной смеси АМ-радиосигнала и узкополосного шума

Попробуйте вычислить математическое ожидание и дисперсию полученного случайного процесса:

$$m_E := \text{mean}(E) \qquad m_E =$$

$$d_E := \text{var}(E) \qquad d_E =$$

Сравните полученные значения с ожидаемыми, вычислив последние по выражениям (6.33) и (6.34)¹:

$$M_E := \sigma_x \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[I_0\left(\frac{a_0}{2}\right) + a_0 \cdot \left(I_0\left(\frac{a_0}{2}\right) + I_1\left(\frac{a_0}{2}\right) \right) \right] \cdot e^{-\frac{a_0}{2}} \qquad M_E =$$

¹ Помните, что в указанных выражениях ОСШ по мощности обозначено как a_0^2 . Но ввиду невозможности многоуровневых обозначений в среде MathCAD та же величина обозначена как a_0 .

$$D_E := 2 \cdot \sigma x^2 \cdot \left(1 + a_0 - \frac{M_E^2}{2 \cdot \sigma x^2} \right) \quad D_E =$$

Результаты, скорее всего, показали небольшое различие между математическими ожиданиями m_E и M_E , но существенную разницу в значениях дисперсий d_E и D_E . Причина в том, что данные числовые характеристики вычислялись путем усреднения во временной области. Однако, как показывает рис. 6.5, СП содержит в себе аддитивную детерминированную составляющую, зависящую от времени.

Таким образом, рассматриваемый СП является **нестационарным**. При усреднении по ансамблю реализаций СП такая составляющая не внесла бы вклада в результат вычисления математического ожидания, дисперсии, корреляционной функции и, как следствие, энергетического спектра. Поэтому верный результат будет получен для СП в виде разности огибающей аддитивной смеси и информационной составляющей огибающей АМ-радиосигнала. Введем такой СП, используя следующую процедуру:

$$\Delta E_n := |E_n - Ma \cdot Um \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F \cdot n \cdot \Delta t)|$$

Поскольку аддитивный шум может привести как к увеличению значения огибающей аддитивной смеси по сравнению с огибающей АМ-радиосигнала, так и к ее уменьшению, то в записанном выражении использован модуль.

Вычислите математическое ожидание и дисперсию сформированного таким образом СП и сравните результаты с теоретическими:

$$\text{mean}(\Delta E) = \quad \text{var}(\Delta E) =$$

Убедитесь, что различие данных числовых характеристик с теоретическими минимально и обусловлено конечностью временной реализации СП.

6.2.5. Проверка гипотезы о законе распределения огибающей аддитивной смеси

Постройте гистограмму распределения отсчетов СП в виде приращения огибающей аддитивной смеси (рис. 6.6 и 6.7) в соответствии с алгоритмом, изложенным в п. 1.2.2 лабораторного задания **лабора-**

торной работы № 1. При этом необходимо внести следующие корректировки. Число интервалов гистограммы выберите равным:

$$M := 30$$

При выборе шага интегрирования опирайтесь на минимальное и максимальное значения СВ, которые могут быть определены с использованием встроенных функций среды MathCAD \min и \max :

$$h_{\Delta E} := \frac{\max(\Delta E) - \min(\Delta E)}{M}$$

При определении границ интервалов гистограммы необходимо исходить из минимального значения СВ $\min(\Delta E)$:

$$j := 0..M$$

$$\text{int}_{\Delta E_j} := \min(\Delta E) + j \cdot h_{\Delta E}$$

Число попаданий $N_{\Delta E}$ значений СВ в каждый из заданных интервалов по-прежнему определяйте с помощью функции hist [4].

Переменную для построения теоретического закона распределения СВ задайте исходя из тех же соображений, что и границы интервалов:

$$z := \min(\Delta E), \min(\Delta E) + \frac{\max(\Delta E) - \min(\Delta E)}{100} .. \max(\Delta E)$$

Постройте в одних осях гистограмму распределения и теоретический закон для случаев малого (рис. 6.6) и большого (рис. 6.7) значения ОСШ. Для этого изменяйте значение a_0 , введенное выше.

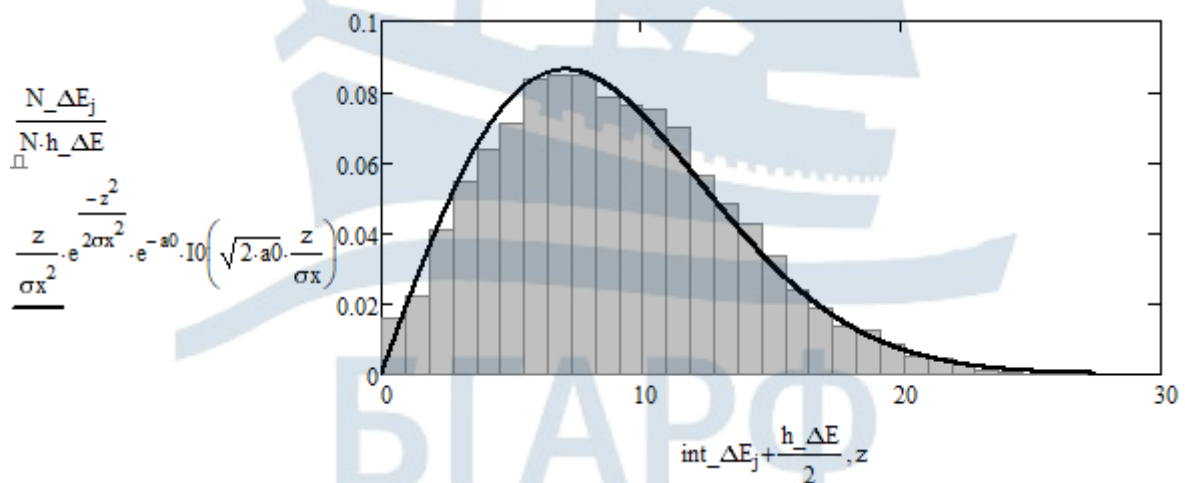


Рис. 6.6. Гистограмма распределения отсчетов СП в виде приращения огибающей аддитивной смеси и теоретический закон распределения Райса при ОСШ=0,1

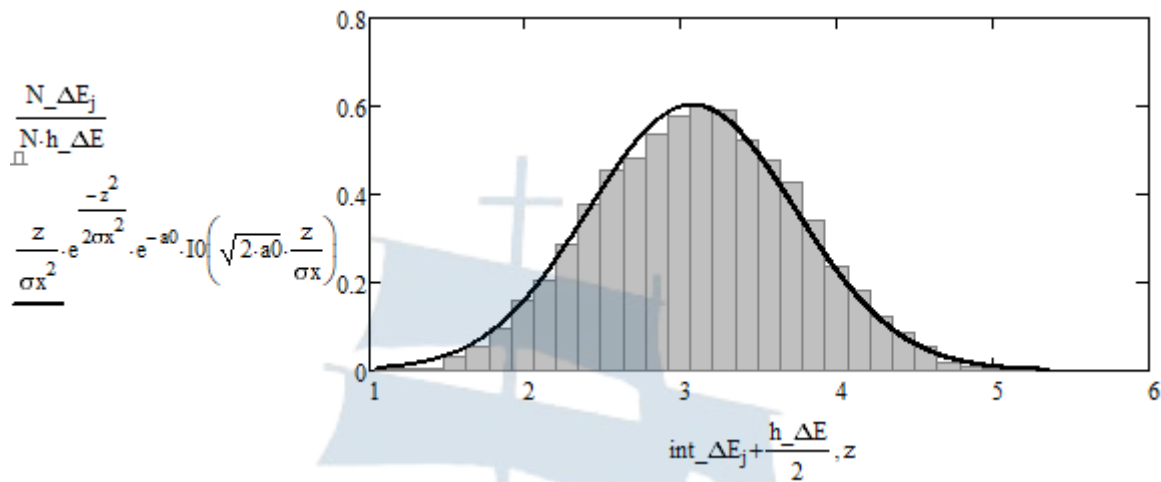


Рис. 6.7. Гистограмма распределения отсчетов СП в виде приращения огибающей аддитивной смеси и теоретический закон распределения Райса при ОСШ=10

Обратите внимание на тот факт, что при малом значении ОСШ распределение стремится к распределению Рэля, а при большом значении ОСШ – к распределению Гаусса.

Для случая большого значения ОСШ измерьте математическое ожидание по гистограмме. Для этого нажмите правой клавишей мыши на рисунке и в открывшемся диалоговом окне выберите раздел *Trace* [4]. При этом появится новое диалоговое окно *X-Y-Trace*. Нажмите левой клавишей мыши на вершину гистограммы. После этого в верхней строке данного окна *X-Value* отобразится результат.

Обратите внимание, что данный результат близок к значению амплитуды несущего колебания U_m . Попробуйте изменить данную амплитуду в начале второго пункта лабораторного задания и проведите повторное измерение. Сделайте вывод о математическом ожидании огибающей аддитивной смеси при большом значении ОСШ.

6.2.6. Проверка корреляционных свойств огибающей аддитивной смеси

Поскольку корреляционная функция достаточно быстро убывает, то нет необходимости рассчитывать ее значения для больших времен сдвига (больших номеров отсчетов времени сдвига). Ограничьте их число, например, следующим образом:

$$n := 0.5 \cdot \frac{L}{\Delta}$$

Сформируйте массив отсчетов корреляционной функции огибающей аддитивной смеси, используя следующую процедуру:

$$\Delta E_{\text{ср}} := \text{mean}(\Delta E)$$

$$K_{\Delta E_n} := \frac{2}{N} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} [(\Delta E_i - \Delta E_{\text{ср}}) \cdot (\Delta E_{i+n} - \Delta E_{\text{ср}})]$$

Убедитесь, что максимальное значение корреляционной функции совпадает с дисперсией приращения огибающей аддитивной смеси. Для этого вычислите следующие величины:

$$\max(K_{\Delta E}) =$$

$$\text{var}(\Delta E) =$$

Задайте отсчеты теоретической корреляционной функции в соответствии с выражением (6.20):

$$B_n := \sigma x^2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot \Delta \cdot n}{L}\right)}{\frac{\pi \cdot \Delta \cdot n}{L}} + \frac{\sigma x^2}{2 \cdot a_0} \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot \Delta \cdot n}{L}\right)}{\frac{\pi \cdot \Delta \cdot n}{L}}\right)^2$$

Постройте график корреляционной функции огибающей аддитивной смеси при большом значении ОСШ, отобразив на нем теоретический закон (рис. 6.8):

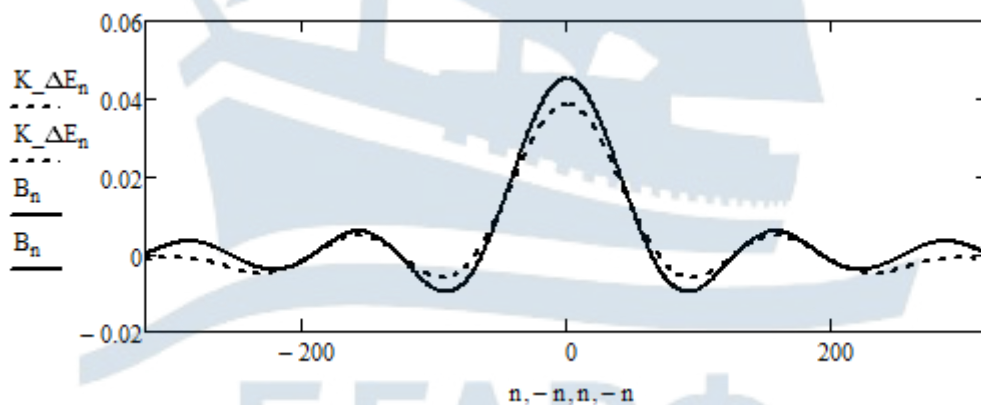


Рис. 6.8. График корреляционной функции огибающей аддитивной смеси при ОСШ=10 и теоретический закон

Сделайте вывод о характере временной зависимости корреляционной функции огибающей аддитивной смеси.

6.2.7. Проверка энергетического спектра огибающей аддитивной смеси

Как и в случае с энергетическим спектром узкополосного СП, рассмотренным в рамках **лабораторной работы № 3**, для получения спектра средней мощности огибающей аддитивной смеси необходимо провести усреднение квадрата модуля прямого преобразования *Фурье* для достаточно большого числа реализаций огибающей.

Для проведения данных вычислений необходимо объединить в одной процедуре процессы генерации аддитивной смеси АМ-радиосигнала и узкополосного шума, нахождения сопряженного по *Гильберту* для данной смеси СП, нахождения огибающей аддитивной смеси и вычисления квадрата модуля ее прямого преобразования *Фурье*. Вид данной процедуры представлен ниже.

```

S_E := for j ∈ 0..N/2
      S_Ej ← 0
      for n ∈ 0..99
        X ← rnorm(N,0,1)
        for i ∈ 0..N-1
          ui ← Xi + ai
        S_U ← fft(u)
        for j ∈ 0..N/2
          |S_Unbj ← S_Uj · Kj
          |S_Unb1j ← -i · S_Unbj
        Unb ← ifft(S_Unb)
        Unb1 ← ifft(S_Unb1)
        for i ∈ 0..N-1
          |Ei ← √((Unbi)² + (Unb1i)²)
          |ΔEi ← |Ei - Ma · Um · cos(2 · π · F · i · Δt)|
        S_ΔE ← fft(ΔE)
        for j ∈ 0..N/2
          S_Ej ← S_Ej + 1/100 · (|S_ΔEj|)²
      S_E

```

Постройте усредненный энергетический спектр огибающей аддитивной смеси АМ-радиосигнала и узкополосного шума (рис. 6.9) при большом значении ОСШ (например, 10). **Убедитесь, что различные форм усредненного энергетического спектра и теоретической зависимости невелико.**

Для построения теоретической зависимости задайте ее отсчеты в соответствии с выражением (6.25):

$$n := 0..last(S_E)$$

$$S_E_theor_n := \begin{cases} \frac{1}{2 \cdot a0} \cdot \left(1 + 4 \cdot a0 - \frac{n}{2 \cdot \Delta} \right) & \text{if } n \leq \Delta \\ \frac{1}{2 \cdot a0} \cdot \left(1 - \frac{n}{2 \cdot \Delta} \right) & \text{if } \Delta \leq n \leq 2 \cdot \Delta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

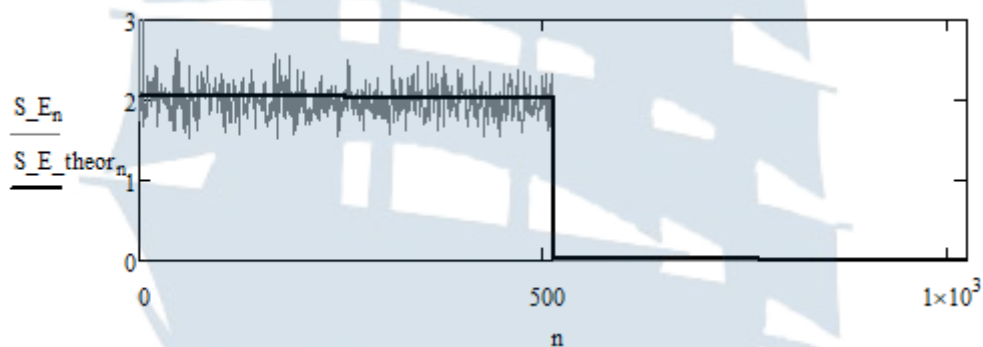


Рис. 6.9. Усредненный энергетический спектр огибающей аддитивной смеси АМ-радиосигнала и узкополосного шума при ОСШ=10 и теоретический закон

6.2.8. Исследование помехоустойчивости функционирования амплитудного детектора

Для проведения исследования помехоустойчивости функционирования амплитудного детектора воспользуйтесь методом СИНАД (SINAD – Signal-to-noise and distortion ratio) [5]. В соответствии с данным методом ОСШ в аддитивной смеси, содержащей полезный сигнал, шумовую составляющую и нелинейные искажения, определяется выражением вида:

$$SNR = \frac{P_{сш} + P_{н.и.}}{P_{ш} + P_{н.и.}} = \frac{P_{\Sigma}}{P_{\Sigma} - P_c}, \quad (6.35)$$

где P_c – средняя мощность полезного сигнала; $P_{ш}$ – средняя мощность шумовой составляющей; $P_{н.и.}$ – средняя мощность составляющих, отвечающих за нелинейные искажения; P_{Σ} – средняя мощность аддитивной смеси.

С этой целью оцените среднюю мощность аддитивной смеси с помощью процедуры вида:

$$P_{\Sigma} := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} (E_i)^2$$

Поскольку полезный сигнал содержит как постоянную, так и переменную составляющие, то для их исключения необходимо совместное действие режекторного фильтра (*band-stop filter*) и разделительной емкости.

Таким образом, для оценки совместной средней мощности аддитивного шума и слагаемых, отвечающих за нелинейные искажения, необходимо пропустить аддитивную смесь через указанные электрические цепи. Сформируйте отсчеты совместного комплексного коэффициента передачи данных электрических цепей с помощью следующей процедуры:

$$K_{BSF}_k := \begin{cases} 0 & \text{if } \left| k - \frac{F}{\Delta f} \right| \leq 1 \vee k = 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Для имитации процедуры прохождения аддитивной смеси через режекторный фильтр и разделительную емкость в рамках **спектрального метода** постройте массив значений комплексного спектра реализации E данной смеси с использованием встроенной функции среды MathCAD `fft` [4]:

$$S_E := \text{fft}(E)$$

В соответствии со **спектральным методом** сформируйте отсчеты комплексного спектра смеси аддитивного шума и слагаемых, отвечающих за нелинейные искажения, на выходе режекторного фильтра и разделительной емкости:

$$S_{ni}_k := S_E_k \cdot K_{BSF}_k$$

Сформируйте массив отсчетов такой смеси, перейдя от комплексного спектра S_{ni} к временной реализации E_{ni} с использованием

встроенной функции среды MathCAD ifft [4], осуществляющей процедуру обратного быстрого преобразования Фурье (ОБПФ):

$$Eni := \text{ifft}(Sni)$$

Оцените среднюю мощность смеси аддитивного шума и слагаемых, отвечающих за нелинейные искажения, с помощью процедуры вида:

$$Pni := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} (Eni_i)^2$$

Рассчитайте значение ОСШ на выходе амплитудного детектора в соответствии с выражением (6.35):

$$SNR := \frac{P\Sigma}{Pni}$$

Изменяя значение ОСШ на входе амплитудного детектора $a0$ в диапазоне от 10 до 100 с шагом 10, проведите измерение значения ОСШ на выходе амплитудного детектора SNR . Ввиду случайности результата измерение для каждого значения $a0$ повторите 10 раз, занося результаты в один столбец матрицы вида¹:

$$Y := \begin{pmatrix} 24.171 & 48.041 & 69.345 & 94.900 & 119.512 & 138.010 & 156.310 & 181.844 & 207.258 & 236.414 \\ 24.843 & 49.348 & 74.256 & 93.168 & 107.655 & 138.720 & 156.483 & 176.840 & 203.952 & 235.478 \\ 26.345 & 50.588 & 70.015 & 92.487 & 119.345 & 141.820 & 161.956 & 183.101 & 196.489 & 231.439 \\ 25.288 & 48.772 & 69.924 & 93.093 & 121.030 & 138.094 & 173.477 & 183.512 & 195.963 & 221.333 \\ 26.828 & 51.495 & 72.436 & 94.858 & 117.316 & 135.311 & 164.435 & 178.776 & 218.575 & 232.899 \\ 26.276 & 49.991 & 74.595 & 91.503 & 113.405 & 143.640 & 154.999 & 182.805 & 210.543 & 242.372 \\ 25.619 & 47.417 & 71.518 & 98.491 & 119.246 & 136.695 & 158.987 & 185.990 & 210.221 & 229.364 \\ 26.491 & 50.505 & 65.662 & 92.156 & 119.666 & 137.935 & 165.301 & 188.539 & 202.852 & 223.622 \\ 26.659 & 50.505 & 70.398 & 94.254 & 112.247 & 147.266 & 156.496 & 187.356 & 213.420 & 222.876 \\ 25.637 & 47.143 & 72.033 & 96.141 & 115.508 & 134.436 & 159.592 & 184.441 & 213.146 & 222.171 \end{pmatrix}$$

¹ При проведении модельных исследований часто приходится сталкиваться с проблемой переполнения памяти и закрытия программы. В этом случае при повторном запуске программы, генерируемые ею «случайные» числа начинают повторяться в той же последовательности. Чтобы сменить вид генерируемой последовательности выполните следующие действия: Tools→Worksheet Options. В открывшемся окне в графе Seed value for random numbers смените 1 на любое другое целое число.

Сведите значения ОСШ на входе амплитудного детектора в вектор-строку вида:

$$X := (10 \quad 20 \quad 30 \quad 40 \quad 50 \quad 60 \quad 70 \quad 80 \quad 90 \quad 100)$$

Вычислите среднее значение ОСШ на выходе амплитудного детектора для каждого из значений ОСШ на входе:

$$i := 0..9 \quad Y_{cp,i} := \frac{1}{10} \cdot \sum_{j=0}^9 Y_{j,i}$$

Чтобы убедиться, что полученные средние значения ложатся на одну прямую постройте уравнение линейной регрессии Y на X с помощью встроенных функций среды MathCAD regress и interp [4], прописываемых вручную:

$$Z := \text{regress}(X^T, Y_{cp}, 1) \quad f(x) := \text{interp}(Z, X^T, Y_{cp}, x)$$

Первая из функций имеет три аргумента, первый из которых является вектор-столбцом значений аргумента регрессионной прямой (для перехода от вектор-строки к вектор-столбцу применена **операция** транспонирования *Matrix Transpose* с панели *Matrix*), второй – вектор-столбцом значений функции регрессионной прямой, а третий – порядком регрессионного полинома (в данном случае 1 для регрессионной прямой).

Результатом применения данной функции является вектор-столбец числовых значений, содержащих информацию о порядке регрессионного полинома и его коэффициентах. В рассматриваемом случае он принимает вид:

$$Z = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 3.545 \\ 2.258 \end{pmatrix}$$

Для интерпретации данной информации применяется вторая из указанных функций, аргументами которой являются полученный вектор-столбец коэффициентов регрессионного полинома, вектор-столбец значений аргумента регрессионной прямой, вектор-столбец значений функции регрессионной прямой и обозначение переменной.

С чем вы связываете наблюдаемое различие в значениях углового коэффициента регрессионной прямой (последний элемент вектор-столбца Z) и его теоретического значения 2?

Постройте график регрессионной прямой, отобразив на нем точками значения аргумента X и функции $Y_{\text{ср}}$ (рис. 6.10). Используйте для этого функцию X-Y Plot на панели *Graph*.

$$x := 9,9.01..101$$

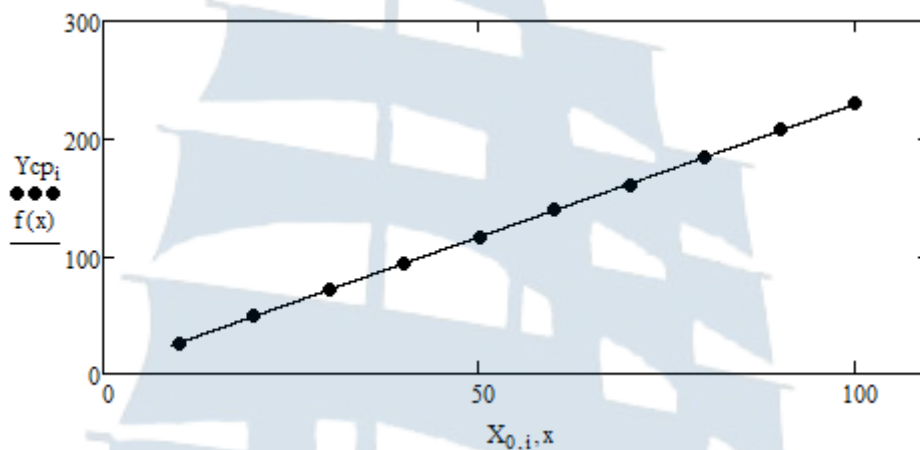


Рис. 6.10. Зависимость значения ОСШ на выходе амплитудного детектора от значения ОСШ на входе: точки – экспериментальные значения; сплошная линия – регрессионная прямая

6.2.9. Оценка адекватности модели линейной пороговой кривой

Из рис. 6.10 видно, что **пороговая кривая** (зависимость ОСШ на выходе амплитудного детектора от ОСШ на его входе) достаточно хорошо описывается линейным уравнением регрессии. Однако из теории статистической обработки экспериментальных результатов известно, что не каждая модель может быть признана адекватной и систематически применяться для предсказания результатов эксперимента.

Анализ модели на адекватность обычно проводится в рамках двух этапов [6]. В рамках первого этапа оценивается качество прогнозирования путем оценки погрешностей моделирования. На втором этапе проводится анализ остатков прогнозирования на наличие полезной информации или неучтенных моделью закономерностей. В рамках второго этапа остатки проверяются на соответствие модели белого шума по следующим критериям: нулевое математическое ожидание, постоянная дисперсия, нормальный закон распределения, равномерность энергетического спектра, отсутствие автокорреляции.

Для оценки погрешности моделирования рассчитайте значения абсолютной ошибки прогнозирования для каждого значения ОСШ. С этой целью используйте процедуру вида:

$$i := 0..9 \quad j := 0..9 \quad \varepsilon_{i,j} := Y_{i,j} - (Z_{0,4} \cdot X_{0,j} + Z_{0,3})$$

Рассчитайте абсолютную ошибку (*absolute error*) прогнозирования, среднее значение ошибки и ее СКО для каждого из значений ОСШ:

$$AE_j := \left| \sum_{i=0}^9 \varepsilon_{i,j} \right| \quad \varepsilon_{cpj} := \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=0}^9 \varepsilon_{i,j} \quad \sigma\varepsilon_j := \sqrt{\frac{1}{10} \cdot \sum_{i=0}^9 (\varepsilon_{i,j} - \varepsilon_{cpj})^2}$$

Оцените значение коэффициента вариации и относительную ошибку (*relative error*) прогнозирования для каждого значения ОСШ:

$$K_var_j := \frac{\sigma\varepsilon_j}{Y_{cpj}} \quad RE_j := \frac{AE_j}{\sum_{i=0}^9 Y_{i,j}} \cdot 100$$

Выведите результаты расчетов на экран. Скорее всего, вы получили относительно низкие значения:

$$K_var = \begin{pmatrix} 0.032 \\ 0.029 \\ 0.035 \\ 0.021 \\ 0.035 \\ 0.027 \\ 0.034 \\ 0.019 \\ 0.034 \\ 0.03 \end{pmatrix} \quad RE = \begin{pmatrix} 1.184 \\ 1.382 \\ 0.361 \\ 0.269 \\ 0.055 \\ 0.135 \\ 0.484 \\ 0.457 \\ 0.244 \\ 0.211 \end{pmatrix}$$

Малые значения данных характеристик показывают, что рассеяние прогнозных значений относительно модельных невелико (в приведенном примере не более 3,5 %), а относительная ошибка прогнозирования не превышает некоторого максимального значения (в приведенном примере $\approx 1,5$ %).

По полученным вами значениям сделайте вывод о качестве прогнозирования.

Оцените полноту и корректность теоретической модели. С этой целью рассчитайте стандартизованные остатки (standardized remains) для каждого значения ОСШ:

$$sr_{i,j} := \frac{\varepsilon_{i,j} - \varepsilon_{cpj}}{\sigma\varepsilon_j}$$

При правильном подходе анализ остатков на соответствие характеристикам белого шума должен производиться для каждого значения ОСШ в отдельности. Однако малый объем выборки экспериментальных данных (10 измерений) не даст достоверного результата, а серьезное увеличение объема экспериментальных данных невозможно в рамках стандартного лабораторного занятия. Поэтому для знакомства с процедурами анализа модели на адекватность проведите объединение всех стандартизованных остатков в один вектор-столбец:

$$SR := \begin{cases} \text{for } i \in 0..9 \\ \text{for } j \in 0..9 \\ SR_{10 \cdot i + j} \leftarrow sr_{i,j} \\ SR \end{cases}$$

Проведите анализ полученного ансамбля значений стандартизованных остатков на наличие выбросов. Для этого постройте доверительный интервал и отобразите точками значения остатков, как это показано на рис. 6.11.

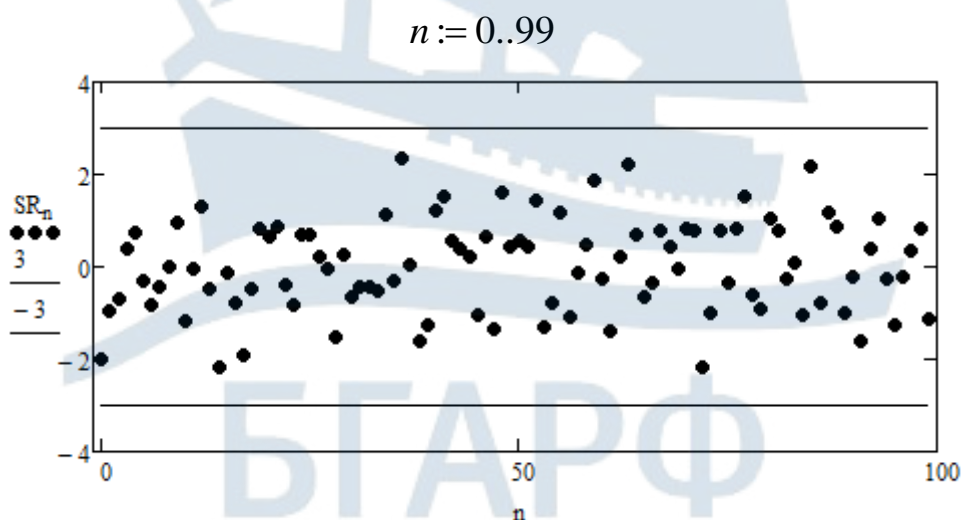


Рис. 6.11. Распределение стандартизованных остатков в пределах доверительного интервала

Процедура нахождения стандартизованных остатков предполагает приведение к нулевому математическому ожиданию и единичной дисперсии, а анализ рис. 6.11 показывает, что выбросы отсутствуют и все значения заключены внутри доверительного интервала.

Проведите проверку стандартизованных остатков на нормальный закон распределения. Для этого постройте гистограмму их распределения (рис. 6.12) в соответствии с алгоритмом, изложенным в п. 1.2.2 лабораторного задания **лабораторной работы № 1**.

При выборе шага интегрирования опирайтесь на минимальное и максимальное значения стандартизованных остатков:

$$h := \frac{\max(SR) - \min(SR)}{M}$$

При определении границ интервалов гистограммы необходимо учесть, что первая граница равна не 0, а $\min(SR)$:

$$j := 0..M \quad \text{int}_j := \min(SR) + j \cdot h$$

Число попаданий N_{SR} значений остатков в каждый из заданных интервалов определите с помощью функции hist [4].

Переменную для построения теоретического закона распределения задайте следующим образом:

$$z := \min(SR), \min(SR) + \frac{\max(SR) - \min(SR)}{100} .. \max(SR)$$

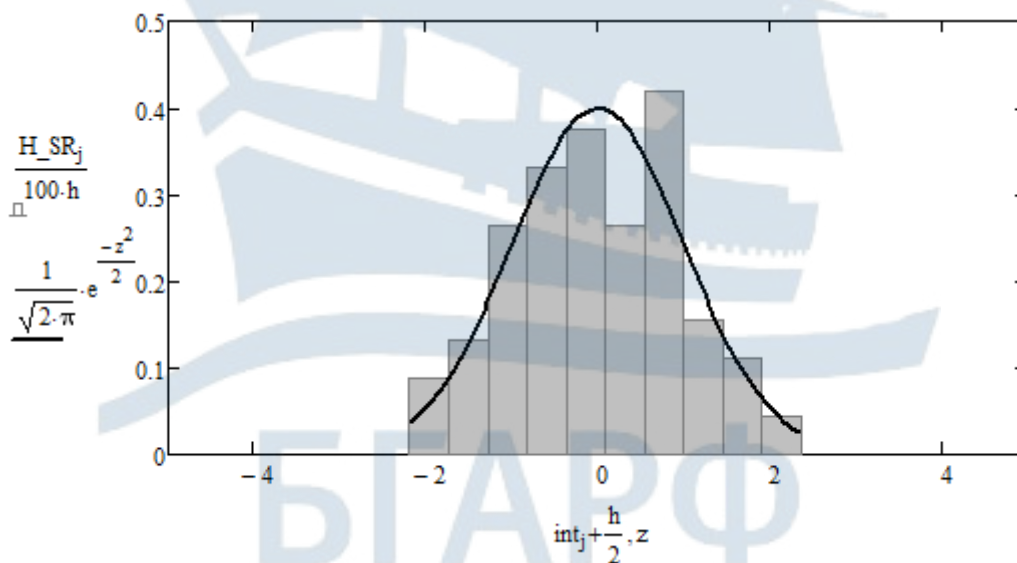


Рис. 6.12. Гистограмма распределения стандартизованных остатков и теоретический закон распределения

Проверьте гипотезу о нормальном законе распределения стандартизованных остатков. Для этого при доверительной вероятности 0,95 и $M - 3$ степенях свободы (в теоретическом законе два параметра – математическое ожидание и дисперсия) вычислите критическое значение критерия $\chi_{кр}^2$, используя встроенную функцию среды MathCAD qchisq [4]:

$$P0 := 0.95 \quad \chi_{кр} := \text{qchisq}(P0, M - 3) \quad \chi_{кр} =$$

Рассчитайте вероятности попадания значений стандартизованных остатков в каждый из сформированных интервалов гистограммы:

$$j := 0..M - 1$$

$$P_j := \int_{\text{int}_j}^{\text{int}_{j+1}} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

а также модельное значение критерия χ^2 в соответствии с процедурой:

$$\chi := 100 \cdot \sum_{j=0}^{M-1} \frac{\left(\frac{N_{SR_j}}{100} - P_j \right)^2}{P_j} \quad \chi =$$

Сравнив полученное значение критерия с вычисленным критическим, **сделайте вывод о том, верна ли гипотеза о нормальном распределении стандартизованных остатков**. Для приведенного примера эти значения составили: $\chi_{кр} = 14.067$ и $\chi = 5.057$, соответственно.

Проверьте стандартизованные остатки на наличие автокорреляции. Для этого воспользуйтесь критерием *Дарбина-Уотсона* [6, 7]. С этой целью вычислите наблюдаемое значение критерия и сравните его с теоретическими значениями:

$$DW := \frac{\sum_{i=1}^{99} (SR_i - SR_{i-1})^2}{\sum_{i=0}^{99} (SR_i)^2} \quad DW =$$

При уровне значимости $\alpha = 0,05$ и $n = 100$ измерениях теоретические границы критерия (L (low) – нижняя, U (up) – верхняя) состав-

ляют: $DW_L = 1,654$ и $DW_U = 1,694$. На практике применение критерия *Дарбина-Уотсона* сводится к следующей процедуре:

- если выполняется неравенство $DW < DW_L$, то гипотезу об отсутствии автокорреляции следует отвергнуть;
- если выполняется неравенство $DW > DW_U$, то нет причин отвергать гипотезу об отсутствии автокорреляции;
- если же значение критерия попадает в промежуток $DW_L < DW < DW_U$, то принять однозначное решение об отсутствии автокорреляции нельзя и поэтому на практике полагают, что автокорреляция присутствует.

Для приведенного примера значение критерия оказалось равным $DW = 1,939$ и, таким образом, выполняется условие $DW > DW_U$, а, значит, автокорреляция среди значений стандартизованных остатков отсутствует. ***Сравните полученное вами значение критерия с теоретическими значениями и сделайте вывод о наличии или отсутствии автокорреляции.***

Проверка стандартизованных остатков на равномерность энергетического спектра проводится путем построения так называемого **нормированного кумулятивного спектра** (или периодограммы). Английский статистик *М. С. Бартлетт* в своих работах показал, что такой спектр может использоваться для обнаружения периодического отклонения от случайности. Нормированный кумулятивный спектр, определяется выражением вида [8]:

$$P(f) = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^f S(f) df, \quad (6.36)$$

где $S(f)$ – физический спектр СВ, а σ^2 – ее дисперсия. Поскольку физический спектр в идеале имеет постоянное значение $2\sigma^2$ (см. выражение 4.12), то нормированный кумулятивный спектр белого шума представляет собой прямую линию с угловым коэффициентом 2. Если модель шума адекватна, то при ограниченном объеме выборки график кумулятивного спектра имеет разброс относительно данной прямой. В противном случае график спектра будет систематически отклоняться от прямой линии на достаточно большие значения. Допустимые отклонения кумулятивного спектра относительно ожидаемого для белого шума можно оценить с помощью критерия *Колмогорова* [6; 9]. При уровне значимости α границы допустимых отклонений представляют собой прямые линии, отстоящие от теоретической на величину

$\pm K_\alpha / \sqrt{q}$, где $q = (n-2)/2$ для четных значений n и $q = (n-1)/2$ для нечетных значений n , а величина K_α при малых уровнях значимости α может быть рассчитана по выражению вида:

$$K_\alpha \approx \sqrt{-\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \quad (6.37)$$

Для построения нормированного кумулятивного спектра создайте усеченную матрицу значений стандартизованных остатков с длиной, подходящей для осуществления БПФ (в данном случае 64):

$$k := 0..63 \quad X_SR_k := SR_k$$

Осуществите процедуру БПФ с использованием встроенной функции среды MathCAD `fft` [4]:

$$S_SR := \text{fft}(X_SR)$$

Определите объем полученного массива значений с использованием встроенной функции среды MathCAD `last` [4]:

$$n := \text{last}(S_SR) + 1$$

Сформируйте массивы значений, определяющих теоретический нормированный кумулятивный спектр белого шума и допустимые границы отклонений при уровне значимости $\alpha = 0,05$ ($K_\alpha \approx 1,36$):

$$k := 0..n-1 \quad T_k := 2 \cdot \frac{k}{n}$$

$$T1_k := T_k + 1.36 \cdot \sqrt{\frac{2}{n-2}}$$

$$T2_k := T_k - 1.36 \cdot \sqrt{\frac{2}{n-2}}$$

Сформируйте массив значений модельного нормированного кумулятивного спектра:

$$P_k := \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=0}^k (|S_SR_i|^2)$$

Постройте в одних осях теоретический и модельный нормированные кумулятивные спектры, а также границы допустимых отклонений, как это показано на рис. 6.13.

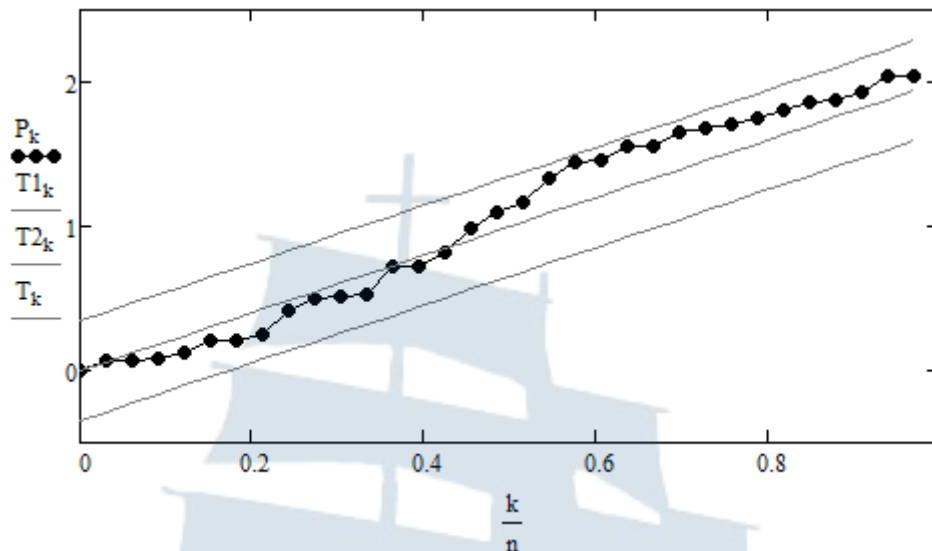


Рис. 6.13. Нормированный кумулятивный спектр стандартизованных остатков

Сделайте вывод о наблюдаемых отклонениях модельного нормированного кумулятивного спектра относительно теоретического, а также о наличии или отсутствии закономерностей, не учтенных регрессионной моделью.

6.3. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- титульный лист (см. Приложение А);
- цель работы, название пунктов лабораторного задания;
- результаты машинного эксперимента (листинг программного кода с графическими результатами);
- выводы по проделанной работе.

6.4. Контрольные вопросы и задания

1. Приведите математическую модель амплитудно-модулированного радиосигнала и поясните физический смысл входящих в нее параметров.
2. Что собой представляет огибающая аддитивной смеси АМ-радиосигнала и узкополосного гауссова шума? Приведите графики ее распределения для различных значений ОСШ.
3. К чему стремится распределение огибающей аддитивной смеси АМ-радиосигнала и узкополосного гауссова шума при неограниченном росте (или спаде) значения ОСШ?

4. Получите оценку математического ожидания и дисперсии огибающей аддитивной смеси АМ-радиосигнала и узкополосного гауссова шума для случая малого значения ОСШ.
5. Получите оценку математического ожидания и дисперсии огибающей аддитивной смеси АМ-радиосигнала и узкополосного гауссова шума для случая большого значения ОСШ.
6. Получите выражение для корреляционной функции огибающей аддитивной смеси АМ-радиосигнала и узкополосного гауссова шума для случая большого значения ОСШ. Покажите, что с ростом значения ОСШ она стремится к корреляционной функции узкополосного гауссова шума.
7. Какую форму имеет физический спектр огибающей аддитивной смеси АМ-радиосигнала и узкополосного гауссова шума и от чего она зависит? Рассмотрите случаи равномерного и гауссова энергетических спектров шума, для которых корреляционная функция определяется выражениями (3.17) и (3.18).
8. Получите оценку для значения ОСШ на выходе амплитудного детектора при подаче на вход аддитивной смеси АМ-радиосигнала и узкополосного гауссова шума для случая низкого значения ОСШ в смеси. Какой эффект при этом наблюдается?
9. Получите оценку для значения ОСШ на выходе амплитудного детектора при подаче на вход аддитивной смеси АМ-радиосигнала и узкополосного гауссова шума для случая высокого значения ОСШ в смеси.
10. Поясните суть метода СИНАД, служащего для определения значения ОСШ в смеси. Как он может быть физически реализован?
11. По каким критериям проводится оценка теоретической модели на адекватность?
12. Что собой представляют стандартизованные остатки? Какими математическим ожиданием и дисперсией они характеризуются?
13. Как проводится проверка стандартизованных остатков на наличие автокорреляции?
14. Что собой представляет нормированный кумулятивный спектр стандартизованных остатков и что он показывает?

6.5. Список использованных источников

1. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1986. – 512 с.
2. Карлов А.М., Кологривов А.Г. Случайные сигналы в радиотехнических цепях: Учеб. пособие. – Калининград: БГАРФ, 1996. – 99 с.
3. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Пер с англ. Н.В. Леви / Под ред. К.А. Семендяева: изд. 2-е, испр. – М.: Наука, 1966. – 228 с.
4. Кирьянов Д.В. Mathcad 14. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 704 с.
5. ГОСТ 26897-86. Радиостанции с однополосной модуляцией морской подвижной службы. Типы, основные параметры, технические требования и методы измерений. – М., 2001. – 48 с. (ИПК Издательство стандартов).
6. Гнатюк В.И. Закон оптимального построения техноценозов [Монография] / В.И. Гнатюк. – 2-е изд., перераб. и доп. – Электронные текстовые данные. – Калининград: [Изд-во КИЦ «Техноценоз»], [2014]. – Режим доступа: <http://gnatukvi.ru/ind.html>, свободный, [рег. от 15.07.2005 № 5045].
7. Критерий Дарбина-Уотсона. [Электронный ресурс] // Википедия. Свободная энциклопедия. 2013. 25 июня. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Критерий_Дарбина_—_Уотсона (дата обращения: 20.05.2018).
8. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов, прогноз и управление: Пер. с англ. // Под ред. В.Ф. Писаренко. – М.: Мир, 1974, кн. 1. – 406 с.
9. Критерий согласия Колмогорова. [Электронный ресурс] // Википедия. Свободная энциклопедия. 2016. 30 декабря. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Критерий_согласия_Колмогорова (дата обращения: 28.05.2018).

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

«Исследование согласованной фильтрации сигналов на фоне аддитивного белого шума»

Цель работы: Провести модельные исследования процесса согласованной фильтрации сигнала в виде пачки биполярных прямоугольных видеоимпульсов в условиях различной помеховой обстановки.

7.1. Краткие теоретические сведения

7.1.1. Постановка задачи согласованной фильтрации

Одной из основных задач радиотехники является организация помехоустойчивой связи. Одним из направлений решения данной задачи является разработка новых типов сигналов, а также новых способов обработки сигналов. Особый интерес при этом представляет возможность подавления вредного влияния помех на основе применения линейных частотных фильтров. Свойства такого фильтра напрямую зависят от типа решаемой задачи [1]:

- обнаружение сигнала на фоне шума;
- оценка параметров радиосигнала;
- разрешение нескольких сигналов;
- воспроизведение первоначальной формы искаженного сигнала;
- предсказание сигнала по имеющимся отсчетам.

Для решения задачи обнаружения сигнала на фоне шума наибольшее распространение получил **критерий максимума отношения сигнал / помеха** на выходе фильтра [1]. Электрические фильтры, отвечающие данному критерию, называются **согласованными**.

Задачу согласованной фильтрации можно сформулировать следующим образом. Пусть на вход линейного электрического фильтра с комплексным коэффициентом передачи $K(j\omega)$ подается аддитивная смесь полезного сигнала $s_{\text{вх}}(t)$ и стационарного шума $n(t)$. Параметры сигнала и статистические характеристики шума считаются известными. Требуется синтезировать электрический фильтр, на выходе которого обеспечивается максимально возможное **пиковое отношение сигнал / помеха** (отношение пикового значения сигнала к СКО шума). При этом не требуется сохранить форму исходного сигнала.

7.1.2. Комплексный коэффициент передачи согласованного фильтра

Поскольку синтезируемый электрический фильтр является линейным, то анализ прохождения сигнала и шума через него можно проводить независимо. Для проведения данного анализа можно воспользоваться **спектральным методом**. При таком подходе сигнал на выходе линейного электрического фильтра определяется обратным преобразованием *Фурье* вида:

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\text{ВЫХ}}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (7.1)$$

где спектральная плотность сигнала $F_{\text{ВЫХ}}(j\omega)$ на выходе фильтра в соответствии со **спектральным методом** равна:

$$F_{\text{ВЫХ}}(j\omega) = F_{\text{ВХ}}(j\omega) \cdot K(j\omega), \quad (7.2)$$

а $F_{\text{ВХ}}(j\omega)$ – спектральная плотность сигнала на входе фильтра; $K(j\omega)$ – комплексный коэффициент передачи фильтра.

Дисперсия шума на выходе фильтра:

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{ВЫХ}}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{ВХ}}(\omega) |K(j\omega)|^2 d\omega, \quad (7.3)$$

где $S_{\text{ВЫХ}}(\omega) = S_{\text{ВХ}}(\omega) |K(j\omega)|^2$ – спектральная плотность средней мощности шума на выходе фильтра, а $S_{\text{ВХ}}(\omega)$ – спектральная плотность средней мощности шума на входе фильтра.

Пусть пиковое значение выходного сигнала достигается в некоторый момент времени t_0 , а шум на входе фильтра имеет равномерную спектральную плотность средней мощности $S_{\text{ВХ}}(\omega) = S_0$. Тогда пиковое отношение сигнал / помеха на выходе фильтра может быть записано в виде:

$$\frac{|s_{\text{ВЫХ}}(t_0)|}{\sigma_{\text{ВЫХ}}} = \frac{\frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F_{\text{ВХ}}(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right|}{\sqrt{\frac{S_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega}}. \quad (7.4)$$

Максимальное значение данного соотношения может быть определено в соответствии с неравенством Коши-Буняковского-Шварца [2]:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega) F_2(j\omega) d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(j\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F_2(j\omega)|^2 d\omega, \quad (7.5)$$

причем строгое равенство возможно тогда и только тогда, когда между функциями $F_1(j\omega)$ и $F_2(j\omega)$ выполняется соотношение вида:

$$F_1(j\omega) = B \cdot F_2^*(j\omega), \quad (7.6)$$

где $B = const$ – произвольная константа.

Применение неравенства (7.5) к выражению (7.4) дает следующее ограничение на максимальное значение пикового отношения сигнал / помеха:

$$\frac{|s_{\text{ВЫХ}}(t_0)|}{\sigma_{\text{ВЫХ}}} \leq \frac{\frac{1}{2\pi} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |F_{\text{ВХ}}(j\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega}}{\sqrt{\frac{S_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega}} = \sqrt{\frac{E_{\text{ВХ}}}{S_0}}, \quad (7.7)$$

где использовано равенство Парсеваля для определения энергии входного сигнала вида [3]:

$$E_{\text{ВХ}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_{\text{ВХ}}(j\omega)|^2 d\omega. \quad (7.8)$$

Используя соотношение (7.6), нетрудно записать выражение для комплексного коэффициента передачи электрического фильтра, обеспечивающего максимум пикового отношения сигнал / помеха, подставив $F_1(j\omega) = K(j\omega)$ и $F_2(j\omega) = F_{\text{ВХ}}(j\omega) \cdot e^{j\omega t_0}$;

$$K(j\omega) = B \cdot F_{\text{ВХ}}^*(j\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}. \quad (7.9)$$

Фильтр с комплексной передаточной функцией вида (7.9) позволяет получить максимум пикового отношения сигнал / помеха только при поступлении на вход соответствующего сигнала. Поэтому говорят, что фильтр согласован с характеристиками сигнала.

Выясним физический смысл полученного соотношения. Для этого представим входящие в (7.9) комплексные функции в показательной форме:

$$K(\omega) \cdot e^{j\theta(\omega)} = B \cdot F_{\text{ВХ}}(\omega) \cdot e^{-j\varphi_{\text{ВХ}}(\omega)} \cdot e^{-j\omega t_0}.$$

Данное комплексное равенство может быть разбито на два вещественных равенства вида:

$$\begin{cases} \theta(\omega) = -\varphi_{\text{вх}}(\omega) - \omega t_0, \\ K(\omega) = B \cdot F_{\text{вх}}(\omega), \end{cases} \quad (7.10)$$

где $\theta(\omega)$ – фазо-частотная характеристика (ФЧХ) фильтра; $\varphi_{\text{вх}}(\omega)$ – фазовый спектр входного сигнала; $K(\omega)$ – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) фильтра; $F_{\text{вх}}(\omega)$ – амплитудный спектр входного сигнала.

Первое из данных равенств носит название **условия компенсации начальных фаз**. С учетом определения ФЧХ фильтра ее можно представить в виде:

$$\theta(\omega) = \varphi_{\text{вых}}(\omega) - \varphi_{\text{вх}}(\omega),$$

где $\varphi_{\text{вых}}(\omega)$ – фазовый спектр выходного сигнала. Тогда условие компенсации начальных фаз приводит к следующему виду фазового спектра сигнала на выходе фильтра:

$$\varphi_{\text{вых}}(\omega) = -\omega t_0. \quad (7.11)$$

Линейность фазового спектра выходного сигнала говорит о том, что все гармонические составляющие спектра входного сигнала на выходе фильтра складываются когерентно, обеспечивая тем самым максимум пикового значения сигнала в момент времени t_0 . При этом на дисперсию шума ФЧХ фильтра не оказывает никакого влияния.

Таким образом, **первой из причин** повышения пикового значения отношения сигнал / помеха на выходе фильтра является специальный вид ФЧХ, обеспечивающий когерентное сложение отдельных гармонических составляющих входного сигнала.

Другой причиной является специальная форма АЧХ, определяемая вторым из равенств (7.10). Вследствие согласования формы АЧХ и амплитудного спектра входного сигнала значительный спад АЧХ происходит в тех частотных областях, которые не вносят значительного вклада в энергию сигнала. В результате этого энергия сигнала уменьшается незначительно, но наблюдается существенное уменьшение дисперсии шума на выходе фильтра.

7.1.3. Импульсная характеристика согласованного фильтра. Условие физической реализуемости

Импульсная характеристика $g(t)$ согласованного фильтра может быть определена на основе выражения (7.9) для комплексного коэффициента передачи $K(j\omega)$ с использованием обратного преобразования Фурье [3]:

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{B}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\text{BX}}^*(j\omega) \cdot e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \\ &= B \cdot \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\text{BX}}(j\omega) \cdot e^{j\omega(t_0-t)} d\omega \right]^* = B \cdot s_{\text{BX}}^*(t_0-t) = B \cdot s_{\text{BX}}(t_0-t). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Анализ выражения (7.12) показывает, что импульсная характеристика по форме совпадает с обращенным во времени сигналом. Поскольку с физической точки зрения импульсная характеристика должна равняться нулю при отрицательных значениях аргумента, то момент времени t_0 , в который достигается максимум пикового значения сигнала, не может быть меньше длительности сигнала τ_c . Увеличение t_0 сверх длительности импульса не изменяет величину пикового значения сигнала, а лишь сдвигает его в сторону запаздывания [1].

Таким образом, обычно полагают:

$$t_{0c} = \tau. \quad (7.13)$$

Данное условие также накладывает ограничение на вид сигнала – его длительность должна быть конечной (импульсный сигнал или пачка импульсов).

Множитель B обычно выбирают таким, чтобы энергия полезного сигнала на входе и выходе согласованного фильтра была одинакова. Однако без потери общности при проведении теоретического анализа его можно полагать равным единице.

Вопрос о физической реализуемости согласованного фильтра решается на основе критерия *Пэли-Винера*. В соответствии с данным критерием АЧХ физически реализуемого фильтра должна удовлетворять условию [1]:

$$\int_0^{\infty} \frac{|\ln(K(\bar{\omega}))|}{1+\bar{\omega}^2} d\bar{\omega} < \infty, \quad (7.14)$$

где $\bar{\omega}$ – нормированная частота. Исходя из данного критерия можно заключить, что АЧХ физически реализуемого фильтра не может равняться нулю на некотором интервале (конечном или бесконечном), а может обращаться в ноль лишь при некоторых отдельных значениях нормированной частоты.

7.1.4. Сигнал и помеха на выходе согласованного фильтра

Для отыскания формы сигнала на выходе согласованного фильтра применим выражения (7.1) и (7.2):

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\text{ВЫХ}}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\text{ВХ}}(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Для дальнейшего преобразования воспользуемся выражением (7.9), определяющим комплексный коэффициент передачи согласованного фильтра:

$$\begin{aligned} s_{\text{ВЫХ}}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\text{ВХ}}(j\omega) \cdot B \cdot F_{\text{ВХ}}^*(j\omega) \cdot e^{-j\omega t_0} \cdot e^{j\omega t} d\omega = \\ &= B \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_{\text{ВХ}}(j\omega)|^2 \cdot e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = B \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{ВХ}}(\omega) \cdot e^{j\omega(t-t_0)} d\omega. \end{aligned}$$

В соответствии с выражением (4.10) полученный интеграл соответствует смещенной во времени корреляционной функции входного сигнала:

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = B \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_{\text{ВХ}}(j\omega)|^2 \cdot e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = B \cdot K_{\text{ВХ}}(t-t_0). \quad (7.15)$$

Таким образом, максимальное значение сигнала на выходе фильтра, в соответствии со свойствами корреляционной функции, действительно достигается при $t = t_0$ и равен:

$$s_{\text{ВЫХ.max}} = s_{\text{ВЫХ}}(t_0) = B \cdot E_{\text{ВХ}}, \quad (7.16)$$

где $E_{\text{ВХ}}$ – энергия входного сигнала.

Поскольку согласованный фильтр является линейной системой, то СП (шум) на выходе такого фильтра остается нормально распределенным. Для отыскания его спектральной плотности средней мощности

необходимо в соответствии со **спектральным методом** воспользоваться квадратом модуля комплексного коэффициента передачи фильтра:

$$\begin{aligned} S_{\text{ВЫХ}}(\omega) &= S_{\text{ВХ}}(\omega) \cdot |K(j\omega)|^2 = S_{\text{ВХ}}(\omega) \cdot \left| B \cdot F_{\text{ВХ}}^*(j\omega) \cdot e^{-j\omega t_0} \right|^2 = \\ &= B^2 \cdot S_{0\text{ВХ}} \cdot |F_{\text{ВХ}}(j\omega)|^2, \end{aligned} \quad (7.17)$$

где учтено, что шум на входе фильтра является белым и имеет равномерный энергетический спектр с плотностью $S_{\text{ВХ}}(\omega) = S_0 = \text{const}$.

Таким образом, дисперсия шума на выходе фильтра будет равна:

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{ВЫХ}}(\omega) d\omega = B^2 S_0 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_{\text{ВХ}}(j\omega)|^2 d\omega = B^2 S_0 \cdot E_{\text{ВХ}}, \quad (7.18)$$

а максимальное значение пикового отношения сигнал / помеха составит:

$$\frac{s_{\text{ВЫХ}}(t_0)}{\sigma_{\text{ВЫХ}}} = \frac{B \cdot E_{\text{ВХ}}}{\sqrt{B^2 \cdot S_{0\text{ВХ}} \cdot E}} = \sqrt{\frac{E_{\text{ВХ}}}{S_0}}.$$

В соответствии с **теоремой Винера-Хинчина** (выражение (4.10)) [3] может быть определена корреляционная функция шума на выходе согласованного фильтра:

$$K_{\text{ВЫХ.шум}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{ВЫХ}}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega = B^2 \cdot S_0 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_{\text{ВХ}}(j\omega)|^2 \cdot e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Полученный интеграл есть не что иное, как корреляционная функция полезного сигнала на входе согласованного фильтра.

Таким образом:

$$K_{\text{ВЫХ.шум}}(\tau) = B^2 S_0 \cdot K_{\text{ВХ}}(\tau), \quad (7.19)$$

значит, корреляционная функция шума на выходе согласованного фильтра с точностью до постоянного множителя $B^2 S_0$ повторяет корреляционную функцию полезного сигнала на входе такого фильтра.

Из полученного выражения для максимального значения пикового отношения сигнал / помеха следует, что при заданной энергии сигнала $E_{\text{ВХ}}$ и спектральной плотности средней мощности шума S_0 сигналу можно придавать различную форму.

Этот факт может применяться для повышения скрытности передачи. Действительно, если уровень сигнала ниже уровня шумов, то

для любого фильтра кроме согласованного затруднение представляет процесс извлечения информации из принятого сигнала. Однако при этом необходимо сохранить ширину спектра сигнала при увеличении его длительности. С этой целью может применяться внутриимпульсная линейно-частотная модуляция (ЛЧМ) [1].

7.1.5. Примеры построения согласованных фильтров

1. Прямоугольный видеоимпульс

Пусть требуется построить согласованный фильтр для одиночного видеоимпульса, определенного математической моделью вида:

$$s_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} U, & 0 \leq t \leq \tau_{\text{и}} \\ 0, & t < 0, t > \tau_{\text{и}}. \end{cases} \quad (7.20)$$

Для построения согласованного фильтра определим спектральную плотность такого сигнала, применив прямое преобразование Фурье:

$$F_{\text{вх}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\tau_{\text{и}}} U e^{-j\omega t} dt = \frac{U}{j\omega} (1 - e^{-j\omega \tau_{\text{и}}}). \quad (7.21)$$

Тогда в соответствии с выражением (7.9) комплексный коэффициент передачи согласованного фильтра будет равен:

$$K(j\omega) = B \cdot \frac{U}{-j\omega} (1 - e^{j\omega \tau_{\text{и}}}) \cdot e^{-j\omega \tau_{\text{и}}} = B \cdot \frac{U}{j\omega} (1 - e^{-j\omega \tau_{\text{и}}}). \quad (7.22)$$

Для простоты будем считать $B=1$. Тогда спектральная плотность выходного сигнала будет равна:

$$F_{\text{вых}}(j\omega) = K(j\omega) F_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{U}{j\omega} (F_{\text{вх}}(j\omega) - F_{\text{вх}}(j\omega) \cdot e^{-j\omega \tau_{\text{и}}}). \quad (7.23)$$

Первое слагаемое в скобках соответствует исходному сигналу, а второе слагаемое – исходному сигналу, смещенному на время $\tau_{\text{и}}$ и инвертированному. Введем для данных сигналов следующие обозначения:

$$s_{1\text{вх}}(t) = s(t); \quad s_{2\text{вх}}(t) = -s(t - \tau). \quad (7.24)$$

Тогда результирующий сигнал будет равен:

$$s_3(t) = s_1(t) + s_2(t). \quad (7.25)$$

Пусть сигнал, определенный выражением (7.25) имеет спектральную плотность $F_3(j\omega)$, тогда с учетом этого обозначения спектральная плотность выходного сигнала имеет вид:

$$F_{\text{ВЫХ}}(j\omega) = \frac{U}{j\omega} F_3(j\omega). \quad (7.26)$$

Деление спектральной плотности на $j\omega$ соответствует интегрированию во временной области. Результирующий сигнал при этом будет равен:

$$s_4(t) = \int_0^t s_3(t) dt, \quad (7.27)$$

а спектральная плотность выходного сигнала примет вид:

$$F_{\text{ВЫХ}}(j\omega) = U \cdot F_4(j\omega). \quad (7.28)$$

Подобная операция соответствует усилению сигнала в U раз и он может быть представлен в виде:

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = U \cdot s_4(t). \quad (7.29)$$

Тогда реализация такого согласованного фильтра сведется к выполнению следующих действий: инверсии с временным сдвигом, суммированию, интегрированию и усилению. Схема построения такого согласованного фильтра приведена на рис. 7.1.

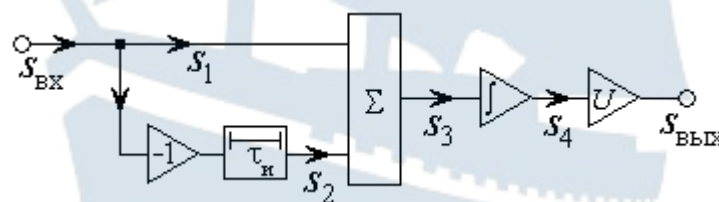


Рис. 7.1. Схема построения согласованного фильтра для одиночного видеопульса

Работу данного фильтра можно пояснить временными диаграммами сигналов в контрольных точках при отсутствии шумов, приведенными на рис. 7.2.

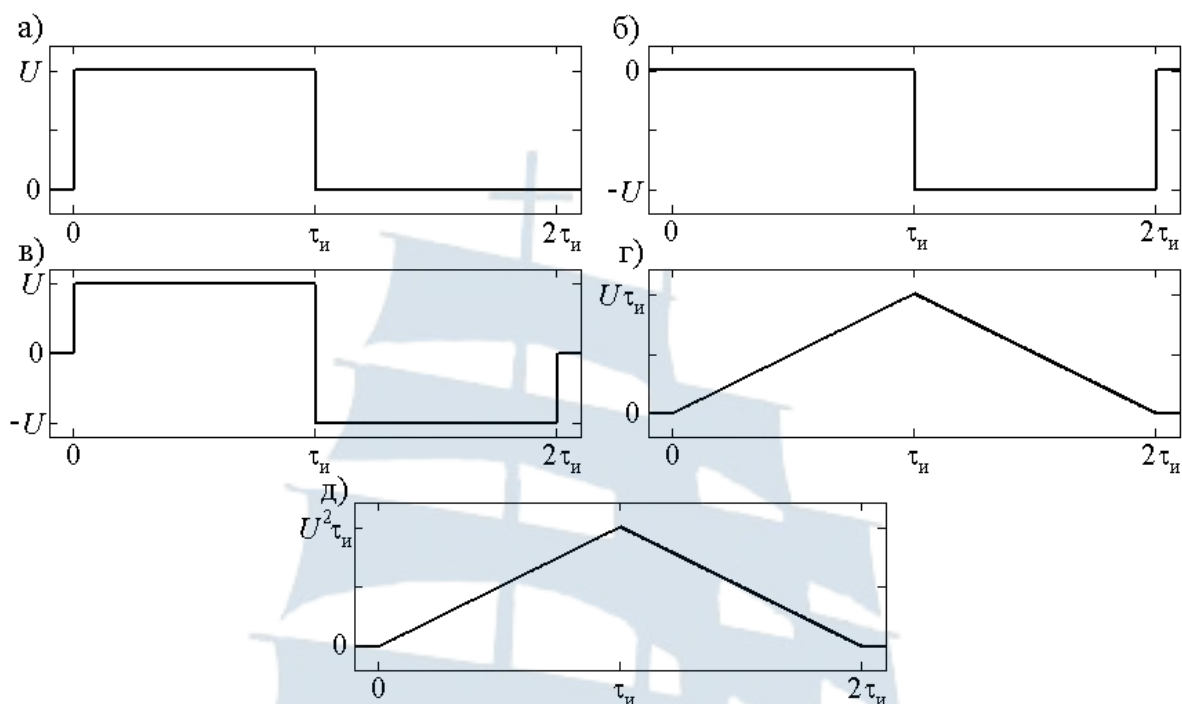


Рис. 7.2. Временные диаграммы, поясняющие работу фильтра, согласованного с одиночным видеоимпульсом:

а – сигнал $s_1(t)$; б – сигнал $s_2(t)$; в – сигнал $s_3(t)$;

г – сигнал $s_4(t)$; д – сигнал $s_{\text{вых}}(t)$

2. Пачка биполярных импульсов

Пусть требуется построить согласованный фильтр для пачки биполярных прямоугольных видеоимпульсов. Такая последовательность может быть задана, например, набором принимаемых сигналом значений на интервале, равном длительности импульса, и длительностью одиночного импульса.

Математическая модель такой последовательности имеет вид:

$$s_{\text{вх}}(t) = A_1 \cdot s(t) + A_2 \cdot s(t - \tau_n) + \dots + A_N \cdot s(t - (N-1) \cdot \tau_n), \quad (7.30)$$

где $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ – набор принимаемых сигналом значений; N – число импульсов в пачке, τ_n – длительность одиночного импульса. Поскольку импульсы биполярные, то $A_k = \pm U$, где U – амплитуда импульса.

Для построения согласованного фильтра определим спектральную плотность такого сигнала. В соответствии со свойствами линейности и запаздывания прямого преобразования Фурье:

– свойство (теорема) запаздывания

$$s(t) \leftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow s(t - \tau) \leftrightarrow F(j\omega) \cdot e^{-j\omega\tau};$$

– свойство (теорема) линейности

$$\begin{cases} s_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega), \\ s_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega), \end{cases} \Rightarrow s_1(t) \pm s_2(t) \leftrightarrow F_1(j\omega) \pm F_2(j\omega).$$

Таким образом, спектральная плотность пачки видеоимпульсов будет равна:

$$F_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{U}{j\omega} \left(1 - e^{-j\omega\tau_n}\right) \left\{ a_1 + a_2 e^{-j\omega\tau_n} + \dots + a_N e^{-(N-1)j\omega\tau_n} \right\}, \quad (7.31)$$

где $a_k = \frac{A_k}{U} = \pm 1$.

Тогда в соответствии с выражением (7.9) комплексный коэффициент передачи согласованного фильтра будет равен:

$$K(j\omega) = B \cdot \frac{U}{-j\omega} \left(1 - e^{j\omega\tau_n}\right) \cdot \left\{ a_1 + a_2 e^{j\omega\tau_n} + \dots + a_N e^{(N-1)j\omega\tau_n} \right\} \cdot e^{-Nj\omega\tau_n}.$$

Разобьем последний множитель на два:

$$e^{-Nj\omega\tau_n} = e^{-j\omega\tau_n} \cdot e^{-(N-1)j\omega\tau_n}.$$

Первый из множителей внесем в первую скобку, а второй – во вторую. Как и ранее, для простоты, $B = 1$. Получим:

$$K(j\omega) = \frac{U}{j\omega} \left(1 - e^{-j\omega\tau_n}\right) \cdot \left\{ a_N + a_{N-1} e^{-j\omega\tau_n} + \dots + a_1 e^{-(N-1)j\omega\tau_n} \right\}. \quad (7.32)$$

Первая часть выражения (7.32) повторяет коэффициент передачи согласованного фильтра для одиночного видеоимпульса и может быть реализована точно такой же схемой (рис. 7.1). Вторая часть данного выражения реализуется линией задержки с N отводами, набором инверторов, реализующих коэффициенты $a_k = -1$ и сумматором.

Рассмотрим пример построения согласованного фильтра для пачки из пяти биполярных прямоугольных видеоимпульсов. Пусть, например, последовательность импульсов в пачке задана набором значений вида:

$$\{U, -U, -U, U, -U\}.$$

Тогда комплексный коэффициент передачи согласованного фильтра имеет вид:

$$K(j\omega) = \frac{U}{j\omega} \left(1 - e^{-j\omega\tau_n}\right) \cdot \left\{ -1 + e^{-j\omega\tau_n} - e^{-2j\omega\tau_n} - e^{-3j\omega\tau_n} + e^{-4j\omega\tau_n} \right\}.$$

Следует обратить внимание на тот факт, что знаки в фигурной скобке чередуются в обратном по отношению к исходному сигналу порядке.

На рис. 7.3 приведена схема реализации такого согласованного фильтра.

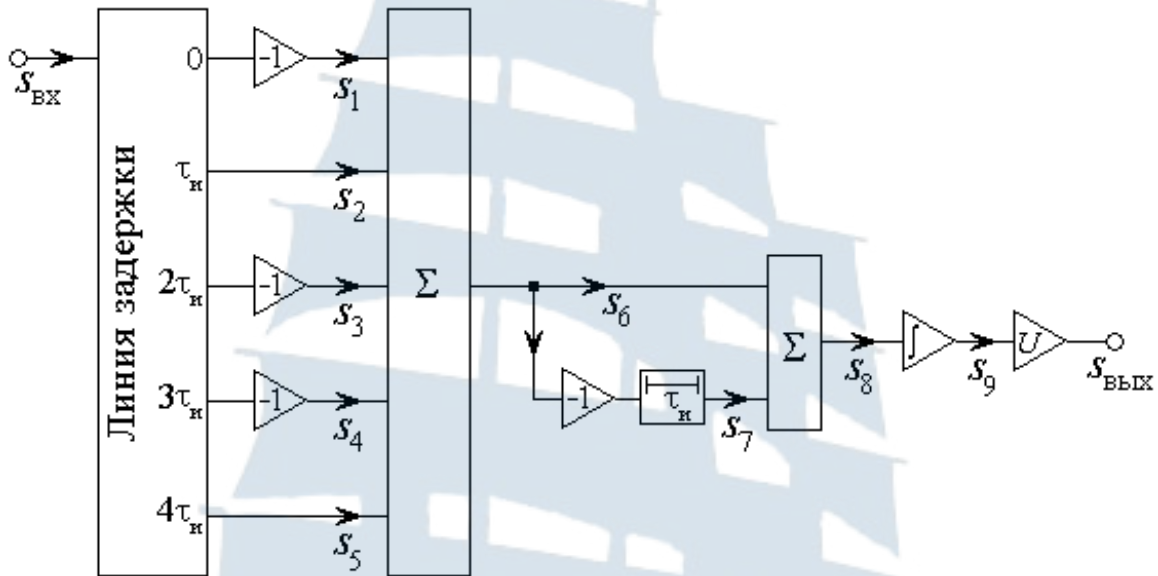


Рис. 7.3. Схема построения согласованного фильтра для пачки из пяти биполярных прямоугольных видеоимпульсов

Работу данного фильтра можно пояснить временными диаграммами в контрольных точках при отсутствии шумов. Сигналы в контрольных точках могут быть описаны выражениями вида:

$$s_{1\text{ВХ}}(t) = -s_{\text{и}}(t); \quad s_{2\text{ВХ}}(t) = s_{\text{и}}(t - \tau); \quad s_{3\text{ВХ}}(t) = -s_{\text{и}}(t - 2\tau);$$

$$s_{4\text{ВХ}}(t) = -s_{\text{и}}(t - 3\tau); \quad s_{5\text{ВХ}}(t) = s_{\text{и}}(t - 4\tau); \quad s_6(t) = \sum_{k=1}^5 s_k(t);$$

$$s_7(t) = -s_6(t - \tau); \quad s_8(t) = s_6(t) + s_7(t); \quad s_9(t) = \int_0^t s_8(t) dt;$$

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = U \cdot s_9(t).$$

Временные диаграммы данных сигналов приведены на рис. 7.4.

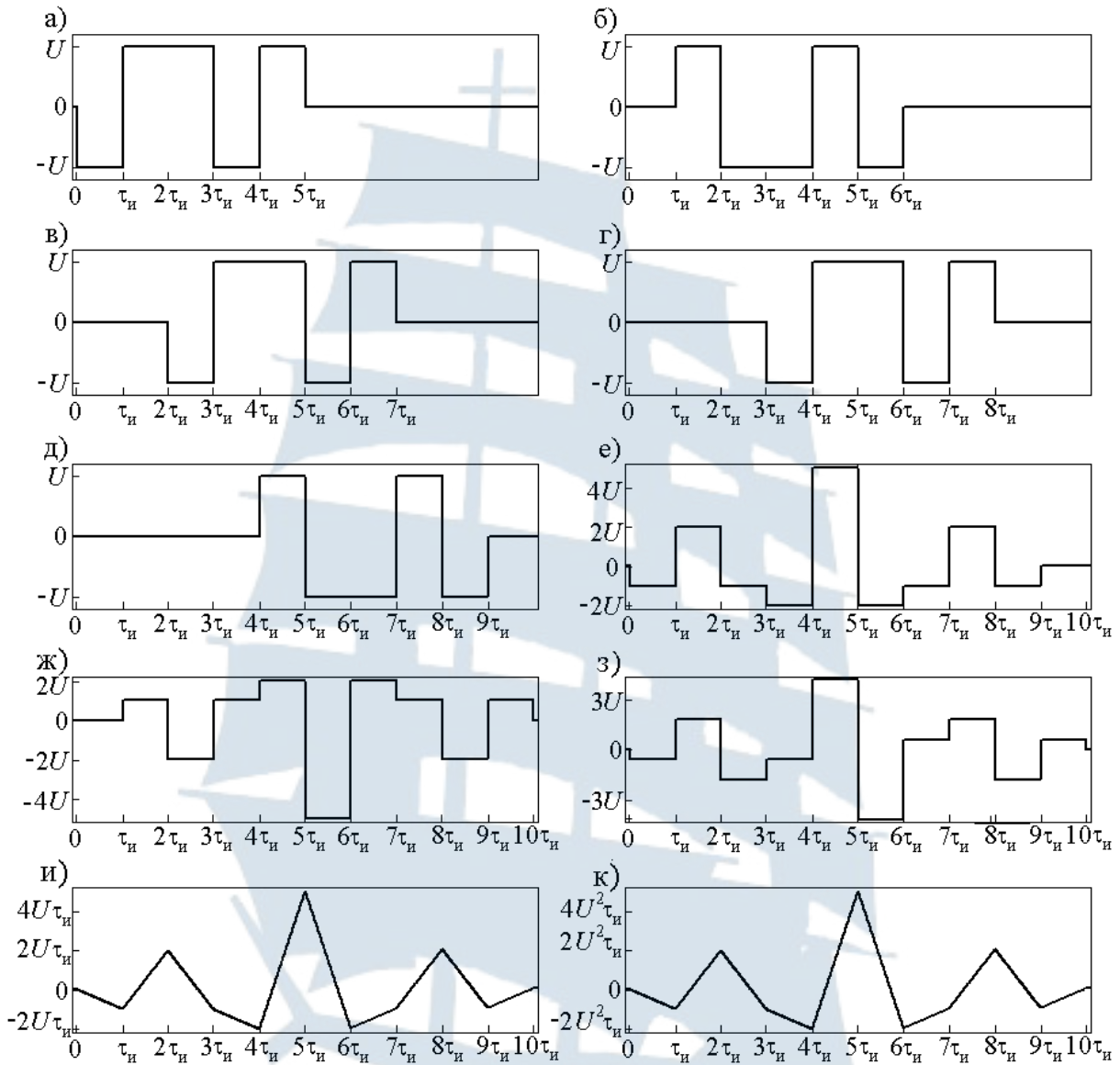


Рис. 7.4. Временные диаграммы, поясняющие работу фильтра, согласованного с пачкой биполярных видеоимпульсов:

a – сигнал $s_1(t)$; *б* – сигнал $s_2(t)$; *в* – сигнал $s_3(t)$; *г* – сигнал $s_4(t)$;

д – сигнал $s_5(t)$; *е* – сигнал $s_6(t)$; *ж* – сигнал $s_7(t)$; *з* – сигнал $s_8(t)$;

и – сигнал $s_9(t)$; *к* – сигнал $s_{\text{ВЫХ}}(t)$

7.1.6. Согласованная фильтрация сигналов при небелом шуме

Если сигнал $s_{\text{вх}}(t)$ с известной формой и параметрами реализуется на фоне шума с неравномерной спектральной плотностью сред-

ней мощности $S_{\text{вх}}(\omega) \neq \text{const}$ (небелый шум), то принцип построения согласованного фильтра будет несколько отличаться.

В данном случае в структуру согласованного фильтра включают два дополнительных звена [1], для которых специальным образом подбирают комплексный коэффициент передачи. Пусть для первого звена, включаемого на входе всей схемы, такой коэффициент передачи составляет $K_1(j\omega)$. Тогда коэффициент передачи второго звена

должен быть равен $K_2(j\omega) = \frac{1}{K_1(j\omega)}$. Совместное действие двух дан-

ных звеньев не влияет на результат работы согласованного фильтра.

Логично постараться свести новую задачу к рассмотренной ранее схеме фильтрации на фоне аддитивного белого гауссова шума. В таком случае действие первого звена должно сводиться к преобразованию существующего небелого шума в белый. Согласно спектральному методу на выходе данного звена получим:

$$S_{\text{вых1}}(\omega) = S_{\text{вх}}(\omega) \cdot |K_1(j\omega)|^2 = S_0. \quad (7.33)$$

Из полученного выражения определяем АЧХ данного звена:

$$|K_1(j\omega)| = \sqrt{\frac{S_0}{S_{\text{вх}}(\omega)}}. \quad (7.34)$$

При прохождении через данное звено свои свойства меняет не только шумовая, но и информационная составляющая принятого сигнала. Однако для принятия решения о наличии сигнала в смеси с шумом форма выходного сигнала не важна – важно лишь достижение как можно большего отношения сигнал / шум. Поэтому по отношению к принятому сигналу может быть применен стандартный подход согласованной фильтрации.

В соответствии с (7.9) комплексный коэффициент передачи согласованного фильтра должен соответствовать выражению вида:

$$K(j\omega) \cdot K_{2\text{вх1}}^*(j\omega) = B \cdot F^*(j\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}, \quad (7.35)$$

где $F_{\text{вых1}}(j\omega) = F_{\text{вх}}(j\omega) \cdot K_1(j\omega)$ – спектральная плотность сигнала на выходе первого звена.

Тогда

$$K(j\omega) = B \cdot \frac{F_{\text{вх}}^*(j\omega) \cdot K_1^*(j\omega)}{K_2(j\omega)} \cdot e^{-j\omega t_0} = B \cdot F_{\text{вх}}^*(j\omega) \cdot |K_1(j\omega)|^2 \cdot e^{-j\omega t_0}.$$

Подстановка в данное выражение АЧХ вида (7.34), дает:

$$K(j\omega) = B \cdot S_0 \cdot \frac{F_{\text{BX}}^*(j\omega)}{S_{\text{BX}}(\omega)} \cdot e^{-j\omega t_0}. \quad (7.36)$$

Анализ полученного выражения и его сравнение с (7.9) позволяет установить его физический смысл. Поскольку (7.36), как и (7.9), содержит в качестве множителей $F_{\text{BX}}^*(j\omega)$ и $e^{-j\omega t_0}$, то это обеспечивает коррекцию фазового спектра и суммирование отдельных спектральных составляющих сигнала таким образом, чтобы в момент времени t_0 реализовывался максимум сигнала. С другой стороны наличие $F_{\text{BX}}^*(j\omega)$ и $S_{\text{BX}}(\omega)$ позволяет выделять именно те компоненты спектра сигнала, при которых интенсивность шума меньше [1].

7.2. Лабораторное задание

7.2.1. Формирование математических моделей импульсного сигнала, согласованного фильтра и фильтра нижних частот

Запустите приложение MathCAD.

Задайте вектор-строку информационных бит, составляющих биполярный импульсный сигнал, с которым должен быть согласован фильтр, например:

$$Inf := (1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1)$$

Длина вектора может быть любой, но ввиду того, что в процессе приема сигнала на него накладывается шумовая составляющая, желательно иметь достаточно большую длину реализации. В противном случае будет наблюдаться сильный разброс параметров шумовой составляющей от реализации к реализации, и понадобится существенное увеличение их числа для качественной обработки. В приведенном примере длина информационной последовательности равна 15.

Чтобы не следить за количеством введенных символов, в том числе при изменении их числа, создайте следующую процедуру, осуществляющую автоматический подсчет:

$$M := \text{last}(Inf^T) + 1$$

где верхний индекс T означает транспонирование матрицы, то есть переход от вектор-строки к вектор-столбцу (обязательное требование встроенной функции last среды MathCAD).

Задайте параметры информационного сигнала:

– амплитуду сигнала, например

$$A := 1$$

– длительность одиночного импульса, например

$$T_{imp} := \frac{10 \cdot 10^{-6}}{A^2}$$

где предусмотрена возможность изменения длительности сигнала при изменении амплитуды для сохранения его энергии;

– интервал наблюдения

$$T_{nab} := 2 \cdot M \cdot T_{imp}$$

где интервал наблюдения выбран в 2 раза больше длительности сигнала для возможности полного представления сигнала на выходе согласованного фильтра.

Создайте математическую модель полезного сигнала:

$$s(t) := \sum_{n=0}^{M-1} \left[Inf_{0,n} \cdot \Phi(t - n \cdot T_{imp}) \cdot \Phi((n+1) \cdot T_{imp} - t) \right]$$

В данном выражении использована встроенная функция среды MathCAD, отвечающая за единичное ступенчатое воздействие (или функцию Хэвисайда). Она может быть вставлена в выражение путем выполнения следующей последовательности действий:

Insert→*Function*→*Piecewise Continuous*→*heaviside step*.

Постройте временную диаграмму данного сигнала (рис. 7.5):

$$t := 0, 0.01 \cdot T_{imp} .. 2 \cdot M \cdot T_{imp}$$

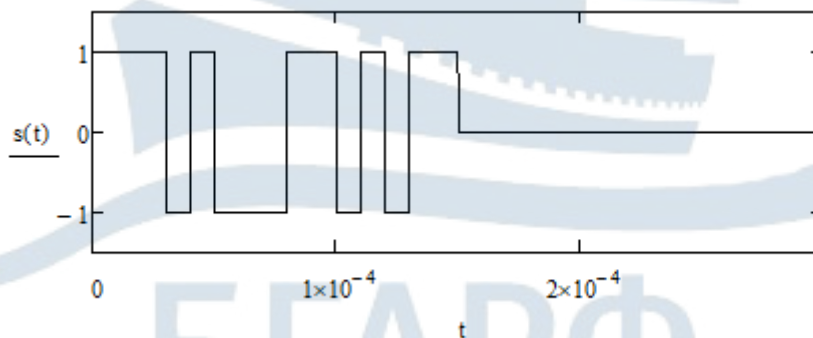


Рис. 7.5. Временная диаграмма полезного сигнала

Для анализа прохождения сигналов через согласованный фильтр удобно воспользоваться **спектральным методом** с использованием

встроенных функций `fft` и `ifft` среды MathCAD. С этой целью проведите дискретизацию сформированного сигнала.

Задайте число отсчетов в дискретном сигнале:

$$N := 2^{16}$$

Задайте шаг дискретизации:

$$\Delta t := \frac{T_{nab}}{N}$$

Создайте процедуру дискретизации вида:

$$i := 0..N-1 \quad s_d_i := s(i \cdot \Delta t)$$

Создайте процедуру преобразования Фурье сформированных отсчетов дискретного сигнала:

$$F1 := \text{fft}(s_d)$$

Создайте математическую модель согласованного фильтра в частотной области в соответствии с выражением (7.9). Коэффициент B в данном выражении для простоты выберите равным 1:

$$j := 0..last(F1)$$

$$Ku1_j := \left(\text{Re}(F1_j) - i \cdot \text{Im}(F1_j) \right) \cdot e^{-i \cdot M \cdot T_{imp} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{j}{T_{nab}}}$$

где функции `Re` и `Im` определяют действительную и мнимую части комплексного числа, соответственно, и прописываются вручную, а i , как и ранее, символ мнимой единицы (набирается с панели *Calculator*).

В данном выражении $M \cdot T_{imp}$ символизирует длительность сигнала (см. выражение (7.13)), а $\frac{1}{T_{nab}}$ – шаг по частоте в Гц.

Таким образом, приведенный аргумент экспоненциальной функции $M \cdot T_{imp} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{j}{T_{nab}}$ есть не что иное, как произведение текущего j -ого значения угловой частоты на длительность сигнала.

Для возможности сравнения результатов прохождения сигнала через различные фильтры используйте в качестве альтернативы согласованному фильтру ФНЧ с частотой среза, определяемой шириной спектра импульсного сигнала. Такой фильтр сужает полосу частот,

занимаемую шумом, а, значит, так же как и согласованный фильтр, приводит к повышению отношения сигнал / помеха на выходе.

Задайте параметры такого фильтра. Для определения частоты среза постройте амплитудный спектр сигнала, используя результаты вычисления быстрого преобразования Фурье (рис. 7.6). Ограничьте область построения графика, используя следующее максимальное значение частоты:

$$f_{\text{max}} := \frac{5}{T_{\text{imp}}}$$

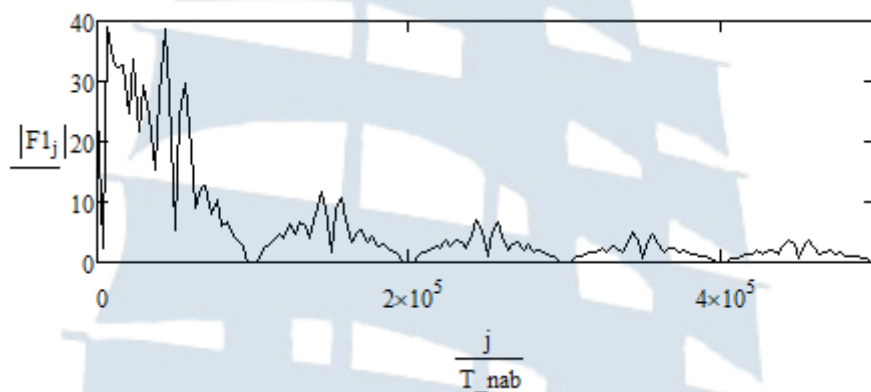


Рис. 7.6. Амплитудный спектр импульсного сигнала

Обычно спектр такого сигнала ограничивают главным и первыми двумя боковыми лепестками.

Таким образом, частота среза ФНЧ должна быть задана в виде:

$$f_{\text{ср}} := \frac{3}{T_{\text{imp}}}$$

Коэффициент передачи на низких частотах для обоих фильтров должен быть одинаковым. Для его расчета создайте следующую процедуру:

$$K0 := \begin{cases} \text{for } j \in 0..\text{last}(F1) \\ Ku_j \leftarrow |Ku1_j| \\ \max(Ku) \end{cases}$$

Создайте математическую модель ФНЧ с заданными параметрами при помощи следующей процедуры:

$$Ku2_j := \begin{cases} K0 \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{j}{T_{nab}} \cdot \frac{1}{f_{cp}}} & \text{if } \frac{j}{T_{nab}} \leq f_{cp} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Для возможности выбора типа фильтра введите переменную, отвечающую за тип фильтра, и объедините отсчеты комплексных коэффициентов передачи в одну функцию, например:

$$Tip := 1$$

$$Ku_j := \begin{cases} Ku1_j & \text{if } Tip = 1 \\ Ku2_j & \text{if } Tip = 2 \end{cases}$$

Осуществите моделирование прохождения полезного сигнала через согласованный фильтр ($Tip := 1$). Для этого создайте следующую процедуру:

$$F2_j := F1_j \cdot Ku_j$$

$$s_vyh := \text{ifft}(F2)$$

Постройте сигнал на выходе согласованного фильтра (рис. 7.7).

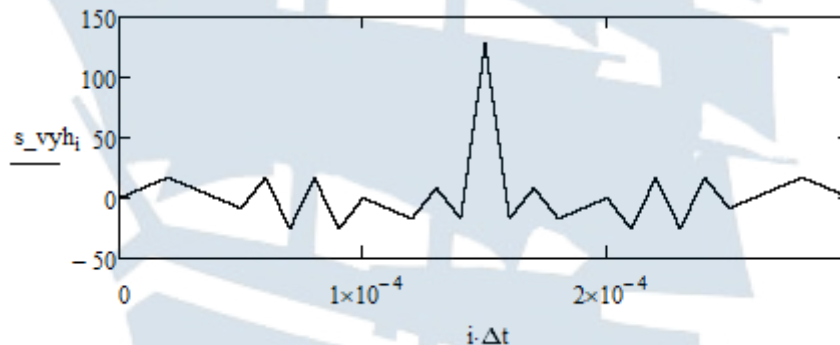


Рис. 7.7. Временная диаграмма полезного сигнала на выходе согласованного фильтра

Построенная временная диаграмма по форме повторяет корреляционную функцию полезного сигнала, смещенную по оси времени на величину длительности сигнала.

Следует обратить внимание на тот факт, что максимальное значение сигнала не совпадает с энергией сигнала. Данный результат является следствием применения встроенных функций `fft` и `ifft` среды MathCAD. Во встроенных функциях `fft` и `ifft` применена нормировка

$\frac{1}{\sqrt{N}}$, а при переходе от временной области к частотной и назад не

учитываются шаг по времени и частоте, соответственно. При применении данных процедур друг за другом никаких изменений с сигналом не происходит. Действительно, в таком случае произведение множителей дает $\frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \frac{1}{\Delta f} = \frac{1}{N} \cdot \frac{N}{T_{nab}} \cdot T_{nab} = 1$.

Если же после определения прямого преобразования Фурье находится квадрат модуля спектральной плотности (для отыскания энергии сигнала в соответствии с выражением (7.8)), то произведение соответствующих коэффициентов дает

$$\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \frac{1}{\Delta t} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \frac{1}{\Delta f} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \frac{1}{\Delta t} = \frac{\sqrt{N}}{T_{nab}}.$$

Если учесть этот поправочный множитель, то получится следующее:

$$E := \sum_{i=0}^{N-1} \left[(s_{d_i})^2 \cdot \Delta t \right] = 1.5 \cdot 10^{-4}$$

$$\max(s_{vyh}) \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot T_{nab} = 1.5 \cdot 10^{-4}$$

Поскольку число отсчетов в дискретном сигнале достаточно велико, а корреляционная функция затухает медленно, то для ее детального расчета потребуется большое машинное время. Этого можно избежать, осуществив повторную дискретизацию сигнала со значительно большим шагом.

С этой целью создайте следующую процедуру. Задайте требуемый объем экспериментальных данных (достаточно порядка 200 точек), например:

$$N_{vyb} := 2^8$$

Определите шаг повторной дискретизации:

$$\Delta N := \frac{N}{N_{vyb}}$$

Осуществите повторно дискретизацию:

$$i := 0..N_{vyb} - 1 \quad s_{d_new_i} := s_{d_{i \cdot \Delta N}}$$

Создайте следующую процедуру вычисления отсчетов корреляционной функции полезного сигнала:

$$n := 0.. \frac{N_vyb}{2} - 1 \quad K_n := \frac{2}{N_vyb} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{N_vyb}{2}-1} (s_d_new_i \cdot s_d_new_{i+n})$$

Постройте временную диаграмму корреляционной функции (рис. 7.8).

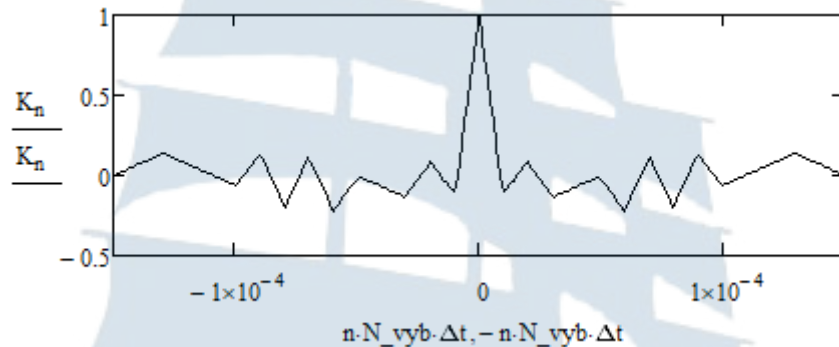


Рис. 7.8. Временная диаграмма корреляционной функции сигнала

Отличие максимума корреляционной функции сигнала от значения энергии сигнала E также связано с выбранной нормировкой. В соответствии с определением корреляционной функции вида:

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{BX}(t) \cdot s_{BX}(t \pm \tau) dt \quad (7.37)$$

истинное максимальное значение может быть вычислено следующим образом:

$$\max(K) \cdot \frac{N_vyb}{2} \cdot \Delta N \cdot \Delta t = 1.491 \cdot 10^{-4}$$

где наблюдаемая небольшая разница связана с процедурой повторной дискретизации.

7.2.2. Формирование математической модели смеси полезного сигнала и аддитивного белого гауссова шума

Для формирования отсчетов аддитивного белого гауссова шума воспользуемся преобразованием *Бокса-Мюллера* (см. лабораторную работу № 2). С этой целью сформируйте два массива отсчетов равно-

мерно распределенных на интервале от 0 до 1 СВ объемом N . Для этого воспользуйтесь встроенной функцией `runif` среды MathCAD:

$$X := \text{runif}(N, 0, 1) \quad Y := \text{runif}(N, 0, 1)$$

Осуществите преобразование с помощью следующей процедуры:

$$i := 0..N - 1 \quad Z_i := \sqrt{-2 \cdot \ln(X_i + 10^{-20})} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot Y_i)$$

Задайте требуемое (рабочее) значение отношения сигнал / шум (в дБ) в смеси на входе фильтра при амплитуде полезного сигнала, равной 1. Например:

$$SNR0_dB := 20$$

Переведите данное значение в разы:

$$SNR0 := 10^{\frac{SNR0_dB}{10}}$$

Осуществите нормировку сформированного шума к заданному значению ОСШ. Задайте среднюю мощность сигнала с единичной амплитудой и рассчитайте требуемое значение СКО шума:

$$P0 := 1 \quad \sigma0 := \sqrt{\frac{P0}{SNR0}}$$

Рассчитайте реальное значение СКО сформированного шума и проведите его нормировку:

$$\sigma_Z := \sqrt{\text{var}(Z)} \quad Z_norm := \frac{Z}{\sigma_Z} \cdot \sigma0$$

Для возможности учета изменения амплитуды принимаемого сигнала на фоне неизменных энергетических характеристик аддитивного шума необходимо рассчитать реализуемое при данном уровне сигнала значение ОСШ:

$$P := A^2 \quad SNR := \frac{P}{\sigma0^2} \quad SNR_dB := 10 \cdot \lg(SNR)$$

Рассчитайте массив значений смеси полезного сигнала и аддитивного белого гауссова шума:

$$i := 0..N - 1 \quad s_add_i := s_d_i + Z_norm_i$$

Постройте временную диаграмму полученной реализации смеси полезного сигнала и аддитивного белого гауссова шума (рис. 7.9).

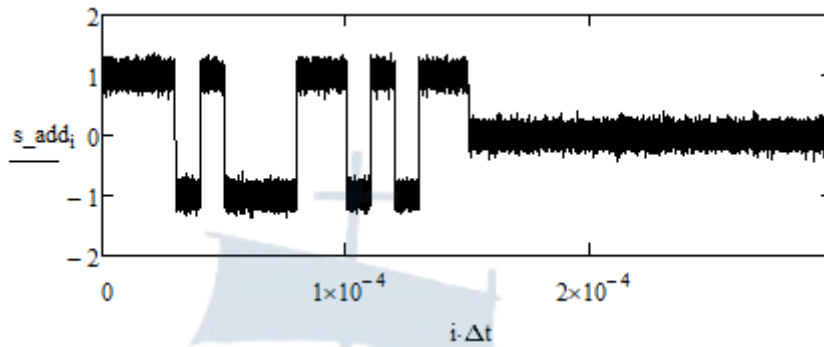


Рис. 7.9. Временная диаграмма реализации смеси полезного сигнала и аддитивного белого гауссова шума при ОСШ=20 дБ

7.2.3. Прохождение смеси полезного сигнала и аддитивного шума через согласованный фильтр

Для реализации прохождения смеси полезного сигнала и аддитивного шума через согласованный фильтр воспользуйтесь **спектральным методом**. Создайте массив отсчетов прямого преобразования *Фурье* для созданной реализации смеси полезного сигнала и аддитивного шума. Для этого воспользуйтесь встроенной функцией `fft` среды MathCAD:

$$F_add_vh := \text{fft}(s_add)$$

Сформируйте массив отсчетов прямого преобразования *Фурье* сигнала на выходе согласованного фильтра:

$$j := 0..last(F_add_vh) \quad F_add_vyh_j := F_add_vh_j \cdot Ku_j$$

Воспользуйтесь встроенной функцией `ifft` среды MathCAD для расчета массива отсчетов сигнала на выходе согласованного фильтра:

$$s_add_vyh := \text{ifft}(F_add_vyh)$$

Постройте временную диаграмму сигнала на выходе согласованного фильтра (рис. 7.10):

$$i := 0..last(s_add_vyh)$$

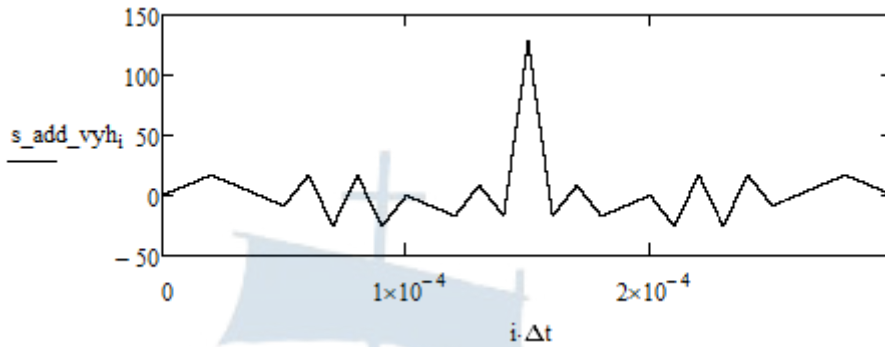


Рис. 7.10. Временная диаграмма реализации сигнала на выходе согласованного фильтра при ОСШ=20 дБ

Уменьшите значение ОСШ на входе согласованного фильтра так, чтобы полезный сигнал «потонул» в шумах при построении временной диаграммы реализации. Задайте, например, значение ОСШ равным -20 дБ. Постройте временную диаграмму сигнала на выходе согласованного фильтра (рис. 7.11):

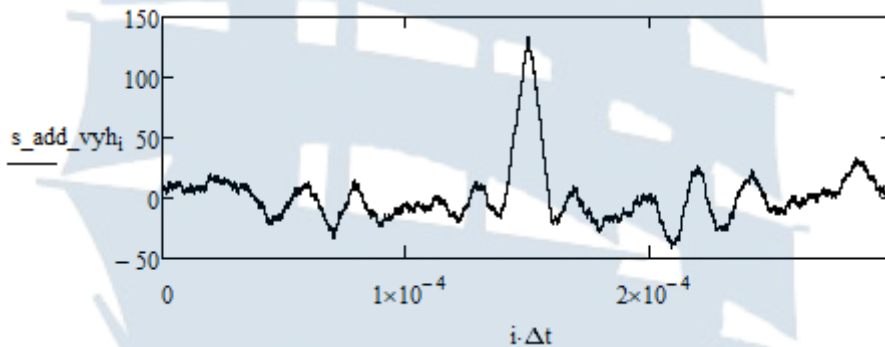


Рис. 7.11. Временная диаграмма реализации сигнала на выходе согласованного фильтра при ОСШ=-20 дБ

Проанализируйте полученный результат и сделайте вывод, позволяет ли согласованный фильтр решить задачу обнаружения импульсного сигнала на фоне белого шума при выбранном значении ОСШ на входе фильтра.

7.2.4. Определение дисперсии шума на выходе согласованного фильтра

Реализация шума на выходе согласованного фильтра может быть найдена следующим образом:

$$n_i := s_add_vyh_i - s_vyh_i$$

Временная диаграмма реализации данной шумовой составляющей имеет вид, приведенный на рис. 7.12.

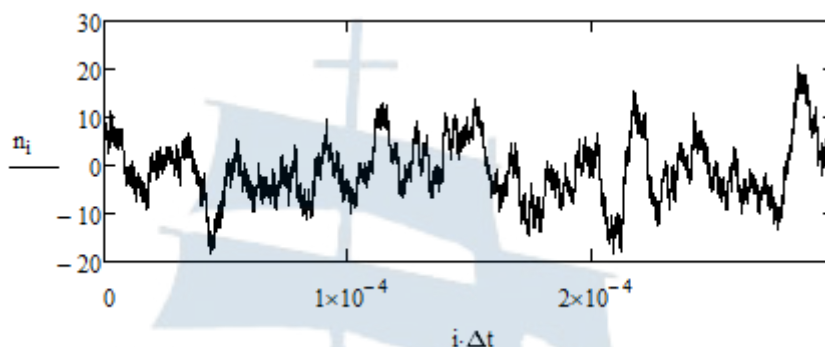


Рис. 7.12. Временная диаграмма реализации шума на выходе согласованного фильтра

Дисперсия данной шумовой составляющей может быть определена с использованием встроенной функции `var` среды MathCAD:

$$\text{var}(n) = 40.234$$

Однако ввиду малой длительности реализации шумовой составляющей определенная таким образом дисперсия нестабильна (в условиях приведенного примера меняется в диапазоне от 25 до 70). В этом легко убедиться, перезапустив программу нажатием комбинации клавиш `Ctrl+F9`.

Для стабилизации оценки дисперсии шума можно либо увеличить объем выборки N , либо использовать серию реализаций шума на выходе согласованного фильтра и провести усреднение дисперсии по ансамблю реализаций.

Первый подход приведет к увеличению машинного времени, необходимого для компиляции программного кода, что нежелательно в условиях ограниченного времени проведения занятия.

Второй подход может быть реализован в виде единой процедуры, объединяющей функции генерации шума, его прохождения через согласованный фильтр и вычисления дисперсии. Увеличение машинного времени при этом не будет таким критичным.

Для реализации второго подхода создайте процедуру, приведенную ниже. В данной процедуре переменная D_vuh используется в качестве счетчика. В начале процедуры переменная обнуляется. Проводится вычисление 100 реализаций шума в соответствии с методикой, изложенной в пп. 7.2.2 и 7.2.3. Суммирование с коэффициентом 0.01 соответствует усреднению дисперсий 100 отдельных реализаций.

```

D_vyh := | D_vyh ← 0
          | for i ∈ 0..99
          |   | X ← runif ( N, 0, 1 )
          |   | Y ← runif ( N, 0, 1 )
          |   | for j ∈ 0..N - 1
          |   |   | Z_j ← √(-2 · ln ( X_j + 10-20 ) ) · sin ( 2 · π · Y_j )
          |   |   | σ_Z ← √var ( Z )
          |   |   | Z_norm ←  $\frac{Z}{\sigma_Z} \cdot \sigma_0$ 
          |   |   | F_vh ← fft ( Z_norm )
          |   |   | for k ∈ 0..last ( F_vh )
          |   |   |   | F_vyh_k ← F_vh_k · Ku_k
          |   |   | n ← ifft ( F_vyh )
          |   |   | D_vyh ← D_vyh + 0.01 · var ( n )
          |   | D_vyh

```

7.2.5. Исследование зависимости отношения сигнал / помеха на выходе согласованного фильтра от ОСШ на входе

Для проведения исследования помехоустойчивости функционирования согласованного фильтра изменяйте значение ОСШ на входе фильтра $SNR0_db$ в диапазоне от -40 до +20 дБ с шагом 10 дБ.

Для определения значения отношения сигнал / помеха на выходе согласованного фильтра воспользуйтесь следующим выражением:

$$10 \cdot \lg \left(\frac{\max (s_vyh)^2}{D_vyh} \right) =$$

Сравните полученное значение с теоретическим. Для этого вычислите значение спектральной плотности средней мощности шума на входе согласованного фильтра:

$$S0 := \text{var} (Z_norm) \cdot \Delta t$$

и воспользуйтесь выражением вида:

$$10 \cdot \lg \left(\frac{A^2 \cdot M \cdot T_{imp}}{S0} \right) =$$

Сведите устанавливаемые значения ОСШ в дБ и результаты расчетов модельного и теоретического значений отношения сигнал / помеха на выходе согласованного фильтра в отдельные вектор-строки вида:

$$SNR_{vh} := (-40 \quad -30 \quad -20 \quad -10 \quad 0 \quad 10 \quad 20)$$

$$SNR_{vyh_mod} := (5.569 \quad 15.431 \quad 25.446 \quad 35.299 \quad 45.576 \quad 55.577 \quad 65.516)$$

$$SNR_{vyh_theor} := (5.154 \quad 15.154 \quad 25.154 \quad 35.154 \quad 45.154 \quad 55.154 \quad 65.154)$$

Постройте в одних координатных осях зависимости модельного и теоретического значений отношения сигнал / помеха на выходе согласованного фильтра от ОСШ на входе (рис. 7.13):

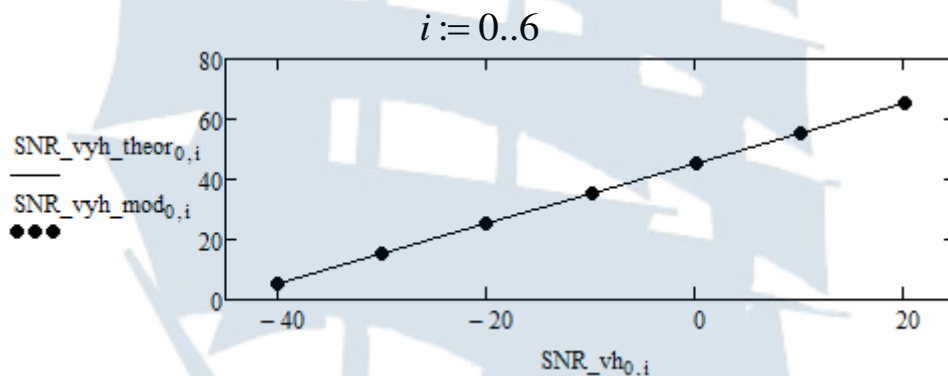


Рис. 7.13. Зависимость модельного и теоретического значений отношения сигнал / помеха на выходе согласованного фильтра от ОСШ на входе

Небольшая разница между модельным и теоретическим значениями отношения сигнал / помеха объясняется погрешностью в оценках дисперсии шумовой составляющей на выходе согласованного фильтра и спектральной плотности средней мощности шума на входе фильтра, вызванными конечностью исследуемых реализаций.

Линейность полученных зависимостей свидетельствует о линейности построенной модели фильтра, а отсутствие существенной разницы в модельных и теоретических значениях отношения сигнал / помеха – об адекватности построенной модели.

7.2.6. Исследование зависимости отношения сигнал / помеха на выходе фильтра нижних частот от ОСШ на входе

Смените значение параметра, определяющего тип фильтра, с $Tip = 1$ на $Tip = 2$ и проведите исследование, аналогичное п. 7.2.7. Результаты занесите в вектор-строку вида:

$$SNR_vyh_LFF := (-3.392 \ 6.849 \ 16.651 \ 26.824 \ 36.688 \ 46.710 \ 56.643)$$

Постройте в одних координатных осях зависимости модельных значений отношения сигнал / помеха на выходе согласованного фильтра и фильтра нижних частот от ОСШ на входе (рис. 7.14):

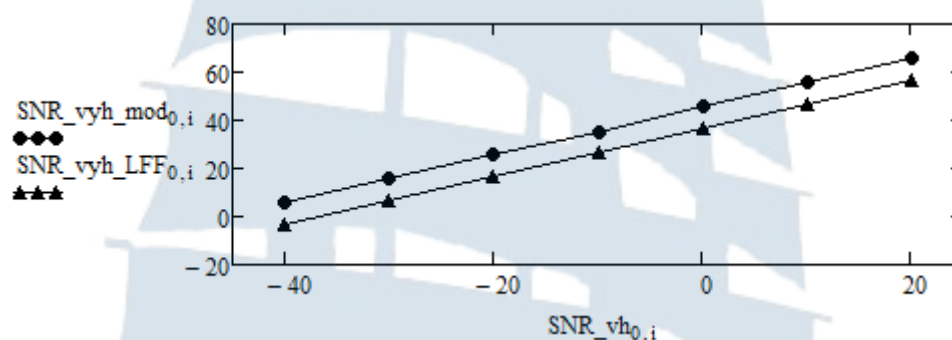


Рис. 7.14. Зависимость модельных значений отношения сигнал / помеха на выходе согласованного фильтра и фильтра нижних частот от ОСШ на входе

Из построенных зависимостей видно, что **согласованный фильтр обеспечивает существенно более высокое значение отношения сигнал / помеха, чем фильтр нижних частот.**

7.2.7. Исследование зависимости отношения сигнал / помеха на выходе согласованного фильтра от амплитуды сигнала

Установите значение параметра, определяющего тип фильтра, $Tip = 1$ (согласованный фильтр). Выставьте значение ОСШ на входе фильтра равным 20 дБ. Задавайте по-очереди следующие значения амплитуды сигнала, приводящие к его растяжению во времени: 0,01; 0,05; 0,1; 0,5 и собственно 1. Проводите измерение отношения сигнал / помеха на выходе фильтра. Сведите задаваемые значения амплитуды и измеренные значения отношения сигнал / помеха в вектор-строки вида:

$$A := (0.01 \ 0.05 \ 0.1 \ 0.5 \ 1.0)$$

$$SNR_{vyh} := (25.397 \quad 39.434 \quad 45.531 \quad 59.500 \quad 65.389)$$

Постройте график зависимости отношения сигнал / помеха на выходе согласованного фильтра от амплитуды полезного сигнала при заданном значении ОСШ на входе фильтра (рис. 7. 15):

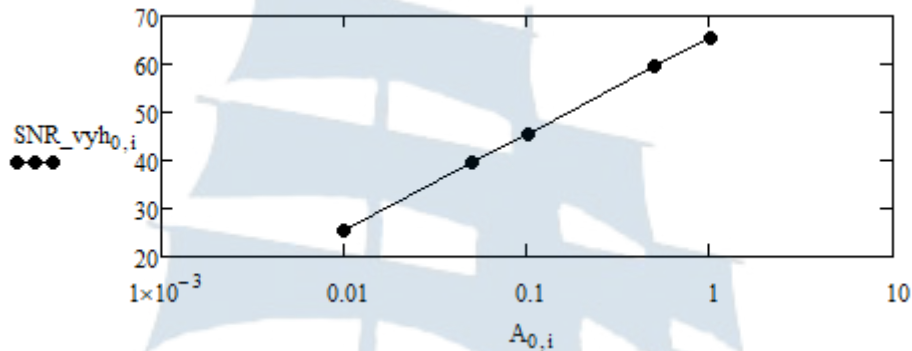


Рис. 7.15. Зависимость отношения сигнал / помеха на выходе согласованного фильтра от амплитуды сигнала на входе

Поскольку амплитуда сигнала определяет его мощность, а значит, и значение ОСШ на входе, то логично использовать по оси абсцисс логарифмический масштаб. С этой целью проведите изменение настроек рисунка. Нажмите на него правой клавишей мыши и в появившемся меню выберите опцию *Format*; в появившемся окне в левой колонке настроек *X-Axis* установите флажок *Log scale*.

7.3. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- титульный лист (см. Приложение А);
- цель работы, название пунктов лабораторного задания;
- результаты машинного эксперимента (листинг программного кода с графическими результатами);
- выводы по проделанной работе.

7.4. Контрольные вопросы и задания

1. Перечислите и поясните основные задачи статистической радиотехники.
2. Почему фильтр, используемый для решения задачи обнаружения сигнала известной формы на фоне шумов, называется согласованным?

3. Какой критерий используется при построении согласованного фильтра?
4. Сформулируйте задачу согласованной фильтрации.
5. Как определяется отношение сигнал / помеха на выходе согласованного фильтра? Чему равно его максимально возможное значение?
6. Приведите выражение, описывающее комплексный коэффициент передачи согласованного фильтра. Из каких соображений выбираются параметры, входящие в данное выражение?
7. Как связана импульсная характеристика с комплексным коэффициентом передачи фильтра? Приведите выражение для импульсной характеристики согласованного фильтра.
8. Поясните физический смысл АЧХ и ФЧХ согласованного фильтра, определенных выражениями (7.10).
9. Приведите выражение для критерия *Пэли-Винера*, на основе которого решается вопрос о физической реализуемости согласованного фильтра? Каким условиям должна удовлетворять АЧХ такого фильтра?
10. Используя критерий *Пэли-Винера*, покажите, что согласованный фильтр может иметь комплексный коэффициент передачи, определенный выражением (7.22).
11. Используя критерий *Пэли-Винера*, покажите, что согласованный фильтр не может иметь АЧХ гауссова типа (см. выражение (3.7)).
12. Покажите, что форма сигнала на выходе согласованного фильтра определяется корреляционной функцией полезного сигнала на входе фильтра.
13. Какими характеристиками (закон распределения, энергетический спектр, корреляционная функция) обладает шум на выходе согласованного фильтра, если шум на входе фильтра белый гауссов?
14. Постройте согласованный фильтр для последовательности биполярных прямоугольных видеоимпульсов. Постройте временные диаграммы, поясняющие работу данного фильтра.
 - 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1;
 - 1, -1, 1, 1, 1, -1, -1;
 - -1, -1, 1, 1, -1, 1, -1;
 - -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1;
 - 1, -1, 1, 1, -1, -1, -1;
 - -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1;

- 1, 1, -1, -1, -1, 1, -1;
- 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1;
- -1, -1, 1, -1, 1, 1, 1;
- -1, -1, -1, 1, -1, -1, 1.

15. Каким образом решается задача согласованной фильтрации, если шум на входе фильтра небелый? Приведите блок-схему такого согласованного фильтра.

7.5. Список использованных источников

1. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1986. – 512 с.
2. Неравенство Коши-Буняковского. [Электронный ресурс] // Википедия. Свободная энциклопедия. 2018. 25 октября. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Неравенство_Коши_—_Буняковского (дата обращения: 30.10.2018).
3. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 2000. – 462 с.



БГАРФ

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Форма титульного листа отчета по лабораторной работе

ФГБОУ ВО «КГТУ»
Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота

Радиотехнический факультет
Кафедра судовых радиотехнических систем

ОТЧЕТ
по лабораторной работе № 1
«Изучение методов генерации псевдослучайных числовых последовательностей с равномерным законом распределения»

Выполнил:
курсант уч. группы Р-21:
Иванов И. И.
Проверил:
доцент кафедры СРТС
Коротей Е. В.

Калининград, 2019



978210002012

**Елена Вячеславовна Волхонская
Евгений Владимирович Коротей**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ
СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ
В СРЕДЕ MATHCAD**

Учебно-методическое пособие
по дисциплине «Основы статистической радиотехники»
для курсантов и студентов
специальности «Техническая эксплуатация
транспортного радиооборудования»
всех форм обучения

*Ведущий редактор М.Б. Априянц
Младший редактор Г.В. Деркач*

Лицензия № 021350 от 28.06.99.

*Компьютерное редактирование
И.В. Леонова*

Печать офсетная.

Формат 70 x 100 1/16.

*Подписано в печать 14.06.2019 г.
Усл. печ. л. 11,6. Уч.-изд. л. 11,4.*

Заказ № 1411. Тираж 40 экз.

Доступ к архиву публикации и условия доступа к нему:
<http://bgarf.ru/academy/biblioteka/elektronnyj-katalog/>

БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»

*Издательство БГАРФ,
член Издательско-полиграфической ассоциации высших учебных заведений
236029, Калининград, ул. Молодежная, 6.*