



Федеральное агентство по рыболовству
БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»
Калининградский морской рыбопромышленный колледж

Утверждаю
Заместитель начальника колледжа
по учебно-методической работе
А. И. Колесниченко

ЕН.01 МАТЕМАТИКА

Методическое пособие для выполнения практических занятий по специальности

**15.02.12 Монтаж и техническая эксплуатация промышленного оборудования
(по отраслям)**

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ

РАЗРАБОТЧИК	Николаенко Л.Н.
ЗАВЕДУЮЩИЙ ОТДЕЛЕНИЕМ	Судьбина Н.А.
ГОД РАЗРАБОТКИ	2023
ГОД ОБНОВЛЕНИЯ	2025

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 2/58

Содержание

Перечень практических занятий	4
Практическое занятие № 1.Решение матричных уравнений	5
Практическое занятие №2 Решение систем линейных уравнений методами Гаусса и Крамера	13
Практическое занятие №3. Действия над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.	16
Практическое занятие №4 Вычисление пределов функций	26
Практическое занятие №5 Нахождение производных	29
Практическое занятие №6 Применение производной к исследованию функции и построению графиков	31
Практическое занятие № 7	36
Практическое занятие №8. Методы вычисления неопределённого интеграла.....	38
Практическое занятие №9.	44
Практическое занятие №10 Решение дифференциальных уравнений 1 порядка с разделяющимися переменными.	49
Практическое занятие №12	55
Используемые источники литературы	58

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 3/58

Введение

Рабочей программой дисциплины предусмотрены практические занятия. Целью их проведения является закрепление теоретических знаний. Наряду с формированием умений и навыков в процессе практических занятий обобщаются и углубляются теоретические положения, вырабатывается способность применять теоретические знания на практике, развиваются интеллектуальные умения.

Выполнение практических заданий направлено на формирование у обучающихся элементов следующих компетенций:

Код	Наименование общих компетенций
ОК 01	Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам
ОК 02	Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности
ОК 03	Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях
ОК 04	Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде
ОК 05	Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста
ОК 09	Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

Перед проведением практических занятий обучающиеся обязаны проработать соответствующий материал, уяснить цель занятия, ознакомиться с содержанием и последовательностью его проведения, а преподаватель проверить их знания и готовность к выполнению задания. Текст заданий, решённых на практическом занятии, схемы, эскизы, таблицы должны быть выполнены в соответствии с требованиями, предъявляемыми к оформлению письменных работ.

После каждого практического занятия проводится защита. На защите обучающийся должен:

- знать теорию по данной теме;
- пояснить, как проводится расчет
- ответить на вопросы для самопроверки.

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 4/58

Перечень практических занятий

№ п/п	Практическое занятие	Количество часов
Раздел I Элементы линейной алгебры		
Тема 1.1 Матрицы, операции над матрицами.		
1	«Решение матричных уравнений»	2
Тема 1.3. Решения систем линейных уравнений		
2	«Решение систем линейных уравнений методами Гаусса и Крамера»	2
Раздел II. Элементы теории комплексных чисел.		
Тема 2.1.. Комплексные числа. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа		
3	«Действия над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.»	2
Раздел III. Математический анализ		
Тема 3.1. Последовательность и функция. Предел последовательности и функции.		
4	«Вычисление пределов функции»	2
Тема 3.2. Дифференциальное исчисление.		
5	«Нахождение производных»	2
6	«Применение производной к исследованию функции и построению графиков	2
7	Нахождение дифференциала и приложение дифференциала к приближенным вычислениям	2
Тема 3.3. Интегральное исчисление.		
8	«Методы вычисления неопределённого интеграла»	2
9	«Вычисление площадей плоских фигур и объемов тел вращения»	2
Тема 3.4. Дифференциальные уравнения.		
10	«Решение дифференциальных уравнений 1 порядка с разделяющимися переменными»	2
11	«Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами»	2
12	Решение дифференциальных уравнений	2
ИТОГО		24

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 5/58

РАЗДЕЛ 1 ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Практическое занятие № 1. Решение матричных уравнений

Матрицы (и соответственно математический раздел - матричная алгебра) имеют важное значение в прикладной математике, так как позволяют записать в достаточно простой форме значительную часть математических моделей объектов и процессов. Термин "матрица" появился в 1850 году. Впервые упоминались матрицы еще в древнем Китае, позднее у арабских математиков.

Цель занятия: научиться решать системы линейных уравнений матричным способом; работа направлена на формирование компетенций ОК 01-05,09.

Используемая литература: [2, гл.11, § 11.9-11.10]

Исходные материалы и данные:

Матрицей $A=A_{mn}$ порядка $m \times n$ называется **прямоугольная таблица чисел, содержащая m - строк и n - столбцов.**

$$A = A_{mn} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = B_{mn} = (b_{ij}), \quad C = C_{mn} = (c_{ij})$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы a_{ij} , у которых $i=j$, называются диагональными и образуют **главную диагональ**. Для квадратной матрицы ($m=n$) главную диагональ образуют элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Равенство матриц. $A=B$, если порядки матриц A и B одинаковы и $a_{ij}=b_{ij}$ ($i=1,2,\dots,m$; $j=1,2,\dots,n$)

Действия над матрицами. 1. Сложение матриц - поэлементная операция

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 6/58

$$A_{mn} + B_{mn} = C_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Вычитание матриц - поэлементная операция

$$A_{mn} - B_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}$$

3. Произведение матрицы на число - поэлементная операция

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

4. Умножение **A*B** матриц по правилу **строка на столбец** (число столбцов матрицы A должно быть равно числу строк матрицы B) **A_{mk}*B_{kn}=C_{mn}** причем каждый элемент **c_{ij}** матрицы **C_{mn}** равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B , т.е.

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{l=1}^n a_{il}b_{lj}$$

Например,

$$C_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \dots + a_{1n}b_{n1}$$

$$C_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + \dots + a_{1n}b_{n2}$$

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 7/58

Покажем операцию умножения матриц на **примере**

$$\text{Пусть } A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{33} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{23} * B_{33} = C_{23} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 * (-1) + 0 * 5 + 2 * (-2) & 1 * 0 + 0 * 1 + 2 * 0 & 1 * 1 + 0 * 4 + 2 * 1 \\ 3 * (-1) + 1 * 5 + 0 * (-2) & 3 * 0 + 1 * 1 + 0 * 0 & 3 * 1 + 1 * 4 + 0 * 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. Возведение в степень

$$A^m = \underbrace{A * A * \dots * A}_{m \text{ раз}}$$

$m > 1$ целое положительное число. A - квадратная матрица ($m=n$) т.е. актуально только для квадратных матриц

6. Транспонирование матрицы A . Транспонированную матрицу обозначают A^T или A'

$$\begin{aligned} \text{Если } A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то} \\ A^T = A' &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Строки и столбцы поменялись местами

Пример

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 8/58

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Виды матриц

1. Прямоугольные: **m** и **n** - произвольные положительные целые числа

2. Квадратные: **m=n**

3. Матрица строка: **m=1**. Например, (1 3 5 7) - во многих практических задачах такая матрица называется вектором

4. Матрица столбец: **n=1**. Например

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

5. Диагональная матрица: **m=n** и **a_{ij}=0**, если **i≠j**. Например

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Единичная матрица: **m=n** и

$$E = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{т.е. } \delta_{ij} = 0 \text{ если } i \neq j$$

$$\delta_{ij} = 1 \text{ если } i = j$$

7. Нулевая матрица: **a_{ij}=0**, **i=1,2,...,m**

$$j=1,2,...,n$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Треугольная матрица: все элементы ниже главной диагонали равны 0.

Пример.

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 9/58

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

9. Симметрическая матрица: $m=n$ и $a_{ij}=a_{ji}$ (т.е. на симметричных относительно главной диагонали местах стоят равные элементы), а следовательно $A'=A$

Например,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Содержание и порядок выполнения задания:

Выполнить действия над матрицами:

I вариант	II вариант	III вариант	IV вариант
1) Найти сумму матриц:			
$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 3 & -7 & -8 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & -7 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 12 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$
$B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 4 & 2 & -9 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} -11 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -1 \\ -9 & 8 & 4 \end{pmatrix}$
2) Найти разность матриц:			
$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} -9 & 10 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$
$B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -12 & -5 \end{pmatrix}$
3) Выполнить умножение матрицы на число:			
$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -7 \\ 8 & -9 & 11 \\ 0 & -5 & 6 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -7 \\ 8 & 4 & -7 \\ -9 & 5 & 3 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -7 \\ 5 & 11 & -3 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -11 & 8 & 4 \\ -13 & 0 & 9 \end{pmatrix}$
Найти $B = -3A$	Найти $B = 4A$	Найти $B = -6A$	Найти $B = 3A$
4) Найти произведение матриц:			
$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -6 & -3 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -5 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$
$B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -6 & -3 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
5) Транспонировать матрицу:			
$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \\ -5 & -7 & -1 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \\ 10 & 12 & -13 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \\ 12 & 11 & 0 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

Алгоритм решения матричного уравнения

1. Уравнение приводится к одному из двух видов:

Документ управляется программными средствами 1С Колледж
Проверь актуальность версии по оригиналу, хранящемуся в 1С Колледж

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 10/58

$AX = B$ либо $XA = B$, где A, B – известные матрицы.

2. Необходимо выразить X или, разрешить уравнение относительно X .

1) $AX = B$. Для того, чтобы разрешить данное уравнение относительно X , умножим обе его части на A^{-1} **слева** (здесь и далее предполагаем, что обратная матрица существует):

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

!!! Внимание! Произведение матриц не перестановочно, поэтому **критически важно**, с какой стороны проводить умножение.

По свойству матричных операций: $A^{-1}A = E$, поэтому:

$$EX = A^{-1}B$$

2) $XA = B$. Умножаем обе части уравнения на A^{-1} **справа**:

$$XAA^{-1} = BA^{-1}$$

Согласно свойству матричных операций $AA^{-1} = E$, получаем:

$$XE = BA^{-1}$$

Единичную матрицу убираем:

$X = BA^{-1}$. Матрица A^{-1} нам опять же не известна.

Таким образом, на втором шаге решение выражается в виде $X = A^{-1}B$ либо в виде $X = BA^{-1}$.

3. Находим обратную матрицу.

4. Выполняем матричное умножение $A^{-1}B$ или BA^{-1} , и получаем ответ.

После выполнения задания желательно провести проверку.

Решение матричного уравнения вида $AX = B$

Пример. Решить матричное уравнение, выполнить проверку

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение: Уравнение уже имеет вид $AX = B$, поэтому никаких предварительных действий проводить не нужно.

Для разрешения уравнения относительно X умножим обе его части на A^{-1} **слева**:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$EX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 11/58

Из условия известны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, однако, обратной матрицы A^{-1} мы не знаем. Придётся её найти:

Обратную матрицу найдем по формуле:

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^T$, где A^T – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - 2 \cdot 7 = 24 - 14 = 10$$

$$M = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \text{ – матрица миноров соответствующих элементов матрицы } A.$$

$$A_{\bullet} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \text{ – матрица алгебраических дополнений.}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ – транспонированная матрица алгебраических дополнений.}$$

Таким образом, обратная матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Проводим матричное умножение и получаем решение:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 8 \cdot 4 - 7 \cdot 6 & 8 \cdot 8 - 7 \cdot 2 \\ -2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 & -2 \cdot 8 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -10 & 50 \\ 10 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } X = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Внимательно изучить пример решения системы трёх линейных уравнений матричным способом. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Найти решение системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 1x + 5y + 4z = 16 \\ 3x + y = 8 \\ 3x + 2y + z = 11 \end{cases}$$

Решение:

Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации
----------	---

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 12/58

	предложенному алгоритму
1. Найти определитель матрицы системы уравнений $\det A$ и убедиться, что матрица A - невырожденная.	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2, -2 \neq 0, \text{ матрица не вырожденная, обратная}$ матрица A^{-1} – существует.
2. Найти матрицу A^{-1} , обратную к матрице A , например, способом алгебраических дополнений.	а) Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы: $A_{11}=1; A_{12}=-3; A_{13}=3$ $A_{21}=3; A_{22}=-11; A_{23}=13$ $A_{31}=-4; A_{32}=12; A_{33}=-14$ б) Составляем матрицу алгебраических дополнений: $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -11 & 13 \\ -4 & 12 & -14 \end{pmatrix}$ в) Транспонируем полученную матрицу: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -3 & -11 & 12 \\ 3 & 13 & -14 \end{pmatrix}$ г) Разделив каждый элемент матрицы на $\det A$, получим: $\begin{pmatrix} -0,5 & -1,5 & 2 \\ 1,5 & 5,5 & -6 \\ -1,5 & -6,5 & 7 \end{pmatrix}$ $A^{-1} =$
3. Найти вектор – решение X по формуле: $X = A^{-1} \cdot B$	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & -1,5 & 2 \\ 1,5 & 5,5 & -6 \\ -1,5 & -6,5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$ Значения x, y, z найдём по правилу умножения матриц: $x = -0,5 \cdot 16 + (-1,5) \cdot 8 + 2 \cdot 11 = -8 - 12 + 22 = 2$ Аналогично находим y и z. $y = 2, z = 1$
4. Записать ответ системы уравнений.	$(2; 2; 1)$

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 13/58

Содержание и порядок выполнения задания:

I вариант.	II вариант.	III вариант.	IV вариант.
1. Найти матрицу, обратную данной, и выполнить проверку:			
$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$ и сделать проверку:			
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$

Содержание отчета:

1. Наименование практического занятия
2. Цель занятия
3. Вариант задания
4. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
5. Список используемых источников
6. Выводы и предложения
7. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы

1. Что называется матрицей?
2. Назовите виды матриц.
3. Как выполнить сложение матриц?
4. Как умножить матрицу на число?
5. Как выполнить умножение матриц?
6. Как найти обратную матрицу?
7. Как найти алгебраические дополнения элементов матрицы?
8. Как решить матричное уравнение?

Практическое занятие №2 Решение систем линейных уравнений методами Гаусса и Крамера

Цель занятия:

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 14/58

научиться решать системы линейных уравнений по формулам Крамера и методом Гаусса; работа направлена на формирование компетенций ОК 01-05,09

Используемая литература: [2, гл.12, § 12.1 - 12.5]

Исходные материалы и данные:

1. Внимательно изучить пример решения системы трёх линейных уравнений **по формулам Крамера**.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 5 \\ 5x - 6y - 4z = -3 \\ -4x + 5y - 3z = 1 \end{cases}$$

Решение:

Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1. Составить определитель системы:	$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & -6 & -4 \\ -4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -6 & -4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$ $= 3(18+20) - 4(-15-16) + 2(25-24) = 114 + 124 + 2 = 240$
2. Вычислить определитель Δ_x	$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -3 & -6 & -4 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 120$
3. Вычислить определитель Δ_y	$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 180$
4. Вычислить определитель Δ_z	$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & -3 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 60$
5. Найти решение системы по формулам: $\frac{\Delta_x}{\Delta} \quad \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad \frac{\Delta_z}{\Delta}$ $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$	$\frac{120}{240} = \frac{1}{2} \quad \frac{180}{240} = \frac{3}{4} \quad \frac{60}{240} = \frac{1}{4}$ $x = \frac{1}{2}; y = \frac{3}{4}; z = \frac{1}{4}$
6. Записать ответ:	(0,5; 0,75; 0,25)

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 15/58

2. Решить систему линейных уравнений **методом Гаусса**:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

Смотрим на левую верхнюю «ступеньку». Там у нас должна быть единица. В первом столбце единиц нет вообще, поэтому перестановкой строк ничего не решить. В таких случаях единицу нужно организовать с помощью элементарного преобразования. **К первой строке прибавляем вторую строку, умноженную на –1.** То есть, мысленно умножили вторую строку на –1 и выполнили сложение первой и второй строки, при этом вторая строка у нас не изменилась.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

Теперь слева сверху –1, что нас вполне устроит. Кто хочет получить +1, может умножить первую строку на –1 (сменить у неё знак).

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{(4)} \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

(2) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на 5. К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на 3.

(3) Первую строку умножили на –1. У третьей строки также сменили знак и переставили её на второе место, таким образом, на второй «ступеньке у нас появилась нужная единица.

(4) К третьей строке прибавили вторую строку, умноженную на 2.

(5) Третью строку разделили на 3.

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 16/58

Получили:

$$x_3 = 1$$

$$x_2 = 3$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + 3 - 1 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$$

Ответ: $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 1$.

Содержание и порядок выполнения задания:

I вариант	II вариант	III вариант	IV вариант
Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера и методом Гаусса. Сделать проверку корней			
$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$	$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 = -2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 17. \end{cases}$	$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -6, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -3 \end{cases}$

Содержание отчета:

1. Наименование практического занятия
2. Цель занятия
3. Вариант задания
4. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
5. Список используемых источников
6. Выводы и предложения
7. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы

1. Как решить систему линейных уравнений по формулам Крамера?
2. В чём состоит принцип решения систем линейных уравнений методом Гаусса?

РАЗДЕЛ 2 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Практическое занятие №3. Действия над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

Цель занятия:

закрепить навыки выполнения действий над комплексными числами в алгебраической форме, работа направлена на формирование компетенций ОК 01-05,09

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 17/58

закрепить навыки выполнения действий над комплексными числами в показательной и тригонометрической формах, работа направлена на формирование компетенций ОК 01-05,09

Используемая литература: [2, гл.14, § 14.1-14.4]

Исходные материалы и данные:

Всякое действительное число геометрически можно изобразить точкой на вещественной оси и, наоборот, каждой точке на оси соответствует вещественное число.

Если теперь рассматривать плоскость, то каждой точке плоскости можно сопоставлять некоторое число, которое будем называть **комплексным**.

Очевидно, что любому вектору на оси ox можно сопоставить вещественное число. В частности, вектору длины единица, направление которого совпадает с

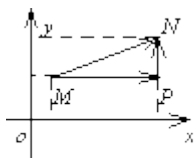


Рис. 1

положительным направлением оси ox , соответствует вещественное число единица.

Вектору длины единица, направление которого совпадает с положительным направлением оси oy , сопоставим символ i , который назовём **мнимой единицей**. Мы знаем, что всякий вектор плоскости может быть представлен как сумма двух векторов, параллельных осям координат, то есть $\overline{MN} = \overline{MP} + \overline{PN}$. В этом равенстве $\overline{MP}$ параллелен оси ox , а $\overline{PN}$ параллелен оси oy .

По нашей договорённости вектору $\overline{MP}$ соответствует вещественное число a , вектору же $\overline{PN}$ соответствует символ $b i$, где b – вещественное число, абсолютное значение которого равно длине вектора $\overline{PN}$, будет положительным, если направление $\overline{PN}$ совпадает с положительным направлением оси oy и отрицательным в противоположном случае.

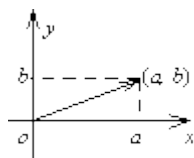


Рис. 2

Таким образом, соответственно, вектору сопоставим комплексное число вида $z = a + b i$. Эта запись является **алгебраической формой** записи комплексного числа. Заметим, что знак $(+)$ в этом выражении не есть знак действия, а просто это выражение нужно рассматривать как единый символ для обозначения комплексного числа

Символы (a, b) можем рассматривать как координаты точки или как проекции вектора в двухмерном пространстве.

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 18/58

Символ a называется **вещественной (действительной) частью** комплексного числа и обозначается: $a = \operatorname{Re} z$ (от слова *represent*).

Символ b называется **мнимой частью** комплексного числа: $b = \operatorname{Im} z$ (от слова *imaginaires*). $i = \sqrt{-1}$ – **мнимая единица**.

Если $b = 0$, то комплексное число принимает вид: $a + 0 \cdot i = a$.

Таким образом, действительное число можно считать частным случаем комплексного числа.

Два вектора считаются равными, если они имеют одинаковое направление и длину (или равные проекции).

Два комплексных числа считаются равными между собой тогда и только тогда, когда равны их вещественные и мнимые части.

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2.$$

Понятия больше или меньше для комплексных чисел не существует.

Сложение и вычитание

По аналогии со сложением и вычитанием векторов мы приходим к следующему **правилу сложения и вычитания комплексных чисел:**

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + \dots + (a_n + b_n i) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) i = a + bi$$

Операция введена, так как получили элемент того же множества.

Вычитание определяется как действие, обратное сложению, то есть разность $x + iy = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i)$ определяется из условия:

$$(x + iy) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + b_1 i).$$

Из правила сложения получаем:

$$x + a_2 = a_1,$$

$$y + b_2 = b_1.$$

То есть $x = a_1 - a_2$, $y = b_1 - b_2$ и разность

$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i.$$

Умножение комплексных чисел

Определение. Произведением двух комплексных чисел называется такое комплексное число, модуль которого равен произведению модулей сомножителей, а аргумент – сумме аргументов сомножителей:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2) i.$$

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 19/58

Отсюда следует **правило умножения комплексных чисел в алгебраической форме**: *комплексные числа можно перемножать как многочлены.*

Если $z = a + b i$ – комплексное число, то число $\bar{z} = a - b i$ называется **сопряжённым** с числом z . Его обозначают при помощи черты над числом.

$$z \cdot \bar{z} = (a + b i)(a - b i) = a^2 + b^2, \quad \text{но} \quad a^2 + b^2 = \rho^2, \quad \text{следовательно,} \\ \rho = \sqrt{z \cdot \bar{z}}.$$

Деление комплексных чисел

Если делимое и делитель даны в алгебраической форме, то **правило деления** таково: *для того, чтобы разделить комплексное число $(a_1 + b_1 i)$ на другое*

комплексное число $(a_2 + b_2 i)$, то есть найти $z = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$, нужно и числитель, и знаменатель умножить на число, сопряжённое знаменателю.

$$z = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i = a + b i.$$

В результате операции получили элемент того же множества. Значит, операция деления считается введённой.

Возведение в степень комплексных чисел

Пример 1. Решить уравнения а) $x^2 + 25 = 0$, б) $x^3 + 27 = 0$.

Решение. а) $x = \pm \sqrt{-25} = \pm 5\sqrt{-1} = \pm 5i$, то есть первое уравнение имеет два мнимых корня: $x_1 = 5i$, $x_2 = -5i$;

б) воспользуемся формулой $x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$, $x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$. Приравнявая нулю каждый из множителей, получаем один корень действительный и два комплексных:

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -3$$

$$x^2 - 3x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 36}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-27}}{2} = \frac{3 \pm 3i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad x_3 = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2};$$

x_2 и x_3 – сопряжённые комплексные числа.

Пример 2. Вычислить:

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 20/58

$$a) \frac{(-9+3i)}{1-2i}$$

Решение. а) Сначала запишем числа в алгебраической форме, выполнив операцию деления. Домножим на сопряжённое число, и, учитывая, что $i^2 = -1$, получим:

$$z = \frac{(-9+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-9+6i^2+3i-18i}{1-(2i)^2} = \frac{-15-15i}{5} = -3-3i;$$

$x = \operatorname{Re} z = -3$, $y = \operatorname{Im} z = -3$, что соответствует точке на плоскости $(-3, -3)$.

Содержание и порядок выполнения задания:

Выполнить действия с комплексными числами в алгебраической форме:

I вариант.	II вариант.
1. $(6+2i) + (5+3i) =$	$(5-4i) + (6+2i) =$
2. $(7-3i) + (4-5i) =$	$(10+5i) + (-7-3i) =$
3. $(4+2i) - (-3+2i) =$	$(-3-5i) - (7-2i) =$
4. $(8-3i) - (4+i) =$	$(7-5i) - (-2+i) =$
5. $(6+4i)*(5+2i) =$	$(-2+3i)*(3+5i) =$
6. $(3+2i)*(1+i) =$	$(2-3i)*(-5i) =$
7. $(7-6i)*(7+6i) =$	$(1-3i)*(1+3i) =$
8. $\frac{5i}{3+2i} =$	$\frac{-2i}{5-i} =$
9. $\frac{2-3i}{5+2i}$	$\frac{3-7i}{3+2i} =$
10. $\frac{6+2i}{3-7i} - \frac{2+3i}{2+5i}$	$\frac{3+2i}{3-2i} + \frac{5+2i}{3+2i} =$

Комплексные числа

Определение. Модулем комплексного числа $z = x+iy$ называется величина

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \text{ Модуль комплексного числа можно обозначать буквой } r = |z|.$$

Определение. Аргументом комплексного числа $z = x+iy$ называется число:

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

. Главное значение аргумента обозначается: $\arg z =$

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad 0 \leq \arg z < 2\pi \quad \text{или} \quad \alpha - \pi < \arg z \leq \pi.$$

Пример. $-3+3i$

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{3}{-3} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi.$$

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 21/58

$$\operatorname{Arg} Z = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

П.1. Тригонометрическая форма записи комплексного числа.

Комплексное число $z = x + iy$ однозначно определяется парой действительных чисел (x, y) поэтому можно установить взаимно однозначное соответствие между всевозможными точками плоскости и всевозможными комплексными числами.

Тогда, комплексное число можно изобразить с помощью точки плоскости, координаты которой x - абсцисса, y - ордината. Это геометрическая, интерпретация комплексного числа.

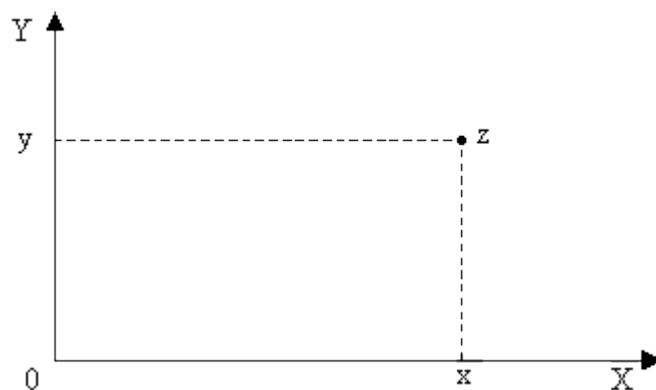


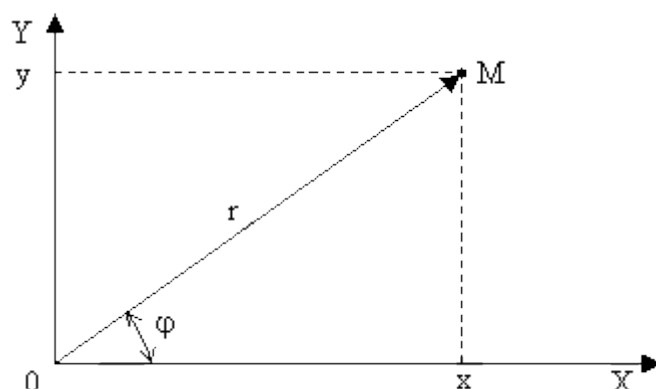
Рис. 1.

Тогда ось Ox – где откладываются действительные части числа z называется действительной осью.

Oy – где откладывают мнимые части числа z называется мнимой осью.

Такую плоскость будем называть «комплексной плоскостью».

Действительной и мнимой частям комплексного числа $z = x + iy$ можно также поставить в соответствие координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM} = (x; y)$.



МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 22/58

Рис. 2.

Т.е. комплексное число можно изобразить с помощью вектора $\overline{OM}$.

Тогда, длина вектора r - есть модуль комплексного числа $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$; а угол φ есть аргумент комплексного числа:

$$\varphi = \arg z = \arctg \frac{y}{x}; \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Из определения модуля и аргумента следует, что если $z = x + iy$, то $x = r \cos \varphi = |z| \cos \arg z$, $y = r \sin \varphi = |z| \sin \arg \varphi$.

Тогда, любое комплексное число, отличное от нуля, можно представить в тригонометрической форме:

$$z = x + iy = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Пример.1) Представить комплексное число $1 + i$ в тригонометрической форме:

$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}; \varphi = \arctg \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

2) Представить число i в тригонометрической форме:

$$|z| = \sqrt{1} = 1, \cos \varphi = 0, \sin \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$i = 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

П.2. Показательная форма комплексного числа

$\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ связаны формулой Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

Тогда от тригонометрической формы комплексного числа можно перейти к показательной форме:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Тогда $\bar{z} = re^{-i\varphi} = r(\cos \varphi - i \sin \varphi)$. Складывая и вычитая, легко получить

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 23/58

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Примеры. Записать комплексное число в показательной форме.

$$1) \quad z = 1 - i \Rightarrow r = \sqrt{2}; \varphi = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow z = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

$$2) \quad z = -1 \Rightarrow r = 1, \varphi = \pi \Rightarrow z = e^{i\pi}$$

П.4. Алгебраические операции над комплексными числами.

Сложение и умножение комплексных чисел производится по правилам сложения и умножения алгебраических многочленов; учитывая при этом, что $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = i$ и т.д.

1) Рассмотрим операции над комплексными числами в тригонометрической форме:

$$\text{Пусть } z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Формула Муавра: $z = x + iy$.

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), k = 0; 1; \dots; n-1$$

$w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ имеет n позиций в области комплексных чисел.

Из формулы для $\sqrt[n]{z}$ видно, что все n различных значений величины $\sqrt[n]{z}$ имеют

один и тот же модуль равный $\sqrt[n]{|z|}$. А так как $\frac{\varphi + 2(k+1)\pi}{n} - \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$, то точки соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $\left(\sqrt[n]{|z|}\right)$ с центром в начале координат.

3) Алгебраические операции в показательной форме:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 24/58

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)}, k = 0; 1; \dots; n-1.$$

Примеры:

а) Представить число $z = -5+5i$ в тригонометрической форме.

б) Вычислить $z^6, \sqrt{z}, \sqrt[3]{z}$.

в) Записать в тригонометрической форме число: $\frac{2(\cos \frac{7\pi}{3} - i \sin \frac{7\pi}{3})}{\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}}.$

Решение.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Найти модуль и аргумент числа $z = -5+5i$ и представить его в тригонометрической форме.	$r = z = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$ $\cos \varphi = \frac{a}{r} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \varphi$ - угол 2-ой четверти, $\varphi = \frac{3\pi}{4}, z = 5\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$
2. Вычислить z^6 .	$z^6 = (5\sqrt{2})^6 (\cos \frac{6 \cdot 3\pi}{4} + i \sin \frac{6 \cdot 3\pi}{4}) = 5^6 \cdot 2^3 (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = 5^6 \cdot 2^3 i$
3. Найти $\sqrt{z}$.	$\sqrt{z} = \sqrt{5\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})} = \sqrt{5\sqrt{2}} (\cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{2} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{2}),$ где $k = 0, 1$. $k = 0: z = \sqrt{5\sqrt{2}} (\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8})$ $k = 1: z = \sqrt{5\sqrt{2}} (\cos \frac{11\pi}{8} + i \sin \frac{11\pi}{8})$
4. Найти $\sqrt[3]{z}$.	$\sqrt[3]{5\sqrt{2}} (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$ $k = 0: z =$ $\sqrt[3]{5\sqrt{2}} (\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12})$ $k = 1:$ $\sqrt[3]{5\sqrt{2}} (\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12})$ $k = 2:$

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 25/58

5. Записать в тригонометрической форме $\frac{2(\cos \frac{7\pi}{3} - i \sin \frac{7\pi}{3})}{\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}}$ число	1. Запись комплексного числа в числителе не является тригонометрической формой, легко к ней приводится: $2(\cos \frac{7\pi}{3} - i \sin \frac{7\pi}{3}) = 2(\cos(-\frac{7\pi}{3}) + i \sin(-\frac{7\pi}{3}))$ 2. Выполним деление: $\frac{2(\cos(-\frac{7\pi}{3}) + i \sin(-\frac{7\pi}{3}))}{\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}} =$ $= 2(\cos(-\frac{7\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}) + i \sin(-\frac{7\pi}{3} - \frac{5\pi}{6})) =$ $= 2(\cos(-\frac{7\pi}{2}) + i \sin(-\frac{7\pi}{2})) = 2(\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2}) =$ $= -2i$
---	--

Содержание и порядок выполнения задания:

I вариант.	II вариант.
1. Даны два комплексных числа в тригонометрической форме. Записать эти числа в показательной форме. Найти $z_1 * z_2$; z_1/z_2; z_1^3;	
$Z_1 = 2(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6})$ $Z_2 = 0,4(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$	$Z_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$ $Z_2 = 3(\cos \pi + i \sin \pi)$
2. Записать число z в тригонометрической и показательной формах и найти z^6 .	
$Z = -\sqrt{3} + i$	$Z = 3 - 3i$

Содержание отчета:

1. Наименование практического занятия
2. Цель занятия
3. Вариант задания
4. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
5. Список используемых источников
6. Выводы и предложения
7. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы

1. Дать определение комплексного числа в алгебраической форме.
2. Как выполняются действия над комплексными числами в алгебраической форме?
3. Что называется модулем и аргументом комплексного числа?
4. Как записывается комплексное число в тригонометрической форме?

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 26/58

5. Как записывается комплексное число в показательной форме?
6. Как выполнить умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня с комплексными числами в тригонометрической и показательной формах?

РАЗДЕЛ 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Практическое занятие №4 Вычисление пределов функций

Цель занятия:

закрепить навыки вычисления пределов функции в точке и на бесконечности, работа направлена на формирование компетенций ОК 01-05,09

Используемая литература: [1, гл. 2, §2.1.3 – 2.1.4]

Исходные материалы и данные:

1. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, если для всех x , сколь угодно мало отличающихся от a ($|x - a| < \delta$), значение функции y сколь угодно мало отличается от числа A ($|y - A| < \varepsilon$). Пишут: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

2. Число B называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если для всех достаточно больших по модулю значений аргумента x соответствующие значения функции $y = f(x)$ сколь угодно мало отличаются от числа B . Пишут: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = B$

Теоремы о пределах (правила предельного перехода):

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки a , возможно, за исключением самой точки a , и существуют пределы $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, то

$$1. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) * g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) * \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \text{ при } g(x) \neq 0 \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0.$$

Следствия:

1. Предел постоянной равен этой постоянной.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 27/58

Примеры:

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 7x + 4) = 3^2 - 7 \cdot 3 + 4 = -8,$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 8} = \frac{2^2 + 2 + 2}{2^2 + 2 \cdot 2 + 8} = \frac{8}{16} \quad (\text{сначала проверим, не обращается ли знаменатель в 0 при } x = 2: 2^2 + 2 \cdot 2 + 8 = 16 \neq 0),$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2}{x \cdot (x-3)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-3}{x} = \frac{3-3}{3} = 0 \quad (\text{здесь имеет место неопределенность } \frac{0}{0}).$$

Раскроем её, разложив числитель и знаменатель на множители и сократив),

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 5x + 7}{3x^3 + 4x^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{7}{x^3}}{3 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = \frac{2}{3} \quad (\text{здесь имеет место неопределенность вида } \frac{\infty}{\infty}).$$

Раскроем её, разделив числитель и знаменатель на x^3).

Замечательные пределы:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e \quad (e = 2, 71828...).$$

Содержание и порядок выполнения задания:

Вычислить пределы функций:

Вариант № 1	Вариант № 2
1. $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 3x + 4)$.	1. $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - x^2 + 1)$.
2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+3)(x-2)}{x+2}$.	2. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.
3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{2x-6}$.	3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{3x^2+2x}$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$.	4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3+x}{x}$.

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 28/58

5. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 25}$. 6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^6}{x^3 + x^4}$. 7. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x - 6}{\sqrt{x + 3} - 3}$. 8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2 + 3x}$. 9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$. 10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$.	5. $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{4x^2 - 9}{2x + 3}$. 6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^3 + x}{x^3 + 2x^2 + x}$. 7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{x}$. 8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)$. 9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 4x}$. 10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 2}{x}\right)^{2x}$.
Вариант № 3 1. $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 3x^2 + x)$. 2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 3)(x + 1)}{x - 4}$. 3. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{7}{3x - 12}$. 4. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$. 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x}{x}$. 6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 8}$. 7. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$. 8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{3x^3 - 4x^2}$. 9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 5x}$.	Вариант № 4 1. $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 4x + 2)$. 2. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x - 5)(x + 1)}{2 - x}$. 3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5}{2x + 2}$. 4. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + x^2}{x^2 + 5x + 6}$. 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + x^2}{2x^3 - 3x^2}$. 6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2x + x^3}{10x^3 + x^2 - 80}$. 7. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 6} - 3}{x^2 - 3x}$. 8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(20 - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right)$. 9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sin 8x}$.

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 29/58

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$.	10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{3x}$.
--	---

Контрольные вопросы

1. Дать определение предела функции в точке и на бесконечности.
2. Сформулировать и записать первый и второй замечательные пределы.

Практическое занятие №5 Нахождение производных

Цель занятия: закрепить навыки использования правил и формул дифференцирования функций, работа направлена на формирование компетенций ОК 01-05,09

Используемая литература: [1, гл.2, § 2.1.7]

Исходные материалы и данные:

Правила дифференцирования:

1. $C' = 0$,
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$,
3. $(u * v)' = u' * v + u * v'$
4. $(C * u)' = C * u'$,
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u * v'}{v^2}$.

Основные формулы дифференцирования:

1. $(x^n)' = n x^{n-1}$,
2. $(\sin x)' = \cos x$,
3. $(\cos x)' = -\sin x$,
4. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,
5. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,
6. $(a^x)' = a^x * \ln a$,
7. $(e^x)' = e^x$,

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 30/58

$$8. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$$

$$9. (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$10. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$11. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2},$$

$$12. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$13. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Нахождение производной сложной функции:

$$y = g(u),$$

где $u = f(x)$: $y_x' = g'(u) * f'(x)$ или $y_x' = y_u' * u_x'$.

Содержание и порядок выполнения задания:

Найти производные функций:

Вариант № 1 1. $y = 5x^4 + 7x - 2$ 2. $y = \frac{4}{x^3} - e^x$ 3. $y = x * \cos x$ 4. $y = \frac{x^2 + 5}{x - 1}$ 5. $y = \frac{x^3}{\sqrt{x}}$ 6. $y = e^{2x^2+4x}$ 7. $y = \log_4(3x^3 - 7)$ 8. $y = \sin^4 3x$.	Вариант № 2 1. $y = 7\cos x - 2x^7 + 3$ 2. $y = 2\sqrt{x} - \log_5 x$ 3. $y = x^3 * \sin x$ 4. $y = \frac{x-3}{x^2+2}$ 5. $y = \sqrt[3]{x^2}$ 6. $y = 3^{7x+6}$ 7. $y = \cos^3(4x - 1)$ 8. $y = \arccos x^2$
Вариант № 3 1. $y = e^x - 3x^6 + 7$ 2. $y = \frac{5}{x} - \operatorname{tg} x$ 3. $y = \operatorname{ctg} x * e^x$	Вариант № 4 1. $y = 3^x + 6x^2 - 8$ 2. $y = \frac{7}{x^4} + \operatorname{ctg} x$ 3. $y = 3^x * \operatorname{tg} x$

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 31/58

$4. y = \frac{3x+1}{2x^2-1}$ $5. y = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$ $6. y = \operatorname{arcctg} 5x$ $7. y = \sin^4(2x)$ $8. y = \ln(2x^4 - 5x)$	$4. y = \frac{2x^2+1}{3x-2}$ $5. y = \frac{x^3}{\sqrt[3]{x}}$ $6. y = \operatorname{ctg}(6x^2 - 1)$ $7. y = \cos^2(x^2 + x - 1)$ $8. y = \arcsin x^3$
--	---

Содержание отчета:

1. Наименование практического занятия
2. Цель занятия
3. Вариант задания
4. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
5. Список используемых источников
6. Выводы и предложения
7. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы

1. Дать определение производной функции.
2. Сформулировать, в чем заключается её физический и геометрический смысл?
3. Сформулировать правила дифференцирования произведения, суммы, частного двух функций, а также – сложной функции.

Практическое занятие №6 Применение производной к исследованию функции и построению графиков

Производная используется для исследования функций, т.е. для её изучения различных свойств. Результаты такого исследования удобно представлять в виде графика.

Цель занятия: закрепить навыки выполнения исследования функций с помощью производной и построения графиков по результатам исследования, работа направлена на формирование компетенций ОК 01-05,09

Используемая литература: [1, гл. 2, § 2.1.10]

Исходные материалы и данные:

Документ управляется программными средствами 1С Колледж
Проверь актуальность версии по оригиналу, хранящемуся в 1С Колледж

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 32/58

1. Исследование функции на монотонность.

Если функция $y = f(x)$, $x \in (a; b)$, имеет положительную производную в каждой точке интервала $(a; b)$, то эта функция возрастает на интервале $(a; b)$.

Если функция $y = f(x)$, $x \in (a; b)$, имеет отрицательную производную в каждой точке интервала $(a; b)$, то эта функция убывает на интервале $(a; b)$.

2. Исследование функции на экстремум.

Необходимое условие существования экстремума:

Теорема Ферма: если точка x_0 является точкой экстремума функции $y = f(x)$ и в этой точке существует производная, то $f'(x_0) = 0$.

Достаточные условия существования экстремума: если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «+» на «-», то x_0 – точка максимума; если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с «-» на «+», то x_0 – точка минимума. Если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 не меняет знак, то в точке x_0 функция $f(x)$ не имеет экстремума.

3. Нахождение интервалов выпуклости и точек перегиба.

Если на интервале $(a; b)$ дважды дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет отрицательную (положительную) вторую производную, то график функции обращен выпуклостью вверх (вниз).

Необходимое условие существования точки перегиба: если функция $y = f(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно на интервале $(a; b)$ и точка $(x_0; f(x_0))$, где $x_0 \in (a; b)$ является точкой перегиба графика функции $f(x)$, то $f''(x_0) = 0$.

Достаточное условие существования точки перегиба: если функция $y = f(x)$, $x \in (a; b)$, дважды дифференцируема на интервале $(a; b)$ и при переходе через $x_0 \in (a; b)$ вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = x_0$ является точкой перегиба.

4. Асимптоты графика функции:

Прямая линия называется асимптотой графика функции $f(x)$, если расстояние от точки M , лежащей на графике, до этой прямой стремится к нулю при движении точки по графику в бесконечность.

Существуют три вида асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 33/58

Прямая $y = A$ называется горизонтальной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$).

Прямая $y = kx + b$ ($k \neq 0$) называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$, где $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$; $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$.

5. Общая схема исследования функций и построения графиков:

- 1) найти область определения функции;
- 2) исследовать функцию на четность и нечетность;
- 3) исследовать функцию на периодичность;
- 4) исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва;
- 5) найти асимптоты графика функции;
- 6) найти критические точки первого рода;
- 7) найти интервалы монотонности и экстремумы функции;
- 8) найти критические точки второго рода;
- 9) найти интервалы выпуклости и точки перегиба;
- 10) найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это возможно);
- 11) построить график функции.

.Содержание и порядок выполнения работы:

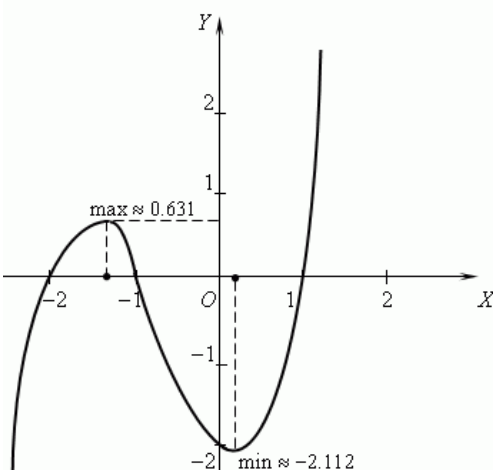
1. Повторить алгоритм исследования функции с помощью производной и построения её графика.
2. Внимательно изучить пример исследования функции. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Исследовать функцию и построить её график: $f(x) = x^3 + 2x^2 \leq x \leq 2$.

Решение.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1. Найти область определения и область значений функции.	Область определения $x \in R$ (x – любое действительное число); область значений $y \in R$, так как $f(x)$ – многочлен нечётной степени;
2. Проверить функцию на чётность.	функция $f(x)$ не является ни чётной, ни нечётной

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 34/58

3. проверить функцию на периодичность.	$f(x)$ – непериодическая функция																								
4. Найти производную функции и критические точки функции.	$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$; Найти корни уравнения $3x^2 + 4x - 1 = 0$. $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$ Эти корни: $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$. Функция имеет две критические точки и три интервала монотонности: $(-\infty, \frac{-2 - \sqrt{7}}{3})$, $(\frac{-2 - \sqrt{7}}{3}, \frac{-2 + \sqrt{7}}{3})$ и $(\frac{-2 + \sqrt{7}}{3}, +\infty)$.																								
5. Свести полученные данные в таблицу.	<table><tr><td>x</td><td>$(-\infty, \frac{-2 - \sqrt{7}}{3})$</td><td>$\frac{-2 - \sqrt{7}}{3}$</td><td>$(\frac{-2 - \sqrt{7}}{3}, \frac{-2 + \sqrt{7}}{3})$</td><td>$\frac{-2 + \sqrt{7}}{3}$</td><td>$(\frac{-2 + \sqrt{7}}{3}, +\infty)$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>~ 0.631</td><td></td><td>~ -2.112</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>max</td><td></td><td>min</td><td></td></tr></table>	x	$(-\infty, \frac{-2 - \sqrt{7}}{3})$	$\frac{-2 - \sqrt{7}}{3}$	$(\frac{-2 - \sqrt{7}}{3}, \frac{-2 + \sqrt{7}}{3})$	$\frac{-2 + \sqrt{7}}{3}$	$(\frac{-2 + \sqrt{7}}{3}, +\infty)$	$f'(x)$	+	0	-	0	+	$f(x)$		~ 0.631		~ -2.112				max		min	
x	$(-\infty, \frac{-2 - \sqrt{7}}{3})$	$\frac{-2 - \sqrt{7}}{3}$	$(\frac{-2 - \sqrt{7}}{3}, \frac{-2 + \sqrt{7}}{3})$	$\frac{-2 + \sqrt{7}}{3}$	$(\frac{-2 + \sqrt{7}}{3}, +\infty)$																				
$f'(x)$	+	0	-	0	+																				
$f(x)$		~ 0.631		~ -2.112																					
		max		min																					
6. Определить координаты точки пересечения графика с осью ОУ.	График функции пересекается с осью Y в точке $(0, -2)$, так как $f(0) = -2$																								
7. Найти нули функции.	Чтобы найти нули функции нужно решить уравнение: $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$, нулями функции являются: -2 , -1 и 1 .																								
8. По полученным данным построить график функции.																									

Задания для самостоятельной работы:
Исследовать функцию и построить её график:

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 35/58

Вариант 1	1. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ 2. $y = -2x - 1/(2x)$ 3. $y = 1/(x^2 - 4)$	Вариант 3	1. $y = -x^3 - 3x^2 + 3$ 2. $y = x + 2/x$ 3. $y = 1/(x^2 - 4)$
Вариант 2	1. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$ 2. $y = 3x + 1/(3x)$ 3. $y = 1/(x^2 - 4)$	Вариант 4	1. $y = x^4 - 8x^2 + 8$ 2. $y = x + 4/x$ 3. $y = 1/(x^2 - 4)$

Вариант № 5 1. Найти критические точки функции: $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$. 2. Исследовать функцию на монотонность и экстремумы: $y = x^3 + 2x^2 - 7x - 2$. 3. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции: $y = -x^3 + 5x^2$. 4. Выполнить исследование и построить график функции: $y = \frac{x^3}{3} - x^2$. 5. Найти производную сложной функции: $y = (3x^6 - 7x + 2)^5$.	Вариант № 6 1. Найти критические точки функции: $y = x^3 - x^2 - x + 2$. 2. Исследовать функцию на монотонность и экстремумы: $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$. 3. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции: $y = x^4 - 2x^3$. 4. Выполнить исследование и построить график функции: $y = -x^3 - x^2 + 5x$. 5. Найти производную сложной функции: $y = \sin(9x^2 - 3)$.
Вариант № 7 1. Найти критические точки функции: $y = 2x^3 - 10x^2 + 6x$. 2. Исследовать функцию на монотонность и экстремумы: $y = x^3 - x^2 - x + 3$. 3. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции: $y = 2x^3 - 4x^2$. 4. Выполнить исследование и построить график функции: $y = 6x^4 - 4x^6$. 5. Найти производную сложной функции: $y = \ln(4 - 5x)$.	Вариант № 8 1. Найти критические точки функции: $y = x^3 + x^2 - 5x - 3$. 2. Исследовать функцию на монотонность и экстремумы: $y = x^3 + 6x^2 + 9x$. 3. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции: $y = x^4 + 3x^3$. 4. Выполнить исследование и построить график функции: $y = -\frac{x^3}{3} + 4x$. 5. Найти производную сложной функции: $y = e^{x^3 + 3x}$.

Содержание отчета:

1. Наименование практического занятия

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 36/58

2. Цель занятия
3. Вариант задания
4. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
5. Список используемых источников
6. Выводы и предложения
7. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы

1. Дать определение точек экстремума функции.
2. Как исследовать функцию на монотонность и экстремумы с помощью первой производной?
3. Как находятся интервалы выпуклости кривой и точки перегиба?
4. Что такое асимптоты графика функции? Как их найти?
5. Каким образом можно проверить функцию на чётность?
6. Каким образом можно проверить функцию на периодичность?
7. Как можно найти нули функции?
8. По какому алгоритму проводится исследование функции?

Практическое занятие № 7

Тема: Нахождение дифференциала и приложение дифференциала к приближенным вычислениям.

Дифференциал функции применяется при вычислении приближённого значения величин, что часто используется при решении задач прикладного характера.

Цель занятия: Научиться вычислять дифференциалы функций, применять дифференциал к приближённым вычислениям.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Повторить определение дифференциала функции, понятие дифференциала аргумента, геометрический смысл дифференциала, формулу для вычисления приближённого числового значения функции.
2. Внимательно изучить примеры вычисления дифференциалов функций. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Вычислить дифференциалы функций и вычислить приближённое значение функций:

Решение.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
Найти дифференциал функции $y = 2x + \sin x$, при $x_0 = \frac{\pi}{3}$, $dx=0,02$	
1. Найти производную функции.	$y' = 2 + \cos x$

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 37/58

2. Используя формулу дифференциала, найти дифференциал функции.	$dy = y' dx = (2 + \cos x) dx$
3. Подставить значения x_0 и dx в полученную формулу.	$(2 + \cos x) dx = (2 + 0,5) \cdot 0,02 = 0,05$
Определить приближённое значение $\sqrt{2}$.	
1. Рассмотреть функцию $y = \sqrt{x}$ и применить формулу $f(x + \Delta x) = f(x) + y' \cdot \Delta x$.	Пусть $x = 2,25$; $\Delta x = -0,25$, тогда $y(x) = \sqrt{2,25} = 1,5$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{2,25}} = \frac{1}{3}$; $f(x) + y' \cdot \Delta x = 1,5 + \frac{1}{3} \cdot (-0,25) \approx 1,5 - 0,083 \approx 1,417$ Таким образом, $f(x + \Delta x) = \sqrt{2,25 - 0,25} = \sqrt{2} \approx 1,417$

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1.	1. Найти дифференциал функции: а) $y = (3x + 2)^{50}$ б) $y = \sqrt{5 - 2x}$ в) $y = \cos^2 x$ при: $x = \pi/4$ $dx = 0,03$ 2. Вычислить приближённое значение функции: а) $f(x) = 2x^3 - 3x - 1$ при $x = 2,01$ б) $(1,013)^4$ в) $\sqrt[3]{1,06}$ г) $\frac{1}{0,997}$
Вариант 2	1. Найти дифференциал функции: а) $y = (5 - 7x)^{10}$ б) $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ в) $y = \ln \cos^2 2x$ при: $x = \pi/8$ $dx = 0,01$ 2. Вычислить приближённое значение функции: а) $f(x) = (1/3)x^3 + (1/2)x - 2x + 4$ при $x = 1,1$ б) $(1,005)^{10}$ в) $\sqrt[10]{1,03}$ г) $\frac{1}{9,97}$
Вариант 3.	1. Найти дифференциал функции: а) $y = (x^2 + 3)^4$ б) $y = \sqrt{x^2 + 6x + 12}$ в) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ 2. Вычислить приближённое значение функции: а) $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ при $x = 2,001$

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 38/58

	б) $(3,025)^4$ в) $\sqrt{99,5}$ г) $\frac{1}{1,03}$
Вариант 4.	1. Найти дифференциал функции: а) $y = (7 - 8x^2)^{11}$ б) $y = \frac{2x}{x^2 + x}$ в) $y = \sin^2 x$ при: $x = \pi/4$ $dx = 0,03$ 2. Вычислить приближённое значение функции: а) $f(x) = x^3 - 3x - 1$ при $x = 1,001$ б) $(1,012)^5$ в) $\sqrt{24,96}$ г) $\frac{1}{1,99}$

Содержание отчета:

1. Наименование практического занятия
2. Цель занятия
3. Вариант задания
4. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
5. Список используемых источников
6. Выводы и предложения
7. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы

1. Чему равен дифференциал аргумента?
2. В чём состоит геометрический смысл дифференциала?
3. Что называется дифференциалом функции?
4. Что называется дифференциалом второго порядка?

Практическое занятие №8. Методы вычисления неопределённого интеграла

Метод интегрирования, при котором интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется **непосредственным интегрированием**.

Во многих случаях упростить интеграл можно, используя замену переменной на некую функцию от другой переменной. Этот метод применяется очень широко, но выбрать, какую именно замену сделать, не всегда легко. Интегрирование по частям - приём, который применяется почти так же часто, как и замена переменной. Эта формула

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 39/58

используется в случае, когда подынтегральная функция представляет произведение алгебраической и трансцендентной функции.

Цель занятия: закрепить формулы интегрирования и основные приемы непосредственного интегрирования и способа подстановки, работа направлена на формирование компетенций ОК 01-05,09

Используемая литература: [1, гл.2, § 2.1.11]

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Повторить таблицу неопределённых интегралов, алгоритмы интегрирования способом подстановки и по частям.
2. Внимательно изучить примеры интегрирования простейших функций. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Исходные материалы и данные: Если функция $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то множество функций $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, называется неопределённым интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Основные свойства неопределённого интеграла:

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$;
2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$;
3. $\int dF(x) = F(x) + C$;
4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$;
5. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Таблица основных интегралов:

1. $\int 0 \cdot dx = C$;
2. $\int 1 \cdot dx = x + C$;
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ ($x \neq 0$);
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ($0 < a \neq 1$);

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 40/58

$$6. \int e^x dx = e^x + C;$$

$$7. \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$8. \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$12. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C;$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, a \neq 0;$$

$$15. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, |x| < a, a \neq 0.$$

1. Непосредственное интегрирование. Под непосредственным интегрированием понимают такой способ интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Алгоритм:

- 1) преобразовать подынтегральное выражение так, чтобы получилась сумма выражений, похожих на подынтегральные выражения табличных интегралов;
- 2) из одного исходного интеграла получить сумму нескольких интегралов (используя 3-е и 4-е свойства неопределенного интеграла);
- 3) по таблице интегралов найти каждый из отдельных интегралов;
- 4) как только исчез последний знак интеграла, появляется постоянная интегрирования C ;
- 5) при необходимости преобразовать полученный результат: привести подобные, сократить дроби, избавиться от иррациональности в знаменателе и т.п.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
----------	--

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 41/58

1. $\int (5x^2 - 6x + \frac{8}{x^4\sqrt{x}})dx$	$\int (5x^2 - 6x + \frac{8}{x^4\sqrt{x}})dx = 5\int x^2 dx - 6\int x dx + 8\int x^{-\frac{5}{4}} dx = \frac{5}{3}x^3 - \frac{6}{2}x^2 + \frac{8}{-0,25}x^{-0,25} + C =$ $= \frac{5}{3}x^3 - 3x^2 - \frac{32}{\sqrt[4]{x}} + C$
2. $\int (2-3^x)dx$	$\int (2-3^x)dx = \int (4-4\cdot 3^x + 3^{2x})dx = 4\int dx - 4\int 3^x dx + \int 9^x dx = 4x - 4\cdot \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{9^x}{\ln 9} + C$

Примеры:

1.

$$\int \frac{3x^4 + 2x^2 - 3x + 7}{x^2} dx = 3\int \frac{x^4}{x^2} dx + 2\int \frac{x^2}{x^2} dx - 3\int \frac{x}{x^2} dx + 7\int \frac{dx}{x^2} = 3\int x^2 dx + 2\int dx - 3\int \frac{dx}{x} + 7\int \frac{dx}{x^2} =$$

$$= 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 2x - 3\ln|x| - \frac{7}{x} + C = x^3 + 2x - 3\ln|x| - \frac{7}{x} + C ;$$

2.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} + \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C ;$$

3.

$$\int \frac{dx}{4+3x^2} = \int \frac{dx}{3(x^2 + \frac{4}{3})} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{2} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{2} + C$$

3. **Способ подстановки** (или замены переменной) заключается в следующем: заменяют новой переменной такую часть подынтегральной функции, при дифференцировании которой получается оставшаяся часть подынтегрального выражения (не считая постоянного множителя, на который всегда можно умножить и разделить подынтегральное выражение).

Алгоритм интегрирования функций способом подстановки:

- 1) ввести вспомогательную переменную, связанную с исходной переменной некой функциональной зависимостью;
- 2) выразить исходную переменную через вспомогательную;
- 3) выразить дифференциал исходной переменной через дифференциал вспомогательной;
- 4) подставить вспомогательную переменную и ее дифференциал в интеграл;
- 5) свести полученный интеграл к табличному и взять его;
- 6) вернуться к исходной переменной.

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 42/58

Примеры: 1. $\int \sin x * \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$;

2. $\int e^{\sin^2 x} * \sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} \sin^2 x = t \\ 2 \sin x * \cos x = dt \end{array} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin^2 x} + C$.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1. $\int x\sqrt{x-3} dx$	Чтобы избавиться от квадратного корня, положим $\sqrt{x-3}=u$, тогда $x = u^2 + 3$ и, следовательно, $dx = 2u du$. Делая подстановку, имеем: $\int x\sqrt{x-3} dx = \int (u^2 + 3)u 2u du = \int (2u^4 + 6u^2) du = \frac{2u^5}{5} + 2u^3 + C = \frac{2(x-3)^{\frac{5}{2}}}{5} + 2(x-3)^{\frac{3}{2}} + C$
2. $\int x e^{x^2} dx$	$x^2 = t, 2x dx = dt, x dx = \frac{dt}{2}$, $\int x e^{x^2} dx = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$
3. $\int x\sqrt{x-2} dx$.	пусть $\sqrt{x-2} = r, x = r^2 + 2, dx = 2r dr$ $\int x\sqrt{x-2} dx = \int (r^2 + 2)r \cdot 2r dr = \int (2r^4 + 4r) dr = 2 \int r^4 dr + 4 \int r^2 dr = \frac{2r^5}{5} + \frac{4r^3}{3} + C =$ $= \frac{2\sqrt{(x-2)^5}}{5} + \frac{4\sqrt{(x-2)^3}}{3} + C$
4. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+4\sin x}} dx$.	$\sqrt{1+4\sin x} = t, 1+4\sin x = t^2, 4\cos x dx = 2tdt, \cos x dx = \frac{1}{2}tdt$ $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+4\sin x}} dx = \int \frac{\frac{1}{2}tdt}{t} = \frac{1}{2} \int dt = \frac{1}{2}t + C = \frac{1}{2}\sqrt{1+4\sin x} + C$

Интегрирование по частям.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Эта формула называется формулой интегрирования по частям. В качестве u обычно выбирается функция, которая упрощается дифференцированием, в качестве dv - оставшаяся часть подынтегрального выражения, содержащая dx , из которой можно определить v путем интегрирования.

Алгоритм интегрирования функций по частям:

- 1) выбрать функцию u (от исходной переменной) такую, что дифференциал от нее du проще, чем u ;
- 2) разделить подынтегральное выражение на u - получим dv (можно устно);
- 3) из dv найти интегрированием v (обычно ее находят устно и сразу вносят под знак дифференциала, но можно и отдельным интегрированием);
- 4) из u найти его дифференциал du ;
- 5) подставить полученные величины u, v, du, dv в формулу интегрирования по частям;
- 6) попытаться взять интеграл от vdu . При этом возможны варианты:

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 43/58

- а) если интеграл от vdu легкий, то взять его;
б) если интеграл от vdu все еще не легкий но проще исходного, применить интегрирование по частям уже для него;
в) если в правой части получился такой же интеграл, как и исходный, в этом уравнении можно привести подобные и результат получится сам собой;
г) если интеграл от vdu сложно взять, повторить шаги 1-6 для другого u ;

Что же обозначить u , а что v ? Точного ответа нет, но есть условие: одну из них берем произвольно, а другую - так, чтобы их произведение было равно подынтегральной функции. Есть и здравый смысл: вводя сложную функцию, мы вряд ли сделаем интеграл проще.

Вот некоторые рекомендации по применимости интегрирования по частям:

1. Для выражений вида x^n умноженное на подынтегральное выражение табличных и простых интегралов (например, $x \sin x$, $x^2 \cos 2x$, $x^2 e^x$) выбирают $u=x^n$
2. Для выражений вида e^x умноженное на подынтегральное выражение табличных и простых интегралов (например, $e^x \sin x$, $e^x \cos 2x$) выбирают $u=e^x$.
3. Для выражений вида x^n умноженное выражение вида $\arcsin ax$, $\arccos ax$, $\operatorname{arctg} ax$, $\ln|x|$ выбирают $x^n dx$ за dv , а остальные сомножители – за u .

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1. $\int x \sin x dx$.	$u = x$; $dv = \sin x dx$; $du = dx$; $v = \int \sin x dx = -\cos x$ $\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + C$
2. $\int \ln x dx$.	$u = \ln x$; $dv = dx$; $du = \frac{dx}{x}$; $v = x$ $\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{xdx}{x} = x \ln x - x + C$
3. $\int x \ln x dx$.	$u = \ln x$; $du = \frac{dx}{x}$; $dv = x dx$; $v = \int x dx = \frac{x^2}{2}$ $\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$
4. $\int e^x \sin x dx$	$u = e^x$; $du = e^x dx$; $dv = \sin x dx$; $v = -\cos x$ $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x - \int (-\cos x) e^x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$; Чтобы найти $\int e^x \cos x dx$ применим формулу интегрирования по частям ещё раз $\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$ получился исходный интеграл; запишем результат в виде уравнения и приведём подобные члены. $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$ $2 \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$; $\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C$

Задания для самостоятельной работы:

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 44/58

Вариант №1.	Вариант №2	Вариант №3	Вариант №4.
1. $\int (3-5x)^2 dx$	1. $\int (3x+1)^2 dx$	1. $\int (3x^4+2)^3 x^3 dx$	1. $\int (5x^3-8)^5 x^2 dx$
2. $\int x(\sin x^2) dx$	2. $\int \frac{\cos x dx}{2\sin x+1}$	2. $\int \frac{\sin x dx}{2+\cos x}$	2. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2\sin x+1}}$
3. $\int \frac{3x^2 dx}{\sin^2(x^3-2)}$	3. $\int \sqrt{e^x+1} e^x dx$	3. $\int \frac{6x^2 dx}{(1-2x^3)^2}$	3. $\int \sqrt[3]{(1-3x^2)^4} dx$
4. $\int x e^x dx$	4. $\int (x-1)e^{2x} dx$	4. $\int x^2 e^x dx$	4. $\int x e^{2x} dx$
5. $\int x \cos x dx$	5. $\int e^{2x} \cos x dx$	5. $\int x \cos x dx$	5. $\int e^{2x} \cos x dx$

Содержание отчета:

1. Наименование практического занятия
2. Цель занятия
3. Вариант задания
4. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
5. Список используемых источников
6. Выводы и предложения
7. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы

1. Дать определение неопределенного интеграла.
2. Сформулировать основные свойства неопределенного интеграла.
3. В чём заключается метод непосредственного интегрирования
4. В чём заключается метод подстановки?
5. В каких случаях удобно применять способ замены переменного при вычислении интегралов?
6. Как проверить, правильно ли найдена первообразная данной функции?
7. В чём заключается метод интегрирования по частям?
8. В чём заключается геометрический смысл первообразных данной функции?
9. Как проверить, правильно ли найдена первообразная данной функции?
10. В чём заключается метод непосредственного интегрирования?

Практическое занятие №9.

Вычисление площадей плоских фигур и объемов тел вращения

. С геометрической точки зрения, определённый интеграл представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$ и сохраняющей на этом отрезке свой знак, отрезком $[a, b]$ и прямыми $x = a$ и $x = b$. С помощью определённого интеграла можно вычислить площади различных плоских фигур и объёмы тел. Определённый интеграл широко применяется для вычисления площадей плоских фигур, объемов тел вращения, длины

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 45/58

дуги, площади поверхности вращения, а также для решения ряда физических и технических задач.

Цель занятия: закрепить навыки вычисления определенного интеграла, уметь применять определенный интеграл для решения физических задач, работа направлена на формирование компетенций ОК 01-05,09

Используемая литература: [1, гл. 2, § 2.1.12]

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Повторить геометрический смысл определённого интеграла, способы вычисления площадей плоских фигур и объёмов тел вращения, алгоритмы интегрирования.
2. Внимательно изучить примеры вычисления площадей плоских фигур и объёмов тел вращения. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Исходные материалы и данные:

Если $F(x) + C$ – первообразная функция для $f(x)$, то приращение $F(b) - F(a)$ первообразных функций при изменении аргумента x от $x = a$ до $x = b$ называется

определённым интегралом и обозначается символом $\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Эта формула называется формулой Ньютона – Лейбница.

Путь, пройденный телом при прямолинейном движении, находится по формуле:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

Работа переменной силы, произведенной при прямолинейном движении тела: $A =$

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{.Работа, затраченная на растяжение или сжатие пружины:} \quad A = k \int_{x_1}^{x_2} xdx$$

Простейшие свойства определенного интеграла:

$$1. \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx ;$$

$$2. \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx ;$$

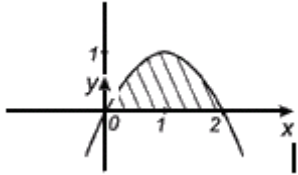
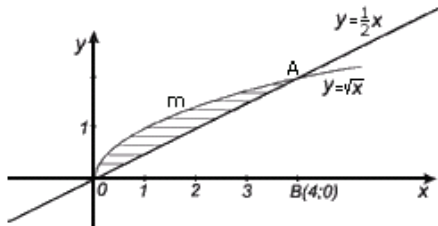
$$3. \int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx ;$$

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 46/58

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

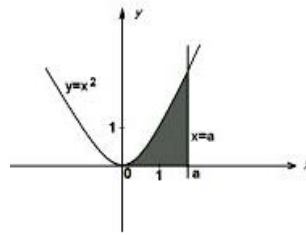
4. а

Вычисление площадей плоских фигур.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $f(x) = 2x - x^2$ и осью абсцисс	График функции $f(x) = 2x - x^2$ парабола. Вершина: (1; 1).  $S = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big _0^2 = \left(4 - \frac{8}{3} \right) - 0 = 1\frac{1}{3} \text{ (кв. ед.)}$ Ответ: $1\frac{1}{3}$ кв. ед.
2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = \frac{1}{2}x$.	График функции $y = \frac{1}{2}x$ – прямая. Функция $y = \sqrt{x}$ является обратной функции $y = x^2$ на промежутке $[0; +\infty)$.  $S = S_{\text{омАВ}} - S_{\Delta \text{ОАВ}}$ Пределы интегрирования указаны в таблицах значений функций. $S_{\text{омАВ}} = \int_0^4 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big _0^4 = \frac{2}{3} (4^{\frac{3}{2}} - 0) = 5\frac{1}{3} \text{ (кв. ед.)}$ $S_{\Delta \text{ОАВ}} = \frac{1}{2} \text{OB} \cdot \text{AB},$ $\text{OB} = 4, \text{AB} = 2, S_{\Delta \text{ОАВ}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4 \text{ (кв. ед.)}$ $S = 5\frac{1}{3} - 4 = 1\frac{1}{3} \text{ (кв. ед.)}.$ Ответ: $1\frac{1}{3}$ (кв. ед.).
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 6$ и $y = -x^2 + 5$	Найдем абсциссы точек пересечения графиков данных функций. Для этого решаем систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 - 6, \\ y = -x^2 + 5x - 6. \end{cases}$ Отсюда находим $x_1 = 0, x_2 = 2,5$. $S = \int_0^{2,5} (-x^2 + 5x - 6 - x^2 + 6) dx = \int_0^{2,5} (-2x^2 + 5x) dx = 5\frac{5}{24}.$
4. При каких значениях а площадь фигуры,	а) Выполним схематический чертеж

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 47/58

ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x = a$, равна 9?



б) Вычислим площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, осью ox и прямой $x = a$:

$$S = \int_0^a x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \frac{a^3}{3}.$$

в) Так как площадь по условию равна 9, то $a^3/3=9$, $a^3=27$, $a=3$.
 Ответ: $a=3$.

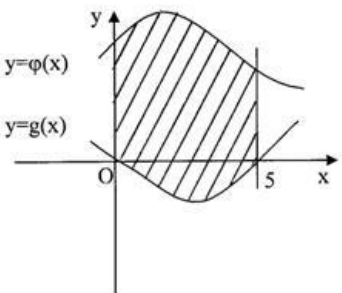
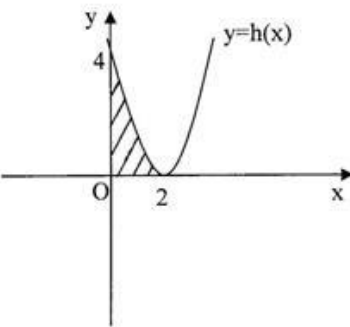
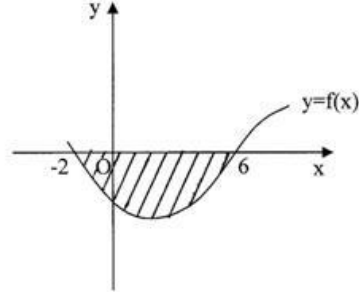
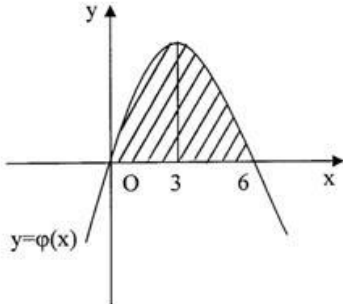
Вычисление объемов тел вращения.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox линий $y = \sin x$ и $y=0$.	Воспользуемся формулой для вычисления объема тела вращения, получаем $V_x = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$ далее вычисляется данный интеграл: $\pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} \cos 2x dx \right) = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big _0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} \text{ куб. ед.}$
2. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox линий $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$.	Искомый объем можно найти как разность объемов, полученных вращением вокруг оси Ox криволинейных трапеций, ограниченных линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$. $V_x = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x dx - \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big _0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3\pi}{10} \text{ куб. ед.}$

Задания для самостоятельной работы:

I вариант	1. По рисунку записать формулу для вычисления площади фигуры через интеграл.	2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: а) $y = (x+1)^2$ и $y = -1-x$ б) $y = -x^2$ и $y = -2$ в) $y = x+4$ и $y = 6x-x^2$
-----------	--	--

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 48/58

		
	3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $x = 0$, графиком функции $y = -x^2 + 3$ и касательной к этому графику в точке с абсциссой $x_0 = 1$.	
II вариант	1. По рисунку записать формулу для вычисления площади фигуры через интеграл. 	2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: а) $y = x^3$, $y = 2x - x^2$ и $y = 0$ б) $y = x^2 + 3x$ и $y = 0$ в) $y = x - 2$ и $y = x^2$
	3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 0,5x^2 + 2x + 2$ и графиком ее производной.	
III вариант	1. По рисунку записать формулу для вычисления площади фигуры через интеграл. 	2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: а) $y = x$, $x = 2$ и $y = \frac{1}{x}$ б) $y = x^2 - 4x - 3$ и $y = 0$ в) $y = x + 5$ и $y = (x - 1)^2$
	3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $x = 0$, графиком функции $y = x^2 - 4x + 5$ и касательной к этому графику в точке с абсциссой $x_0 = 2$.	
IV вариант	1. По рисунку записать формулу для вычисления площади фигуры через интеграл. 	2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: а) $y = x$, $x = 2$ и $y = \frac{1}{x}$ б) $y = x^2 - 4x - 3$ и $y = 0$ в) $y = x + 5$ и $y = (x - 1)^2$
	3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $x = 0$, графиком функции $y = -4x - x^2$ и касательной к этому графику в точке с абсциссой $x_0 = -3$.	

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 49/58

Содержание отчета:

1. Наименование практического занятия
2. Цель занятия
3. Вариант задания
4. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
5. Список используемых источников
6. Выводы и предложения
7. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы

1. В чём заключается геометрический смысл определённого интеграла?
2. Какая фигура называется криволинейной трапецией?
3. По какой формуле можно найти объём тела вращения?

Практическое занятие №10

Решение дифференциальных уравнений 1 порядка с разделяющимися переменными.

Цель занятия:

закрепить навыки решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, линейных дифференциальных уравнений первого порядка, линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, дифференциальных уравнений второго порядка, работа направлена на формирование компетенций ОК 01-05,09

Используемая литература: [1, гл.2, § 2.2.1 – 2.2.4]

Исходные материалы и данные:

Дифференциальное уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными, если имеет следующий вид: $y' = f_1(x)f_2(y)$. Полагая, что $f_2(y) \neq 0$, уравнение с разделяющимися переменными можно переписать в виде (разделить переменные) $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$. Это уравнение называется уравнением с разделёнными переменными. Интегрируя левую и правую части, находим общее решение данного уравнения.

Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ называется линейным, если имеет следующий вид: $y' + P(x)y = Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – заданные функции от x . Данное уравнение решается с помощью подстановки $y = uv$, где u и v – неизвестные функции от x .

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 50/58

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида: $y'' + py' + qy = 0$, где p и q – постоянные величины. Для решения данного уравнения составляется характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$, при решении которого возможны три случая. *Случай 1. Корни характеристического уравнения действительные и различные: $k_1 \neq k_2$.* Тогда общее решение дифференциального уравнения имеет вид: $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$. *Случай 2. Корни характеристического уравнения действительные и равные: $k_1 = k_2 = k$.* Тогда общее решение дифференциального уравнения имеет вид: $y = e^{kx} (C_1 + C_2 x)$. *Случай 3. Корни характеристического уравнения комплексные: $k_1 = a + bi$ и $k_2 = a - bi$.* Тогда общее решение дифференциального уравнения имеет вид: $y = e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$.

Дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид: $y'' = f(x, y, y')$. Данное уравнение решается двукратным интегрированием.

Содержание и порядок выполнения задания:

Решить дифференциальные уравнения.

I. С разделяющимися переменными:

1) $(x + 3)dy - (y + 2)dx = 0$ $y = 3$ при $x = 2$

2) $(1 - x)dy - (y - 1)dx = 0$ $y = 3$ при $x = 2$

3) $2(x + 1)dy = ydxdy = 2$ при $x = 1$

4) $(x^2 + 1)dy = 2xydxdy = 2$ при $x = 1$

II. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка:

1) $y' + 2y + 4 = 0$

2) $y' - y + 4 = 0$

3) $y' - 2y - 4 = 0$

4) $y' + 2y - 3 = 0$

Содержание отчета:

1. Наименование практического занятия
2. Цель занятия
3. Вариант задания
4. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
5. Список используемых источников

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 51/58

6. Выводы и предложения

7. Дата и подпись курсанта и преподавателя.

Практическое занятие №11

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Многие явления природы и техники описываются дифференциальными уравнениями, связывающими неизвестные величины и их производные.

Цель занятия:

Научиться решать некоторые виды дифференциальных уравнений 2-го порядка.

Используемая литература: [1, гл.2, § 2.2.1 – 2.2.4]

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Повторить определение дифференциального уравнения, понятие его общего и частного решения, способы решения дифференциальных уравнений 2-го порядка.
2. Внимательно изучить примеры решений дифференциальных уравнений. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Найти общее решение неполного дифференциального уравнения второго порядка: $\frac{d^2 y}{dx^2} = \sin x .$	Общее решение неполного дифференциального уравнения второго порядка ищется с помощью подстановки: Пусть $\frac{dy}{dx} = z$, тогда $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$ уравнение принимает вид: $\frac{dz}{dx} = \sin x$, откуда $dz = \sin x dx$. Интегрируя последнее равенство, получим $\int dz = \int \sin x dx$, т.е. $z = -\cos x + C_1$ Следовательно, $\frac{dy}{dx} = -\cos x + C_1$, т.е. $dy = (-\cos x + C_1) dx$ Снова интегрируя, находим $\int dy = \int (-\cos x + C_1) dx$, или $y = -\sin x + C_1 x + C_2$ - общее решение

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 52/58

2.Найти частое решение неполного дифференциального уравнения второго порядка : $\frac{d^2 y}{dx^2} = 2 \frac{dy}{dx}, \text{ если } y = \frac{3}{2}$ и $y' = 1$ при $x = 0$	Найдём общее решение Пусть $\frac{dy}{dx} = z$, тогда $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$ уравнение принимает вид: $\frac{dz}{dx} = 2z, \text{ откуда } \frac{dz}{z} = 2dx. \text{ Интегрируя последнее равенство, получим}$ $\int \frac{dz}{z} = \int 2dx, \text{ т.е. } \ln z = 2x + C_1; z = e^{2x+C_1}$ Следовательно, $\frac{dy}{dx} = e^{2x+C_1} (1), \text{ т.е. } dy = e^{2x+C_1} dx$ Снова интегрируя, находим $\int dy = \int e^{2x+C_1} dx, \text{ или } y = \frac{1}{2} e^{2x+C_1} + C_2 (2) - \text{общее решение}$ Для нахождения частного решения подставим начальные данные в (1) и (2) $\begin{cases} 1 = e^{2 \cdot 0 + C_1} \\ \frac{3}{2} = \frac{1}{2} e^{2 \cdot 0 + C_1} + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = e^{C_1} \\ \frac{3}{2} = \frac{1}{2} e^{C_1} + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}$ Следовательно, частное решение имеет вид: $y = \frac{1}{2} e^{2x} + 1$
3. Решить уравнение $y'' - y' - 2y = 0.$	Характеристическое уравнение: $k^2 - k - 2 = 0; \quad k_1 = -1; \quad k_2 = 2;$ Общее решение: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$
4. Решить уравнение $4y'' + 4y' + y = 0.$	Характеристическое уравнение: $4k^2 + 4k + 1 = 0; \quad k_1 = k_2 = -\frac{1}{2};$ Общее решение: $y = e^{-\frac{1}{2}x} (C_1 + xC_2).$
5. Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0.$	Характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 5 = 0; \quad D = -16; \quad k_1 = -1 + 2i; \quad k_2 = -1 - 2i.$ Общее решение: $y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 53/58

Продолжение

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
6. Найти частное решение уравнения $y' - 2y + 3 = 0$, если $y = 1$ при $x = 0$	Решим его с помощью подстановки $y = uv$, $y' = u'v + uv'$ 1. Подставляя y и y' в данное уравнение, получим $u'v + uv' - 2uv = -3$. Сгруппировав второе и третье слагаемое левой части уравнения, вынесем общий множитель u за скобки $u'v + (uv' - 2uv) = -3$, $uv' + u(v' - 2uv) = 0$ 2. Выражение в скобках приравняем к нулю и, решив полученное уравнение, найдем функцию $v = v(x)$: $v' - 2v = 0$, $\frac{dv}{dx} - 2v = 0$, $dv = 2v dx$, $\frac{dv}{v} = 2 dx$ Получили уравнение с разделенными переменными. Проинтегрируем обе части этого уравнения: $\int \frac{dv}{v} = \int 2 dx$ Найдем функцию v: $\ln v = 2x$, $v = e^{2x}$ 3. Подставим полученное значение v в уравнение $u'v = -3$ Получим: $u'e^{2x} = -3$, $\frac{du}{dx} e^{2x} = -3$, $du = -3e^{-2x} dx$. Это уравнение с разделенными переменными. Проинтегрируем обе части уравнения: $\int du = -\int 3e^{-2x} dx$. Найдем функцию $u = u(x, c)$: $u = -3 \cdot (-\frac{1}{2})e^{-2x} + C$, $u = \frac{3}{2}e^{-2x} + C$ 4. Найдем общее решение: $y = e^{2x} \cdot (\frac{3}{2}e^{-2x} + C)$, $y = \frac{3}{2} + Ce^{2x}$ 5. Найдем частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y = 1$ при $x = 0$: $1 = \frac{3}{2} + Ce^0$, $1 = \frac{3}{2} + C \cdot 1$, $C = 1 - \frac{3}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$ $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{2x}$, $y = \frac{3 - e^{2x}}{2}$ Ответ: $y = \frac{3 - e^{2x}}{2}$.
7. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = \cos x$	Общее решение найдем двукратным интегрированием

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 54/58

	$y' = \int \cos x dx = \sin x + C_1$ $y(x) = \int (\sin x + C_1) dx = -\cos x + C_1 x + C_2$ таким образом, $y(x) = -\cos x + C_1 x + C_2$
--	--

Задания для самостоятельной работы:

Вариант №1	Вариант №2
Решить дифференциальные уравнения 1) $\frac{d^2 y}{dx^2} = 8x - 2$, если $y = \frac{1}{3}$, $y' = 2$, $x = 1$; 2) $y'' - 3y' + 2y = 0$, если $y = 2$, $y' = 3$, $x = 0$ 3) $y'' - 2y' + 2y = 0$, если $y = 1$, $y' = 2$, $x = 0$	Решить дифференциальные уравнения 1) $\frac{d^2 y}{dx^2} = 10x + 4$, если $y = 1$, $y' = 3$, $x = 1$; 2) $y'' - 8y' + 15y = 0$, если $y = 4$, $y' = 2$, $x = 0$ 3) $y'' - 4y' + 13y = 0$, если $y = 1$, $y' = 5$, $x = 0$
Вариант №3	Вариант №4
Решить дифференциальные уравнения 1) $\frac{d^2 y}{dx^2} = 4x + 2$, если $y = 4$, $y' = 1$, $x = 0$; 2) $y'' - 6y' + 5y = 0$, если $y = 2$, $y' = 6$, $x = 0$ 3) $y'' - 4y' + 5y = 0$, если $y = 1$, $y' = -1$, $x = 0$	Решить дифференциальные уравнения 1) $\frac{d^2 y}{dx^2} = 8x + 6$, если $y = 1$, $y' = 1$, $x = 1$; 2) $y'' - 2y' - 8y = 0$, если $y = 4$, $y' = 10$, $x = 0$ 3) $y'' - 2y' + 5y = 0$, если $y = 1$, $y' = 3$, $x = 0$

Содержание отчета:

1. Наименование практического занятия
2. Цель занятия
3. Вариант задания
4. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
5. Список используемых источников
6. Выводы и предложения
7. Дата и подпись курсанта и преподавателя.

Контрольные вопросы

1. Как определить порядок дифференциального уравнения?
2. Какие уравнения называются неполными дифференциальными уравнениями второго порядка?
3. Какие уравнения называются линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами?

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 55/58

4. Можно ли проверить правильность решения дифференциального уравнения? Как это сделать?

Практическое занятие №12

Решение дифференциальных уравнений

Многие явления природы и техники описываются дифференциальными уравнениями, связывающими неизвестные величины и их производные.

Цель занятия: Научиться решать некоторые виды дифференциальных уравнений.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Повторить определение дифференциального уравнения, понятие его общего и частного решения, способы решения дифференциальных уравнений I и II порядка.
2. Внимательно изучить примеры решений дифференциальных уравнений. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
Алгоритм решения дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными	1. Производную функции переписать через её дифференциалы $y' = \frac{dy}{dx}$ 2. Разделить переменные. 3. Проинтегрировать обе части равенства, найти общее решение. 4. Если заданы начальные условия, найти частное решение.
Алгоритм решения линейного дифференциального уравнения первого порядка	$y' = f(x)y + g(x)$ 1. Ввести подстановку $y=uv$. 2. Продифференцировать это равенство $y' = u'v + uv'$ 3. Подставить y и y' в данное уравнение: $u'v + uv' = f(x)uv + g(x)$ или $u'v + uv' + f(x)uv = g(x)$. 4. Сгруппировать члены уравнения так, чтобы u вынести за скобки: $u'v + uv' + f(x)uv = g(x);$ $u'v + u(v' + f(x)v) = g(x)$ 5. Из скобки, приравняв ее к нулю, найти функцию $v = v(x) : v' + f(x)v = 0$ Это уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{dv}{dx} + f(x)v = 0, \frac{dv}{dx} = -f(x)$

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 56/58

	Разделим переменные и получим: $\frac{dv}{v} = -f(x)dx$ Откуда $\int \frac{dv}{v} = -\int f(x)dx; \ln v = -\int f(x)dx \Rightarrow v = e^{-\int f(x)dx}$ 6. Подставить полученное значение v в уравнение $u'v = g(x)$ (из п.4): $u'e^{-\int f(x)dx} = g(x)$ и найти функцию $u = u(x, C)$. Это уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{du}{dx} e^{-\int f(x)dx} = g(x); du = e^{\int f(x)dx} g(x)dx$ $u = \int e^{\int f(x)dx} g(x)dx$ 7. Записать общее решение в виде: $y = v(x) \cdot u(x, C)$, т.е. $y = e^{-\int f(x)dx} \cdot \int e^{\int f(x)dx} g(x)dx + C$.
Алгоритм решения однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами	1. Записать дифференциальное уравнение в виде: $y'' + py' + qy = 0$. 2. Составить его характеристическое уравнение, обозначив y'' через r^2, y' через r, y через 1: $r^2 + pr + q = 0$ 3. Вычислить дискриминант $D = p^2 - 4q$ и найти корни характеристического уравнения; при этом если: а) $D > 0$; следовательно, характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня $r_1 \neq r_2$. Общее решение дифференциального уравнения выражается в виде $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, где C_1 и C_2 - произвольные постоянные. б) $D = 0$; следовательно, характеристическое уравнение имеет равные действительные корни $r_1 = r_2 = r$. Общее решение дифференциального уравнения выражается в виде $y = (C_1 + C_2 x)e^{rx}$ или $y = C_1 e^{rx} + C_2 e^{rx}$ в) $D < 0$; следовательно, характеристическое уравнение имеет комплексные корни, $r_1 = \alpha + \beta \cdot i; r_2 = \alpha - \beta \cdot i$. Общее решение дифференциального уравнения выражается, в виде

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 57/58

	$y = e^{\alpha \cdot x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
Алгоритм решения неполного дифференциального уравнения второго порядка.	Общее решение найдем путём подстановки $\frac{dy}{dx} = z$, тогда $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$ и двукратным интегрированием.

Задания для самостоятельной работы:

Вариант № 1	Вариант № 2
Определить тип дифференциального уравнения и найти его частное решение: 1. $y' + 2y = 3e^x$; $y = 1, x = 0$ 2. $y' = \sin 5x$; $y = 1$; $x = \frac{\pi}{2}$ 3. $y'' + 4y' + 5y = 0$; $y' = 0, y = -3, x = 0$ 4. $y'' = x + 6x^2$, $y' = 1, y = 0, x = 0$	Определить тип дифференциального уравнения и найти его частное решение: 1. $xy' - 2y = x^3 e^x$, $y = 0, x = 1$ 2. $y' \sin x - y \cos x = 0$, $y = 1, x = \frac{\pi}{2}$ 3. $y'' - 7y' + 10y = 0$, $y' = 1, y = 0, x = 0$ 4. $y'' = 8x + 4$, $y' = 2, y = 6, x = 1$
Вариант № 3	Вариант № 4
Определить тип дифференциального уравнения и найти его частное решение: 1. $y' \sin x - y \cos x = 1$; $y = 1$; $x = \frac{\pi}{2}$ 2. $y' = e^{-3x}$, $y = \frac{2}{3}$, $x = 0$ 3. $y'' - 4y' + 3y = 0$; $y' = 10, y = 6, x = 0$ 4. $y'' = e^x + \sin x$, $y' = 4, y = 8, x = 0$	Определить тип дифференциального уравнения и найти его частное решение: 1. $xy' - 3y = x^4 e^x$; $y = e, x = 1$ 2. $2\sqrt{y}dx - dy = 0$, $y = 1, x = 0$ 3. $y'' + y' - 2y = 0$; $y' = 1, y = 5, x = 0$ 4. $y'' = 6x^2 - 10$, $y' = 2, y = 0, x = 0$

Содержание отчета:

1. Наименование практического занятия
2. Цель занятия
3. Вариант задания
4. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
5. Список используемых источников
6. Выводы и предложения
7. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы

1. Как определить порядок дифференциального уравнения?

МО-15 02 12-ЕН.01.ПЗ	КМРК БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»	
	МАТЕМАТИКА	С. 58/58

2. Какие уравнения называются линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами?

3. Можно ли проверить правильность решения дифференциального уравнения? Как это сделать?

Используемые источники литературы

Основные	1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 401 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07878-7. — Режим доступа : urait.ru/book/matematika-489612 2. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 1 : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 326 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08799-4. — Режим доступа : urait.ru/book/prakticheskie-zanyatiya-po-matematike-v-2-ch-chast-1-490666 3. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 2 : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 251 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08803-8. — Режим доступа : urait.ru/book/prakticheskie-zanyatiya-po-matematike-v-2-ch-chast-2-490667 4. Высшая математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / М. Б. Хрипунова [и др.] ; под общей редакцией М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 472 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-01497-6. — Режим доступа : urait.ru/book/vyshshaya-matematika-491581
Дополнительные , в т.ч. курс лекций по учебной дисциплине, методические пособия и рекомендации для выполнения практических занятий и самостоятельных работ	3. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике [Текст]: учебное пособие для сред. проф. образования /Н.В. Богомолов.-10-е изд.-М.: Дрофа, 2014.-204с.(сред. проф. образование)
Интернет-источники	www.geometry.ru «Геометрия» www.karman-form.ucoz.ru «Сайт по математике» www.uroki.net «Математика» www.arm-matr.rkc-74.ru «Алгебра и начало анализа» www.school.nd.ru «Электронная библиотека «Просвещение»
Электронные образовательные ресурсы	1. ЭБС «Book.ru», https://www.book.ru 2. ЭБС «ЮРАЙТ» https://www.biblio-online.ru 3. ЭБС «Академия», https://www.academia-moscow.ru 4. Издательство «Лань», https://e.lanbook.com 5. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека онлайн», https://www.biblioclub.ru