Федеральное агентство по рыболовству
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Калининградский государственный технический университет»
(ФГБОУ ВО «КГТУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Начальник УРОПСП

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
ФГБОУ ВО «КГТУ»
СВЕДЕНИЯ О СЕРТИФИКАТЕ ЭП
Сертификат:
0174a99400e2af6fb74dca3b394e65efc4
Владелец: **Мельникова Виктория Александровна**
Действителен: **с 12.04.2023 по 12.04.2024**

Фонд оценочных средств
(приложение к рабочей программе модуля)

«ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»

основной профессиональной образовательной программы бакалавриата
по направлению подготовки

15.03.01 МАШИНОСТРОЕНИЕ
Профиль подготовки
«ТЕХНОЛОГИИ, ОБОРУДОВАНИЕ И АВТОМАТИЗАЦИЯ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ ПРОИЗВОДСТВ»

ИНСТИТУТ	агроинженерии и пищевых систем
РАЗРАБОТЧИК	кафедра прикладной математики и информационных технологий

1 РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1 Таблица 1 – Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с установленными индикаторами достижения компетенций

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции	Дисциплина	Результаты обучения (владения, умения и знания), соотнесенные с компетенциями/индикаторами достижения компетенции
ОПК-1: Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности	ОПК-1.7: Использует численные методы решения задач при освоении образовательной программы и в профессиональной деятельности	Математика (раздел «Численные методы»)	*Знать:* - численные методы решения математических задач; *Уметь:* - применять численные методы при решении профессиональных задач; *Владеть:* инструментарием для решения математических задач в своей предметной области.

2 ПЕРЕЧЕНЬ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПОЭТАПНОГО ФОРМИРОВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (ТЕКУЩИЙ КОНТРОЛЬ) И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

2.1 Для оценки результатов освоения дисциплины используются:

- оценочные средства текущего контроля успеваемости;
- оценочные средства для промежуточной аттестации по дисциплине.

2.2 К оценочным средствам текущего контроля успеваемости относятся:

– тестовые задания;
– задания и контрольные вопросы по лабораторным работам;
– задания по темам практических занятий.

2.3 К оценочным средствам для промежуточной аттестации по дисциплине, проводимой в форме экзамена, относятся:

– задания по контрольной работе (заочная форма);
– экзаменационные вопросы и задания.

3 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ

3.1 Тестовые задания предназначены для оценки в рамках текущего контроля успеваемости знаний, приобретенных студентами на лекционных и практических занятиях и для измерения соответствующих индикаторов достижения компетенции.

Содержание теста определяется в соответствии с содержанием дисциплины пропорционально учебному времени, отведенному на изучение разделов, перечисленных в рабочей программе модуля.

Время выполнения теста 40 мин.

Типовые варианты тестовых заданий приведены в Приложении №1.

3.2. Шкала оценивания тестовых заданий основана на четырехбалльной системе, которая реализована в программном обеспечении.

Оценка «отлично»	Оценка «хорошо»	Оценка «удовлетворительно»	Оценка «неудовлетворительно»
при правильном выполнении не менее 90% заданий	при правильном выполнении не менее 80% заданий	при правильном выполнении не менее 60% заданий	при правильном выполнении менее 60% заданий

Результаты измерений индикатора считаются положительными при правильном выполнении не менее 60% заданий.

3.3 Темы, типовой вариант заданий и контрольные вопросы к лабораторным работам приведены в Приложении №2.

3.4 Критерии и шкала оценки лабораторных работ.

Не зачтено	Зачтено
неудовлетворительное знание основных теоретических положений, формул, понятий, относящихся к теме компьютерной работы; неумение формулировать выводы; неумение пользоваться средствами компьютерной математики; во время проведения текущего контроля не предоставлена работа	знание основных теоретических положений, формул, понятий, относящихся к теме компьютерной работы; умение решать задачи средствами компьютерной математики и делать выводы по полученным результатам

3.5. Задания по темам практических занятий

Образцы типовых заданий по темам практических занятий приведены в Приложении №3.

3.6 Критерии и шкала оценивания результатов выполнения заданий по темам практических занятий.

Шкала оценивания результатов выполнения заданий основана на четырехбальной системе.

Оценка «отлично»	Оценка «хорошо»	Оценка «удовлетворительно»	Оценка «неудовлетворительно»
задания выполнены по правильным формулам и алгоритмам и без ошибок	задания выполнены по правильным формулам и алгоритмам, но с некоторыми ошибками	задания выполнены по правильным формулам и алгоритмам, но со множеством ошибок	задания выполнены с использованием неправильных алгоритмов и формул

Результаты измерений индикатора считаются положительными при положительной оценке за выполнение задания.

4 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

4.1 Учебным планом предусмотрено выполнение одной контрольной работы (заочная форма). Образцы типового варианта заданий контрольной работы представлены в Приложении № 4.

Защита контрольной работы предполагает проверку того, что работа выполнена студентом самостоятельно. Поэтому при защите студент должен быть готов дать пояснения к решенным задачам или решить подобные задачи.

4.2 Критерии и шкала оценивания контрольной работы.

Шкала оценивания результатов выполнения заданий контрольной работы основана на двухбалльной системе.

Оценка «зачтено» выставляется при правильном выполнении не менее 70% заданий.

Оценка «не зачтено» выставляется при правильном выполнении менее 70% заданий.

Результаты измерений индикатора считаются положительными при правильном выполнении не менее 70% заданий.

4.3 Промежуточная аттестация по дисциплине проводится в форме экзамена.

К экзамену допускаются студенты, положительно аттестованные по результатам текущего контроля. Для студентов заочной формы обучения для допуска к экзамену необходима положительная оценка по контрольной работе.

Типовые экзаменационные вопросы, задания и образец экзаменационного билета представлены в Приложении №5.

Экзаменационные материалы для проведения экзамена компонуются в билеты (два вопроса и три практических задания), относящиеся к различным темам не менее чем двух разделов дисциплины.

На усмотрение экзаменатора экзамен может быть проведен в письменной, устной или комбинированной форме. При наличии сомнений в отношении знаний и умений студента экзаменатор может (имеет право) задать дополнительные вопросы, а также дать дополнительное задание.

4.4 Критерии и шкала оценивания промежуточной аттестации.

Шкала итоговой аттестации по дисциплине, то есть оценивания результатов освоения дисциплины на экзамене, основана на четырехбалльной системе.

Оценка			
Неудовлетворительный	Пороговый	Углублённый	Продвинутый
«2» (неудовлетворительно)	«3» (удовлетворительно)	«4» (хорошо)	«5» (отлично)
незнание предмета, большое количество принципиальных	за знание предмета с заметными пробелами, не	за прочное знание при малозначительных неточностях;	за полное и прочное знание материала в установленном

ошибок, допущенных при выполнении, предусмотренных программой заданий; студент не может продолжить обучение без дополнительных занятий по дисциплине.	препятствующие последующему обучению; студент имеет погрешности в ответе на экзамене и при выполнении экзаменационных заданий, но обладает необходимыми знаниями для их устранения под руководством преподавателя	студент имеет систематический характер знаний по дисциплине, способен к их самостоятельному наполнению и обновлению в ходе дальнейшей учебной работы	объеме; имеет систематические и глубокие знания учебного материала; свободно выполняет задания; понимает значение полученных знаний для приобретаемой профессии

Компетенции в той части, в которой они должны быть сформированы в рамках изучения дисциплины, могут считаться сформированными в случае, если студент получил на экзамене положительную оценку.

5 СВЕДЕНИЯ О ФОНДЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ И ЕГО СОГЛАСОВАНИИ

Фонд оценочных средств для аттестации по дисциплине «Численные методы» представляет собой компонент основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 15.03.01 Машиностроение (профиль «Технологии, оборудование и автоматизация машиностроительных производств»).

Фонд оценочных средств рассмотрен и одобрен на заседании кафедры прикладной математики и информационных технологий (протокол № 6 от 04.03.2022г.).

И.о. заведующего кафедрой А.И. Руденко

Фонд оценочных средств рассмотрен и одобрен на заседании кафедры инжиниринга технологического оборудования 21.04.2022 г. (протокол № 3).

Заведующий кафедрой Ю.А. Фатыхов

Приложение №1

ТИПОВЫЕ ВАРИАНТЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

Вариант 1

Вопрос №1. Приближенным числом *a* называют число, незначительно отличающееся от:
1. среднего А
2. неточного А
3. точного А
4. приблизительного А

Вопрос №2. Под ошибкой или погрешностью Δa приближенного числа *a* обычно понимается разность между соответствующим точным числом А и данным приближением, т.е.:
1. $\Delta a = A - a$
2. $\Delta a = A + a$
3. $a = \Delta a - A$
4. $A = \Delta a + A$

Вопрос №3. Округление числа $\pi = 3{,}1415926535\ldots$ до пяти значащих цифр:
1. 3,1425
2. 3,1416
3. 3,14
4. 0,1415

Вопрос №4. Наиболее распространенным приемом решения систем линейных уравнений, в котором применяется алгоритм последовательного исключения неизвестных, является:
1. метод Крамера
2. метод Гаусса
3. метод обратной матрицы
4. ведущий метод

Вопрос №5. Абсолютная погрешность округления числа 0,8 до целых единиц равна:

1. -0,2
2. 0,2
3. 1
4. 0

Вопрос №6. Для решения систем линейных уравнений по правилу Крамера требуется:
1. ненулевой определитель матрицы системы
2. найти разрешающую формулу
3. выразить первую производную
4. задать точность вычислений e>0

Вопрос №7. Интервалы изоляции корней неизвестных в системе нелинейных уравнений можно определить:
1. только аналитически
2. интегрированием
3. графически и аналитически
4. приведением матрицы к треугольному виду

Вопрос №8. Задача интерполяции $f(x)$ состоит в выборе функции $g(x)$, которая:

1. отклонялась бы от $f(x)$ в точках x_i не более, чем на некоторое заданное число
2. была бы непрерывна на некотором заданном отрезке и принимала бы значения $f(x)$ точках $x_i, i = 1,2, \dots n$ с некоторой погрешностью
3. была бы непрерывна на некотором заданном отрезке и принимала бы значения $f(x)$ точках $x_i, i = 1,2, \dots n$ с некоторой заданной точностью.
4. принимала бы значения $f(x)$ точках $x_i, i = 1,2, \dots n$

Вопрос №9. В методе Симпсона подынтегральная функция заменяется:
1. квадратичной параболой
2. прямой
3. кубической параболой
4. выражением, содержащим тригонометрические функции

Вопрос №10. Методы численного интегрирования (1 – левых прямоугольников; 2 – трапеций; 3 – средних прямоугольников; 4 – Симпсона) в порядке повышения точности:
1. 1, 2, 3, 4
2. 4, 3, 2, 1
3. 1, 3, 4, 2
4. 3, 1, 3, 4

Вопрос №11. Задана табличная функция

x	1	2	3	4	5	6	7
y	0	2	6	5	3	1	1

Тогда определенный интеграл этой функции в пределах от 1 до 7, вычисленный методом трапеций с шагом h=1, равен:
1. 19,5
2. 17
3. 17,5
4. 14

Вопрос №12. Заданы два приближенных числа $a = 3 \pm 0{,}2$ $b = 5{,}3 \pm 0{,}03$. Тогда предельная абсолютная погрешность разности этих чисел равна:
1. 0,2
2. 0,17
3. 0,23
4. 0,03

Вопрос №13. Дано значение x=4 и абсолютная погрешность величины $\Delta x = 0{,}1$. Тогда относительная погрешность величины x равна:
1. 0,025
2. 3,9
3. 0,4
4. 0,04

Вопрос №14. Методы, позволяющие за конечное число действий найти точное решение системы, если входная информация задана точно и вычисления велись без округлений – это:
1. приближенные методы
2. итерационные методы
3. прямые методы
4. нет верного ответа

Вопрос №15. Задана табличная функция $y = f(x)$

x	1	2	3
y	2	4	8

Тогда интерполяционный многочлен, аппроксимирующий эту функцию равен:

1. $P(x) = x^2 - x + 2$
2. $P(x) = x^2 - 2x + 2$
3. $P(x) = x^2 - 3x + 4$
4. $P(x) = x^2 - 4x + 5$

Вариант 2

Вопрос №1. a называется приближенным значением А по недостатку, если:

1. a> A
2. a <A
3. a ≥ A
4. a ≤ A

Вопрос №2. Округление числа $\mathrm{e} = 2{,}7182818284 \ldots$ до пяти значащих цифр:

1. 2,7182
2. 2,7183
3. 2,7
4. 0,7182

Вопрос №3. Все методы вычисления интегралов делятся на:

1. аналитические и графические
2. прямые и итеративные
3. точные и приближенные
4. приближенные и систематические

Вопрос №4. Абсолютная погрешность округления числа 7,6 до целых единиц равна:

1. 0,4
2. -0,4
3. 7
4. 8

Вопрос №5. Интерполяционным многочленом называется многочлен:

1. линейный
2. n -й степени
3. параболического вида
4. значения которого в узлах интерполяции равны значению табличной функции в этих узлах

Вопрос №6. Метод Зейделя решения систем линейных уравнений является:

1. точным
2. итерационным
3. обратным
4. прямым

Вопрос №7. Для решения системы нелинейных уравнений нужно задать:

1. начальное приближение и точность вычисления
2. число приближений
3. постоянную интегрирования
4. только начальное приближение

Вопрос №8. Узлы интерполяции – это:

1. значение функции $y = f(x)$ в некоторых точках $x_i, i = 1,2, \ldots n$
2. любое значение $x_i, i = 1,2, \ldots n$ из области определения $f(x)$
3. значения аргументов x_i, для которых известны значения интерполируемой функции $f(x_\mathrm{i})$

4. промежуточные значения $y = f(x)$

Вопрос №9. Погрешность вычисления определенного интеграла можно уменьшить, если:
1. уменьшить число точек разбиений интервала
2. повысить степень используемых для интегрирования полиномов
3. увеличить число точек разбиений интервала
4. понизить степень используемых для интегрирования полиномов

Вопрос №10. Задано дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = xy + 2$ с начальным условием y(0)=1. Найденное методом Эйлера с шагом h=0,1 значение y_1 равно:
1. 1,1
2. 1,4
3. 0,9
4. 1,2

Вопрос №11. Задана табличная функция

x	1	2	3
y	4	2	3

Тогда ее линейная аппроксимация по методу наименьших квадратов имеет вид:
1. $-0,5x + 4$
2. $0,5x - 4$
3. $5x - 2$
4. $-0,5x - 4$

Вопрос №12. Один из корней уравнения $x^3 - 12x - 4 = 0$ локализован на интервале [2,5]. Тогда при уточнении этого корня методом хорд за точку x_0 начального приближения следует принять:
1. 4
2. 5
3. 2
4. 3

Вопрос №13. Дано значение x=5 и абсолютная погрешность величины $\Delta x = 0,2$. Относительная погрешность величины x равна:
1. 0,4
2. 4,8
3. 0,04
4. 0,025

Пример №14. При применении метода касательных при выборе начального приближения корня необходимо за исходную точку принять тот конец отрезка [a, b], в котором знак функции:
1. совпадает со знаком второй производной
2. не совпадает со знаком второй производной
3. совпадает со знаком первой производной
4. не совпадает со знаком первой производной

Вопрос №15. Квадратурными формулами называются формулы:
1. квадратного трехчлена
2. приближенного интегрирования

3. нахождения квадрата суммы
4. нет правильного ответа

Вариант 3

Вопрос №1. a называется приближенным значением числа А по избытку, если:

1. a ≥ A
2. a <A
3. a> A
4. a ≤ A

Вопрос №2. Округление числа $\sqrt{2} = 1{,}414213$ ... до пяти значащих цифр:

1. 1,4143
2. 1,4142
3. 1,41
4. 0,4143

Вопрос №3. Точный метод вычисления интегралов был предложен:

1. Гауссом и Стирлингом
2. Ньютоном и Гауссом
3. Ньютоном и Лейбницем
4. Гауссом и Крамером

Вопрос №4. Получить корни системы с заданной точностью путем сходящихся бесконечных процессов позволяет метод:

1. точный
2. итерационный
3. приближенный
4. Зейделя

Вопрос №5. Абсолютная погрешность округления числа 19,3 до целых единиц равна:

1. 0,3
2. -0,3
3. 19
4. 20

Вопрос №6. Решение систем линейных уравнений в два этапа (прямой и обратный ход) позволяет получить метод:

1. Зейделя
2. Крамера
3. Гаусса
4. простой итерации

Вопрос №7. Условием прерывания итерационного процесса при решении систем нелинейных уравнений является:

1. $\left|x_i^{k+1} - x_i^k\right| \leq \varepsilon$
2. $\left|x_i^{k+1} - x_i^k\right| > \varepsilon$
3. $x_i^{k+1} - x_i^k \leq \varepsilon$
4. $\left|x_i^{k+1} + x_i^k\right| \leq \varepsilon$

Вопрос №8. Для интерполяции значений табличной функции y=y(x)

x	*1*	*2*	*3*
y	*1*	*2*	*3*

между заданными точками имеет смысл использовать полином степени:
1. нулевой
2. второй
3. первой
4. выше пятой

Вопрос №9. Задача приближенного интегрирования состоит в вычислении:
1. определенного интеграла по значениям подынтегральной функции в узлах
2. неопределенного интеграла по значениям подынтегральной функции в узлах
3. определенного интеграла по значениям подынтегральной функции в произвольных точках
4. корней системы линейных алгебраических уравнений на данном интервале

Вопрос №10. Если аппроксимирующая функция составлена из отдельных многочленов, как правило, одинаковой небольшой степени, определенных каждый на своей части отрезка [a, b], то такая аппроксимация называется:
1. приближение эмпирическими формулами
2. интерполирование алгебраическими многочленами
3. интерполирование сплайнами
4. нет верного ответа

Вопрос №11. Действительный корень уравнения $x^3 + 2x - 1 = 0$ принадлежит интервалу…
1. $(0; 1/2)$
2. $(3/2; 2)$
3. $(1/2; 1)$
4. $(1; 3/2)$

Вопрос №12. При применении метода касательных при выборе начального приближения корня необходимо выбирать тот конец отрезка [a, b], в котором знак функции:
1. не совпадает со знаком второй производной
2. совпадает со знаком второй производной
3. совпадает со знаком первой производной
4. не совпадает со знаком первой производной.

Вопрос №13. Дано значение x=2 и абсолютная погрешность величины $\Delta\mathrm{x} = 0{,}1$. Относительная погрешность величины x равна:
1. 1,5
2. 2,1
3. 0,05
4. 0,025

Вопрос №14. Отделить (локализовать) корни нелинейного уравнения - это значит разбить всю область допустимых значений на отрезки, в каждом из которых содержится:
1. один корень
2. не менее одного корня
3. не более одного корня
4. нет верного ответа

Вопрос №15. Задана табличная функция

x	1	2	3
y	2	4	3

Тогда ее линейная аппроксимация по методу наименьших квадратов имеет вид:

1. $0{,}5x + 2$
2. $0{,}5x - 2$
3. $5x - 2$
4. $0{,}5x - 1$

Приложение №2

ТИПОВЫЕ ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ И КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ

Лабораторная работа 1

Определение абсолютной и относительной погрешности приближенных чисел, вычисления функций. Действия с приближенными числами.

Задание 1. Определить абсолютную и относительную погрешность оценки точного числа $\pi \approx \frac{22}{7}$.(Архимедово число III – II век до н.э).

Задание 2. Найти абсолютную и относительную погрешности вычисления функции. Построить $3D$ - график поверхности и найти максимальное по модулю отклонение функции от среднего значения в области неопределенности значений аргументов: $x = 2.3 \pm 0.1,\ \ y = 1.4 \pm 0.2$.

$$\frac{\sqrt[4]{3(x+y)^3 + 7x}}{x - y}$$

Задание 3. Вычислить и оценить доверительный интервал, относительную и абсолютную погрешности вычислений составной величины X

$$X = \frac{ab}{\sqrt[3]{c+a}}$$

Контрольные вопросы

1. Укажите причины возникновения погрешностей вычислений на цифровых ЭВМ.
2. Оцените значения машинного эпсилон, нуля и бесконечности для используемой Вами компьютерной программы по математике.
3. Дайте определение следующим понятиям: доверительный интервал, абсолютная погрешность, относительная погрешность.
4. Сформулируйте правила усечения точных чисел. Что понимают под понятиями: «верная цифра», «сомнительная цифра»?
5. Каковы причины возникновения катастрофы потери верных знаков?
6. Сформулируйте правила округления операций по А.Н. Крылову.
7. Сформулируйте методы оценки погрешности математических операций.

Лабораторная работа 2

Этапы вычислительного эксперимента

Задание 1. Используя меню символьных вычислений MathCAD, представить подынтегральную функцию в виде разложения по функциям, интегралы от которых берутся аналитически. 2. Провести символьное интегрирование полученного выражения.

3. Используемый алгоритм оптимизировать так, чтобы погрешность вычисления искомого интеграла не превышала 0.1%. $\int_{0}^{1} \frac{\sin(x)}{x} dx$

Контрольные вопросы и задания

1. Укажите причины отличия методов вычислительной математики от классической.

2. Проведите вычислительный эксперимент по установлению зависимости относительной погрешности формулы (2.1) от величины n^{-1}. Сравните полученный график с теоретической формулой:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{n} \cdot \left[1 + \frac{1}{12 \cdot n} + O\left(\frac{1}{n^{2}}\right)\right].$$

3. Оцените среднее время счета в MathCAD определителей размером $n = 10, 40, 160$.

4. Укажите содержание основных этапов вычислительного эксперимента в вычислительной математике.

5. Решите различными способами задачи, приведенные в примерах раздела 2.3.

Лабораторная работа 3

Методы решения СЛАУ

Задание 1. Записать матрицы в книге Excel, отформатировать ячейки, сохранить книгу. 2. Организовать в MathCAD связь с данными ячеек сохраненной книги Excel. 3. Выполнить в MathCAD указанные в колонке «Вычислить» операции, передать результаты в книгу Excel. 4. Решить относительно X алгебраическим методом следующие уравнения: $A \cdot X = C$, $2 \cdot B \cdot X + 3 \cdot C = 0$. 5. Найти корни уравнений п.4 с помощью формул Крамера.

1	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$A \cdot B - B \cdot A$ $2(A + B)(2B - A^{-1})$

Задание 2. Записать СЛАУ в матричной форме. 2. Исследовать на совместимость систему уравнений. 3. Используя оператор $rref(A)$ решить СЛАУ с относительной погрешностью не хуже 0,01%.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 6, \\ x - y - 2z - 3t = 8, \\ x + 2y - z + 2t = 4, \\ 2x - 3y + 2z + t = -5. \end{cases}$$

Задание 3. Решить систему $A \cdot X = C$ используя: а) метод $lsolve$ (точный алгоритм Гаусса); б) вычислительный блок $Given \,/\, Find$ (приближенный итерационный алгоритм). 2. Вычислить число обусловленности системы. 3. Провести вычислительный эксперимент по исследованию зависимости корней уравнений $A \cdot X = C$ от вариации правой части СЛАУ. Сравнить результаты с формулой (3.9)

Решить систему $AX = C$ двумя способами	Вычислить число обусловленности. Провести вычислительный эксперимент.
$A = \begin{pmatrix} 3.0 & -1.05 & 2.5 \\ 4.3 & 0.56 & -1.7 \\ -0.83 & -0.54 & 1.47 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2.1 \\ -1.8 \\ 1.3 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3.01 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Контрольные вопросы и задания

1. Укажите общее и особенное в интерфейсах управления математическими вычислениями в программах MathCAD и Excel на примерах из физики, техники, экономики, метрологии.

2. Запишите матрицу 5×3 в книге Excel и организуйте передачу данных из этой книги на рабочий лист MathCAD.

3. Используя законы матричной алгебры, выведите основные формулы решения СЛАУ методом обратной матрицы.

4. Какие свойства СЛАУ определяет ранг основной и расширенной матриц?

5. Что такое число обусловленности СЛАУ и его практическое значение?

Лабораторная работа 4

Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Задание 1. Решить ОДУ методом Эйлера для $n = 10$. 2. Решить ОДУ методом Эйлера - Коши для $n = 10$. 3) Используя правило Рунге, провести вычислительный эксперимент, по оценке погрешности полученных решений задачи Коши. Рассмотреть граничную задачу Коши.

ОДУ	$[a,b]$	C
$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{5}}$	$[1.8; 2.8]$	2.6

Лабораторная работа 5

Рекуррентные методы решения нелинейных уравнений. Графический способ выделения корней

Задание 1. Графически выделить области расположения до двух минимальных по модулю корней уравнения. 2. Используя процесс линзирования вычислить корни с точностью до двух верных цифр. 3. Решить уравнение методом дихотомии. 4. Решить уравнение методом Ньютона. 5. Решить уравнение методом хорд. Погрешность вычисления корней в заданиях (3 – 5) принять равной 0.1%.

№	уравнение	№	уравнение
1	$x - \sin x = 0.3$	2	$x \cdot \ln(x+1) = 0.3$

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте основную теорему алгебры. Можно ли найти комплексные корни графическим методом?
2. Покажите, что формула Герона (4.2) следует из метода касательных Ньютона.
3. Перечислите методы MathCAD позволяющие вычислить вещественные корни алгебраических уравнений.
4. Перечислите методы MathCAD позволяющие вычислить и вещественные и комплексные корни алгебраических уравнений.
5. Символически решить квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

Лабораторная работа 6

Методы аппроксимации данных и функций

Задание 1. Разложить функцию в ряд Тейлора вблизи точек $a = 0,\ 0.5$ до членов степени x^4 . 2. Для заданной функции найти диагональную аппроксимацию Паде размером 2×2 3. Построить сравнительные графики функции и аппроксимаций

$$\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}$$

Задание 2. 1. Вычислить неизвестные значения табличной функции, используя формулу Лагранжа. 2. Вычислить неизвестные значения табличной функции, используя кубические сплайны трех видов. 3. Построить сравнительные графики интерполяций. 4. Известно, что моделируется функция $y(x) = A \cdot e^{-\gamma \cdot x} \cdot \sin(\omega x)$. Определить по данным интерполяции параметры: A – амплитуда, γ – затухание, ω – частота.

x	0,00	1,01	2,04	3,09	4,16	5,25	6,36	7,49	3	6
y	0,00	1,76	0,70	-1,20	-0,94	0,75	0,93	-0,47	?	?

Задание 3. Провести линейный регрессивный анализ данных: а) используя формулы (6.9) – (6.12); б) с помощью функций MathCAD. 2. Подобрать вид линии тренда в Excel с наибольшим значением R^2. 3. Построить сравнительные графики.

Числовые данные для линейного регрессивного анализа

1	x	0,71	0,57	1,01	2,50	2,31	2,63	3,19	3,88	4,68
	y	-2,08	-0,26	-4,17	-12,28	-13,64	-11,64	-18,92	-24,02	-25,18

Числовые данные для определения оптимальной линии тренда

1	x	0,5	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
	y	10,00	50,10	39,58	15,40	23,68	33,60	57,78	100,90

Контрольные вопросы и задания

1. В чем состоит различие и сходство понятий: аппроксимация, интерполяция?

2. Приведите определение и сформулируйте практическую значимость Паде аппроксимации.

3. Заполните свободные клетки таблицы

4. Выведите формулы (6.9), (610).

Приведение функции к линейной форме

Функция аппроксимации	Замена переменной
$y = a \cdot \exp(b \cdot x)$	$Y = \ln(y)$, $X = x$, $A = \ln(a)$, $B = b \to Y = A + B \cdot X$
$y = \frac{a}{1 + b \cdot x}$	

$y = \frac{a \cdot x}{1 + b \cdot x}$	
$y = a \cdot x^n$	
$y = a + b \cdot \ln(x)$	

Лабораторная работа 7

Вычисление сумм и интегралов

Задание 1. Для $x = 10$ подсчитать сумму ряда с помощью операторов суммирования MathCAD. 2. Для $x = 10$ найти сумму ряда с помощью рекуррентного уравнения. 3. Построить график зависимости суммы ряда как функции от верхнего предела x. 4. Найдите аналитической вид функциональной этой зависимости для $x >> 1$.

Примечание. Вычисление сумм проводить с погрешностью не хуже 0.1%.

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{5n + 5}{4n^3 - 1}$$

Задание 2.

1. Вычислить определенный интеграл с помощью функций MathCAD.

2. Провести вычислительный эксперимент, по оценке погрешности метода трапеций.

3. Провести вычислительный эксперимент, по оценке погрешности квадратурной формулы Симпсона.

4. Оценить значение определенного интеграла с погрешностью не хуже 0.1%, используя квадратурные формулы (7.3) или (7.4).

5. Сравнить результаты вычисления интеграла, полученные разными методами, друг с другом.

Примечание. Для оценки точности используйте правило Рунге (7.8). Вычисления удобно проводить в интегрированной среде MathCAD&Excel.

0	1	$arctg(x)$

Задание 3. Вычислить интеграл методом математического ожидания. 2. Вычислить интеграл методом геометрической вероятности. 3. Найти численное значение интеграла с точностью 0.01% средствами палитры инструментов MathCAD. 4. Провести для одного из методов Монте-Карло вычислительный эксперимент по зависимости относительной погрешности от N – объема массива псевдослучайных чисел. 5. Полученные в опыте данные проанализируйте на основе закона больших чисел.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение интеграла по Риману.
2. Выведите формулу (7.4).
3. Объясните, почему при увеличении числа слагаемых n в квадратурной формуле погрешность численного вычисления определенного интеграла вначале уменьшается, а затем, начиная с некоторого n^*, монотонно возрастает?
4. Оцените n^* для формулы трапеций.
5. Приведите признаки равномерного распределения случайной величины.
6. Выведите формулу (7.10).
7. Оцените время счета интеграла, из примера рис.7.5, по формуле трапеций с погрешностью 1%.

Приложение №3

ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕМАМ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Тема 1. Элементы теории погрешностей
Тема 2. Решение систем линейных алгебраических уравнений
Тема 3. Решение рекуррентных уравнений
Тема 4.Решение нелинейных алгебраических уравнений
Тема 5. Интерполяционные полиномы Лагранжи и Ньютона.
Тема 6. Метод наименьших квадратов
Тема 7. Интерполирование функций. Сплайны
Тема 7. Квадратурные формулы

Задания по теме 1.

Вариант 1

Для определения ускорения силы тяжести с помощью колебания маятника пользуются формулой $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$. Как отразится на значении g относительная погрешность при изменении периода Т?

Вариант 2

Определить относительную погрешность при вычислении поверхности сферы, если при определении ее радиуса относительная погрешность составила 1%.

Вариант 3

Насколько приблизительно изменится (в процентах) сила тока в проводнике, если его сопротивление увеличится на 1%?

Вариант 4

Насколько приблизительно следует изменить длину маятника l=20 см, чтобы период колебаний маятника увеличился на 0,05 с? Период Т определяется формулой $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Вариант 5

Как отразится на значении объема шара относительная погрешность при изменении его радиуса?

Задания по теме 4.

Решить уравнение методом итераций с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$. Построить для этого уравнения заведомо расходящийся процесс. Показать геометрическую интерпретацию метода итераций.

Вариант 1

$x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$

Вариант 2

$x = tgx$

Вариант 3

$x^4 - 2x - 4 = 0$

Вариант 4

$x + e^x = 0$

Вариант 5

$x^3 - 12x - 5 = 0$.

Задания по темам 5, 6

Вариант 1

Функция задана таблицей значений

x	1	2	3
y	3	5	6

Составить интерполяционный многочлен Лагранжа. Найти P(2,5).

Вариант 2

Функция задана таблицей значений

x	1	2	3
y	3	5	6

Предполагая, что зависимость $y(x)$ линейная, $y = ax + b$, методом наименьших квадратов найти значения параметров a и b .

Вариант 3

Зная квадраты чисел 5, 6, 7, найти квадрат числа 6,5, используя интерполяционный многочлен Лагранжа.

Вариант 4

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу вида $y = ae^{bx}$ для зависимостих*и* *y*, заданной таблицей

x	2,2	2,7	3,5	4,1
y	67	60	53	50

Вариант 5

Зная квадраты чисел 3, 4, 5, 6, найти квадрат числа 3,5, используя интерполяционный многочлен Лагранжа.

Задания по теме 7

Вариант 1

Вычислить интеграл $\int_1^2 \sqrt{x}\,dx$ по формуле прямоугольников, разбив интервал интегрирования на 10 частей. Оценить погрешность. Сравнить со значением, вычисленным по формуле Ньютона-Лейбница.

Вариант 2

Вычислить интеграл $\int_1^2 \sqrt{x}\,dx$ по формуле трапеций, разбив интервал интегрирования на 10 частей. Оценить погрешность. Сравнить со значением, вычисленным по формуле Ньютона-Лейбница.

Вариант 3

Вычислить интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ по формуле Симпсона, разбив интервал интегрирования на 10 частей. Оценить погрешность.

Вариант 4

Найти объем прямоугольного кругового конуса с радиусом основания R высотой H по формуле Симпсона (n=2), если площадь его сечения $s(x) = \pi \frac{R^2}{H^2} x^2$.

Вариант 5

Вычислить интеграл $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ по формуле трапеций с точностью до 0,01, приняв $n = 4$.

Приложение №4

ТИПОВОЙ ВАРИАНТ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ (ЗАОЧНАЯ ФОРМА)

Контрольная работа состоит из двух частей – практической, т.е. решения и оформления предложенных задач, и теоретической в виде ответа на теоретические вопросы.

А) Каждый студент *вначале должен решить контрольные задачи, для чего определить* ***параметр*** *своего контрольного задания* ***S.***

Задания:

1. Приближенное решение уравнения

Методом Ньютона или хорд найти корень уравнения $x^3 + 2x^2 - 13x - 5 + \mathbf{S} = 0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$. ***S* = (N + 1)**, где **N** – значение последней цифры зачетки.

2. Метод наименьших квадратов

Построить по методу наименьших квадратов многочлены первой и второй степени и оценить степень приближения. ***S*** выбирают, как в задаче 1.

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
x_i	**20**	**25**	**30**	**35**	**40**	**45**	**50**
y_i	**19 + s**	**17 + s**	**21 + s**	**18 + s**	**22 + s**	**27 + s**	**30 + s**

3. Численное интегрирование

Вычислить приближенно по формуле прямоугольников, трапеций или Симпсона интеграл $\int_0^1 \frac{xdx}{1 + sx}$ с шагом h = 0,1. S = $\mathbf{log_{10}(2 + \sqrt{\mathit{k}})}$, где k – сумма последней и предпоследней цифр зачетной книжки.

4. Численные методы решения дифференциальных уравнений

Методом Эйлера и Рунге-Кутта найти численное решение задачи Коши $y'(t) = y - \frac{2t}{y}$, $y(0) = 1 + 10S$, на отрезке [0, 1] с шагом $h = 0.2$. Параметр S выбирается аналогично задаче 3.

В контрольной работе допустимо решение задач с использованием калькулятора, пакета MathCAD или Excel.

Б) В**опросы, на которые необходимо дать ответ (желательно в виде реферата объемом 6–8 страниц).** Вариант по первой теме выбирается по последней цифре зачетки, а по второй – по предпоследней цифре.

Тема 1. Понятие погрешности. Решение уравнений

1. Понятие численных методов.
2. Классификация нелинейных уравнений.
3. Исследование уравнений и отделение корней.
4. Методы решения. Понятие итерации.
5. Источники погрешности решения задач на ЭВМ.
6. Дать описание алгоритма метода половинного деления.
7. Необходимые условия сходимости метода половинного деления.
8. Условие окончания счета метода простой итерации. Погрешность метода.

9. Описание алгоритма метода хорд. Графическое представление метода. Вычисление погрешности.

0. Описание алгоритма метода касательных (Ньютона). Графическое представление метода. Условие выбора начальной точки.

Тема 2. Численное интегрирование. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

1. Постановка задачи численного интегрирования.
2. Метод средних прямоугольников.
3. Метод трапеций.
4. Метод Симпсона (метод парабол).
5. Правило Рунге практической оценки погрешности.
6. Метод Монте-Карло.
7. Опишите решение задачи Коши методом Эйлера.
8. Опишите решение задачи Коши модифицированным методом Эйлера.
9. Опишите решение задачи Коши методом Рунге-Кутты.
0. Что такое порядок точности метода и как он связан с его эффективностью? Приведите примеры методов разных порядков.

Приложение №5

ТИПОВЫЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Погрешности вычислений. Абсолютная и относительная погрешности. Ошибки арифметических действий. Оценка погрешностей значений функции.
2. Постановка задачи аппроксимации функций. Существование и единственность интерполяционного многочлена.
3. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Погрешность алгебраической интерполяции.
4. Интерполяционные формулы Ньютона.
5. Интерполяция сплайнами.
6. Метод наименьших квадратов и наилучшие среднеквадратические приближения. Нахождение приближающей функции в виде различных элементарных функций.
7. Численные методы решения алгебраических и трансцендентных уравнений. Постановка задачи. Отделение корней, уточнение приближенных корней.
8. Метод простой итерации. Достаточное условие сходимости. Скорость сходимости. итерационного процесса.
9. Метод половинного деления. Геометрическая интерпретация.
10. Метод касательных. Геометрическая интерпретация.
11. Метод хорд. Геометрическая интерпретация.
12. Комбинированный метод хорд и касательных.
13. Приближенные методы решения систем линейных и нелинейных уравнений.
14. Задача численного интегрирования. Квадратурные формулы прямоугольников. Геометрическая интерпретация.
15. Квадратурные формулы трапеций. Геометрическая интерпретация. Остаточный член формулы трапеций.
16. Квадратурные формулы Симпсона. Геометрическая интерпретация. Остаточный член формулы Симпсона.
17. Метод Монте-Карло. Вычисление интегралов методом Монте-Карло.
18. Дифференциальные уравнения первого порядка и методы их решения. Теорема существования и единственности, геометрический смысл.
19. Метод Эйлера, геометрическая интерпретация. Модифицированный метод Эйлера.
20. Метод Рунге-Кутта, геометрическая интерпретация.
21. Метод разложения решения в степенной ряд.

ТИПОВЫЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Вычислить интеграл $\int_1^2 \sqrt{x}\,dx$ по формуле трапеций, разбив интервал интегрирования на 10 частей. Оценить погрешность. Сравнить со значением, вычисленным по формуле Ньютона-Лейбница.
2. Функция задана таблицей значений

x	1	2	3	4	5	6

y	2	4,9	7,9	11,1	14,1	17

Предполагая, что зависимость $y(x)$ линейная, $y = ax + b$, методом наименьших квадратов найти значения параметров a и b.

3. Определить относительную погрешность при вычислении поверхности сферы, если при определении ее радиуса относительная погрешность составила 1%.

4. Насколько приблизительно изменится (в процентах) сила тока в проводнике, если его сопротивление увеличится на 1%?

5. Насколько приблизительно следует изменить длину маятника *l*=20 см, чтобы период колебаний маятника увеличился на 0,05 с? Период Т определяется формулой $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

6. Решить уравнение методом итераций с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$. Построить для этого уравнения заведомо расходящийся процесс. Показать геометрическую интерпретацию метода итераций.

а) $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$

б) $x = tgx$

в) $x^4 - 2x - 4 = 0$

г) $x + e^x = 0$

д) $x^3 - 12x - 5 = 0$.

7. Функция задана таблицей значений

x	1	2	3
y	3	5	6

Составить интерполяционный многочлен Лагранжа. Найти Р(2,5).

8. Зная квадраты чисел 5, 6, 7 найти квадрат числа 6,5, используя интерполяционный многочлен Лагранжа.

9. Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу вида $y = ae^{bx}$ для зависимости *x* и *y*, заданной таблицей

x	2,2	2,7	3,5	4,1
y	67	60	53	50

10. Вычислить интеграл $\int_1^2 \sqrt{x}\,dx$ по формуле прямоугольников, разбив интервал интегрирования на 10 частей. Оценить погрешность. Сравнить со значением, вычисленным по формуле Ньютона-Лейбница.

11. Вычислить интеграл $\int_1^2 \sqrt{x}\,dx$ по формуле трапеций, разбив интервал интегрирования на 10 частей. Оценить погрешность. Сравнить со значением, вычисленным по формуле Ньютона-Лейбница.

12. Вычислить интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ по формуле Симпсона, разбив интервал интегрирования на 10 частей. Оценить погрешность.

13. Найти объем прямоугольного кругового конуса с радиусом основания R высотой H по формуле Симпсона (*n*=2), если площадь его сечения $s(x) = \pi\frac{R^2}{H^2}x^2$.

14. Вычислить интеграл $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ по формуле трапеций с точностью до 0,01, приняв $n = 4$.

15. Найти приближенное решение уравнения $y' = x + y^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

16. Найти приближенное решение уравнения $y' = x + y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$.

17. Найти три последовательных приближенных решения уравнения $y' = x^2 + y^2$, удовлетворяющих начальному условию $y(0) = 0$, взяв за начальное приближение $y = 0$.

18. Методом Эйлера найти четыре значения функции y, определяемой уравнением $y' = x + y$, при начальном условии $y(0) = 1$, полагая h= 0,1.

19. Методом Эйлера найти четыре значения функции y, определяемой уравнением $y' = x^2 + y^2$, при начальном условии $y(0) = 0$, полагая h= 0,1.

Образец экзаменационного билета

Специальность:	15.03.01
Дисциплина:	Численные методы
Семестр:	2
Кафедра:	ПМИТ

<table>
<tr><td>1.</td><td>Существование и единственность интерполяционного многочлена.</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Метод Эйлера приближенного решения дифференциальных уравнений</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>1. Вычислить интеграл $\int_1^2 \sqrt{x}\,dx$ по формуле трапеций, разбив интервал интегрирования на 10 частей. Оценить погрешность. Сравнить со значением, вычисленным по формуле Ньютона-Лейбница.
2. Функция задана таблицей значений
<table><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>y</td><td>2</td><td>4,9</td><td>7,9</td><td>11,1</td><td>14,1</td><td>17</td></tr></table>Предполагая, что зависимость $y(x)$ линейная, $y = ax + b$, методом наименьших квадратов найти значения параметров a и b.
3. Найти приближенное решение уравнения $y' = x + y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$.</td></tr>
</table>