Федеральное агентство по рыболовству
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Калининградский государственный технический университет»
(ФГБОУ ВО «КГТУ»)

Начальник УРОПСП
В.А. Мельникова

Фонд оценочных средств
(приложение к рабочей программе модуля)

ДИСКРЕНАЯ МАТЕМАТИКА

основной профессиональной образовательной программы бакалавриата
по направлению подготовки

15.03.04 АВТОМАТИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ПРОИЗВОДСТВ

ИНСТИТУТ Институт цифровых технологий

ВЫПУСКАЮЩАЯ КАФЕДРА Кафедра автоматизации производственных процессов

1 РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Таблица 1 – Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с установленными индикаторами достижения компетенций

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции	Дисциплина	Результаты обучения (владения, умения и знания), соотнесенные с компетенциями/индикаторами достижения компетенции
ОПК-1: Применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности	ОПК-1.6: Использует аппарат дискретной математики при разработке математических моделей в профессиональной деятельности.	Дискретная математика	*Знать:* - базовые законы и формулы логики высказываний, пропозиционального исчисления, исчисления предикатов, методы построения и анализа логических функций, упрощения и преобразования плоских графов, оптимизации сетевых потоков, построения сетевых планов; *Уметь:* - составлять и упрощать логические функции, применять теорию графов и автоматов для моделирования дискретных процессов, строить простые модели сетевых планов и потоков; *Владеть:* -специальной терминологией дисциплины, базовыми методами логического анализа, моделирования реальных ситуаций в терминах графов и сетей.

2 ПЕРЕЧЕНЬ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПОЭТАПНОГО ФОРМИРОВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (ТЕКУЩИЙ КОНТРОЛЬ) И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

2.1 Для оценки результатов освоения дисциплины используются:

- оценочные средства текущего контроля успеваемости;
- оценочные средства для промежуточной аттестации по дисциплине.

2.2 К оценочным средствам текущего контроля успеваемости относятся:

- тестовые задания;
- задания по темам практических занятий;
- индивидуальные домашние задания.

2.3 Оценочные средства для промежуточной аттестации по дисциплине, проводимой в форме зачета, относятся:

- задания по контрольным работам;
- контрольные вопросы.

3 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ

3.1 Тестовые задания

Тестовые задания предназначены для оценки в рамках текущего контроля успеваемости знаний, приобретенных студентами на лекционных и практических занятиях и для измерения соответствующих индикаторов достижения компетенции.

3.1.1. Содержание оценочных средств.

Каждый вариант теста содержит 20 заданий закрытого типа с возможностью одиночного выбора правильного ответа.

Содержание теста определяется в соответствии с содержанием дисциплины пропорционально учебному времени, отведенному на изучение разделов, перечисленных в рабочей программе модуля.

Время выполнения итогового теста 60 мин.

Варианты тестовых заданий приведены в Приложении № 1.

3.1.2. Методические материалы, определяющие процедуры использования оценочных средств.

Оценка «зачтено» выставляется при правильном выполнении не менее 75% заданий.

Оценка «не зачтено» выставляется при правильном выполнении менее 75% заданий.

3.2 Задания по темам практических занятий

3.2.1. Содержание оценочных средств.

Темы практических занятий, их содержание, цели, методические рекомендации к занятиям, необходимый теоретический материал, образцы решения типовых задач и задания для самостоятельного решения с ответами представлены в учебно-методическом пособии:

Алексеева С.М., Руденко А.И. Дискретная математика: учебно-методическое пособие для студентов заочной формы обучения направления 230100 «Информатика и вычислительная техника - Калининград: Изд-во БГАРФ, 2012. – 134 с.

Образцы заданий по темам практических занятий по дисциплине представлены в Приложении №2.

3.2.2. Методические материалы, определяющие процедуры использования оценочных средств.

Шкала оценивания результатов выполнения заданий основана на четырехбальной системе.

Оценка «отлично» выставляется в случае, если задания выполнены по правильным формулам и алгоритмам и без ошибок.

Оценка «хорошо» выставляется в случае, если задания выполнены по правильным формулам и алгоритмам, но с некоторыми ошибками.

Оценка «удовлетворительно» выставляется в случае, если задания выполнены по правильным формулам и алгоритмам, но со множеством ошибок.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется в случае, если задания выполнены с использованием неправильных алгоритмов и формул.

Результаты измерений индикатора считаются положительными при положительной оценке за выполнение задания.

3.3 Индивидуальные домашние задания

3.3.1. Содержание оценочных средств

Индивидуальные домашние задания (типовые расчеты), методические рекомендации, необходимый теоретический материал и образцы решения представлены в учебно-методическом пособии:

- Гаврилов, Г.П. Задачи и упражнения по дискретной математике : [учеб. пособие] / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. - Изд. 3-е, перераб. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 416 с.;

- Алексеева С.М., Руденко А.И. Дискретная математика: учебно-методическое пособие для студентов заочной формы обучения направления 230100 «Информатика и вычислительная техника - Калининград: Изд-во БГАРФ, 2012. – 134 с.

Индивидуальное домашние задание №1 по теме «Множества» *(Множества и операции над ними. Диаграммы Венна. Декартово произведение множеств. Отношения. Свойства отношений. Способы задания отношений. Композиция отношений.)* включает 3 – 5 заданий.

Индивидуальное домашние задание №2 по теме «Алгебраические структуры» (*Алгебраические операции на множестве. Алгебры и модели. Группы, кольца, поля, пространства. Кольца и поля вычетов. Решение уравнений в* Z_n. *Модулярная арифметика. Решётки и булевы алгебры. Изоморфизм алгебр.)* включает 4 – 5 заданий.

Индивидуальное домашние задание №3 по теме «Оптимальные задачи теории графов» (*Алгоритм Дейкстры нахождения кратчайшего пути. Алгоритм Прима построения остова минимального веса. Алгоритм Форда-Фалкерсона нахождения максимального потока.*) включает 4 – 5 заданий.

Образцы индивидуальных домашних заданий (типовых расчетов) представлены в Приложении №3.

Целью выполнения индивидуальных домашних заданий является формирование умений и навыков по решению практических заданий по основным темам дисциплины. Индивидуальные домашние задания предусмотрены рабочей программой дисциплины и используются для контроля освоения материала рассматриваемых тем дисциплины. Индивидуальные домашние задания выполняются обучающимися во внеаудиторное время в рамках СРС.

3.3.2 Методические материалы, определяющие процедуры использования оценочных средств

Оценка результатов выполнения каждого индивидуального домашнего задания производится при представлении студентом полностью выполненных (без ошибок) заданий по тематике индивидуального домашнего задания («защита» индивидуального домашнего задания). Студент, правильно выполнивший индивидуальное домашнее задание и продемонстрировавший знание использованных им приемов и методов решения задач, получает по индивидуальному домашнему заданию оценку «зачтено».

4 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

4.1 Содержание оценочных средств промежуточной аттестацией по дисциплине семестр является зачет.

К зачету допускается студент

– выполнивший задания по практическим занятиям;
– выполнивший более 80 % домашних индивидуальных домашних заданий за семестр (по каждому разделу дисциплины);
– выполнивший контрольную работу (заочная форма обучения).

4.2 Задания к контрольной работе (для очной формы).

Контрольная работа используются для контроля освоения основного материала рассматриваемых тем дисциплины. Выполнение обучающимися заочной формы контрольной работы проводится на занятиях после рассмотрения на лекциях и практических занятиях соответствующих тем и (или) самостоятельной проработки учебного материала в рамках СРС.

В приложении №4 приведен типовой вариант контрольной работы с типовыми заданиями по темам.

Оценка результатов выполнения контрольной работы производится при представлении студентом полностью выполненных (без ошибок) заданий по темам. Студент, правильно выполнивший контрольную работу, получает оценку «зачтено».

4.3. Контрольные вопросы и задания для подготовки к зачету.

В приложении №5 приведены типовые контрольные вопросы и практические задания для подготовки к зачету.

Зачет включает в себя развернутые ответы на два вопроса (в письменной или устной форме) и одного практического задания, краткие ответы на 3 – 5 дополнительных вопросов (устно) и выполнение практического задания по материалам практических занятий. Оценка «зачтено» выставляется студенту, твердо знающему программный материал, грамотно и по существу излагающего его, который не допускает существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми приемами их решения.

Шкала итоговой аттестации по дисциплине, то есть оценивания результатов освоения дисциплины на зачете, основана на следующем.

Оценка «зачтено» выставляется в случае, если студент исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно излагает ответы на вопросы, умеет делать обобщения и выводы, владеет основными терминами и понятиями, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, использовал в ответе материал дополнительной литературы, дал правильные ответы на дополнительные вопросы.

Оценка «не зачтено» выставляется в случае, если студент не смог объяснить смысл написанного им при подготовке к ответу текста; не ориентируется в терминологии дисциплины; не может ответить на дополнительные вопросы.

Компетенции в той части, в которой они должны быть сформированы в рамках изучения дисциплины, могут считаться сформированными в случае, если студент получил на зачете положительную оценку.

5 СВЕДЕНИЯ О ФОНДЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ И ЕГО СОГЛАСОВАНИИ

Фонд оценочных средств для аттестации по дисциплине «Дискретная математика» представляет собой компонент основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств.

Фонд оценочных средств рассмотрен и одобрен на заседании кафедры прикладной математики и информационных технологий 04.03.2022г. (протокол № 6).

И.о.заведующего кафедрой А.И.Руденко

Фонд оценочных средств рассмотрен и одобрен на заседании кафедры автоматизации производственных процессов 08.04.2022 г. (протокол № 8).

Заведующий кафедрой А.Н.Румянцев

Приложение №1

ВАРИАНТ №1

Вопрос №1. Закон поглощения имеет вид:

1. $A \cup (A \cup B) = A \cup B$
2. $A \cup (A \cap B) = A$
3. $A \cap (A \cap B) = A \cap B$
4. $A \cup B$

Вопрос №2. Для множеств $A = \{1,2\} и\, B = \{3,4\}$ декартовое произведение $A \times B$ равно:

1. $A \times B = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$
2. $A \times B = \{(1,3),(1,4),(2,2),(2,4)\}$
3. $A \times B = \{(2,3),(4,1),(2,3),(2,4)\}$
4. $A \times B = \{(1,3),(1,4),(2,3),(4,4)\}$

Вопрос №3. Для множеств $A = \{1,2\}$ $и$ $B = \{3,4\}$ $A \cup B$ равно:

1. $A \cup B = \{1,2,3,4\}$
2. $A \cup B = \{\emptyset\}$
3. $A \cup B = \{1\}$
4. $A \cup B = \{2,3,4\}$

Вопрос №4. Из предложенных тождеств выбрать верное:

1. $A \cap B = \left(\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}\right)$
2. $A \cap B = \left(\overline{\overline{A} \cup B}\right)$
3. $A \cap B = \left(\overline{A \cup \overline{B}}\right)$
4. $A \cap B = \left(\overline{A \cup B}\right)$

Вопрос №5. Формула, которая связывает между собой число сочетаний C_n^m и число размещений A_n^m имеет вид:

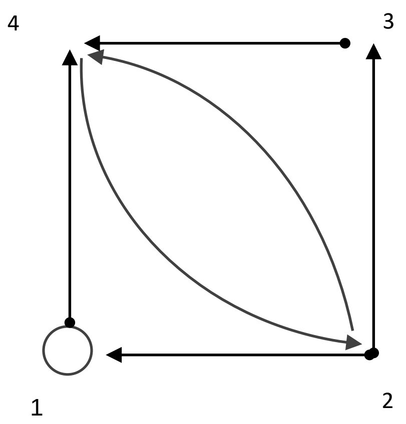
1. $C_n^m = m!\,A_n^m$
2. $C_n^m = (m-1)!\,A_n^m$
3. $C_n^m = \frac{A_n^m}{m!}$
4. $C_n^m = \frac{A_n^m}{(m-1)!}$

Вопрос №6. Сколькими способами можно найти три лица на три одинаковые должности из десяти кандидатов:

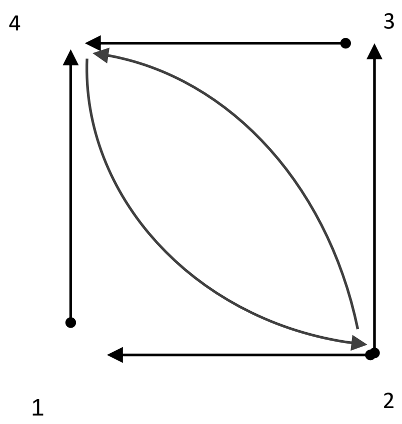
1. 200
2. 720
3. 360
4. 120

Вопрос №7. Дано множество $B = \{1,2,3,4\}$ и отношение на нем: $R_2 \leq B^2$, где $R_2 = \{(1,1),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,4),(4,2)\}$. Тогда граф данного отношения может быть представлен:

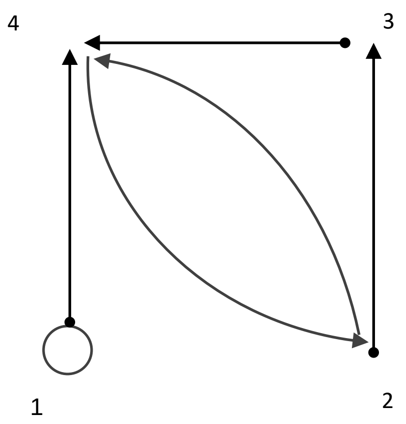
1.



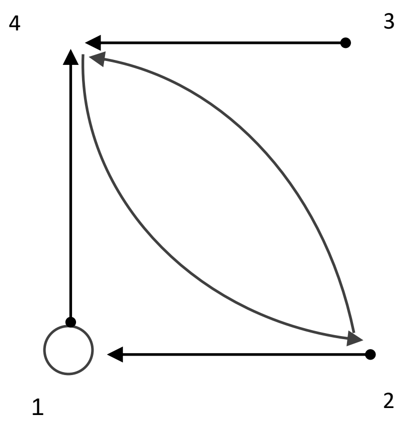
2.



3.



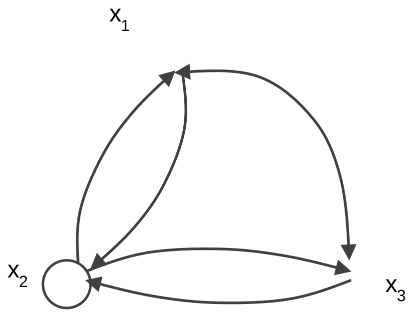
4.



Вопрос №8. Дана матрица бинарного отношения $\|R_2\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Данное отношение обладает свойством:
1. Рефлексивность
2. Симметричность
3. Транзитивность
4. Антисимметричность

Вопрос №9. Какими свойствами обладает отношение, заданное графом (рефлексивность, симметричность, транзитивность):



1. Обладает рефлексивностью, симметричностью, транзитивностью.
2. Не обладает рефлексивностью, обладает симметричностью, не обладает транзитивностью.
3. Не обладает рефлексивностью, симметричностью, транзитивностью.
4. Обладает рефлексивностью, не обладает симметричностью, транзитивностью.

Вопрос №10. Неориентированный граф задан матрицей расстояний

$$A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Тогда эксцентриситет первой вершины равен:

1. 0
2. 1
3. 2
4. 3

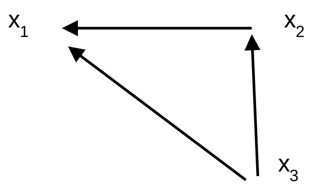
Вопрос №11. Неориентированный граф задан матрицей расстояний

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Тогда радиус данного графа равен:

1. 0
2. 1
3. 2
4. 3

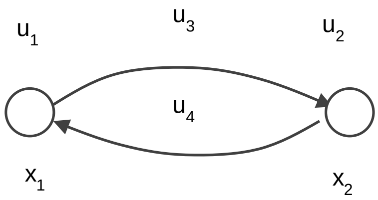
Вопрос №12. Дан ориентированный граф



Тогда матрица смежности будет иметь вид:

1. $A = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$
2. $A = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$
3. $A = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$
4. $A = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

Вопрос №13. Для ориентированного графа, показанного на рисунке, матрица инцидентности имеет вид:



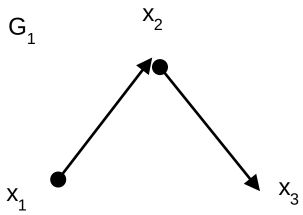
1. $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} +1 & 0 & +1 & -1 \\ 0 & +1 & -1 & +1 \end{pmatrix} \end{array}$$

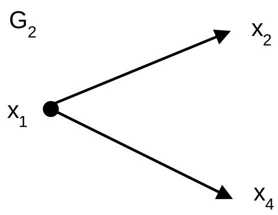
2. $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} +1 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & +1 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} +1 & -1 & +1 & 0 \\ -1 & +1 & 0 & +1 \end{pmatrix} \end{array}$$

4. $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} +1 & -1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & 0 & +1 \end{pmatrix} \end{array}$$

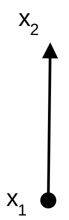
Вопрос №14. Для данных графов





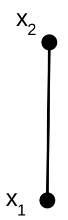
найти граф $G_1 \cap G_2$:

1.

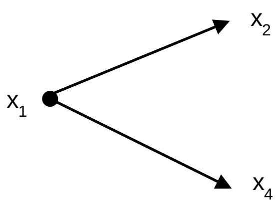


2.

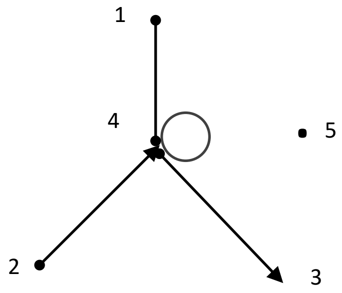
3.



4.



Вопрос №15. Для графа, заданного на рисунке, степень (валентность) вершины 4 равна:



1. 1
2. 2
3. 4
4. 5

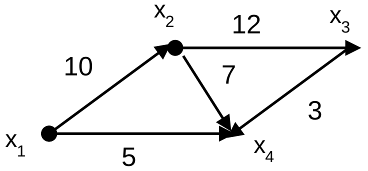
Вопрос №16. Исходя из матрицы системности, возведенной в третью степень,

$$A_G^3 = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Число маршрутов (1,2) длины 3 равно:

1. 0
2. 1
3. 2
4. 3

Вопрос №17. Для графа, представленного на рисунке, соответствующая ему весовая матрица равна:



1. $W = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 10 & \infty & 5 \\ \infty & 0 & 12 & 7 \\ \infty & \infty & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ 2. $W = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 10 & \infty & 6 \\ \infty & 0 & 22 & 8 \\ \infty & \infty & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

3. $W = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} x_1\ x_2\ x_3 x_{4C} \\ \begin{pmatrix} 0 & 10 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 22 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 3 \\ 6 & 8 & \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ 4. $W = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} x_1\ x_2\ x_3 x_4 \\ \begin{pmatrix} 0 & 10 & \infty & 6 \\ \infty & 0 & 22 & 8 \\ \infty & \infty & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

Вопрос № 18. Запишите в символьной форме «Если допоздна работаешь с компьютером (A) и при этом пьешь много кофе (B), то утром просыпаешься в дурном расположении духа»:

1. $A \vee B \to C$
2. $A \wedge B \to C$
3. $A \to B \wedge C$
4. $A \to B \vee C$

Вопрос № 19. Упростите формулу $\overline{(A \wedge B) \wedge C} \to (A \wedge C)$

1. $A \vee B \vee C$
2. $A \vee \overline{B} \vee C$
3. $\overline{A} \vee B \vee C$
4. $A \vee B \vee \overline{C}$

Вопрос № 20. Для формулы $f(x, y) = x|y$ таблица истинности имеет вид:

1.

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	2
1	1	3

2.

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

3.

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

4.

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

ВАРИАНТ №2

Вопрос №1. Закон де Моргана имеет вид:

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
3. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
4. $A|B = A \cap \overline{B}$

Вопрос №2. Для множеств $A = \{1,2\} u B = \{3,4\}$ декартовое произведение $B \times A$ равно:

1. $B \times A = \{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$
2. $B \times A = \{(2,3),(4,1),(4,2),(3,2)\}$
3. $B \times A = \{(3,1),(3,3),(4,1),(4,2)\}$

4. $B \times A = \{(3,1),(3,2),(3,3),(4,1)\}$

Вопрос №3. Для множеств $A = \{1,2\} и\, B = \{3,4\}$ $A \cap B$ равно:

1. $A \cap B = \{\emptyset\}$
2. $A \cap B = \{1,2,3,4\}$
3. $A \cap B = \{1\}$
4. $A \cap B = \{2,3,4\}$

Вопрос №4. Из предложенных тождеств выбрать верное:

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cap C)$
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C)$
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (B \cap C)$

Вопрос №5. Формула для числа размещений из n элементов по m элементов имеет вид:

1. $A_n^m = \frac{n!}{m!}$
2. $A_n^m = \frac{(n-1)!}{n!\,m!}$
3. $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$
4. $A_n^m = \frac{m!\,(m-1)!}{n!}$

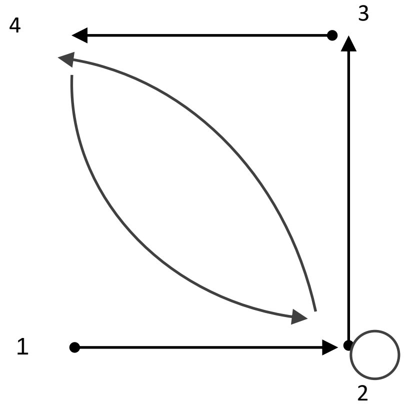
Вопрос №6. На полке 10 книг, среди которых семь книг по математике, две книги по биологии, одна книга по химии. Число перестановок книг на полке равно:

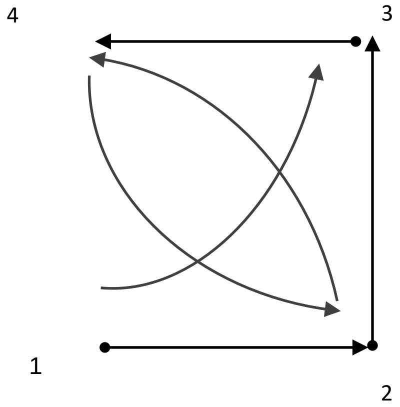
1. 200
2. 720
3. 120
4. 360

Вопрос №7. Дано множество $B = \{1,2,3,4\}$ и отношение на нем: $R_2 \leq B^2$, где $R_2 = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(2,4),(3,4),(4,2)\}$. Тогда граф данного отношения может быть представлен:

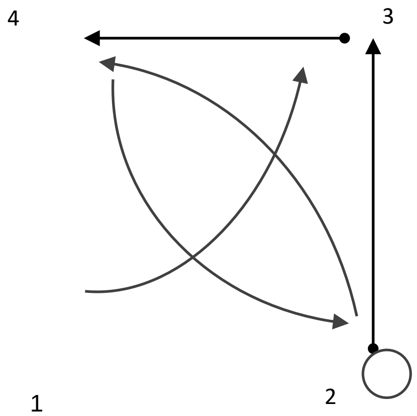
1.

2.

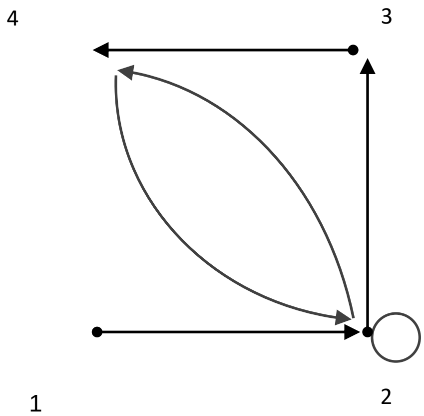




3.



4.

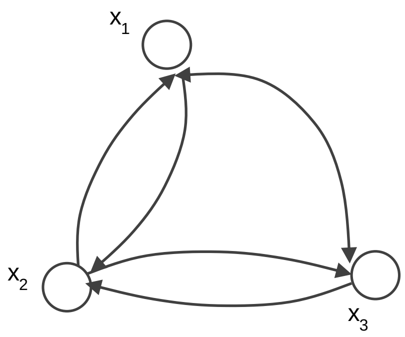


Вопрос №8. Дана матрица бинарного отношения $\|R_2\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Данное отношение обладает свойством:

1. Рефлексивность
2. Симметричность
3. Транзитивность
4. Антисимметричность

Вопрос №9. Какими свойствами обладает отношение, заданное графом (рефлексивность, симметричность, транзитивность):



1. Обладает рефлексивностью, симметричностью, транзитивностью.
2. Не обладает рефлексивностью, обладает симметричностью, не обладает транзитивностью.
3. Не обладает рефлексивностью, симметричностью, транзитивностью.
4. Обладает рефлексивностью, не обладает симметричностью, транзитивностью.

Вопрос №10. Неориентированный граф задан матрицей расстояний

$$A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Тогда эксцентриситет второй вершины равен:

1. 0
2. 1
3. 2
4. 3

Вопрос №11. Неориентированный граф задан матрицей расстояний

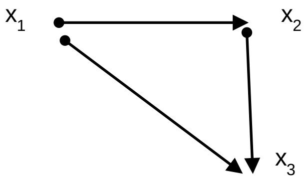
$$A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Тогда диаметр данного графа равен:

1. 0
2. 1

3. 2
4. 3

Вопрос №12. Дан ориентированный граф



Тогда матрица смежности будет иметь вид:

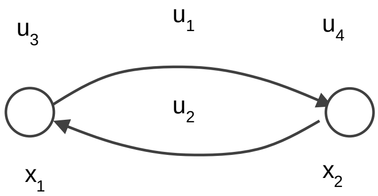
1. $A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

2. $A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

3. $A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

4. $A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

Вопрос №13. Для ориентированного графа, показанного на рисунке, матрица инцидентности имеет вид:



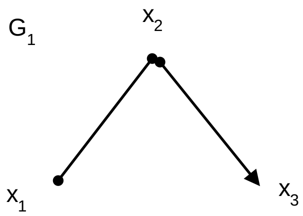
1. $\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} +1 & -1 & +1 & 0 \\ -1 & +1 & 0 & +1 \end{pmatrix} \end{array}$

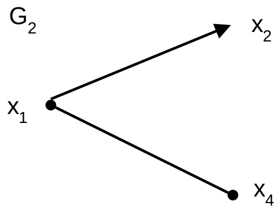
2. $\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} +1 & 0 & +1 & -1 \\ 0 & +1 & -1 & +1 \end{pmatrix} \end{array}$

3. $\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} +1 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & +1 \end{pmatrix} \end{array}$

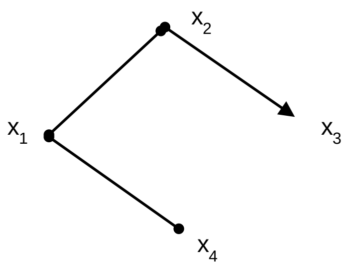
4. $\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} +1 & -1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & 0 & +1 \end{pmatrix} \end{array}$

Вопрос №14. Для данных графов найти граф $G_1 \cup G_2$:

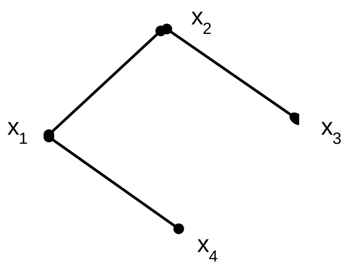




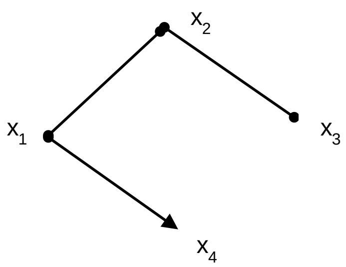
1.



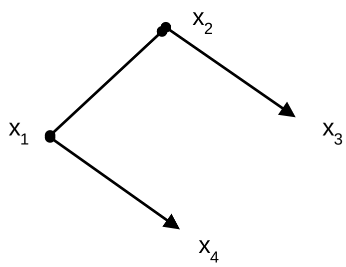
2.



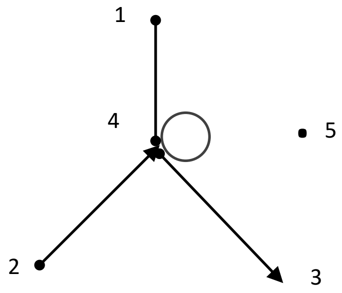
3.



4.



Вопрос №15. Для графа, заданного на рисунке, степень (валентность) вершины 1 равна:



1. 1
2. 2
3. 4
4. 5

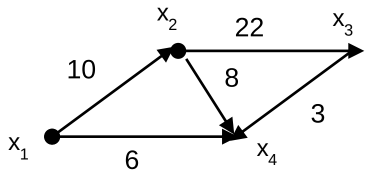
Вопрос №16. Исходя из матрицы системности, возведенной в третью степень,

$$A_G^3 = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} x_1\ x_2\ x_3\ x_4 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Число маршрутов (2,1) длины 3 равно:

1. 0
2. 1
3. 2
4. 3

Вопрос №17. Для графа, представленного на рисунке, соответствующая ему весовая матрица равна:



$$1.\ W = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} x_1\ x_2\ x_3\ x_4 \\ \begin{pmatrix} 0 & 10 & \infty & 6 \\ \infty & 0 & 22 & 8 \\ \infty & \infty & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad 2.\ W = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} x_1\ x_2\ x_3\ x_4 \\ \begin{pmatrix} 0 & 10 & \infty & 5 \\ \infty & 0 & 12 & 7 \\ \infty & \infty & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. $W = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 10 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 22 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 3 \\ 6 & 8 & \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ 4. $W = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 10 & \infty & 6 \\ \infty & 0 & 22 & 8 \\ \infty & \infty & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

Вопрос № 18. Запишите в символьной форме «Если работать добросовестно в течение семестра (А) и выучить все теоретические вопросы по экзамену (В), то обязательно получить отличную оценку на экзамене»:

1. $A \vee B \to C$
2. $A \wedge B \to C$
3. $A \to B \wedge C$
4. $A \to B \vee C$

Вопрос № 19. Упростите формулу $(A \wedge B) \wedge C \to (A \wedge C)$:

1. $A \vee B \vee C$
2. $1 \vee \overline{B}$
3. $\overline{A} \vee B \vee C$
4. $A \vee B \vee \overline{C}$

Вопрос № 20. Для формулы $f(x, y) = x \oplus y$ таблица истинности имеет вид:

1.

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	2
1	1	3

2.

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

3.

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

4.

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

ВАРИАНТ №3

Вопрос №1. Закон дистрибутивности имеет вид:

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
3. $A \cup (\overline{B} \cup C) = (A \cup \overline{B}) \cup (A \cup C)$
4. $\overline{A} \cap (B \cap C) = (\overline{A} \cap C) \cap (\overline{A} \cap B)$

Вопрос №2. Для множеств $A = \{2,3\} u B = \{4,5\}$декартово произведение $A \times B$ равно:

1. $A \times B = \{(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$
2. $A \times B = \{(4,2),(2,5),(3,4),(3,5)\}$
3. $A \times B = \{(1,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$
4. $A \times B = \{(2,4),(2,5),(3,4),(5,5)\}$

Вопрос №3. Для множеств $A=\{2,3\} u\, B=\{4,5\}$ $A \setminus B$ равно:

1. $A \setminus B = \{2,3\}$
2. $A \setminus B = \{\emptyset\}$
3. $A \setminus B = \{1\}$
4. $A \setminus B = \{4,5\}$

Вопрос №4. Из предложенных тождеств выбрать верное

1. $(\overline{A} \cup B) = \left(\overline{A \cap \overline{B}}\right)$
2. $(\overline{A} \cup B) = \left(\overline{\overline{A} \cup B}\right)$
3. $(A \cup B) = \left(\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}\right)$
4. $(\overline{A} \cup B) = \left(\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}\right)$

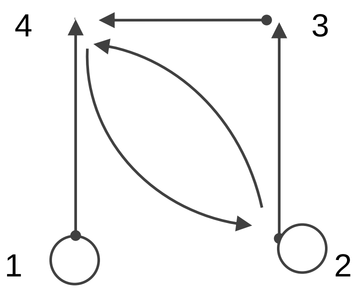
Вопрос №5. Формула для числа сочетаний из n элементов по m имеет вид:

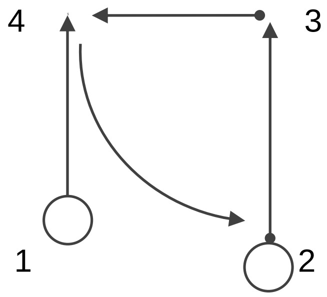
1. $C_n^m = \frac{n!}{m!}$
2. $C_n^m = \frac{(n-1)!}{n!\,m!}$
3. $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$
4. $C_n^m = \frac{m!(m-1)!}{n!}$

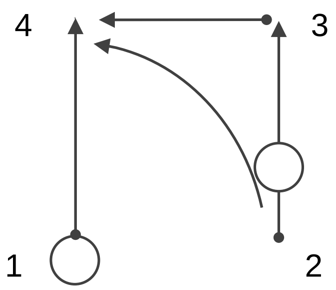
Вопрос №6. Сколькими различными способами можно выбрать три лица на три различные должности из десяти кандидатов:

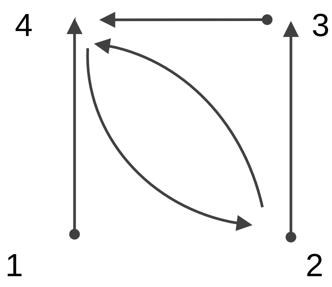
1. 200
2. 120
3. 360
4. 720

Вопрос №7. Дано множество $B = \{1,2,3,4\}$ и отношение на нем: $R_2 \leq B^2$, где $R_2 = \{(1,1),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,4),(4,2)\}$. Тогда граф данного отношения может быть представлен …







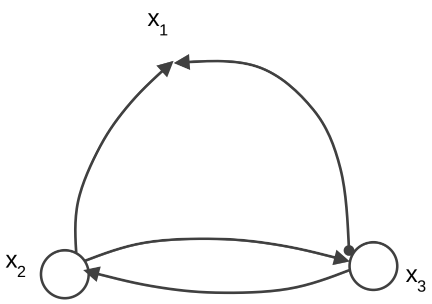


Вопрос №8. Дана матрица бинарного отношения $\|R_2\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Данное отношение обладает свойством:

5. Рефлексивность
6. Симметричность
7. Транзитивность
8. Антисимметричность

Вопрос №9. Какими свойствами обладает отношение, заданное графом (рефлексивность, симметричность, транзитивность)



1. Обладает рефлексивностью, симметричностью, транзитивностью.
2. Не обладает рефлексивностью, обладает симметричностью, не обладает транзитивностью.
3. Не обладает рефлексивностью, симметричностью, транзитивностью.

4. Обладает рефлексивностью, не обладает симметричностью, транзитивностью.

Вопрос №10. Неориентированный граф задан матрицей расстояний

$$A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Тогда эксцентриситет третьей вершины равен …

1. 0
2. 1
3. 2
4. 3

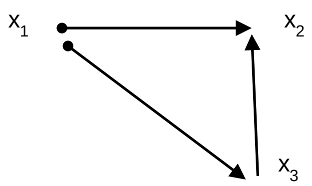
Вопрос №11. Неориентированный граф задан матрицей расстояний

$$A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Периферийными вершинами графа является вершина:

1. 1,2
2. 1,3
3. 1,4
4. 2,3

Вопрос №12. Дан ориентированный граф



Тогда матрица смежности будет иметь вид:

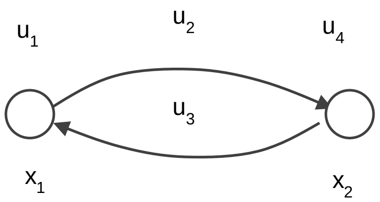
1. $$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. $$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. $$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

4. $$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Вопрос №13. Для ориентированного графа, показанного на рисунке, матрица инцидентности имеет вид:



1. $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} +1 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & +1 \end{pmatrix} \end{array}$$

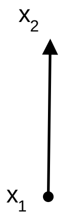
2. $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} +1 & 0 & +1 & -1 \\ 0 & +1 & -1 & +1 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} +1 & -1 & +1 & 0 \\ -1 & +1 & 0 & +1 \end{pmatrix} \end{array}$$

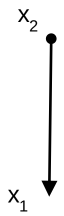
4. $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} +1 & -1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & 0 & +1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Вопрос №14. Для данных графов найти граф $G_1 \cap G_2$:

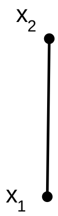
1.



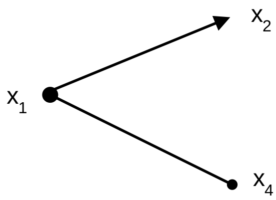
2.



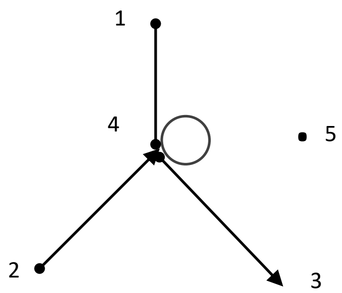
3.



4.



Вопрос №15. Для графа, заданного на рисунке, степень (валентность) вершины 5 равна:



1. 1
2. 2
3. 4
4. 0

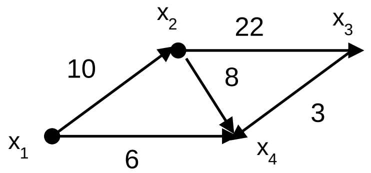
Вопрос №16. Исходя из матрицы системности, возведенной в третью степень,

$$A_G^3 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Число маршрутов (1,3) длины 3 равно:

1. 0
2. 1
3. 2
4. 3

Вопрос №17. Для графа, представленного на рисунке, соответствующая ему весовая матрица равна:



1. $W = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 10 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 22 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 3 \\ 6 & 8 & \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ 2. $W = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 10 & \infty & 5 \\ \infty & 0 & 12 & 7 \\ \infty & \infty & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

3. $W = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 10 & \infty & 6 \\ \infty & 0 & 22 & 8 \\ \infty & \infty & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ 4. $W = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 10 & \infty & 6 \\ \infty & 0 & 22 & 8 \\ \infty & \infty & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

Вопрос № 18. Запишите в символьной форме «Если A- нечетное число, B – четное число, то их произведение делится на 2»:

1. $A \vee B \to C$
2. $A \wedge B \to C$
3. $A \to B \wedge C$
4. $A \to B \vee C$

Вопрос № 19. Упростите формулу $(A \vee B) \vee C \to (A \vee C)$

1. $A \vee B \vee C$
2. $A \vee \overline{B} \vee C$
3. $\overline{A} \vee B \vee C$
4. $A \vee B \vee \overline{C}$

Вопрос № 20. Для формулы $f(x,y) = x \downarrow y$ таблица истинности имеет вид:

1.

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	2
1	1	3

2.

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

3.

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

4.

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Приложение №2

Типовые практические задания по дисциплине

Практические занятия № 1-3. ***Множества и отношения***

Методические рекомендации

При изучении темы «Множества и отношения» нужно научиться доказывать справедливость равенств множеств, используя определения операций над множествами, используя основные законы алгебры множеств, с помощью характеристических функций, а также иллюстрировать справедливость доказываемых соотношений на примере конкретных множеств и с помощью диаграмм Эйлера-Венна. Важно знать, что диаграммы Венна являются лишь хорошей иллюстрацией и способом построения контрпримеров, а не методом доказательств равенств в теории множеств.

Нужно понимать определение бинарного отношения как подмножества декартового произведения заданных множеств и уметь представлять отношение различными способами: в предикатной форме, перечислением упорядоченных пар, графами и матрицами и уметь переходить от одного вида задания к другому.

Важно уметь определять свойства бинарных отношений: рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность. В зависимости от свойств, которыми обладают бинарные отношения, выделяют и исследуют различные типы отношений. Наиболее известные из них - отношения эквивалентности и порядка. Нужно понимать важную особенность отношения эквивалентности – что оно задает разбиение множества, на котором оно задано, или систему классов эквивалентности. Отношение порядка нужно уметь задавать диаграммой Хассе.

Практические занятия № 4-5. ***Алгебраические структуры.***

Методические рекомендации

Данный раздел дискретной математики частично изучается в курсе алгебры, где приведенные в систему и расширенные знания из средней школы о векторах на плоскости и в пространстве служат, с одной стороны, важнейшим источником обобщений при изучении пространств любых размерностей, а с другой стороны, иллюстрацией применения алгебраических методов в геометрии. В связи с практической и теоретической значимостью алгебраических структур, и необходимым уровнем абстракции при их изучении, более глубокое и дополненное рассмотрение алгебраических структур имеет место в курсе дискретной математики.

В этом разделе важно усвоить понятие алгебры – множества с замкнутыми операциями на нем, научится строить таблицу Кэли для конечного множества, находить правые и левые единицы и нули, проверять свойства операций.

Важно понять, что отношение сравнения чисел по модулю n является отношением эквивалентности и научится решать уравнения, находить обратные матрицы в кольцах и полях, являющихся классами эквивалентности по модулю n и представляющих множество классов вычетов по модулю n.

Важно усвоить, что отношение изоморфизма, являющееся отношением эквивалентности, разбивает множество алгебраических систем на классы эквивалентности, в каждом из которых содержатся системы, имеющие «одинаковое устройство». Это дает возможность переносить изучение свойств одной системы на другую, изоморфную ей. Изоморфизм алгебр широко используется в компьютерных вычислениях, например, вместо выполнения операций над множествами, работы с геометрическими объектами, используют их изоморфные аналоги – легко реализуемые на компьютере поразрядные операции над двоичными векторами.

Практические занятия № 6-8. ***Графы.***

Методические рекомендации

Теория графов - это область дискретной математики, особенностью которой является геометрический подход к изучению объектов. Она пересекается со многими разделами теории множеств, комбинаторной математики, алгебры, геометрии, теории матриц, теории игр, математической логики и многих других математических дисциплин. Как прикладная дисциплина теория графов позволяет описывать и исследовать многие технические, экономические, биологические и социальные системы. Широкое применение методы теории графов находят в областях прикладной математики, таких как программирование, теория конечных автоматов, в решении вероятностных и комбинаторных задач.

В этом разделе нужно рассмотреть математические способы представления графов: теоретико-множественный, геометрический, матричный. В контрольной работе три задачи по этому разделу дискретной математики, решение которых предполагает умение изобразить граф по заданной матрице смежности или инцидентности, и наоборот. Также здесь важны вопросы связности и достижимости, и соответственно, построения матриц достижимости, контрдостижимости, связности и сильной связности графов; построения матрицы расстояний, нахождения эксцентриситета, радиуса и диаметра графа; выявления маршрутов с заданным количеством ребер и циклов. Также нужно рассмотреть понятия остовного дерева графа, научится строить остовы, рассмотреть понятия фундаментальных циклов и разрезов порождаемых данным остовом, составлять соответствующие матрицы фундаментальных циклов и разрезов.

Теория графов родилась на берегах Невы, в Санкт-Петербурге, ее «отцом» является Леонард Эйлер, опубликовавший в 1736 году решение задачи о Кёнигсбергских мостах. Важно научится определять эйлеровы графы, научится строить эйлеровы циклы, рассмотреть алгоритм построения эйлерова цикла в графе.

Практические занятия № 9-13. ***Оптимальные задачи теории графов.***

Методические рекомендации

Необходимо рассмотреть следующие оптимальные задачи: нахождение кратчайшего пути, связывающего две заданные вершины графа, и алгоритм Дейкстры для решения этой задачи; нахождение остова минимального веса и алгоритм Прима построения минимального остова; нахождение максимального потока при заданных пропускных способностях дуг и алгоритм Форда-Фалкерсона построения максимального потока и минимального разреза в сети. Для реализации алгоритмов на компьютере нужно итерационные процедуры алгоритмов применить к заданной весовой матрице. В пособии рассмотрена реализация алгоритма Прима в системе *Mathcad*, в *MS Excel* и в *Visual Basic*. Студент может выбрать любой способ.

Практические занятия № 13-15 . ***Элементы теории автоматов.***

Методические рекомендации

Теория автоматов представляет собой раздел дискретной математики, изучающий модели преобразователей дискретной информации. Такими преобразователями являются как реальные устройства – компьютеры, живые организмы, так и воображаемые устройства – аксиоматические теории, математические машины. Конечный автомат можно охарактеризовать как устройство, имеющее входной и выходной каналы, при этом в каждый из дискретных моментов времени, называемых тактовыми моментами, оно находится в одном из конечных состояний. По входному каналу в каждый момент времени в это устройство поступают входные сигналы. Задается закон изменения состояния к следующему моменту времени в зависимости от входного сигнала и состояния устройства в текущий момент времени. Выходной сигнал зависит от состояния и входного сигнала в текущий момент времени. Таким образом, автомат – это устройство с памятью.

Существует несколько эквивалентных способов задания конечных автоматов, среди которых можно назвать три: табличный, геометрический и функциональный. Более наглядным при небольшом числе состояний является представление автомата в виде графа поведения автомата, который представляет собой ориентированный граф. Его вершины соответствуют состояниям автомата, а дуги – переходам между состояниями. Важно уметь задавать автомат таблицей, графом, системой булевых функций, а также строить канонические уравнения автомата.

Приложение №3

Индивидуальное домашние задание №1. «Множества»

Задача 1. Докажите справедливость соотношения а) используя определения операций над множествами, б) используя основные законы алгебры множеств, в) с помощью характеристических функций. Проиллюстрируйте справедливость этого соотношения на примере конкретных множеств и с помощью диаграмм Венна.

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$$

Задача 2. На множествах $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{1,2,3,4\}$ заданы отношения $P_1 \subseteq A \times B$, $P_2 \subseteq B^2$. Представьте эти отношения графами, матрицами. Найдите граф и матрицу отношения $(P_1 \circ P_2)^{-1}$. Проверьте, является ли отношение P_2 рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным.

$$P_1 = \{(a,1),(a,2),(a,4),(b,1),(b,4),(c,3)\},$$

$$P_2 = \{(1,1),(2,1),(2,4),(3,3),(4,1),(4,2)\}.$$

Задача 3. Покажите, является ли отношение P отношением эквивалентности или отношением порядка (линейного, частичного, полного, строгого, нестрогого) на множестве A. Составьте матрицу и граф отношения. Составьте диаграмму Хассе, если P – отношение порядка. Составьте фактор-множество $[A]_P$ и найдите индекс разбиения, если P – отношение эквивалентности.

$P = \{(x, y):\ x \text{ начальник } y\}$, A – множество людей: $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, где a – начальник фирмы, b, c – начальники отделов фирмы, d, e, f работают под руководством b, а g и h – под руководством c.

Индивидуальное домашние задание №2. «Алгебраические структуры»

Задача 1. Вычислите 3^{2012} в кольце Z_{28}.

Задача 2. Решите уравнение $4x^2 + x + 2 = 0$ в поле Z_7.

Задача 3. Найдите обратную матрицу к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ в поле Z_5

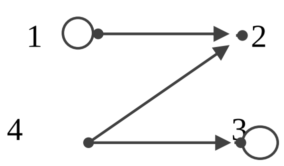
Индивидуальное домашние задание №3. «Оптимальные задачи теории графов»

Задача 1. Изобразите граф, заданный матрицей смежности P (инцидентности R). Составьте матрицу инцидентности R (смежности P). Постройте матрицы достижимости C и сильной связности F. Найдите все компоненты сильной связности.

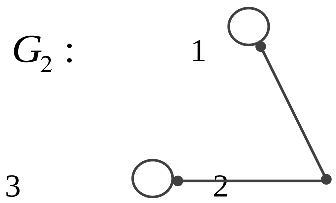
$$P=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&1&1&1&0\\1&1&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&1&0&1&1\end{pmatrix}$$

Задача 2. Даны графы G_1 и G_2. Найдите $G_1\cup G_2$, $G_1\cap G_2$, $G_1\oplus G_2$, $G_1\times G_2$. Для графа $G_1\cup G_2$ найдите матрицы смежности, инцидентности, сильных компонент, маршрутов длины 2 и все маршруты длины 2, исходящие из вершины 1.

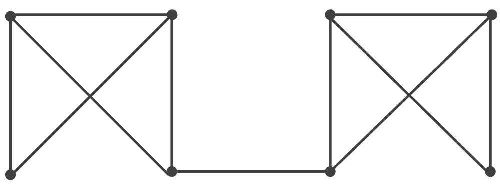
G_1 :



G_2 :



Задача 4. Для заданного графа G составьте матрицу расстояний, найдите эксцентриситеты вершин, радиус и диаметр этого графа. Составьте матрицу фундаментальных циклов. Определите, является ли изображенный граф эйлеровым, является ли этот граф планарным.



Задача 5. По заданным матрицам весов Ω графа G найдите величину минимального пути и сам путь от вершины $s=x_1$ до вершины $t=x_6$ или $t=x_7$. Реализуйте алгоритм Дейкстры на компьютере.

$$\begin{pmatrix} - & 5 & 10 & 13 & \infty & \infty \\ \infty & - & 8 & 9 & 13 & \infty \\ \infty & \infty & - & 5 & 3 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & - & 8 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Приложение №4

Типовой вариант контрольной работы (для заочной формы обучения)

Тема «Множества»

Задача 1. Докажите справедливость соотношения а) используя определения операций над множествами, б) используя основные законы алгебры множеств, в) с помощью характеристических функций. Проиллюстрируйте справедливость этого соотношения на примере конкретных множеств и с помощью диаграмм Венна.

$$(A\setminus B)\setminus C = A\setminus (B\cup C)$$

Задача 2. На множествах $A=\{a,b,c\}$ и $B=\{1,2,3,4\}$ заданы отношения $P_1\subseteq A\times B$, $P_2\subseteq B^2$. Представьте эти отношения графами, матрицами. Найдите граф и матрицу отношения $(P_1\circ P_2)^{-1}$. Проверьте, является ли отношение P_2 рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным.

$$P_1=\{(a,1),(a,2),(a,4),(b,1),(b,4),(c,3)\},$$

$$P_2=\{(1,1),(2,1),(2,4),(3,3),(4,1),(4,2)\}.$$

Задача 3. Покажите, является ли отношение *P* отношением эквивалентности или отношением порядка (линейного, частичного, полного, строгого, нестрогого) на множестве *A*. Составьте матрицу и граф отношения. Составьте диаграмму Хассе, если *P* – отношение порядка. Составьте фактор-множество $[A]_P$ и найдите индекс разбиения, если *P* – отношение эквивалентности.

$P=\{(x,y):\ x \text{ начальник } y\}$, *A* – множество людей: $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, где *a* – начальник фирмы, *b, c* – начальники отделов фирмы, *d, e, f* работают под руководством *b*, а *g* и *h* – под руководством *c*.

Тема «Алгебраические структуры»

Задача 1. Вычислите 3^{2012} в кольце Z_{28}.

Задача 2. Решите уравнение $4x^2+x+2=0$ в поле Z_7.

Задача 3. Найдите обратную матрицу к матрице $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\4&0&1\\3&1&2\end{pmatrix}$ в поле Z_5

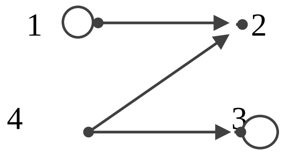
Тема «Оптимальные задачи теории графов»

Задача 1. Изобразите граф, заданный матрицей смежности P (инцидентности R). Составьте матрицу инцидентности R (смежности P). Постройте матрицы достижимости C и сильной связности F. Найдите все компоненты сильной связности.

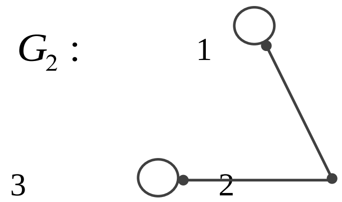
$$P=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&1&1&1&0\\1&1&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&1&0&1&1\end{pmatrix}$$

Задача 2. Даны графы G_1 и G_2. Найдите $G_1\cup G_2$, $G_1\cap G_2$, $G_1\oplus G_2$, $G_1\times G_2$. Для графа $G_1\cup G_2$ найдите матрицы смежности, инцидентности, сильных компонент, маршрутов длины 2 и все маршруты длины 2, исходящие из вершины 1.

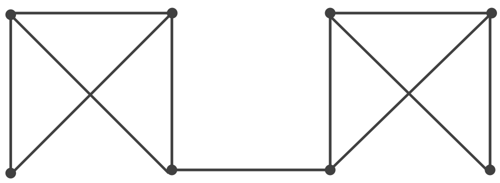
G_1 :



G_2 :



Задача 4. Для заданного графа G составьте матрицу расстояний, найдите эксцентриситеты вершин, радиус и диаметр этого графа. Составьте матрицу фундаментальных циклов. Определите, является ли изображенный граф эйлеровым, является ли этот граф планарным.



Задача 5. По заданным матрицам весов Ω графа G найдите величину минимального пути и сам путь от вершины $s=x_1$ до вершины $t=x_6$ или $t=x_7$. Реализуйте алгоритм Дейкстры на компьютере.

$$\begin{pmatrix} - & 5 & 10 & 13 & \infty & \infty \\ \infty & - & 8 & 9 & 13 & \infty \\ \infty & \infty & - & 5 & 3 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & - & 8 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Приложение №5

Контрольные вопросы для подготовки к зачету.

1. Множества и операции над ними. Диаграммы Венна. Декартово произведение множеств.
2. Отношения. Способы задания. Операции над отношениями. Свойства отношений.
3. Системы управления базами данных *.
4. Отношение эквивалентности. Фактор-множество.
5. Сравнения. Множество классов вычетов по модулю n.
6. Отношение частичного порядка. Частично упорядоченные множества, вполне упорядоченные множества. Грани множеств. Диаграммы Хассе.
7. Отображения множеств.
8. Алгебраические операции на множестве. Таблица Кэли. Левые, правые единицы и нули. Алгебры и модели. Алгебраические структуры.
9. Группы. Примеры групп. Полугруппы. Подгруппы групп. Разложение группы в смежные классы по подгруппе. Разложение группы в прямое произведение групп*. Группы подстановок*.
10. Кольца и поля. Примеры. Кольца многочленов*. Вопросы делимости в кольце многочленов*. Корни многочлена. Кольца и поля классов вычетов. Подкольца, подполя и идеалы колец.
11. Решение уравнений в Z_n. Модулярная арифметика*.
12. Линейные пространства. Скалярное произведение и метрика в линейных пространствах над конечными полями.
13. Кодирование как способ представления информации. Понятие кода. Процессы кодирования и декодирования. Коды Хэмминга. Алгоритм построения кода Хемминга. Обнаружение ошибки в кодах Хемминга.
14. Решётки и булевы алгебры.
15. Булева алгебра и ее реализации.
16. Гомоморфизмы и изоморфизмы алгебр.
17. Способы задания графов. Матрицы смежности вершин и дуг, инцидентности. Подграфы и части графа. Операции над графами.
18. Маршруты, цепи, циклы. Достижимость. Связность. Матрицы достижимости и сильно связанных компонент.
19. Задача о Кёнигсбергских мостах. Эйлеровы и гамильтоновы графы.
20. Метрические характеристики графов. Матрица расстояний. Эксцентриситет, диаметр, радиус, центр. Взвешенные графы.
21. Нахождение кратчайших путей. Алгоритм Дейкстры нахождения кратчайшего пути между двумя вершинами в ориентированном графе со взвешенными дугами. Алгоритм Флойда*. Задача оптимизации передачи информации в компьютерной сети*.
22. Деревья. Алгоритмы сортировки и поиска информации*.

23. Остовы графов. Теорема Кирхгофа, следствие. Матрица Кирхгофа.
24. Задача об остове экстремального веса. Алгоритм Прима.
25. Фундаментальные циклы. Разрезы. Матрицы фундаментальных циклов, фундаментальных разрезов.
26. Планарность графов. Применение к конструированию микросхем*.
27. Информационные потоки в сетях*.
28. Алгоритм Форда-Фалкерсона построения максимального потока в сети при заданных пропускных способностях дуг.
29. Понятие конечного автомата. Определение. Способы задания конечного автомата. Канонические уравнения автомата.
30. Примеры конечных автоматов.

Примерные практические заданий для зачета.

Пример 1. Доказать справедливость соотношения $(A\setminus \mathrm{B})\setminus \mathrm{C} = A\setminus(\mathrm{B}\cup \mathrm{C})$ используя определения операций над множествами, используя основные законы алгебры множеств, с помощью характеристических функций. Проиллюстрировать справедливость этого соотношения на примере конкретных множеств и с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Для доказательства равенства двух множеств достаточно доказать, что каждое из множеств является подмножеством другого, т.е., в нашем случае, $(A\setminus \mathrm{B})\setminus \mathrm{C} \subseteq A\setminus(\mathrm{B}\cup \mathrm{C})$ и $A\setminus(\mathrm{B}\cup \mathrm{C}) \subseteq (\mathrm{A}\setminus \mathrm{B})\setminus \mathrm{C}$.

Докажем, что $(A\setminus \mathrm{B})\setminus \mathrm{C} \subseteq A\setminus(\mathrm{B}\cup \mathrm{C})$, т.е. докажем, что каждый элемент множества $(A\setminus \mathrm{B})\setminus \mathrm{C}$ является также элементом множества $A\setminus(\mathrm{B}\cup \mathrm{C})$. Пусть $x \in (A\setminus \mathrm{B})\setminus \mathrm{C}$, тогда $x \in (A\setminus \mathrm{B})$ и $x \notin \mathrm{C}$ по определению разности множеств, значит, $x \in A$ и $x \notin B$ и $x \notin \mathrm{C}$, а значит, $x \in A$ и $x \notin (B\cup C)$, так как если бы $x \in (B\cup C)$, то $x \in B$ или $x \in C$. Следовательно, $x \in A\setminus(\mathrm{B}\cup \mathrm{C})$ и $(A\setminus \mathrm{B})\setminus \mathrm{C} \subseteq A\setminus(\mathrm{B}\cup \mathrm{C})$.

Аналогично, можно доказать включение $A\setminus(\mathrm{B}\cup \mathrm{C}) \subseteq (\mathrm{A}\setminus \mathrm{B})\setminus \mathrm{C}$.

Пример 2. Пусть на множестве M={1, 3, 6, 12} определена бинарная операция $x * y = \text{НОД}(x, y)$. Построить таблицу Кэли множества с данной операцией, найти левые (правые) единицы и нули.

Данное множество замкнуто относительно рассматриваемой операции: $\forall x, y \in M$. Следовательно, $(M;\ *)$- алгебра. Построим таблицу Кэли указанного множества с заданной операцией и найдем все левые (правые) единицы и нули:

$x * y$	1	3	6	12
1	1	1	1	1

3	1	3	3	3
6	1	3	6	6
12	1	3	6	12

Из таблицы следует, что $1 * x = x * 1 = 1 \ \forall x \in M$, а значит, $1 \in M$ является левым и правым нулем. $12 * x = x * 12 = x \ \ \forall x \in M$, следовательно, $12 \in M$ является левой и правой единицей.

Пример 3. Найти обратную матрицу к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ в поле Z_5

По формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A}$ находим обратную матрицу к матрице A в R:

$$det\, A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ в поле } Z_5.$$

Сделаем проверку:

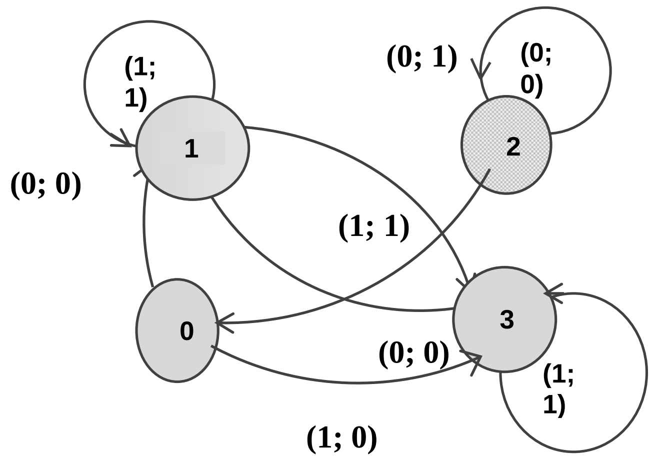
$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 25 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ в поле } Z_5$$

Пример 4. Для автомата, заданного таблицей, построить диаграмму Мура. Задать этот автомат системой булевых функций. Построить канонические уравнения автомата.

x \ q	0	1	2	3
0	1;0	3;1	2;0	1;0

1	3;0	1;1	0;1	3;1

Соответствующий заданной таблицей граф автомата, или диаграмма Мура имеет вид:



Закодируем состояния автомата q_0, q_1, q_2, q_3 : $\alpha(q_0) = 00$, $\alpha(q_1) = 01$, $\alpha(q_2) = 10$, $\alpha(q_3) = 11$. Следовательно, автомат можно задать системой, состоящей из трех булевых функций, которые зависят от трех переменных:

x	z_1	z_2	ϕ_1	ϕ_2	ψ
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1

Для построения канонических уравнений автомата необходимо для булевых функций найти минимальные ДНФ. Составляем совершенные дизъюнктивные нормальные формы функций.

СДНФ функции ϕ_1:

$$\phi_1(x, z_1, z_2) = \bar{x}\bar{z}_1 z_2 \vee \bar{x} z_1 \bar{z}_2 \vee x\bar{z}_1\bar{z}_2 \vee x z_1 z_2$$

СДНФ функции ϕ_2:

$$\phi_2(x, z_1, z_2) = \bar{x}\bar{z}_1\bar{z}_2 \vee \bar{x}\bar{z}_1 z_2 \vee \bar{x} z_1 z_2 \vee x\bar{z}_1\bar{z}_2 \vee x\bar{z}_1 z_2 \vee x z_1 z_2$$

Сокращенная ДНФ этой функции, полученная, например, методом Квайна:

$$\phi_2(x, z_1, z_2) = x\bar{z}_1 \vee \bar{z}_1\bar{z}_2 \vee \bar{x}z_2 \vee \bar{z}_1 z_2 \vee z_1 z_2 \vee x\bar{z}_1 \vee xz_2 = \bar{z}_1 \vee z_2$$

СДНФ функции ψ:

$$\psi(x, z_1, z_2) = \bar{x}\bar{z}_1 z_2 \vee x\bar{z}_1 z_2 \vee xz_1\bar{z}_2 \vee xz_1 z_2$$

Упрощая, получаем сокращенную ДНФ этой функции:

$$\psi(x, z_1, z_2) = \bar{z}_1 z_2 \vee xz_2 \vee xz_1 \ .$$

Канонические уравнения автомата задаются следующими формулами:

$$\begin{cases} z_1(t+1) = \bar{x}(t) \wedge \bar{z}_1(t) \wedge z_2(t) \vee \bar{x}(t) \wedge z_1(t) \wedge \bar{z}_2(t) \vee x(t) \wedge \bar{z}_1(t) \wedge \bar{z}_2(t) \vee x(t) \wedge z_1(t) \wedge z_2(t) \\ z_2(t+1) = \bar{z}_1(t) \vee z_2(t) \\ y(t) = \bar{z}_1(t) \wedge z_2(t) \vee x(t) \wedge z_2(t) \vee x(t) \wedge z_1(t) \end{cases}$$

$t = 1, 2, \ldots$