



Федеральное агентство по рыболовству
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Калининградский государственный технический
университет»
(ФГБОУ ВО «КГТУ»)

Институт цифровых технологий

Утверждаю:
Первый проректор

**ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ
ОБЩЕРАЗВИВАЮЩАЯ ПРОГРАММА
«МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ»**

Разработчик: *Кафедра прикладной математики и информатики*

Автор: *доцент кафедры, к.пед.н. Булан Ирина Геннадиевна*

г. Калининград, 2026 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА.....	3
2. УЧЕБНЫЙ ПЛАН И КАЛЕНДАРНЫЙ УЧЕБНЫЙ ГРАФИК	6
3. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КУРСА «МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ»	6
3.1 Цель и планируемые результаты	6
3.2 Учебно-тематический план	6
3.3 Содержание дисциплины	7
3.4 Методическое обеспечение и условия реализации дисциплины (модуля).....	9
3.5 Аттестация	9
3.6 Литература	10
3.7 Методические рекомендации	10

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Реализация программы «Методы решения задач с параметрами» направлена на систематизацию и углубление знаний учащихся 10-11 классов по одному из наиболее сложных и высокобалльных разделов математики профильного уровня ЕГЭ. Программа ориентирована на подготовку к успешной сдаче задания «задачи с параметром», а также на развитие математического мышления, необходимого для участия в олимпиадах и вступительных испытаниях в вузы.

Статистика выполнения задания с параметром на ЕГЭ стабильно показывает крайне низкий процент (менее 5% в 2022-2024 годах), что подчеркивает актуальность и необходимость целенаправленной подготовки. Сложность задач обусловлена необходимостью анализа множества случаев, применения различных математических методов (аналитических, графических, логических) и глубокого понимания свойств функций.

Программа рассматривает параметр не как второстепенную величину, а как равноправный элемент задачи, изучение которого целесообразно начинать с линейных уравнений, но в рамках данного курса фокусируется на углубленном уровне, соответствующем требованиям ЕГЭ и олимпиад.

Ведущей идеей программы является формирование у обучающихся целостного подхода к решению задач с параметрами. Вместо заучивания алгоритмов, акцент делается на выборе рационального метода (аналитический, графический, логический) в зависимости от структуры задачи, и на осознанном применении математического аппарата. Программа последовательно проводит эту идею через три основных модуля: аналитические, графические и логические методы, показывая их взаимосвязь и сильные стороны в различных ситуациях.

Программа реализуется в соответствии с Ф3 206 образовании в Российской Федерации», Приказом Министерства просвещения России № 629 от 27.07.2022 «Об утверждении порядка организации и осуществления образовательной деятельности по дополнительным общеобразовательным программам».

Цель: Подготовка учащихся 10-11 классов к успешному решению задач с параметрами (задание №17 ЕГЭ профильного уровня, олимпиадные и вступительные задачи) через освоение и применение аналитических, графических и логических методов решения.

Задачи:

метапредметные задачи:

- Развивать системное и аналитическое мышление, умение анализировать структуру задачи и выбирать оптимальный метод решения.
- Стимулировать познавательную и исследовательскую активность при решении нестандартных математических задач.
- Развивать навыки самостоятельной работы с учебной и научно-методической литературой.

предметные задачи:

- Освоить основные аналитические методы решения (метод инвариантности, вариации постоянной, использование свойств функций).
- Сформировать навыки применения графических методов (метод xOy , метод областей xOa).
- Освоить логические и специальные методы (метод обратной задачи, использование симметрии и классических неравенств).
- Сформировать умение проводить равносильные преобразования и анализировать область допустимых значений.
- Научить находить значения параметра при заданных условиях (единственность решения, наличие решений, принадлежность корней промежутку).

личностные задачи:

- Воспитывать ответственное отношение к учебному труду и настойчивость в достижении цели.
- Формировать способность к самоопределению в профессиональной деятельности, связанной с точными науками и инженерией.
- Формировать мотивацию к дальнейшему обучению в вузах на специальностях, требующих высокой математической подготовки.

Направленность: Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа «Методы решения задач с параметрами» имеет физико-математическую направленность.

Форма организации: групповая

Уровень: углубленный

Актуальность, новизна: Актуальность программы обусловлена необходимостью качественной подготовки к ЕГЭ по математике профильного уровня, где задача с параметром является одним из ключевых элементов для получения высокого балла. Новизна программы заключается в комплексном и структурированном подходе к изучению всех типов задач с параметрами, что не в полной мере реализовано в рамках школьной программы. Программа объединяет теоретический материал с большим объемом практических задач разного уровня сложности, включая олимпиадные, что позволяет готовить учащихся к экзаменам и интеллектуальным соревнованиям.

Педагогическая целесообразность: Данная программа способствует развитию у школьников математической грамотности, логического и исследовательского мышления. Материал структурирован от простых методов к более сложным, что обеспечивает постепенное и осознанное усвоение материала. В программе реализуются системный, комплексный, личностно-ориентированный и деятельностный подходы. Занятия строятся по принципу «от теории к практике» с обязательным разбором типичных ошибок и нестандартных решений, что позволяет учащимся не просто решать задачи, а понимать их структуру.

Категория слушателей: программа предназначена для обучающихся 10-11 классов, проявляющих интерес к углубленному изучению математики и планирующих сдачу ЕГЭ по математике профильного уровня или участие в олимпиадах.

Срок обучения: 36 ак. часов. Срок освоения программы – 2 месяца (8 недель)

Режим занятий: очное обучение на базе университета с применением ДОТ (по необходимости)

Количество обучающихся: В соответствии с СанПиН

В результате изучения обучающиеся должны:

Знать:

- основные аналитические, графические и логические методы решения уравнений и неравенств с параметрами;

- свойства функций (монотонность, ограниченность, четность) и их применение при решении задач с параметрами;

- теорему о расположении корней квадратного трехчлена и теорему Виета;

- метод областей в координатах xOa .

Уметь:

- проводить равносильные преобразования уравнений и неравенств, содержащих параметр;

- анализировать область допустимых значений;

- применять графические интерпретации для исследования количества решений;

- выражать параметр как функцию от переменной и исследовать её;

- находить значения параметра, при которых выполняются заданные условия (единственность решения, наличие решений, принадлежность корней заданному промежутку).

Владеть:

- навыками логического анализа и построения математических рассуждений при решении задач с параметрами;

- навыками самоконтроля и проверки найденных значений параметра на предмет потери или приобретения корней.

Планируемые результаты обучения. Компетентностный профиль программы.

В результате освоения программы у обучающихся формируется интегративный комплекс компетенций, позволяющий уверенно решать задачи с параметрами на ЕГЭ и олимпиадах.

Обучающиеся осваивают аналитический подход: умеют применять метод инвариантности для сведения сложных уравнений к простым видам $f(P(x)) = f(Q(x))$; используют метод «вариации постоянной», преобразуя уравнение к виду $a = g(x)$ и исследуя функцию $g(x)$; применяют свойства монотонности и ограниченности функций для оценки решений и определения количества корней.

Школьники овладевают графическими методами: строят и анализируют семейства кривых на плоскости xOy ; используют метод областей на координатной плоскости xOa ; применяют теорему о расположении корней квадратного трехчлена для анализа решений; строят графики функций, содержащих параметр, и определяют условия пересечения графиков.

Кроме того, обучающиеся применяют логические и специальные методы: рассматривают параметр как равноправную переменную для упрощения решения; используют метод обратной задачи; применяют классические неравенства для оценки областей значений; используют свойства четности и симметрии для определения единственности решения; выделяют полные квадраты для упрощения выражений.

Программа формирует у обучающихся целостное видение решения задач с параметрами как единого процесса: анализ условия → выбор метода → решение → проверка → оформление ответа. Они осваивают культуру математического рассуждения, учатся работать с различными типами задач (нахождение всех значений параметра, решение для всех значений параметра, определение количества решений) и готовятся к успешной сдаче экзамена.

2. УЧЕБНЫЙ ПЛАН И КАЛЕНДАРНЫЙ УЧЕБНЫЙ ГРАФИК

№	Наименование разделов и дисциплин	Всего часов	в том числе			Форма контроля
			ЛК	ПР	СР	
1.	Модуль 1. Аналитические методы	12	2	4	6	Проверка домашних заданий, опрос
2.	Модуль 2. Графические методы	12	2	4	6	Проверка домашних заданий, опрос
3.	Модуль 3. Логические методы и	10	2	2	6	Проверка

	итоговый контроль					домашних заданий, опрос
4.	Итоговая аттестация	2	-	-	2	Итоговое тестирование
ИТОГО		36	6	10	20	

* Самостоятельная подготовка осуществляется посредством электронной информационно-образовательной среды (ЭИОС) университета

КАЛЕНДАРНЫЙ УЧЕБНЫЙ ГРАФИК

№ учебной недели	1	2	3	4	5	6	7	8
Группа 1	Т/С	Т/С	Т/С	Т/С	Т/С	Т/С	Т/С	А

3. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КУРСА «МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ»

3.1 Цель и планируемые результаты

Цель:	подготовка учащихся 10-11 классов к успешному решению задач с параметрами (задание №17 ЕГЭ профильного уровня, олимпиадные и вступительные задачи) через освоение и применение аналитических, графических и логических методов решения
Уровень:	углубленный
В результате изучения обучающиеся должны:	
знать:	– основные аналитические, графические и логические методы решения уравнений и неравенств с параметрами; – свойства функций (монотонность, ограниченность, четность) и их применение при решении задач с параметрами; – теорему о расположении корней квадратного трехчлена и теорему Виета; – метод областей в координатах xOa
уметь:	– проводить равносильные преобразования уравнений и неравенств, содержащих параметр; – анализировать область допустимых значений; – применять графические интерпретации для исследования количества решений; – выражать параметр как функцию от переменной и исследовать её; – находить значения параметра, при которых выполняются заданные условия (единственность решения, наличие решений, принадлежность корней заданному промежутку)
владеть:	– навыками логического анализа и построения математических рассуждений при решении задач с параметрами; – навыками самоконтроля и проверки найденных значений параметра на предмет потери или приобретения корней

3.2 Учебно-тематический план

№	Наименование разделов и тем	Всего часов	в том числе			Форма контроля
			Лекций	Практ. занятий	СР	
1	Модуль 1. Аналитические методы	12	2	4	6	Проверка домашних заданий, опрос
2	Модуль 2. Графические методы	12	2	4	6	Проверка домашних заданий, опрос

3	Модуль 3. Логические методы	10	2	2	6	Проверка домашних заданий, опрос
4	Итоговая аттестация	2	-	-	2	Итоговое тестирование
ИТОГО		36	6	10	20	

3.3 Содержание дисциплины

Модуль 1. Аналитические методы

Тема 1.1. Непосредственный поиск x . Метод инвариантности

Теоретическая часть. Суть аналитического подхода. Понятие равносильных преобразований уравнений и неравенств, содержащих параметр. Анализ области допустимых значений (ОДЗ). Непосредственный поиск x и проверка условий (отбор корней). Метод инвариантности: использование монотонности функции $f(t)$ для сведения $f(P(x)) = f(Q(x))$ к $P(x) = Q(x)$; решение уравнений вида $f(f(x)) = x$.

Практическая часть. Решение уравнений и неравенств, где необходимо найти x и проверить корни на принадлежность ОДЗ. Решение задач, где применяется метод инвариантности (например, $(x+1)^3 + (x+1) = (2x-1)^3 + (2x-1)$).

Текущий контроль. Проверка домашнего задания, устный опрос.

Тема 1.2. Метод «Вариации постоянной» (выделение параметра)

Теоретическая часть. Метод «Вариации постоянной»: преобразование уравнения к виду $a = g(x)$ и исследование функции $g(x)$. Нахождение области значений функции $g(x)$ для определения допустимых значений параметра a .

Практическая часть. Решение задач, где параметр удобно выразить через переменную, например, $a = (x^2 + 2x)/(x-1)$. Исследование полученной функции с помощью производной для нахождения значений a , при которых уравнение имеет заданное количество корней.

Текущий контроль. Проверка домашнего задания.

Тема 1.3. Использование свойств функций и производной

Теоретическая часть. Использование свойств функций (монотонность, ограниченность, четность) для решения задач с параметрами. Применение производной для исследования области значений функции, нахождения точек экстремума. Векторный и тригонометрический подходы.

Практическая часть. Решение задач, где используется монотонность функции для оценки корней, например, $f(x) = a$, где $f(x)$ -- монотонно возрастающая функция. Решение задач, где применяется ограниченность функций, например, $\sin(x) + \cos(x) = a$ или $x^2 + y^2 = a$.

Текущий контроль. Проверка домашнего задания.

Модуль 2. Графические методы

Тема 2.1. Квадратный трехчлен: теорема Виета, расположение корней

Теоретическая часть. Применение теоремы о расположении корней квадратного трехчлена. Теорема Виета для определения знаков корней. Анализ дискриминанта. Условия, при которых корни принадлежат заданному промежутку.

Практическая часть. Решение задач на нахождение значений параметра, при которых корни квадратного уравнения удовлетворяют заданным условиям (например, оба корня положительны, один корень меньше 1, другой больше 1). Использование теоремы Виета для составления систем условий.

Текущий контроль. Проверка домашнего задания.

Тема 2.2. Изображение графиков на плоскости xOy . Семейства кривых

Теоретическая часть. Классический метод xOy : случаи $f(x) = a$ и $f(x) = g(x, a)$. Построение семейства кривых, зависящих от параметра. Анализ взаимного расположения графиков. Определение условий касания и пересечения.

Практическая часть. Решение задач, где требуется построить график функции,

содержащей параметр, и исследовать количество решений в зависимости от a .

Например, $|x-2| + |x+3| = a$ или $x^2 + 2ax + 1 = 0$.

Текущий контроль. Проверка домашнего задания.

Тема 2.3. Метод областей (плоскость xOa)

Теоретическая часть. Метод областей в координатах xOa : запись уравнения в виде $a = f(x)$, построение графика этой функции. Анализ пересечений с горизонтальными прямыми $a = a_0$. Преобразование графиков (сдвиги, растяжения) в зависимости от параметра.

Практическая часть. Решение задач, где метод областей позволяет эффективно найти решение, например, $|x| = a$. Построение областей на плоскости для решения неравенств с параметром.

Текущий контроль. Проверка домашнего задания.

Модуль 3. Логические методы

Тема 3.1. Параметр как равноправная переменная. Метод обратной задачи

Теоретическая часть. Рассмотрение параметра как равноправной переменной (решение уравнения как квадратного относительно a). Метод обратной задачи (введение нового параметра).

Практическая часть. Решение задач, которые проще решить относительно параметра, а не переменной. Например, $x^2 + ax + a = 0$ решается как квадратное относительно a .

Текущий контроль. Проверка домашнего задания.

Тема 3.2. Инварианты и симметрия. Применение классических неравенств

Теоретическая часть. Использование инвариантов: четность, симметрия для определения единственности решения. Применение классических неравенств (Коши-Буняковского, о средних) для оценки областей значений. Последовательное выделение полных квадратов (сумма неотрицательных слагаемых).

Практическая часть. Решение задач, где используются свойства симметрии, например, $x^2 + y^2 + xy = a$, и задачи на применение неравенств для нахождения экстремальных значений параметра.

Текущий контроль. Проверка домашнего задания.

3.4 Методическое обеспечение и условия реализации курса

3.4.1 Материально-техническое обеспечение

Реализация программы проходит в компьютерных классах/лабораториях, оснащённых персональными компьютерами или ноутбуками с выходом в сеть Интернет, учебной доской, оргтехникой (проектор или телевизор) и отвечающая требованиям санитарно-гигиенических норм и правил техники безопасности.

3.4.2 Информационное обеспечение

Информационное обеспечение программы включает в себя:

- интернет-источники, в том числе портал «Решу ЕГЭ» и открытый банк заданий ФИПИ;
- электронную информационно-образовательную среду (ЭИОС) университета;
- методические разборы решений, раздаточный материал.

3.4.3 Кадровое обеспечение

Реализация программы обеспечивается педагогическими работниками, имеющими опыт разработки и реализации образовательных программ по математике, подготовки к ЕГЭ и олимпиадам.

3.5 Аттестация

3.5.1 Форма аттестации

Формы подведения итогов реализации программы:

Промежуточный контроль: проводится в процессе освоения тем в виде проверки практических домашних заданий, устного опроса по материалу. Это помогает оценить

успешность выбранных форм и методов обучения и при необходимости скорректировать их.

Итоговый контроль: осуществляется на последнем занятии в форме итогового тестирования, включающего задачи разного уровня сложности, или защиты индивидуального/группового проекта, где слушатель демонстрирует решение сложной задачи с параметром с использованием различных методов.

3.5.2 Перечень оценочных средств

К оценочным материалам программы относятся:

- комплекты задач для домашних и классных работ (по каждому модулю);
- итоговый тест (в формате ЕГЭ/олимпиадных задач);
- темы итоговых проектов.

3.6 Литература

3.6.1 Основная литература

1. Булан, И. Г. Методы решения задач с параметрами: учеб. пособие для учащихся старших классов и учителей математики / И. Г. Булан. - Калининград: Изд-во ФГБОУ ВО «КГТУ», 2026. - 50 с.
2. Шахмейстер А.Х. Уравнения и неравенства с параметрами / А.Х. Шахмейстер. - Санкт-Петербург: Виктория плюс, 2019. - 304 с.
3. Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Математика. ЕГЭ. Задачи с параметрами (типовое задание 17) / Под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. - Ростов-на-Дону: Легион, 2022. - 383 с.

3.6.2 Дополнительная литература

1. Далингер, В. А. Задачи с параметрами в 2 частях / В. А. Далингер. - 2-е изд. - Москва: Юрайт, 2024.
2. Натяганов, В. Л., Лужина, Л. М. Методы решения задач с параметрами: учебное пособие / В. Л. Натяганов, Л. М. Лужина. - Москва: ЛЕНАНД, 2025. - 376 с.
3. Шестаков С.А. ЕГЭ 2022 Математика. Задачи с параметром. Задача 17 (профильный уровень) / Под ред. И.В. Яценко. - Москва: МЦНМО, 2022. - 288 с.
4. Мерзляк А.Г., Якир М.С. Алгебраический тренажер. Пособие для школьников и абитуриентов. - Москва: Илекса, 2007. - 332 с.

3.6.3 Интернет-источники

1. Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Решу ЕГЭ»: <https://math-ege.sdamgia.ru>
2. Открытый банк заданий ЕГЭ: <http://www.fipi.ru>

3.7 Методические рекомендации

Практическая значимость программы заключается в возможности применения полученных знаний при решении задач ЕГЭ (задание №17), олимпиад по математике, а также при дальнейшем обучении в вузах.

Использование различных методов решения, разбор типичных ошибок и практико-ориентированных задач повысит профессиональный интерес обучающегося и расширит его кругозор в аспекте профессий, связанных с точными науками, инженерией и анализом данных.

3.7.1 Описание ключевых понятий

Параметр -- это коэффициент при неизвестных или свободный член, заданный не конкретным числовым значением, а обозначенный буквой.

Решить задачу с параметром -- значит для каждого значения параметра найти значения переменной, удовлетворяющие условию задачи.

Равносильные преобразования -- преобразования, которые не меняют множество решений уравнения или неравенства.

Метод инвариантности -- метод, основанный на использовании монотонности функции для сведения сложного уравнения к более простому.

Метод областей (хОа) -- графический метод, где по оси абсцисс откладывается переменная, а по оси ординат -- параметр, и строится график функции $a = f(x)$.

3.7.2 Принципы отбора содержания образовательной программы

Принципы отбора содержания (образовательный процесс построен с учётом уникальности и неповторимости каждого ребёнка и направлен на максимальное развитие его способностей):

- принцип единства развития, обучения и воспитания;
- принцип систематичности и последовательности;
- принцип доступности;
- принцип наглядности;
- принцип взаимодействия и сотрудничества;
- принцип комплексного (междисциплинарного) подхода;
- принцип связи теории с практикой и с реальными задачами АПК и рыбохозяйственного комплекса;
- принцип гуманизма.

3.7.3 Особенности организации образовательного процесса. Режим занятий, периодичность и продолжительность занятий.

Набор в группы -- свободный. Основной упор в обучении делается на групповые формы обучения, однако могут быть реализованы индивидуальные и фронтальные формы.

Состав групп не более 30 человек. При необходимости группы могут делиться на подгруппы.

Программа построена с учетом возрастных и индивидуальных особенностей обучающихся.

Общее количество часов на весь период обучения -- 36 часов. Контактная работа - 16 часов (6 часов лекционных занятий и 10 часов практических занятий, включая итоговую аттестацию). Самостоятельная работа -- 20 часов. Продолжительность занятий исчисляется в академических часах -- 45 минут, между занятиями установлены 10-минутные перемены.

Самостоятельная работа осуществляется в период между занятиями посредством работы с учебной литературой, решения домашних заданий и прохождения тестов в ЭИОС.

3.7.4 Основные методы обучения

На занятиях учебных групп используется несколько методов, взаимодополняющих друг друга и характеризующих разностороннее взаимодействие педагогов и обучающихся.

Занятие содержит теоретическую часть и практическую работу по закреплению материала.

Метод дискуссии учит обучающихся отстаивать своё мнение и слушать других. Например, при выборе метода решения задачи с параметром, обучающимся необходимо аргументированно обосновать свой выбор.

Кейс-метод моделирует реальные условия экзамена или олимпиады, показывая обучающимся возможность применения полученных знаний в будущей профессиональной деятельности.

Методы, в основе которых лежит уровень деятельности учащихся:

- исследовательский -- самостоятельная работа обучающихся с задачами, поиск нестандартных решений;
- репродуктивный -- обучающиеся воспроизводят полученные знания и освоенные способы деятельности;
- объяснительно-иллюстративный -- обучающиеся воспринимают и усваивают готовую информацию.

Методы, в основе которых лежит способ организации занятия:

- наглядный (показ мультимедийных материалов, построение графиков, работа по

образцу);

- практический (выполнение практических работ, решение задач);
- словесный (устное изложение, беседа, рассказ, лекция).

Согласовано:

Зам. директора Института цифровых
технологий по ДО и ПП



Е.В. Кривопускова