Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Н. П. Зубарева

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины
для студентов, обучающихся по специальностям
38.03.01 «Экономика», 38.03.02 «Менеджмент»

Калининград
Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ»
2025

УДК 519.6

Рецензенты:

кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» И. Г. Булан;

кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры теории механизмов и машин и деталей машин ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» О. С. Витренко

Зубарева, Н. П.

Высшая математика: учебно-методическое пособие по изучению дисциплины для студентов, обучающихся по специальностям 38.03.01 «Экономика», 38.03.02 «Менеджмент» / Н. П. Зубарева. – Калининград: Изд-во ФГБОУ ВО «КГТУ». – 2025. – 95 с.

В учебно-методическом пособии по изучению дисциплины «Высшая математика» представлены учебно-методические материалы по освоению тем лекционного курса и практических занятий, методические указания по самостоятельной работе и подготовке студента к экзамену, условия текущего контроля и промежуточной аттестации.

Табл. 6, рис. 6, список лит. – 14 наименований

Учебно-методическое пособие рассмотрено и одобрено в качестве локального электронного методического материала на заседании кафедры прикладной математики и информационных технологий Института цифровых технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет»18.09. 2025 г., протокол № 7

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины рекомендовано к использованию в учебном процессе в качестве локального электронного методического материала методической комиссией Института цифровых технологий 23.09. 2025 г., протокол № 6

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины рекомендовано к использованию в учебном процессе в качестве локального электронного методического материала методической комиссией Института отраслевой экономики 30.10.2025 г., протокол № 10

УДК 519.6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математика в экономике не только способствует развитию аналитических навыков, но и помогает формировать системное мышление. Научившись применять математические методы для анализа экономических явлений, студенты начинают лучше понимать взаимосвязи между различными факторами в экономических системах. Это научит их думать стратегически, предвидеть последствия экономических и финансовых решений, а также оценивать риски, что крайне важно в современном быстро меняющемся мире.

Изучение математики в контексте экономики обогащает учебный процесс, позволяя студентам применять теоретические знания и математические методы для решения практических задач, что способствует формированию комплексного подхода к изучению экономических дисциплин.

Умение использовать математические формулы и функции позволяет студентам проводить анализ экономических явлений, оценивать зависимости между переменными и принимать обоснованные решения на основе аналитических данных. Междисциплинарные связи между математикой и экономикой не только усиливают понимание теоретических основ, но и развивают навыки критического мышления и аналитического решения проблем, что является ключевым для успешной карьеры в области экономики.

Важность математики в экономике не может быть переоценена. Этот предмет не только обогащает образовательный процесс, но и формирует новое поколение аналитически мыслящих специалистов, готовых к вызовам и возможностям современного мира. Результатом такого подхода станет более устойчивое и инновационное развитие экономики, способствующее улучшению качества жизни каждого человека в обществе.

Учебно-методическое пособие представляет комплекс систематизированных материалов по изучению дисциплины Высшая математика для студентов очной и очно-заочной форм обучения направлений подготовки 38.03.01 Экономика и 38.03.02 Менеджмент.

При изучении дисциплины используются знания, умения и навыки довузовской подготовки по математике (умение проводить алгебраические преобразования, решать уравнения и неравенства, знание основных тригонометрических формул, умение проводить тригонометрические преобразования и решать тригонометрические уравнения и неравенства, понимание функции, графика функции и основных ее свойств, знание основных геометрических фигур, умение находить их площади, знать основные виды многогранников и тел вращения и уметь вычислять их площади и объемы).

Целью освоения дисциплины Высшая математика является формирование знаний, умений и навыков анализа, моделирования и решения теоретических и практических задач с широким использованием математического аппарата.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

знать:

– основные понятия алгебры и геометрии, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, а также их простейшие приложения в профессиональных дисциплинах;

– методы решения математических задач до числового или другого требуемого результата (графика, формулы и т. п.);

– основные применения теории вероятностей и математический статистики в экономических приложениях;

уметь:

– использовать в профессиональной деятельности базовые знания математики;

– ставить цели и формулировать математическую постановку задач, связанных с реализацией профессиональных функций;

– прогнозировать возможный результат предлагаемого математического решения, уметь оценивать его значения;

– переводить экономические задачи с описательного языка на язык математики;

– строить математические модели прикладных задач с оптимальным выбором их решения, анализа и оценки полученных результатов;

– оперировать с абстрактными объектами и быть корректными в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений;

владеть:

– методами анализа и навыками самостоятельного изучения учебной и научной математической литературы;

– математическими, статистическими и количественными методами решения типовых организационно-управленческих задач;

– математической логикой, необходимой для формирования суждений по соответствующим профессиональным проблемам;

– способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения.

Место дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы: дисциплина Высшая математика относится к дисциплинам обязательной части Блока 1 ОПОП ВО Экономико-математического модуля. Дисциплина Высшая математика является базой при изучении дисциплин экономико-математического, цифрового, проектного, профессионального модулей, модуля саморазвития.

Дисциплина изучается два семестра на первом курсе в объеме 432 академических часа, что соответствует 12 зачетных единиц.

Контроль знаний в ходе изучения дисциплины осуществляется в виде текущего контроля и промежуточной аттестации в форме экзаменов в 1 и 2-м учебных семестрах в соответствии с учебным планом для очной и очно-заочной форм обучения. К экзамену допускаются студенты, положительно аттестованные по результатам текущего контроля и контрольной работе.

Для успешного освоения дисциплины Высшая математика в учебно-методическом пособии по изучению дисциплины приводится краткое содержание каждой темы занятия, перечень ключевых вопросов для подготовки и организации самостоятельной работы студентов.

Универсальная система оценивания результатов обучения включает в себя системы оценок: 1) «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно»; 2) «зачтено», «не зачтено.

Раздел Текущий контроль успеваемости (текущая аттестация) содержит описание обязательных мероприятий, контроля, самостоятельной работы и усвоения студентами разделов или отдельных тем дисциплины. Изложены требования к промежуточной аттестации по дисциплине.

Помимо данного пособия, студентам следует использовать материалы, размещенные в соответствующем данной дисциплине разделе ЭИОС, в которые более оперативно вносятся изменения для адаптации дисциплины под конкретную учебную группу.

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины Высшая математика содержит введение, четыре раздела и список рекомендованной литературы (Библиографический список) для закрепления пройденного материала и самостоятельной работы студента. В первом разделе приведены сведения о лекционных и практических занятиях. Во втором, третьем и четвертом разделах приведены методические рекомендации студентам по самостоятельной работе и по подготовке к сдаче экзаменов.

1. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Основными видами учебной деятельности в ходе изучения дисциплины являются лекции и практические занятия. Для успешного освоения дисциплины Высшая математика студент должен активно работать на лекционных и практических занятиях, организовывать самостоятельную внеаудиторную деятельность.

В начале лекции необходимо уяснить цель, которую преподаватель ставит перед собой и студентами. Важно внимательно слушать преподавателя, отмечать наиболее существенную информацию и кратко ее конспектировать; по ходу лекции необходимо в конспекте подчеркивать новые термины, определения.

Студенту следует сравнивать то, что услышано на лекции, с прочитанным и усвоенным ранее материалом, устанавливать их взаимосвязь с изученными ранее понятиями, укладывать новую информацию в собственную, уже имеющуюся систему знаний.

При разработке образовательной технологии организации учебного процесса основной упор сделан на соединение активной и интерактивной форм обучения. Интерактивная форма позволяет студентам проявить самостоятельность в освоении теоретического материала и овладении практическими навыками, формирует интерес и позитивную мотивацию к учебе.

1. 1. Тематический план лекционных и практических занятий

Тематический план лекционных и практических занятий представлен в таблицах 1, 2.

Таблица 1 – Тематический план лекционных занятий (трудоемкость усвоения).

Номер темы	**Раздел дисциплины**	**Кол-во ч**	
		очно	**очно-заочно**
Семестр 1			
1	Введение	2	2
2	Элементы линейной алгебры	12	6
3	Векторная алгебра	6	2
4	Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве	10	2
5	Введение в математический анализ	8	2
6	Дифференциальное исчисление функции одной	10	4

Номер темы	Раздел дисциплины	Кол-во ч	
		очно	очно-заочно
	переменной		
ИТОГО за первый семестр		48	18
Семестр 2			
7	Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных	8	2
8	Интегральное исчисление функции одной переменной. Неопределенный интеграл	6	4
9	Интегральное исчисление функции одной переменной. Определенный и несобственный интеграл	8	2
10	Дифференциальные уравнения	8	4
11	Числовые и функциональные ряды	8	2
12	Теория вероятностей случайных событий	4	2
13	Теория вероятностей случайных величин	6	2
ИТОГО за второй семестр		48	18
Итого за год		96	36

Таблица 2 – Тематический план практических занятий (трудоемкость усвоения)

Номер темы	Раздел дисциплины	Кол-во ч	
		очно	очно-заочно
Семестр 1			
1	Введение		
2	Элементы линейной алгебры	12	6
3	Векторная алгебра	6	2
4	Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве	12	2
5	Введение в математический анализ	8	2
6	Дифференциальное исчисление функции одной переменной	10	6
ИТОГО за первый семестр		48	18
Семестр 2			
7	Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных	8	4
8	Интегральное исчисление функции одной переменной. Неопределенный интеграл	6	4
9	Интегральное исчисление функции одной переменной. Определенный и несобственный интеграл	8	2

Номер темы	Раздел дисциплины	Кол-во ч	
		очно	очно-заочно
10	Дифференциальные уравнения	8	2
11	Числовые и функциональные ряды	8	2
12	Теория вероятностей случайных событий	4	2
13	Теория вероятностей случайных величин	6	2
ИТОГО за второй семестр		48	18
Итого за год		96	36

1.2. Методические рекомендации по лекционным и практическим занятиям

Тема 1. Введение

Математика тесно связана с курсами по микроэкономике и макроэкономике. Микроэкономические модели, такие как модели спроса и предложения, подразумевают использование математических функций для описания поведения потребителей и производителей. Например, в микроэкономике математические модели помогают анализировать поведение индивидуальных агентов, таких как потребители и фирмы.

Макроэкономические модели могут использовать математические методы для анализа совокупного спроса и предложения, моделирования экономических циклов и оценки влияния фискальной и монетарной политики. В макроэкономике математические модели применяются для описания общих экономических явлений, таких как экономический рост, инфляция и безработица.

Математика играет основополагающую роль в статистике и эконометрике, где используются математические методы для анализа данных, построения моделей и проверки гипотез. Статистические методы анализируют экономические данные. В эконометрике оценивают и тестируют экономические теории с использованием реальных данных, что дает возможность принимать более обоснованные решения как для частных инвесторов, так и для государственных структур. Модели регрессии и панельные данные помогают устанавливать причинно-следственные связи и выявлять закономерности в данных, что в свою очередь значительно улучшает прогнозирование.

Математические концепции также находят применение в финансовых дисциплинах, таких как финансовая математика и инвестиционный анализ. Здесь используются такие инструменты, как дисконтирование, расчет аннуитетов, анализ рисков и спрэдов, которые требуют применения формул и математических расчетов. Понимание этих математических основ помогает студентам разрабатывать стратегии управления активами и оценивать финансовые риски.

При изучении финансового анализа используются различные количественные методы для оценки стоимости активов, управления рисками и оптимизации портфелей. Например, модель оценки капитальных активов (CAPM) и модель дисконтированных денежных потоков (DCF) применяются для определения необходимых ставок доходности и оценки инвестиционной привлекательности. В условиях неопределенности важно учитывать различные сценарии и риски, используя методы Монте-Карло и другие стохастические модели.

Теория игр помогает анализировать стратегические взаимодействия между различными экономическими агентами, требует глубокого понимания математических моделей, таких как матрицы, неравенства и оптимизационные задачи. Это позволяет студентам лучше понимать конкурентные стратегии и механизмы принятия решений в условиях неопределенности.

Модели общего равновесия, например, играют ключевую роль в анализе взаимодействия между различными секторами экономики. При этом важными инструментами являются динамические стохастические модели с общим равновесием, которые позволяют учитывать не только текущие, но и ожидаемые будущие состояния экономики.

Тема пересечения математики и экономики имеет огромное значение не только в рамках учебной программы, но и для практического применения в различных областях экономики и бизнеса. Одним из ярких примеров является применение статистических и эконометрических методов, которые базируются на математических принципах, для анализа большой базы данных. В современном мире, где информация доступна в изобилии, умение анализировать и интерпретировать данные становится особенно важным.

Студенты, изучающие экономику, часто сталкиваются с задачами построения регрессионных моделей, где они используют математические методы для оценки зависимостей между переменными. Например, при анализе влияния изменений в процентных ставках на уровень инвестиций можно применять линейные регрессионные модели, позволяющие количественно оценить этот эффект. Математические инструменты, такие как метод наименьших квадратов, помогают минимизировать ошибки предсказания, что приводит к более точным выводам.

Теория вероятностей и статистика имеет ключевое значение для принятия экономических решений в условиях неопределенности. Модели, учитывающие различные экономические риски, широко используются в области финансового анализа, где инвесторы должны оценивать вероятность различных сценариев, включая положительные и отрицательные исходы. Здесь важными становятся понятия, такие как ожидаемая ценность, дисперсия и стандартное отклонение, которые позволяют оценивать риски и принимать обоснованные решения.

Не менее важным является применение математического моделирования в экономике для анализа сценариев и прогнозирования будущих трендов. Модели динамики систем, такие как модели роста Р. Солоу или модели в рамках теории игр, помогают не только в понимании того, как работает экономика в долгосрочной перспективе, но и в разработке стратегий управления изменениями. Эффективное использование таких моделей требует глубоких знаний как в математике, так и в теоретической экономике, что подчеркивает необходимость междисциплинарного подхода в обучении.

Со стороны культурной и социальной значимости образования в области математики и экономики можно отметить, что такие знания способствуют формированию более критически настроенной и информированной публики. Понимание основных экономических принципов и способов анализа данных помогает гражданам принимать более осознанные решения в личных финансах и участвовать в демократических процессах.

С учетом быстрого развития технологий и появления новых инструментов для анализа данных, таких как машинное обучение, изучение математики в контексте экономики должно включать в себя элементы компьютерных наук и анализа больших данных. Это откроет новые горизонты для студентов, позволяя им быть готовыми к вызовам современного рынка труда и эффективно использовать свои знания в практике.

Объединение математики и экономики не только усиливает академическую составляющую образования, но и готовит студентов к реальным вызовам на рынке труда. Способность использовать математические и статистические методы для анализа экономических явлений будет повышать конкурентоспособность выпускников, вооружая их необходимыми знаниями и навыками для успешной карьеры в экономике, финансах, консалтинге и многих других сферах.

Значимость изучения математики в экономическом контексте трудно переоценить, так как она формирует не только теоретическую основу, но и практические способности, критически важные для работы в постоянно меняющемся мире. Интеграция математики в экономику является неотъемлемой частью образования, обеспечивая студентов необходимыми навыками для решения сложных задач и улучшающей их способности адаптироваться к изменениям в экономической среде. Это придаёт учебному процессу практическое значение и подготавливает будущих специалистов к активной и успешной деятельности в разных сферах.

Математика в экономике активно используется в институтах, занимающихся экономическим прогнозированием и планированием. Например, при разработке бюджетов, оценке инвестиционных проектов или установлении цен на товары и услуги. Применяя математические модели, экономисты могут значительно повысить точность своих прогнозов, что в итоге оказывает прямое влияние на финансовую эффективность компаний и организаций.

Студенты, обладая знаниями в области программирования и работы с большими данными, могут более эффективно применять математические модели и алгоритмы для анализа сложных экономических данных. Это не просто повышает качество их обучения, но и раскрывает новые перспективы для карьерного роста — такие специалисты становятся особенно ценными на рынке труда.

Учебные заведения всё чаще инициируют сотрудничество с бизнесом и другими общественными организациями, что позволяет студентам применять свои знания на практике и решать реальные проблемы. Такие практики не только углубляют понимание материала, но и способствуют развитию навыков командной работы, что является важным аспектом успеха в любом профессиональном поле.

Не стоит забывать о роли студентов, заинтересованных в исследованиях. Они могут принимать участие в научных проектах, которые часто требуют использования математических методов для анализа данных и поиска новых решений актуальных экономических вопросов. Это не только обогащает их собственное образование, но и вносит вклад в научное сообщество, что важно для дальнейшего развития экономики в целом.

Тема 2. Элементы линейной алгебры

Перечень изучаемых вопросов

Матрицы. Виды матриц. Линейные операции над матрицами. Произведение матриц. Транспонирование. Определители второго и третьего порядков. Основные свойства. Понятие об определителях любого конечного порядка. Теорема о разложении определителя по элементам строки (столбца). Миноры, алгебраические дополнения. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матриц. Теорема о базисном миноре. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Правило Крамера. Обратная матрица. Решение матричных уравнений. Решение систем уравнений при помощи обратной матрицы. Решение практических задач. Совместная (несовместная), определенная (неопределенная) однородная система уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Решение однородных систем.

Методические указания

Важно хорошо усвоить свойства определителей, так как без их применения практически невозможно вычислять определители высших порядков (выше третьего). Умение вычислять определители пригодится для изучения последующих тем дисциплины. Понятие матрицы тесно связано с исследованием и решением систем линейных уравнений. Матричный язык широко используется в различных областях современной математики и ее приложениях. Системы линейных уравнений и методы их решения играют важную роль во многих прикладных задачах. Универсальным способом решения систем линейных уравнений является метод Гаусса, в основе которого лежит принцип последовательного исключения неизвестных.

Основные теоретические сведения

Матрицей размера m×n называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов. Матрица записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & . & a_{3n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Если m=n, то матрица называется **квадратной**.

Элементы матрицы A обозначаются a_{ij}, где i – номер строки, в которой находится элемент, j – номер столбца. Например, элемент a_{24} стоит в матрице на второй строке в четвертом столбце.

Матрица размером **m×1 называется матрицей-столбцом;**

Матрица размером **1×nназывается матрицей-строкой.**

Главной диагональю квадратной матрицы называется диагональ, проведённая из левого верхнего угла матрицы в правый нижний угол.

Побочной диагональю матрицы называется диагональ, проведённая из левого нижнего угла матрицы в правый верхний угол.

Единичная матрица – это *квадратная матрица*, у которой все элементы главной диагонали равны единице, а остальные элементы матрицы равны нулю.

Например, единичная матрица третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами

1. Сложение

Формальная модель	Наглядно-эмпирическая модель
Суммой матриц А и В одинаковой размерности называется матрица С той же размерности, m×n, каждый элемент которой равен сумме элементов матриц А и В, стоящих на тех же местах	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то $A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}$

2. Произведение матрицы на число

Формальная модель	Наглядно-эмпирическая модель
Произведением матрицы на число называется матрица той же размерности, что и исходная, все элементы которой равны элементам исходной матрицы, умноженным на данное число	$k \cdot A = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$

3. Произведение матриц

Операция умножения вводится только для тех пар матриц, у которых число столбцов первой матрицы совпадает с количеством строк второй.

Матрица-произведение АВ состоит из стольких строк, сколько их в первом сомножителе А, и из стольких столбцов, сколько их во втором сомножителе – матрице В.

3. Произведение матриц

Формальная модель	Наглядно-эмпирическая модель
Произведением матрицы А размерности m×p и матрицы В размерности p×n называется матрица С размерности m×n каждый элемент которой c_{ij} определяется формулой $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, i = 1,\ldots,m, j = 1,\ldots,n.$ Таким образом, элемент c_{ij} представляет собой сумму произведений элементові-йстроки матрицы А на соответствующие элементы j-го столбца матрицы В	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + b_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$

Например, дано

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Произведение этих матриц:

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 3 + 6 \cdot 5 & -1 \cdot (-2) + 6 \cdot 1 \\ 0 \cdot 3 + 2 \cdot 5 & 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 8 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$$

Матрица $\mathbf{A^T}$, полученная из матрицы *A* заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется **транспонированной по отношению к A.**

Например, дана матрица A= $\begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

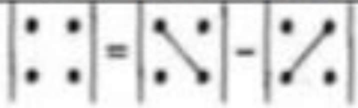
Матрица транспонированная $A^т = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

Элементарными преобразованиями над матрицей называются следующие преобразования строк (столбцов) матрицы: 1) перестановка двух строк (столбцов) местами; 2) умножение строки (столбца) на любое отличное от нуля число; 3) прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на произвольное число; 4) вычеркивание нулевой строки (столбца).

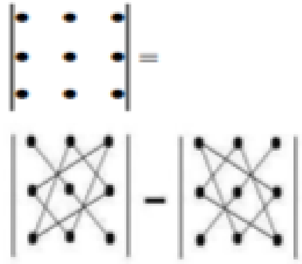
Определители

Определителем или детерминантом *квадратной матрицы A* называется число, которое ставится в соответствие этой матрице и может быть вычислено по ее элементам. Обозначается |A|, det A, или Δ.

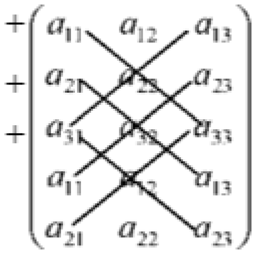
Определителем второго порядка называется число, равное разности произведений элементов главной и второй диагонали.

Аналитическая модель	Графическая модель
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$	

Определитель третьего порядка (Правило треугольников) вычисляется следующим образом: со знаком плюс идут произведения трех чисел, расположенных на главной диагонали матрицы и в вершинах треугольников с основанием, параллельным этой диагонали и вершиной противоположного угла матрицы. Со знаком минус идут произведения трех чисел из второй диагонали и из треугольников, построенных относительно этой диагонали

Аналитическая модель	Графическая модель
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$ $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$ $- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$	

Можно правило запомнить по следующей схеме (Правило Саррюса): используется матрица А приписыванием снизу первых двух ее строк. Произведения элементов, стоящих на главной диагонали или на прямых, параллельных главной диагонали, берутся со знаком «+»; а произведения элементов, стоящих на побочной диагонали или на прямых, параллельных ей, берутся со знаком «-»:



Например, надо вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right| \\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array} \end{array} = 1\cdot5\cdot9 + 4\cdot8\cdot3 + 7\cdot2\cdot6 - 7\cdot5\cdot3 - 1\cdot8\cdot6 - 4\cdot2\cdot9 = 0.$$

Минором $\mathbf{M_{ij}}$ к элементу $\mathbf{a_{ij}}$ определителя n-го порядка называется определитель (n-1)-го порядка, полученный из исходного определителя вычеркиванием i-й строки и j-го столбца (т. е. вычеркиваются мысленно строка и столбец, на пересечении которых находится элемент $\mathbf{a_{ij}}$, минор которого вычисляется).

Алгебраическое дополнение вычисляется по формуле

$$\mathbf{A_{ij}} = (-\mathbf{1})^{\mathbf{i+j}}\mathbf{M_{ij}}$$

Алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} равно произведению минора к этому элементу на минус единица в степени, равной сумме номера строки и номера столбца этого элемента.

Например, для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ алгебраических дополнений будет девять, так как для каждого элемента матрицы вычисляется свой минор и свое алгебраическое дополнение.

Например, алгебраические дополнения с номерами A_{11} и A_{12} будут равны:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(10-2) = -8.$$

Определители любого порядка вычисляют по следующему правилу (разложение определителя по i-й строке, j-му столбцу): **сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на свои алгебраические дополнения равна величине определителя:**

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

Например, вычислим определитель разложением по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = (45-48) - 2(36-42) + 3(32-35) = 0.$$

Обратная матрица. Обратной матрицей (обозначается A^{-1}), к квадратной матрице А называется такая матрица, что

$$\mathrm{A}\,\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{E}$$

произведение матрицы на ее обратную матрицу дает единичную матрицу.

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля. В противном случае она называется *вырожденной.*

Только невырожденная матрица (определитель которой не равен нулю) имеет обратную.

Правило нахождения обратной матрицы:

1. Вычисляем определитель матрицы А. Если определитель не равен нулю, обратную матрицу можно найти.

2. Вычисляем все алгебраические дополнения матрицы А.

3. Составляем матрицу (промежуточную) из найденных алгебраических дополнений, располагая эти алгебраические дополнения в промежуточной матрице согласно номеру строки и номера столбца.

4. Транспонируем промежуточную матрицу.

5. Составляем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ . & . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

6. Выполняем проверку: умножение матрицы А на обратную матрицу $A\,A^{-1} = E$ дает единичную матрицу.

Системы линейных уравнений

Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными в общем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Если определитель Δ системы линейных алгебраических уравнений отличен от нуля, то система имеет единственное решение.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -1 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ x + 2y - z = 9 \end{cases}$$

по методу Гаусса.

Решение.

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

Наша цель – с помощью элементарных преобразований привести матрицу к ступенчатому виду. С чего начать действия?

Сначала смотрим на левое верхнее число. Удобнее производить преобразования матрицы к ступенчатому виду, если находиться на этом месте единица. Как организовать единицу?

Преобразование первое: меняем местами первую и третью строки:

Теперь первая строка у нас останется неизменной до конца решения.

Нужно получить нули вместо цифры 2 во второй строке и нуль вместо цифры 3 на третьей строке вот на этих местах – цифры обведены:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Сначала разбираемся со второй строкой (2, -1, 3, 13):
что нужно сделать, чтобы на первой позиции получить ноль вместо 2? Нужно ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на (-2). Мысленно или на черновике умножаем первую строку на (-2):

(-2, -4, 2, -18).

И последовательно проводим (опять же мысленно или на черновике) сложение, ко второй строке прибавляем первую строку, уже умноженную на (-2):

Результат записываем во вторую строку.

$$\begin{array}{cccc} 0 & -5 & 5 & -5 \\ \| & \| & \| & \| \\ -2 & -4 & 2 & -18 \\ + & + & + & + \\ 2 & -1 & 3 & 13 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Аналогично разбираемся с третьей строкой (3, 2, -5, -1).

Чтобы получить на первой позиции ноль вместо цифры 3, нужно к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на (-3).

Результат записываем в третью строку:

$$\begin{array}{cccc} 0 & -4 & -2 & -28 \\ \| & \| & \| & \| \\ -3 & -6 & 3 & -27 \\ + & + & + & + \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

На практике эти действия обычно выполняются устно и записываются в один шаг.

Далее можно упростить вторую строку, получить единицу на следующей «ступеньке», вместо цифры (-5).

Вторую строку делим на (-5) (поскольку там все числа делятся на 5 без остатка). Заодно делим третью строку на (-2), ведь чем меньше числа, тем проще решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

На заключительном этапе элементарных преобразований нужно получить еще один ноль на третьей строке вместо цифры 2.

Для этого к третьей строке прибавляем вторую строку, умноженную на (-2).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Получили матрицу треугольного вида:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Продолжаем решение системы уравнений.

Обратный ход метода Гаусса: при помощи коэффициентов полученной матрицы создаем новую систему уравнений.

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная исходной системе уравнений новая система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 9 \\ \qquad y - z = 1 \\ \qquad\quad z = 4 \end{cases}$$

В третьем уравнении у нас уже готовый результат: z= 4.

Смотрим на второе уравнение. Значение «зет» уже известно z= 4.

Находим значение y:

$$y - z = 1$$
$$y - 4 = 1$$
$$y = 5$$

И, наконец, в первое уравнение подставляем «игрек» и «зет» известные:

$$x + 2y - z = 9$$
$$x + 10 - 4 = 9$$
$$x = 3.$$

Рекомендуется выполнить проверку, подставив найденные значения x =3, y =5 и z =4 в первоначальную систему уравнений и убедиться в правильности равенства каждой строки системы уравнений.

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -1 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ x + 2y - z = 9 \end{cases}$$

$$9 + 10 - 20 = -1$$
$$6 - 5 + 12 = 13$$
$$3 + 10 - 4 = 9.$$

Ответ: x =3, y =5 и z =4.

Пример 2. Решить систему уравнений матричным способом (при помощи обратной матрицы).

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение.

Вычисляем главный определитель системы.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 + 5 - 1 + 10 - 6 = 12 \neq 0$$ - матрица невырожденная.

Матрица А имеет обратную.

Запишем эту систему

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

в виде матриц

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ и } \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Записываем систему уравнений в матричном виде

$$A \cdot X = B.$$

Матрицу X найдем по формуле

$$X = A^{-1} B.$$

Вычисляем матрицу A^{-1} по алгоритму 9смотри стр. 17).

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$ $\quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2-1) = 3.$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(10-2) = -8.$ $\quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6-1 = 5.$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5-1 = 4.$ $\quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(3+1) = -4.$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2-1 = -3.$

$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -(6-5) = -1.$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3+5 = 8.$

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -8 & 5 & -1 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$X = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -8 & 5 & -1 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0\cdot 12 & 3\cdot 3 & (-3)\cdot 3 \\ -8\cdot 12 & 5\cdot 3 & (-1)\cdot 3 \\ 4*12 & (-4)\cdot 3 & 8\cdot 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 \\ -84 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Рекомендуется убедиться в правильности решения, подставив найденные значения в первоначальную систему уравнений.

Ответ: $x_1 = 0,\ x_2 = -7, x_3 = 5.$

Пример 3. Решить систему уравнений **методом Крамера**.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение.

Главный определитель системы:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6-2+5-1+10-6 = 12 \neq 0$$

Запишем и вычислим вспомогательные определители

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 12 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 12 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 12 \cdot 8 + 12 = -84 \cdot$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 12 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 + 12 + 12 \cdot 4 = 60 \cdot$$

Тогда $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{0}{12} = 0,$

$x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = -\frac{84}{12} = -7,$

$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{60}{12} = 5.$

Ответ: $x_1 = 0,\ \ x_2 = -7, x_3 = 5.$

Рекомендуемая литература: [1, 4, 5, 8].

Контрольные вопросы

1. Дайте определение матрицы.

2. Частные виды матриц: единичная матрица, квадратная матрица, матрица-строка, матрица столбец, диагональная матрица, матрица ступенчатого вида. Приведите примеры этих матриц.

3. Приведите пример транспонирования матрицы.

4. Приведите примеры матриц, которые можно сложить и матриц, которые сложить нельзя. Сложение матриц, дайте определение.

5. Умножение матриц на число. Приведите пример. Любую ли матрицу можно умножить на число?

6. Умножение матриц. Назовите правило умножения матриц. Какого размера получится матрица после умножения матрицы размером 3x2 на матрицу размером 5x4?

7. Сформулируйте правило вычисления обратной матрицы.

8. Напишите матрицу, обратную; транспонированную матрице (1 2 3).

9. Определители второго и третьего порядков сколько имеют строк и столбцов? приведите примеры.

10. Вычисление определителя второго порядка, приведите пример.

11. Вычисление определителя третьего порядка. Приведите пример вычисления.

12. Назовите основные свойства определителей. Приведите примеры применения этих свойств к определителю третьего порядка.

13. Понятие об определителях любого конечного порядка, сколько строк и сколько столбцов у определителя пятого порядка?

14. Системы линейных уравнений: поясни на примере.

15. Решение систем 3-х линейных уравнений по правилу Крамера.

16. Решение систем линейных уравнений средствами матричного исчисления.

17. Однородные системы.

18. Понятие о ранге матрицы. Как вычислить ранг матрицы размером 2x5?

19.Теорема Кронекера -Капелли.

20. Что такое «прямой ход» и «обратный ход» решения системы уравнений методом Гаусса?

21 Можно ли систему, состоящую из четырех неизвестных и трех сток решить методом Крамера?

22. Миноры определителя, что это такое?

23. Чем алгебраические дополнения определителя размером 3x3 отличаются от миноров этого же определителя?

24. Какие преобразования матриц считаются элементарными преобразованиями?

25. Если у определителя поменять местами три его строки, что изменится?

26. Что такое линейное уравнение?

27. Что такое система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)?

28. Какая система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) называется совместной?

29. Какая система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) называется несовместной?

30. Что называется общим решением СЛАУ?

31. Когда однородная система уравнений имеет единственное решение?

Тема 3. Векторная алгебра

Перечень изучаемых вопросов

Векторы. Основные определения. Линейные операции над векторами: сложение, вычитание, умножение вектора на число. Условие коллинеарности векторов. Проекция вектора на ось. Линейная комбинация векторов. Линейно зависимые и линейно независимые векторы. Прямоугольная декартова система координат на плоскости и в пространстве. Разложение вектора по координатному базису. Координаты вектора. Линейные операции над векторами, заданными своими координатами. Координаты вектора, заданного двумя точками. Расстояние между двумя точками. Направляющие косинусы вектора. Деление отрезка в данном отношении. Скалярное произведение векторов. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов. Компланарность векторов. Геометрический смысл векторного произведения двух векторов. Геометрический смысл смешанного произведения трех векторов в пространстве. Решение практических задач с применением векторов.

Методические указания

Понятие вектора в современной математике является довольно широким понятием, связанным с понятием линейных операций (сложением и умножением на число). Такие операции уже встречались, например, в арифметике, теории матриц. В каждом конкретном случае они определялись по-своему, в соответствии со спецификой тех множеств, для которых они рассматриваются (числа, матрицы). Но свойства этих операций одинаковы. Именно эта общность и сближает их. При решении задач следует учесть особенности применяемой терминологии. Пояснение всех терминов, используемых в задачах, найти в методических рекомендациях по изучению данной темы и рекомендуемой литературе.

Основные теоретические сведения

Скалярное произведение в координатной форме: если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Пример 4. Найти скалярное произведение векторов $\overline{a}(-1;\ 2;\ -3),\ \overline{b}(0;\ -4;\ 1)$.

Решение.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \cdot 0 + 2 \cdot (-4) + (-3) \cdot 1 = -11$$

Ответ: скалярное умножение данных векторов равно -11.

Модуль вектора	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
Направляющие косинусы вектора	$\cos\alpha = \frac{x}{\lvert\vec{a}\rvert}; \cos\beta = \frac{y}{\lvert\vec{a}\rvert}; \cos\gamma = \frac{z}{\lvert\vec{a}\rvert}$, где α, β, γ - углы, которые вектор $\vec{a}$ образует с координатными осями. Направляющие косинусы являются координатами единичного вектора, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$: $\vec{a}_0 = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$
Сумма (разность) векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$	$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$
Умножение вектора на число	$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot x_1; \lambda \cdot y_1; \lambda \cdot z_1)$
Равенство векторов	$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x_1 = x_2; y_1 = y_2; z_1 = z_2$
Коллинеарность векторов	$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$

Векторное произведение векторов

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{в}$ называется вектор $\vec{c}$, который:

1) имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{в}$, т.е. $\lvert\vec{c}\rvert = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{в}\rvert \cdot \sin\varphi$;

2) перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{в}$: $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{в}$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$ в указанном порядке образуют правую тройку.

Векторное произведение обозначается: $\vec{a} \times \vec{в} = [\vec{a}, \vec{в}]$.

Векторное произведение в координатной форме. Пусть $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, тогда

$$\vec{a} \times \vec{в} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Пример 5. Найти векторное произведение векторов $\overline{a}(-1; 2; -3)$, $\overline{b}(0; -4; 1)$ и вычислить длину (модуль) полученного вектора.

Решение

1) Найдём векторное произведение. Определитель третьего порядка вычисляем любым способом, в данном примере для вычисления определитель разложили по первой строке:

$$\overline{N}=[\overline{a}\times\overline{b}]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -1 & 2 & -3\\ 0 & -4 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ -4 & 1\end{vmatrix}\cdot\overline{i}-\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 0 & 1\end{vmatrix}\cdot\overline{j}+\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & -4\end{vmatrix}\cdot\overline{k}=$$

$$=(2-12)\cdot\overline{i}-(-1-0)\cdot\overline{j}+(4-0)\cdot\overline{k}=-10\overline{i}+\overline{j}+4\overline{k}$$

В результате получен вектор

$$\overline{N}=-10\overline{i}+\overline{j}+4\overline{k}.$$

Можно записать его координаты в привычном виде $\overline{N}(-10;1;4)$.

2) Вычислим длину векторного произведения:

$$|\overline{N}|=\sqrt{(-10)^2+1^2+4^2}=\sqrt{100+1+16}=\sqrt{117}=3\sqrt{13}.$$

Ответ: $\vec{a}\times\vec{в}=(-10;1;4)$, длина $|a\times b|=3\sqrt{13}$.

Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ называется число, полученное следующим образом: первые два вектора перемножаются векторно, полученный вектор умножается на вектор $\vec{c}$ скалярно $\vec{a}\vec{в}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{в})\cdot\vec{c}$.

Пусть даны три вектора $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ и $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$. Тогда их смешанное произведение выражается формулой:

$$\vec{a}\vec{в}\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

Пример 6. Даны векторы $\overline{a}(1;-1;2),\overline{b}(0;4;3),\overline{c}(3;2;-6)$.Вычислить: а) объём параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ (рисунок 1); б) объём тетраэдра, построенного на векторах $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ (рисунок 2).

Решение

а)

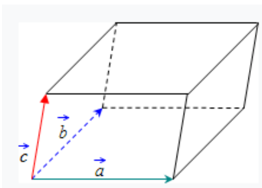


Рисунок 1

Объём параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$, равен модулю смешанного произведения данных векторов $\vec{a}\times\vec{в}\cdot\vec{c}$:

$$p = (\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (-24-6) + 3 \cdot (-3-8) = -30 - 33 = -63$$

$$V_{п-пипеда} = |p| = |-63| = 63 \text{ ед}^3.$$

б)

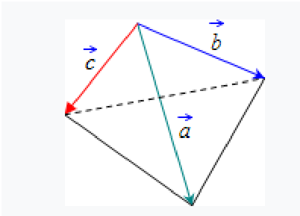


Рисунок 2

Объём тетраэдра, построенного на данных векторах в шесть раз меньше объема параллелепипеда, построенного на этих же векторах:

$$V_{тетраэдра} = \frac{1}{6} \cdot |p| = \frac{1}{6} \cdot |-63| = \frac{63}{6} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2} \text{ ед}^3.$$

Рекомендуемая литература: [2, 6, 4].

Контрольные вопросы

1. Какая величина называется скалярной?
2. Какая величина называется векторной?
3. Что называется модулем вектора?
4. Когда два вектора считаются равными?
5. Как найти сумму нескольких векторов?
6. Как сложить два вектора по правилу параллелограммов?
7. Как найти разность векторов?
8. Когда система векторов будет линейно зависимой?
9. Как определить, что система векторов будет линейно независимой?
10. Как найти проекцию вектора на ось?
11. Разложение вектора по координатному базису.
12. Прямоугольная декартова система координат на плоскости и в пространстве.
13. Как определить координаты вектора, заданного рисунком?
14. Перечисли линейные операции над векторами, заданными своими координатами.

15. Как вычислить расстояние между двумя точками, заданными своими координатами на плоскости и в пространстве?

16. Направляющие косинусы вектора, как их вычислить?

17. Напишите формулы деления отрезка в данном отношении.

18. Как найти скалярное произведение векторов? Это будет число или вектор?

19.Как найти векторное произведение векторов?

20. Напишите формулы для вычисления площади параллелограмма и треугольника, если известны координаты вершин.

21. Как вычислить объем параллелепипеда?

22. Что такое единичные вектора (орты)?

23. Как найти координаты вектора, зная координаты точек начала и конца вектора?

24. Как записывается условие коллинеарности векторов в координатной форме?

25. Чему равно скалярное произведение ортогональных векторов?

26. Чему равен модуль векторного произведения?

27. Чему равен модуль смешанного произведения?

28. Как найти объем треугольной пирамиды, построенной на векторах?

Тема 4. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

Перечень изучаемых вопросов:

Задание множеств точек уравнениями и неравенствами. Различные уравнения прямой линии на плоскости. Понятие о кривых второго порядка. Канонические уравнения эллипса, окружности, параболы, гиперболы. Общее уравнение плоскости. Уравнения прямой в пространстве.

Методические указания

Аналитическая геометрия – область математики, в которой геометрические задачи решаются алгебраическим способом. Важно научиться анализировать геометрические свойства линии на основе анализа их уравнений.

Основные теоретические сведения и примеры решения задач по разделу аналитическая геометрия подробно представлены *в методическом пособии [12]*.

Пример 7. Написать равнение прямой, проходящей через точку М(5; -7) и перпендикулярную к прямой у= 4х - 3.

Решение

Если две прямые взаимно перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов равно минус единице:

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

Если известен один из угловых коэффициентов k_1 этих прямых, то второй угловой коэффициент равен $k_2 = \frac{-1}{k_1}$.

Для прямой y= 4x - 3 угловой коэффициент равен $k_1 = 4$. Угловой коэффициент нужной прямой, перпендикулярной известной прямой,

равен $k_2 = \frac{-1}{4}$.

Уравнение прямой, приходящей через заданную точку M(x_0; y_0) перпендикулярно данной прямой $y = k_1x + b$, находим по формуле

$$y - y_0 = k_2(x - x_0).$$

Подставляем в формулу координаты точки M(5; -7) и угловой коэффициент$k_2 = \frac{-1}{4}$, получаем

$$y - (-7) = -\frac{1}{4}(x - 5).$$

Приводим полученное уравнение к виду $y = kx + b$

$$y + 7 = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}x - \frac{23}{4}.$$

Ответ: прямая $y = -\frac{1}{4}x - \frac{23}{4}$ проходит через точку M(5; -7) и перпендикулярна к прямой y= 4x - 3.

Пример 8. Даны вершины треугольника A(0; 1), B(6; 5) и C(12; -1). Найти: уравнение медианы, проведённой из вершины A.

Решение

Даны вершины треугольника A(0; 1), B(6; 5) и C(12; -1). Обозначим середину отрезка BC точкой M. Медиана делит противоположную сторону на две равные части. Для нахождения уравнения медианы, проведённой из вершины A, сначала вычислим координаты середины отрезка BC по формулам

$$x_M = \frac{x_C + x_B}{2} \text{ и } y_M = \frac{y_C + \cdot y_B}{2}$$

Известны координаты вершин треугольника A(0; 1) и B(6; 5), λ= 1.

$$x_M = \frac{12 + 6}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$y_M = \frac{-1 + 5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Координаты середины отрезка BC точки M(9; 2).

Уравнение медианы AM напишем по формуле прямой, проходящей через две точки M(9; 2) и A(0; 1) по формуле

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-2}{1-2}=\frac{x-9}{0-9}$$

$$\frac{y-2}{-1}=\frac{x-9}{-9}$$

$$-9(y-2) = -1\,(x-9)$$

$$9(y-2) = x-9$$

$$x-9y+18-9 = 0$$

$$x-9y+9=0$$

Ответ: $x - 9y + 9 = 0$ -уравнение медианы из точки А.

Пример 9. Написать общее уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; 2; 3)$, $M_2\ (-1; 0; 2)$ и $M_3(-2; 1; 0)$.

Решение.

Подставим координаты точек в *уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой:*

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1-1 & 0-2 & 2-3 \\ -2-1 & 1-2 & 0-3 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix}=0$$

Решаем определитель любым известным методом. Например, разложим определитель по элементам первой строки:

$$(x-1)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}=0$$

Вычисляем определители второго порядка, находим искомое уравнение:

$$5(x-1) - 3\,(y-2) + (-4)(z-3) = 0$$

$$5x - 3y - 4z + 13 = 0.$$

Ответ: $5x - 3y - 4z + 13 = 0$.

Пример 10. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(3;1;-1)$, $A_2(2;3;5), A_3(6;2;3)$ и $A_4(3;7;2)$. Найти уравнение прямой A_1A_2.

Решение

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ *и* $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$*, имеет вид:*

$$\frac{x-x_0}{x_1-\ x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-\ y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

Для уравнения прямой A_1A_2 берем точки $A_1(3;1;-1)$ и $A_2(2;3;5)$, следовательно, уравнение прямой A_1A_2 будет

$$\frac{x-3}{2-\ 3}=\frac{y-1}{3-\ 1}=\frac{z+1}{5+1}$$

$$\frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{6}$$

Ответ: $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{6}$.

Пример 11. Найти длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса

$$4x^2 + 9y^2 = 144.$$

Решение

Преобразуем это уравнение к *каноническому виду* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Разделим обе части заданного уравнения $4x^2 + 9y^2 = 144$ на 144.

Получим $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$.

Отсюда заключаем, что $a^2 = 36$, $b^2 = 16$.

Значит, $a = 6$ и $b = 4$.

Длины осей: $2a = 12$ и $2b = 8$.

Зная значения a и b, определяем, что 2 а – большая ось, так как 2а>2в.

По формуле $a^2 - c^2 = b^2$ находим значение c, для этого подставим $a = 6$ и $b = 4$:

$$36 - c^2 = 16,$$

$c^2 = 20$ и получим, что $c = 2\sqrt{5}$.

Фокусы этого эллипса лежат на оси ОХ, так как 2а – большая ось.

Координаты фокусов будут $F_1\ (2\sqrt{5}\,;0)$ $F_2(-2\sqrt{5};0)$.

Эксцентриситет эллипса вычисляем по формуле $\varepsilon = \frac{c}{a}$, так как 2a большая ось.

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Рекомендуемая литература: [12, 11, 14, 2, 4, 8,].

Контрольные вопросы

1. Напишите уравнение прямой линии с угловым коэффициентом на плоскости.

2. Общее уравнение прямой линии на плоскости.

3. Угловой коэффициент прямой. Как его определить из уравнения прямой?

4. Напишите уравнение прямой, проходящей через две точки на плоскости.

5. Напишите уравнение прямой в отрезках.

6. По какой формуле можно найти угол между двумя прямыми?

7. Как по уравнениям двух прямых определить параллельность этих прямых на плоскости? В пространстве?

8. Сформулируйте условие перпендикулярности двух прямых на плоскости.

9. Напишите каноническое уравнения эллипса.

10. Каноническое уравнения окружности.

11. Каноническое уравнения параболы.

12. Каноническое уравнения гиперболы.

13.Как по общему уравнению плоскости найти координаты направляющего вектора этой плоскости?

14. Уравнения прямой в пространстве.

15. Как определить расстояние от точки до прямой?

16. Как определить расстояние от точки до плоскости?

17. Как из уравнения гиперболы определить действительные и мнимые оси гиперболы?

18. Как определить из уравнения эллипса, какая из осей эллипса большая, а какая малая?

19. Что такое директриса параболы? Как по уравнению параболы найти уравнение директрисы?

20. Что такое нормальный вектор прямой и нормальный вектор плоскости? Как найти координаты нормального вектора к прямой и к плоскости?

21. Когда плоскость проходит через ось ОУ? Как понять это по виду уравнения плоскости?

22. Когда плоскости параллельны?

23. Когда плоскости перпендикулярны?

24. Когда плоскости совпадают?

Тема 5. Введение в математический анализ

Перечень изучаемых вопросов

Функция и способы ее задания. Область определения функции. Основные элементарные функции и их графики. Понятие предела функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Основные теоремы о пределах. Понятие о неопределенных выражениях. Раскрытие неопределенностей. Первый и второй замечательные пределы. Непрерывность функции. Понятие о точках разрыва функции.

Методические указания

Понятие функции – одно из наиболее важных в математике и ее приложениях, при помощи которых моделируются многие естественные процессы и явления. В самом общем понимании функция – это зависимость между двумя переменными. В курсе математического анализа изучают главным образом числовые функции. Наглядное представление о числовой функции дает ее график – некоторое множество точек на координатной плоскости, обычно – некоторая линия. Задать функцию означает: указать область определения функции и описать правило, позволяющее по данному значению аргумента находить соответствующее значение функции. Наиболее употребительными являются три способа задания функции: табличный, аналитический, графический. Наиболее простые приложения математического анализа ограничиваются кругом так называемых элементарных функций. Это: степенные функции, показательные функции, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции.

Важно усвоить понятия предела функции, бесконечно малых и бесконечно больших функций и методы вычисления пределов. Изучив эту главу, студент будет готов к восприятию понятий производной и интеграла.

Основные теоретические сведения

Пример 12. Найти предел

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+5}{3x+1} = \frac{2^2+5}{3 \cdot 2+1} = \frac{9}{7}.$$

При вычислении данного предела вместо x подставили x=2 и вычисляем предел по свойствам.

Практическое вычисление пределов основывается на следующих теоремах.

Если существуют $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$, то

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+\varphi(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$
2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot\varphi(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$
3. $\lim\limits_{x\to a} k\cdot f(x) = k\lim\limits_{x\to a} f(x)$
4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)}$, если $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) \neq 0$
5. $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{\varphi(x)} = A^B$, где $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $B = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$

Используются также следующие пределы:

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ - первый замечательный предел

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$ - второй замечательный предел.

Пример 13. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x-3}{2x^3+4x+3}$

Решение.

Если числитель и знаменатель дроби представляют собой алгебраические многочлены и имеется неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, то для ее раскрытия и числитель, и знаменатель делят на x в старшей степени. В данном случае старшая степень 3, поэтому, и числитель, и знаменатель делим на x^3, имеем:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{10x}{x^3}-\frac{3}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{4x}{x^3}+\frac{3}{x^3}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{10}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{2+\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}} =$$

(по теореме о пределе частного, имеем)

$$= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{10}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)} =$$

(по теореме о пределе суммы, имеем)

$$= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{10}{x^2}-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x^3}}{\lim\limits_{x\to-\infty}2+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x^3}} = \frac{0}{2} = 0$$

Пример 14. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$ *б)* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}$

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$

Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Для ее раскрытия разложим квадратные трехчлены на линейные множители по формуле

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$

Имеем:

$$\lim_{x\to -2}\frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}=\lim_{x\to -2}\frac{5(x+2)\left(x+\frac{3}{5}\right)}{3(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)}$$

Сократив общий множитель $(x+2)$, получим:

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x+3}{3x-4}=\dfrac{7}{10}=0{,}7$

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}$

Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Для ее раскрытия умножим и числитель, и знаменатель данной дроби на выражение, сопряженное числителю (в данном примере, а в других заданиях смотрим на какой множитель умножать), а именно, умножаем на выражение $\sqrt{21+x}+5$.

Получаем

$$\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{21+x}-5)(\sqrt{21+x}+5)}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)}=$$

Для упрощения числителя воспользуемся формулой:

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, где $a=\sqrt{21+x}-5$, $b=\sqrt{21+x}+5$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{21+x})^2-5^2}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)}=\lim_{x\to 4}\frac{21+x-25}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)}=$$

Разложим первый сомножитель знаменателя по формуле:

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, где $a=x,\quad b=4$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)}{(x-4)(x^2+8x+16)(\sqrt{21+x}+5)}=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{1}{(x^2+8x+16)(\sqrt{21+x}+5)}=\frac{1}{480}$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}$

Имеем неопределенность вида: 1^{∞}.

Для ее раскрытия воспользуемся вторым замечательным пределом:

$\lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}=e$ или $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3+3}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x-3}+\frac{3}{2x-3}\right)^{2-5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-3}{3}}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x-3}{3}}\right)^{\frac{2x-3}{3}}\right)^{\frac{3}{2x-3}\cdot(2-5x)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3}{2x-3}\cdot(2-5x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2-5x)\cdot 3}{2x-3}}=e^{-\frac{15}{2}}$$

Пример 15. Найти предел

$$1.\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\cos 2x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x\cdot\cos 2x}{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}=\left|\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=1;\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=1\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 2x}{2}=\frac{3}{2};$$

Решали пример, используя первый замечательный предел.

Пример 16. Найти предел. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{x}}$. Использовать правило Лопиталя.

Решение.

При $x\to\infty$ числитель x^3 и знаменатель e^x дроби являются бесконечно большими величинами. Мы получаем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Для снятия данной неопределенности нужно продифференцировать по отдельности числитель дроби и знаменатель дроби (в данном примере три раза):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{x}^3}{\mathrm{e}^\mathrm{x}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\mathrm{x}^3)'}{(\mathrm{e}^\mathrm{x})'} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\mathrm{x}^{2'}}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}'}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(6\mathrm{x})'}{(\mathrm{e}^\mathrm{x})'} = \lim_{n\to\infty}\frac{6}{\mathrm{e}^\mathrm{x}}$$

$(x^3)' = 3x^2;$

$(x^3)'' = (3x^2)' = 6x;$

$(x^3)''' = (3x^2)'' = (6x)' = 6;$

$(e^x)' = e^x;\ (e^x)'' = e^x;\ (e^x)''' = e^x.$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x} = \lim_{x\to x_0}\frac{6}{e^x} = \frac{6}{\infty} = 0\,.$$

Следует обратить внимание, что при применении правила Лопиталя берется отношение производных, а не производная отношения.

Правило Лопиталя

Правило Лопиталя используется при вычислении пределов для раскрытия неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных, то есть

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Если после применения правила Лопиталя неопределенность не исчезла, то его можно применить еще раз.

Рекомендуемая литература: [4, 2, 8].

Контрольные вопросы

1. Перечислите способы задания функции.
2. Что такое «область определения функции»?
3. Назовите основные элементарные функции.
4. Что такое монотонная функция?
5. Как понять, что функция периодическая?
6. Чем на графиках отличаются четные функции от нечетных?

7. Как находится «предел функции в точке»?

8. Что такое бесконечно малые и бесконечно большие функции?

9. Перечислите основные теоремы о пределах.

10. Раскрытие неопределенностей при нахождении пределов функции.

11. Что из себя представляет первый замечательный предел.

12. Что из себя представляет второй замечательный предел.

13. Непрерывность функции: как понять, что функция имеет точки разрыва по графику функции?

Тема 6. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Перечень изучаемых вопросов

Определение производной. Ее механический и геометрический смысл. Уравнение касательной к графику функции. Свойства производной. Основные правила нахождения производных. Таблица производных основных элементарных функций. Производные высших порядков. Дифференциал функции. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей. Признаки возрастания и убывания функции. Экстремум функции. Необходимое и достаточное условия экстремума функции. Направление выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции. Схема исследования функции и построения ее графика. Решение задач практического содержания.

Методические указания

Понятие производной – одно из основных понятий математического анализа. Всякий процесс или явление, протекающее во времени, характеризуются наряду с другими показателями такой важной характеристикой, как скорость изменения. Можно говорить о задаче нахождения скорости неравномерного движения, химической реакции, нагревания и остывания нагретого тела, производительности труда и т. д. Все эти задачи приводят к однотипным вычислениям, результат которых называют производной. С помощью математического анализа можно определить оптимальные стратегии потребления и производства. Для этого часто используются функции полезности и производственные функции, которые выражают предпочтения потребителей и технологии, доступные фирмам. Также стоит отметить связь между математикой и дисциплинами, связанными с управлением и бизнесом, такими как операционное управление и логистика. В этих областях используются математические методы для оптимизации процессов, анализа производительности и минимизации затрат, что позволяет принимать более эффективные управленческие решения. Важно усвоить понятие производной, способы ее вычисления, а также научиться применять это понятие при решении прикладных задач. Необходимо научиться вычислять производные сложной функции, обратной, неявно и параметрически заданных функций, применять логарифмическое дифференцирование, находить производные высших порядков. Понятие дифференциала функции, тесно связанное с понятием производной. Также необходимо научиться применять производную для вычисления пределов функций (правило Лопиталя) и для исследования поведения функций (монотонность, экстремумы, выпуклость, точки перегиба, наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке).

Основные теоретические сведения

Правила дифференцирования:

Производная постоянной величины равна нулю: $C' = 0$.

Производная аргумента равна единице: $x' = 1$.

Производная алгебраической суммы конечного числа дифференцируемых функций равна такой же алгебраической сумме производных этих функций:

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'$$

Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первого сомножителя на второй сомножитель плюс произведение первого сомножителя на производную второго сомножителя:

$$(uv)' = u'v + v'u \,.$$

Постоянный множитель можно вынести за знак производной:

$$(Cu)' = C \cdot u', \quad C \text{ – постоянная.}$$

Производная частного двух функций может быть найдена по формуле:

$$.\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Таблица 3 – Таблица производных

Функция y	**Производная y'**
u^n	$n\,u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2} \cdot u'$

Функция y	**Производная** y'
e^u	$e^u \cdot u'$
a^u	$a^u \ln a \cdot u'$
$\ln u$	$\frac{1}{u} \cdot u'$
$\log_a u$	$\frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
$\sin u$	$\cos u \cdot u'$
$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$
$\mathrm{tg}\, u$	$\frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$\mathrm{ctg}\, u$	$-\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$\arcsin u$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$\arccos u$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$\mathrm{arctg}\, u$	$\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$\mathrm{arcctg}\, u$	$\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Пример 17. Найти производную функции $y=\sqrt[3]{x^2}$.

Решение. Сначала преобразуем по формуле $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$.

$$y=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}.$$

Производную этой функции найдем по формуле $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$

$$y'=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Пример 18. Найти производную функции $y=\frac{4x^3-2x}{6x+1}$.

Решение.

$$y'=\left(\frac{4x^3-2x}{6x+1}\right)'=\frac{\left(4x^3-2x\right)'\cdot(6x+1)-(6x+1)'\left(4x^3-2x\right)}{(6x+1)^2}=$$

$$\frac{\left(12x^2-2\right)(6x+1)-6\cdot\left(4x^3-2x\right)}{(6x+1)^2}=\frac{72x^3+12x^2-12x-2-24x^3+12x}{(6x+1)^2}=$$

$$=\frac{48x^3+12x^2-2}{(6x+1)^2}.$$

Применили формулу производной дроби: $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$.

Далее производные находим по формулам суммы $(u+v-w)'=u'+v'-w'$, производной степени $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$, $(x)'=1$, $C'=0$, затем упростили полученное выражение, перемножая выражение в скобках, привели подобные члены.

Пример 19. Найти производную функции $y=\ln(3x-4)^5$.

Решение

Сначала можно преобразовать выражение по формуле логарифма степени $\lg x^n=n\cdot\lg x$:

$$y=\ln(3x-4)^5=5\cdot\ln(3x-4).$$

$$y'=\left(5\ln(3x-4)^5\right)'=5\cdot\left(\ln(3x-4)\right)'=5\cdot\frac{(3x-4)'}{3x-4}=5\cdot\frac{3}{3x-4}=\frac{15}{3x-4}.$$

Пример 20. Найти производную функции $y=7\,\mathrm{tg}^3\,2x$.

Решение

$$y' = 7\cdot 3\cdot \mathrm{tg}^{3-1}\, 2x\cdot(\mathrm{tg}\, 2x)' = 21\,\mathrm{tg}^2\, 2x\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot(2x)' = \frac{42\,\mathrm{tg}^2\, 2x}{\cos^2 2x}$$

Применили последовательно формулы $(u^n)' = nu^{n-1}\cdot u'$, $(\mathrm{tg}u)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$, $(Cu)' = C\cdot u'$, $(x)' = 1$.

Пример 21. Найти производную 3-го порядка от функции $y = \ln x$.

Решение.

$y' = \frac{1}{x}$; $y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$;

$y''' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = (-x^{-2})' = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$.

Пример 22. Найти производную функции y, заданную уравнением:

$$x^2y + \ln y = 5x.$$

Решение

Дифференцируем обе части уравнения.

Первое слагаемое слева дифференцируем как произведение двух функций:

$$2xy + x^2y' + \frac{1}{y}y' = 5.$$

Из полученного уравнения выражаем производную функции y':

$$y' = \frac{5-2xy}{x^2+\frac{1}{y}} = \frac{y(5-xy)}{x^2y+1}.$$

Пример 23. Найти дифференциал функции $y = 2\mathrm{tg}\frac{x}{2} + \lg\mathrm{ctg}\sqrt{x}$.

Решение

Дифференциал функции находят по формуле $dy = y' \cdot dx$.

Находим производную. Заданная функция представляет собой сумму двух сложных функций.

$$y' = \left(2\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)' + \left(\lg\mathrm{ctg}\sqrt{x}\right)'.$$

Производная от первого слагаемого

$$\left(2\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)' = 2\left(y\frac{x}{2}\right)' = \frac{2}{\cos^2\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{2}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}.$$

Второе слагаемое дифференцируем как сложную функцию

$$\left(\ln \operatorname{ctg}\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{\operatorname{ctg}\sqrt{x}}\left(\operatorname{ctg}\sqrt{x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{ctg}\sqrt{x}}\left(-\frac{1}{\sin^2\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}\right)' = -\frac{1}{\operatorname{ctg}\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\sin\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}}.$$

Окончательно для производной искомой функции получим:

$$y' = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} - \frac{1}{\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}}.$$

Дифференциал будет равен

$$dy = \left(\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} - \frac{1}{\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}}.\right)\cdot dx\ .$$

Критическими точками функции называются точки, в которых функция не определена (имеет разрывы первого или второго рода) и точки, производная функции в которых равна нулю.

Точки максимума и минимума функции называются **точками экстремума** функции.

Вторая производная функции в **точке перегиба** равна нулю или не существует.

Исследование функции

1. Если производная дифференцируемой функции $y = f(x)$ больше нуля $y' = f'(x) > 0$ при всех значениях аргумента внутри интервала $x_1 \le x \le x_2$, то рассматриваемая функция на данном интервале является **возрастающей.**

2. Если производная дифференцируемой функции $y = f(x)$ меньше нуля при всех значениях аргумента внутри интервала $x_1 \le x \le x_2$, то рассматриваемая функция на данном интервале является **убывающей**.

3. Для того, чтобы функция $y = f(x)$ имела **экстремум** в точке $x_э$, необходимо, чтобы производная функции в этой точке $f'(x_э)$ равнялась нулю или не существовала. Если при переходе через точку $x_э$ слева направо производная функции $y = f(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то точка $x_э$ является точкой максимума функции, если знак производной изменяется с минуса на плюс, то $x_э$ является точкой минимума функции.

4. Правило нахождения **наибольшего и наименьшего** значения функции на интервале:

а) найти производную функции $f'(x)$.

б) найти критические точки, принадлежащие интервалу $[a, b]$, в которых производная функции равна нулю $f'(x) = 0$ или не существует.

в) вычислить значение функции $y = f(x)$ на концах интервала и в критических точках и выбрать из них наибольшее $y_{наиб}$ и наименьшее $y_{наим}$.

5. Если вторая производная функции на некотором интервале $x_1 < x < x_2$ больше нуля (отрицательна), то **функция вогнута (выпукла) на этом интервале.**

6. Для нахождения интервалов выпуклости, вогнутости и точек перегиба графика функции $y= f(x)$ рекомендуется использовать следующий порядок исследования:

а) найти вторую производную исследуемой функции $f''(x) = 0$;

б) найти точки, в которых вторая производная равна нулю $f''(x) = 0$ или не существует – эти точки являются критическими;

в) определить знак второй производной при значениях аргумента слева и справа от найденных критических точек. Сделать вывод об интервалах выпуклости, вогнутости функции и наличии точек перегиба x_n;

г) вычислить значение функции в точках перегиба $y_n = f(x_n)$.

Пример 24. Найти экстремумы функции $y = x^3 + x^2 – 5x$ и определить промежутки монотонности (промежутки возрастания и убывания).

Решение

1. Находим производную функции:

$$y' = 3x^2 + 2x – 5.$$

2. Находим критические точки. Находим точки, в которых производная равна нулю:

$$3x^2 + 2x – 5 = 0.$$

Из решения уравнения находим:

$$x_{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+15}}{3}; \quad x_1 = 1; \;\; x_2 = -\frac{5}{3}.$$

3. Исследуем знак производной слева и справа от каждой критической точки.

Нанесем критические точки на числовую ось (рисунок 3).

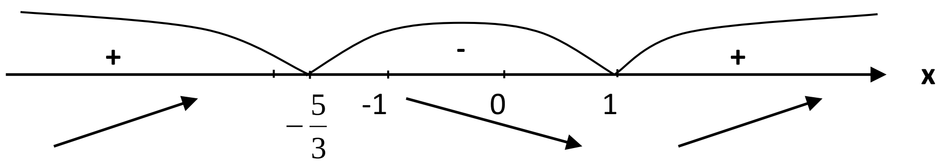


Рисунок 3

Вычислим значения производной при значениях аргумента слева и справа от критических точек.

На интервале $x < -\frac{5}{3}$ возьмем, например, точку $x = -2$:

$$f'(x=-2) = 12 - 4 - 5 = 3 > 0.$$

Так как производная положительна, то на интервале $x < -\frac{5}{3}$ функция является возрастающей.

На интервале $-\frac{5}{3} < x < 1$ возьмем, например, точку $x = 0$:

$$f'(x=0) = 0 + 0 - 5 < 0.$$

Так как производная отрицательна на интервале $-\frac{5}{3} < x < 1$ функция является убывающей.

На интервале $x > 1$ возьмем точку $x = 2$:

$$f'(x=2) = 12 + 4 - 5 = 11 > 0.$$

Так как производная положительна на интервале $x > 1$ функция возрастает.

В соответствии со сменой знака производной при переходе через точки экстремума делаем вывод, что в точке $x = -\frac{5}{3}$ функция имеет максимум, а в точке $x = 1$ минимум.

4. Вычисляем значение функции в точках максимума и минимума:

$$y_{\max} = f\left(x = -\frac{5}{3}\right) = -\frac{125}{27} + \frac{25}{9} + \frac{25}{3} = \frac{175}{27}$$

$$y_{\min} = f(\mathrm{x} = 1) = 1 + 1 - 5 = -3.$$

Пример 25. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$y = x^3 - 2x^2 - 4x$ на интервале [0, 3].

Решение.

1. Находим производную функции:

$$y' = 3x^2 - 4x - 4.$$

2. Находим критические точки. Находим точки, в которых производная обращается в ноль:

$$3x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{3}$$

$$x_1=2;\ x_2=-\frac{2}{3}.$$

Заданному интервалу принадлежит только одна критическая точка $x = 2$.

3. Вычисляем значение функции на границах интервала и в критической точке:

$$y(0) = 0;\quad y(3) = -3;\quad y(2) = -8.$$

Записываем наибольшее и наименьшее значение функции:

$$y_{\text{наиб}} = y(0) = 0;$$

$$y_{\text{наим}} = y(2) = -8.$$

Рекомендуемая литература: [2, 8, 10].

Контрольные вопросы

1. Дайте определение производной.

2. Механический и геометрический смысл производной в чем заключается?

3. Как найти уравнение касательной в точке, проведенной к графику функции?

4. Свойства производной. Основные правила нахождения производных.

5. Напиши таблицу производных основных элементарных функций.

6. Производные высших порядков. Как найти?

7. Напишите, как найти дифференциал функции одной переменной.

8. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей.

9. Сформулируйте признаки возрастания и убывания функций на интервале.

10. В чем состоит достаточное условие возрастания и убывания функции?

11. Как найти промежутки возрастания и убывания функции?

12. Экстремум функции. Сформулируйте необходимые и достаточные условия экстремума функции.

13. Критические точки функции как найти?

14. Направление выпуклости графика функции как определить?

15. Назовите правило нахождения точек перегиба графика функции.

16. Опишите схему исследования функции и построения ее графика.

17. Напишите несколько примеров применения производных для решения экономических задач.

18. Как найти наибольшее значение функции на данном промежутке?

19. Как найти скорость точки по уравнению движения?
20. Как найти производную неявно заданной функции?
21. Как вычислить производную степенно показательно функции?

Тема 7. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Перечень изучаемых вопросов

Функции нескольких переменных. Область определения. Частные производные первого порядка. Полный дифференциал и его связь с частными производными. Частные производные и полные дифференциалы второго порядка. Экстремумы функции двух переменных. Необходимое и достаточное условие экстремума. Задачи оптимизации**.** Локальный экстремум функции нескольких переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области. Условный экстремум.

Методические указания

В данной теме рассматриваются переменные величины, зависящие от нескольких других переменных величин. Необходимость изучения такого вида зависимостей вызвана тем, что во многих процессах и явлениях, встречающихся в природе, технике, в практической деятельности человека, числовые значения одной величины определяются набором из двух, трех и большего количества независимых переменных. При изучении этих явлений используют понятие функции нескольких переменных.

Основные теоретические сведения

Частные производные первого порядка

Если каждой паре действительных чисел (x; y) из непустого множества D (область определения функции) по некоторому правилу ставится в соответствие определенный элемент z из множества U (множество значений функции), то говорят, что на множестве D задана функция двух переменных, которую обозначают $z = f(x, y)$.

Независимые переменные x и y называют аргументами функции z.

Аналогично определяется функция любого числа переменных:

$$u = f(x_1, (x_2 \, \dots , (x_n).$$

При нахождении частной производной функции нескольких переменных по одной из переменных остальные считаются постоянными. Отыскание частных производных осуществляется по известным правилам дифференцирования функций одной переменной.

Частные производные первого порядка функции двух переменных обозначают

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Частные производные второго порядка функции двух переменных обозначают

$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;$z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$и$z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Эти частные производные второго порядка $z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ называют «смешанные частные производные второго порядка».

Если вычисления производных выполнено верно, то в результате вычисления увидим, что смешанные частные производные равны:

$$z''_{xy} = z''_{yx}.$$

Полный дифференциал первого порядка функции $z = f(x, y).$ обозначается

$$dz = z'_x dx + z'_y dy$$

Пример 26. Найти частные производные первого и второго порядка функции двух переменных:

$$z = x^4 + x^3 y^2 + y^5 + 3.$$

Решение

Находим частные производные первого порядка:

$$z'_x = 4x^3 + 3x^2 y^2.$$

$$z'_y = 2yx^3 + 5y^4.$$

Находим частные производные второго порядка:

$$z''_x = \frac{\partial z' x}{\partial x} = 12x^2 + 6xy^2.$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (2yx^3 \ + 5y^4)' = \ 2x^3 \ + 20y^3$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial z' x}{\partial y} = 6x^2 y.$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial z' y}{\partial x} = 6x^2 y.$$

Результат вычисления смешанных производных показывает, что вычисления выполнены верно:

$$z''_{xy} = z''_{yx}.$$

Рекомендуемая литература: [3, 4, 8].

Контрольные вопросы

1. Приведите пример функции двух переменных.
2. Приведите пример, как найти область определения функции двух переменных.
3. Частные производные как найти?
4. Как практически происходит вычисление частных производных?
5. Полный дифференциал первого порядка функции двух переменных.
6. Частные производные и полный дифференциал второго порядка.
7. Экстремум функции двух переменных.

Тема 8. Интегральное исчисление функции одной переменной

Неопределённый интеграл

Перечень изучаемых вопросов

Первообразная функция. Неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Основные методы интегрирования: метод непосредственного интегрирования, подведение переменной под знак дифференциала, замена переменной, интегрирование по частям. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции. Интегрирование некоторых иррациональных функций. Использование таблиц интегралов.

Методические указания

В предыдущих разделах мы изучали производную функции и ее приложения к решению практических задач. В этом разделе рассматривается второе основное понятие математического анализа понятие интеграла. Интегрирование – действие, обратное нахождению производной. Важно усвоить основные формулы интегрирования и методы интегрирования, так как понятие интеграла пронизывает не только всю современную математику, но и физику, химию, решение экономических задач, многие общетехнические и специальные дисциплины. Так как интегрирование – это действие, обратное дифференцированию, то можно получить таблицу основных интегралов, используя таблицу производных (или дифференциалов). Эти интегралы называются табличными, их следует выучить наизусть. Все методы вычисления неопределенных интегралов сводятся к указанию приемов, приводящих заданный интеграл к табличному. Поэтому табличные интегралы надо помнить и уметь их узнавать.

Основные теоретические сведения

Обозначим функцию F(x), а ее производную f(x).

Определение. Функция F(x) называется **первообразной** функцией для функции f(x) на интервале (a; b), если в любой точке *x* этого интервала функция F(x) дифференцируема и соблюдается равенство:

$$F'(x)=f(x).$$

Функция *f*(*x*) имеет не одну, а множество первообразных функций.

Определение. Множество всех первообразных для функции *f*(*x*) на интервале (*a*; *b*) называется **неопределенным интегралом** от функции *f*(*x*) и обозначается символом:

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

f(*x*) – подынтегральная функция;

f(*x*)*dx* – подынтегральное выражение;

x – переменная интегрирования.

Таблица 4 – Основные формулы интегрирования (табличные интегралы).

1	$\int dx=x+C$
2	$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, где $n \neq -1$.
3	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| +C$, где $x \neq 0$
4	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x +C$
5	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+C$
6	$\int e^x dx=e^x +C$
7	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$

8	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
9	$\int \sin kx dx = -\frac{1}{k}\cos kx + C$
10	$\int \cos x dx = \sin x + C$
11	$\int \cos kx dx = \frac{1}{k}\sin kx + C$
12	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg x + C$
13	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg x + C$
14	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, при $-1<x<1$
15	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$; при $-a<x<a$; $a>0$
16	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left\|x+\sqrt{x^2+a}\right\| + C$
17	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a}} = \ln\left\|x+\sqrt{x^2-a}\right\| + C$
18	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$

При решении интегралов по формулам интегрирования часто требуются преобразования подинтегрального выражения.

Пример 27. Для нахождения интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ надо преобразовать по свойствам степеней подинтегральное выражение

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{x^{2/3}}=x^{-2/3}.$$

Решаем интеграл по формуле $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ \ n \neq -1.$

При n= $-\frac{2}{3}$ получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\int x^{\frac{-2}{3}}dx = 3x^{\frac{1}{3}}+C.$$

Пример 28. Найти интеграл $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx.$

Решение

Преобразуем числитель дроби сначала прибавив и отняв 1, затем числитель дроби представляем в виде двух слагаемых x^2+1 и -1 и почленно делим эти два слагаемых на знаменатель дроби. Получаем два выражения, интегралы которых вычисляем по формулам: первый из двух по формуле $\int dx=x+C$, второй - по формуле $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x +C$:

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx=\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=\int \left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\int dx-\int \frac{dx}{1+x^2}=x-\mathrm{arctg}x+C.$$

Для решения интегралов **методом замены переменной** (методом подстановки) надо усвоить, что в каждом интеграле подстановка подбирается с целью преобразования подынтегрального выражения к виду интеграла, который решается по формулам интегрирования.

Пример 29. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

Решение.

Среди основных формул (табличных интегралов) нет такой формулы, как выглядит подынтегральное выражение.

Заменой переменной интегрирования $\boldsymbol{t} = \mathbf{ln}\boldsymbol{x}$можно преобразовать подынтегральное выражение и привести это выражение к табличному интегралу.

Вводим новую переменную $t = \ln x$.

В «новом» подинтегральном выражении не должно оставаться переменной X. Продолжаем замену: так же надо выразить dx через dt.

Для этого дифференцируем обе стороны подстановки - уравнения

$$t = \ln x$$

$$dt = d(\ln x)$$

$$dt = (\ln x)' dx$$

$$dt = \frac{1}{x} \cdot dx$$

Выражаем dx через dt из полученного равенства $dx = x \cdot dt$

Подставляем в подынтегральное выражение $\ln x = t$ и $dx = x \cdot dt$, а после преобразования получим новое подынтегральные выражение:

$$\frac{dx}{x \cdot ln^2(x)} = \frac{xdt}{x \cdot t^2} = \frac{dt}{t^2} = t^{-2} \cdot dt$$

Получили новый вид данного интеграла, который можно решить по формуле интегрирования

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{где} n \neq -1.$$

Решение оформляем следующим образом:

$$\int \frac{dx}{x\ln^2 x} = \begin{vmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t^2} = \frac{-1}{t} + C = -\frac{1}{\ln x} + C.$$

Когда интеграл найден, в первообразную подставляем $t = \ln x$, то есть возвращаемся к прежней переменной, *окончательный ответ даем с переменной x.*

Ответ: $\int \frac{dx}{x \ln^2 x} = \frac{-1}{ln(x)} + C.$

Решение интегралов **методом интегрирования по частям** выполняется по формуле

$$\int u dv = vu - \int v du \qquad (1)$$

Метод интегрирования по частям ведет к успеху, если интеграл $\int v\, du$ вычисляется легче, чем интеграл $\int u\, dv$/

При практическом применении формулы (1) подынтегральное выражение представляется двумя сомножителями u и dv:

$u = u(x)$ и $dv = v'(x)dx$.

При решении интегралов по формуле (1) находим предварительно значение функции v и находим дифференциал от функции u.

Для этого интегрированием находится от dv первообразная функция

$$v(x) = \int dv = \int v'(x)dx$$

Дифференциал от функции u равен

$$du = u'(x)dx.$$

Применение формулы интегрирования по частям (1) в основном применяется для решения интегралов, следующих трех типов.

Первый тип интегралов: $\int u$dvинтегралы вида

$\int P_n(x)e^x dx$

$\int P_n(x)\sin x dx$

$\int P_n(x)\cos x dx$

В данном интеграле за *u* принимается $P_n(x)$ – многочлен *n*-й степени от *x*, а за d*v* принимается либо $e^x dx$, либо $\sin xdx$, либо $\cos xdx$.

Второй тип интегралов: $\int u$dv интегралы вида

$\int P_n(x)\log_a x\, dx$

$\int P_n(x)\ln x dx$

$\int P_n(x)\, arcsin\, x\, dx$

$\int P_n(x) arccos\, x\, dx$

$\int P_n(x) arctg\, x\, dx$

$\int P_n(x) arcctg\, x\, dx$

В данном интеграле за *u* принимается (смотрим на подинтегральное выражение)

$u=\log_a x$

$u = \ln x$

$u = arcsinx$

$u = arccosx$

$u = arctgx$

u=$arcctgx$

а за dv принимается $P_n\,dx$.

Третий тип интегралов – «круговые интегралы» – интегралы вида

$.\int e^{\mathrm{kx}}\sin mx\,\mathrm{dx}\int e^{\mathrm{kx}}\cos mx\ \mathrm{dx}.$

Пример 30. Найти интеграл $\int(x^2+2x+3)\sin xdx$.

Решение

Этот интеграл можно отнести к первому типу интегралов, которые решаются по частям:

$$\int(x^2+2x+3)\sin xdx=\begin{vmatrix}dv=\sin xdx; & v=\int\sin xdx=-\cos x\\ u=x^2+2x+3; & du=(2x+2)dx\end{vmatrix}=$$

$$=-(x^2+2x+3)\cos x+\int(2x+2)\cos xdx\Rightarrow$$

Продолжаем решение примера, так как получили еще один интеграл, который решаем по частям.

Для решения интеграла применим формулу (1):

$$\int(2\mathrm{x}+2)\cos x\,dx == 2\ \int(x+1)\cos x\,dx =$$

$$\begin{vmatrix}dv=\cos xdx & v=\int\cos xdx=\sin x\\ u=x+1 & du=(x+1)'dx\end{vmatrix}=$$

$$\Rightarrow -(x^2+2x+3)\cos x+2\int(x+1)\cos xdx=$$

$$=\begin{vmatrix}dv=\cos xdx; & v=\int\cos xdx=\sin x\\ u=x+1; & du=dx\end{vmatrix}=-(x^2+2x+3)\cos x+2(x+1)\sin x-$$

$$-2\int\sin xdx=-(x^2+2x+3)\cos x+2(x+1)\sin x+2\cos x+C=$$

$$=2(x+1)\sin x-(x^2+2x+1)\cos x+C.$$

Решение интегралов методом **«внесение переменной под знак дифференциала»** применяют для решения несложных интегралов вместо решения этого интеграла методом подстановки.

Пример 31. Вычислить $\int(3x-5)^{10}dx.$

Данный пример можно решить двумя способами:

1) Решаем методом внесения под знак дифференциала

$$\int (3x-5)^{10}dx = \frac{1}{3}\int (3x-5)^{10}d(3x-5) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-5)^{11}}{11} + C.$$

2) Решаем по формуле почти табличного интеграла

$$\int (kx+b)^n dx = \frac{1}{k}\cdot\frac{(kx+b)^{n+1}}{n+1} + C,$$

$$\int (3x-5)^{10}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-5)^{11}}{11} + C.$$

Пример 32. Найти неопределенный интеграл.

$$\int \cos(\ln x)\frac{dx}{x}.$$

Решение.

Решим «внесением переменной под знак дифференциала».

Так как $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$, то

$$\int \cos(\ln x)\frac{dx}{x} = \int \cos(\ln x)d(\ln x) = \sin(\ln x) + C$$

Проверка:

$$d(\sin(\ln x) + C = \cos(\ln x)\frac{1}{x}dx$$

Пример 33. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x^3+x+1}{x\cdot(x^2+1)}dx$.

Решение

Данная подынтегральная дробь – неправильная, поэтому сначала выделим целую часть:

$$\frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)} = \frac{x^3+x+1}{x^3+x} = 1 + \frac{1}{x^3+x}$$

Представим дробь $\frac{1}{x^3+x}$ в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+D}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+x(Bx+D)}{x(x^2+1)}=\frac{Ax^2+Bx^2+A+Dx}{x(x^2+1)}=$$
$$\frac{x^2(A+B)+Dx+A}{x(x^2+1)}$$

Методом «неопределенных коэффициентов» находим значения A, B и D.

В левой части и в правой части равенства имеем равные дроби, знаменатели которых равны, следовательно, равны их числители:

$$\frac{1}{\mathrm{x}(\mathrm{x}^2+1)}=\frac{\mathrm{x}^2(\mathrm{A}+\mathrm{B})+Dx+A}{\mathrm{x}(\mathrm{x}^2+1)}$$

$$x^2\cdot 0+x\cdot 0+1=x^2\cdot(A+B)+x\cdot D+A$$

Тогда $\begin{cases} A+B=0 \\ D=0 \\ A=1 \end{cases}$

Получаем A=1, B= -1 и D=0.

$$\frac{1}{\mathrm{x}(\mathrm{x}^2+1)}=\frac{A}{\mathrm{x}}+\frac{\mathrm{B}x+D}{\mathrm{x}^2+1}$$

Дробь $\frac{1}{x^3+x}$ записываем в виде суммы двух дробей

$$\frac{1}{\mathrm{x}^3+\mathrm{x}}=\frac{1}{\mathrm{x}}+\frac{-x}{\mathrm{x}^2+1}$$

Продолжаем решение интеграла, получим:

$$\int\frac{x^3+x+1}{x\cdot(x^2+1)}dx=\int\left(1+\frac{1}{x}+\frac{-x}{x^2+1}\right)dx=\int dx+\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=x+\ln|x|+\ln\left|x^2+1\right|+C$$

Пример 34. Найти неопределенный интеграл $\int\cos^4 xdx$

Решение.

Применим формулу понижения степени для тригонометрических функций:

$2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$

$$\int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x + \sin 2x + \int \frac{1+\cos 4x}{2} dx \right) = \frac{1}{4}\left(x + \sin 2x + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x \right) \right) + C$$

Рекомендуемая литература: [3, 13, 8, 4].

Контрольные вопросы

1. Первообразная функция. Как ее найти?
2. Неопределенный интеграл, сформулируйте его свойства.
3. Напишите таблицу основных интегралов.
4. Поясните основные принципы методов интегрирования: непосредственное интегрирование, замена переменной, интегрирование по частям, внесение переменной под знак дифференциала
5. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование.
6. Правильные и неправильные рациональные дроби. Как можно разложить правильную рациональную дробь на простейшие дроби?
7. Интегрирование дробно-рациональных функций. В чем особенность?
8. Интегрирование некоторых видов тригонометрических функций. Приведите примеры.
9. Интегрирование некоторых видов иррациональных выражений. Приведите примеры.
10. В чем суть метода интегрирования подведением переменной под знак дифференциала?

Тема 9. Интегральное исчисление функции одной переменной. Определённый и несобственный интеграл

Перечень изучаемых вопросов

Определенный интеграл. Основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенного интеграла. Интегрирование по частям и подстановкой. Приложение интегралов к вычислению площадей плоских фигур, длин дуг кривых, объемов тел и площадей поверхностей вращения. Приближенное вычисление определенного интеграла: формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона. Приложения определенного интеграла в экономике. Несобственные интегралы. Вычисления несобственных интегралов первого и второго рода.

Методические указания

При решении многих задач приходится суммировать бесконечно большое число бесконечно малых слагаемых, а затем вычислять предел этой суммы. Это приводит к одному из центральных понятий математического анализа, а именно, к понятию определенного интеграла. К понятию определенного интеграла приводит задача вычисления площади криволинейной трапеции. Важное значение имеет формула Ньютона-Лейбница. Эта формула устанавливает связь между двумя основными понятиями интегрального исчисления: неопределенным и определенным интегралами. Она позволяет вычислять определенные интегралы путем нахождения первообразных.

Геометрические приложения определенного интеграла многочисленны. Это вычисление: площадей плоских фигур, объема тел вращения, длин дуг.

Изучите понятия несобственных интегралов – интеграла с бесконечным промежутком интегрирования от непрерывной функции и интеграла с конечным промежутком интегрирования от функции, имеющей на нем бесконечный разрыв.

Основные теоретические сведения

Если функция **y=f(x)** непрерывна на отрезке [a; b] и F(x)– какая-либо ее первообразная на этом отрезке, то справедлива следующая формула:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

которая называется ***формулой Ньютона–Лейбница.***

Этапы решения определенного интеграла, следующие:

1) сначала находим первообразную функцию F(x) (находим неопределенный интеграл);

2) подставляем значение верхнего предела в первообразную функциюF(b);

3) подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию F(a);

4) рассчитываем разность F(b) -F(a), то есть, находим число.

Вычислить **несобственный интеграл** – это значит найти ***число*** (точно так же, как в определенном интеграле), или доказать, что он расходится (то есть, получить в итоге бесконечность вместо числа).

В общем виде несобственный интеграл с бесконечным пределом выглядит так: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ или $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ или $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Иногда такой несобственный интеграл еще называют ***несобственным интегралом первого рода***.

Несобственный интеграл очень похож на определенный интеграл, формула Ньютона-Лейбница применима и к несобственным интегралам.

Формула решения несобственного интеграла запишется так:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(X)\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty} (F(b) - F(a))$$

Пример 35. Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-2}^{4} (8 + 2x - x^2)\, dx$$

Решение.

$$\int_{-2}^{4} (8+2x-x^2)dx = \left(8x + x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{4} =$$

$$= \left(32 + 16 - \frac{64}{3}\right) - \left(-16 + 4 + \frac{8}{3}\right) = \frac{80}{3} + \frac{28}{3} = 36$$

Пример 36. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Решение

Подынтегральная функция $y = \frac{1}{x^2}$ непрерывна на полуинтервале (0; ∞).

Решаем по формуле

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(X)\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty} (F(b) - F(a)):$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \overset{(1)}{=} -\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b \overset{(2)}{=} -\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b}^{\to 0} - \frac{1}{1}\right) \overset{(3)}{=} -(0-1) = 1$$

Пояснения к решению по действиям.

(1) Интеграл решаем по формуле $\int x^n \mathrm{dx} = \frac{x^{\mathrm{n}+1}}{\mathrm{n}+1} + \mathrm{C}$.

Минус вынесли за знак предела.

(2) Подставляем верхний и нижний пределы по формуле Ньютона-Лейбница.

(3) Указываем, что дробь стремиться к нулю $\frac{1}{b}^{\to 0}$ при b=+∞ и упрощаем ответ.

Ответ: интеграл равен 1. Интеграл сходится.

Несобственные интегралы второго рода коварно «шифруются» под обычный определенный интеграл и выглядят точно так же: $\int_a^b f(x)dx$, но, в отличие от определенного интеграла, подынтегральная функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв (*не существует*):

или 1) в точке $x=a$,

или 2) в точке $x=b$,

или 3) в обеих точках сразу.

Пример 37. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^5}} = (*)$.

Решение.

Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке b=3 (устно проверяем, что с другим пределом интегрирования всё нормально!).

Решим интеграл методом подведения функции под знак дифференциала.

$$(*) = \int_1^3 (x-3)^{-\frac{5}{3}} d(x-3) = -\frac{3}{2}\lim_{b\to 3-0}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}\right)\Bigg|_1^b = -\frac{3}{2}\lim_{b\to 3-0}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(b-3)^2}}^{\to +\infty} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = (*)$$

Добавка «-0» обозначает, что предел у нас левосторонний, и к точке b=3 мы приближаемся по оси OX слева.

Разбираемся, почему дробь $\frac{1}{\sqrt[3]{(b-3)^2}} \to +\infty$ (это лучше делать устно или на черновике).

Подставляем под корень предельное значение b=3-0: $\sqrt[3]{(3-0-3)^2} = \sqrt[3]{(-0)^2} = \sqrt[3]{+0} = +0$ и тогда $\frac{1}{+0} \to +\infty$

Окончательно:

$$(*) = -\frac{3}{2}\left(+\infty - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = -\infty$$

Ответ: Несобственный интеграл расходится.

Пример 38. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x + 2, \quad y = 2x - \frac{x^2}{2} + 6 .$$

Решение

Найдем абсциссы точек пересечения прямой с параболой, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x + 2, \\ y = 2x - \dfrac{x^2}{2} + 6. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим x=-2 и x =1.

Это и будут пределы интегрирования.

Находим значения для y точек пересечения, для этого x=-2 подставляем в одно из уравнений, получили y=0. Подставляем x =1 в одно из уравнений: y=6.

Итак, данные линии пересекаются в точках A(-2; 0), B(4; 6).

Эти линии образуют замкнутую фигуру (рисунок 4), площадь которой равна определенному интегралу:

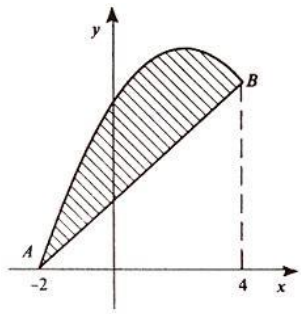


Рисунок 4

$$S = \int_{-2}^{4} \left(2x - \frac{x^2}{2} + 6 - x - 2 \right) dx = \int_{-2}^{4} \left(x - \frac{x^2}{2} + 4 \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x \right) \Bigg|_{-2}^{4} =$$

$$\frac{16}{2} - \frac{64}{6} + 16 - \frac{4}{2} - \frac{8}{6} + 8 = 18$$

Рекомендуемая литература: [3, 13, 8, 4].

Контрольные вопросы

1. Напишите формулу Ньютона- Лейбница.
2. Как выглядит криволинейная трапеция?
3. Перечислите основные свойства определенного интеграла.
4. Назовите виды несобственных интегралов.
5. Что такое «особая точка» при решении интегралов?
6. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?

7. Особенности решения определенного интеграла методом «Замена переменной».

8. Какие виды интегралов решаются при помощи формул интегрирования по частям для определенного и неопределенного интегралов?

9. Приведите пример несобственного интеграла (случай бесконечных пределов интегрирования).

10. В чем сходство и различия несобственных интегралов (интегралы от разрывных функций) с определенными интегралами?

11. Опишите вычисление площадей плоских фигур в декартовых координатах.

12. Как вычислить длину дуг плоских кривых?

13. Как вычислить объем тела вращения?

Тема 10. Дифференциальные уравнения

Перечень изучаемых вопросов

Основные понятия и определения. Дифференциальные уравнения первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, линейные неоднородные дифференциальные уравнения; однородные дифференциальные уравнения; дифференциальные уравнения, приводящиеся к однородным; уравнение Бернулли. Задача Коши. Теорема существования и единственности. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка. Линейные однородный дифференциальные уравнения второго порядка. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Применение дифференциальных уравнений при решении прикладных задач.

Методические указания

Многочисленные задачи естествознания, экономических вычислений, техники, механики, биологии, химии и других отраслей знаний сводятся к тому, что по заданным свойствам некоторого процесса или явления необходимо найти математическую модель самого процесса в виде формулы, связывающей переменные величины, то есть в виде функциональной зависимости. При изучении таких задач используют дифференциальные уравнения.

При исследовании различных явлений часто не удается найти закон, связывающий только величины, характеризующие данное явление. При этом сравнительно легко устанавливается зависимость между этими величинами и их производными. В результате исследуемое явление (процесс) описывается соотношением, связывающим искомую функцию и ее производные или дифференциалы, т. е. дифференциальным уравнением.

Одной из основных задач теории дифференциальных уравнений является нахождение решений дифференциальных уравнений. В простейших случаях эта задача в конечном итоге сводится к вычислению интегралов, поэтому процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется интегрированием этого уравнения. При изучении данного раздела обязательно используются знания, умения и навыки, приобретенные при изучении предыдущих разделов, а именно, умения находить неопределенный интеграл и производную функции одной переменной.

Основные теоретические сведения

Дифференциальное уравнение устанавливает связь между независимой переменной, неизвестной функцией и ее производными различных порядков.

Если кроме дифференциального уравнения задано и начальное условие в виде $y(x_0)=y_0$, то такая задача называется **задачей Коши** (находится частное решение дифференциального уравнения).

Дифференциальные уравнения, в которых выражение, зависящее от *y*, входит только в левую часть, а выражение, зависящее от *x* – только в правую часть, то это ***дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.***

Пример 39. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'''=2$ и частное решение при $C_1=2,\ \ C_2=7,\ \ C_3=4$.

Решение

Проинтегрируем обе части уравнения такое число раз, которому равен порядок дифференциального уравнения. Интегрируем первый раз и получим вторую производную:

$$y''=\int 2dx=2x+C_1,$$

интегрируем второй раз и получим первую производную функции:

$$y'=\int(2x+C_1)dx=\frac{2x^2}{2}+C_1x+C_2=x^2+C_1x+C_2,$$

интегрируем третий раз и получим функцию:

$$y=\int\left(x^2+C_1x+C_2\right)dx=$$
$$=\frac{x^3}{3}+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3.$$

Таким образом, получили *общее решение* $y=\frac{x^3}{3}+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$ данного дифференциального уравнения третьего порядка.

После каждого интегрирования появляются постоянные интегрирования С. Они принимают различные значения в общем случае и обозначены C_1, C_2 и C_3.

Теперь найдём частное решение при указанных условиях. Для этого подставим вместо произвольных коэффициентов их значения $C_1 = 2,\ C_2 = 7,\ C_3 = 4$ и получим:

$$y = \frac{x^3}{3} + x^2 + 7x + 4$$

частное решение данного дифференциального уравнения.

Пример 40. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0\,.$$

Решение

Это уравнение – **уравнение с разделяющимися переменными.** В этом уравнении возможно провести математические преобразования так, чтобы рядом с dxв уравнении были выражения с переменной x, а рядом с dy в уравнении находились выражения с переменной y.

Для разделения переменных поделим обе части уравнения

$$x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$$

почленно на произведение $\sqrt{1-y^2}\cdot\sqrt{1-x^2}$и получим

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = 0\,.$$

Почленно интегрируем левую и правую части полученного уравнения, интеграл суммы в левой части равен сумме интегралов:

$$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = C\,.$$

Замечание (обязательное условие!): если под знаком интеграла dx, то все выражение под знаком этого интеграла должны быть с переменной x. Соответственно, если под знаком интеграла стоит dy, то под знаком этого интеграла должны быть выражения только с переменной y.

Решаем каждый интеграл, используя метод замены переменной (подстановки).

После решения интегралов, получим:

$$-\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} = C_1$$

После умножения равенства на (-1) получили

$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=C$, обозначили C= -C$_1$.

$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=C$ - получили *общий интеграл* данного уравнения.

Если выполним преобразования, чтобы выразить из общего интеграла явно *y, то* тогда найдём *общее решение* этого дифференциального уравнения $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=C$:

$$\sqrt{1-y^2}=C-\sqrt{1-x^2}$$

$$\left(\sqrt{1-y^2}\right)^2=\left(C-\sqrt{1-x^2}\right)^2$$

$$1-y^2=\left(C-\sqrt{1-x^2}\right)^2$$

$$-y^2=\left(C-\sqrt{1-x^2}\right)^2-1$$

$$y^2=1-\left(C-\sqrt{1-x^2}\right)^2$$

$$y=\pm\sqrt{1-\left(C-\sqrt{1-x^2}\right)^2}.$$

Ответ: $y=\pm\sqrt{1-\left(C-\sqrt{1-x^2}\right)^2}$ – общее решение дифференциального уравнения $x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$.

Линейные дифференциальные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида

$$y'+p(x)\cdot y=g(x),$$

где $p(x)$, $g(x)$– непрерывные (на данном интервале) функции, в частности постоянные.

Характерный признак уравнений – функция y и ее производная y' содержатся в уравнении в первой степени и не перемножаются между собой.

Если функция $g(x)\equiv 0$, то уравнение (3.1) принимает вид $y'+p(x)\cdot y=0$ и называется линейным однородным ЛОДУ. Иначе уравнение называется линейным неоднородным ЛНДУ.

Существует несколько методов решения уравнений данных видов: метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа), метод интегрирующего множителя, метод Бернулли.

Уравнения Бернулли

Уравнение Бернулли отличается от линейного уравнения $y' + p(x) \cdot y = g(x)$ тем, что в правой части есть множитель в виде степени неизвестной функции и оно имеет вид:

$$y' + p(x) \cdot y = g(x) \cdot y^n, \ n \in R, \ n \neq 0, \ n \neq 1$$

Уравнение Бернулли решается по той же схеме, что и линейное уравнение. Оно приводится к линейному уравнению с помощью подстановки $z = y^{-n+1}$.

Пример 41. Решить ***дифференциальное уравнение***

$$y'' + 2y' - 8y = 0$$

Решение

Решаем однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + 2y' - 8y = 0.$$

Характеристическое уравнение $k^2 + 2k - 8 = 0$ имеет действительные и различные корни $k_1 = -4$ и $k_2 = 2$.

Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\tilde{y} = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x}.$$

Таблица 5 – Методы решения линейных дифференциальных уравнений.

Метод Бернулли	Метод Лагранжа
Линейное уравнение решается с помощью замены неизвестной функции и ее производной по формулам: $y = u \cdot v$; $y' = u' \cdot v + v' \cdot u$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ - неизвестные функции. Проведя замену, уравнение $y' + p(x) \cdot y = g(x)$ записывается следующим образом: $u' \cdot v + v' \cdot u + p(x) \cdot u \cdot v = g(x)$ или $u' \cdot v + u(v' + p(x) \cdot v) = g(x)$ (*) Функцию $v = v(x)$ выбираем таким образом, чтобы она обращала в ноль выражение, стоящее в скобках левой части равенства (*): $v' + p(x) \cdot v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -p(x) \cdot v$ Решаем полученное для функции v ДУ с разделяющимися переменными: $\frac{dv}{v} = -p(x) \cdot dx$; $\int \frac{dv}{v} = -\int p(x) \cdot dx$;	Метод состоит в следующем: решим вместо уравнения $y' + p(x) \cdot y = g(x)$ уравнение $y' + p(x) \cdot y = 0$, решение которого записывается в виде: $y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}$. Положим, что $C = C(x)$, и подставим решение уравнения с нулевой правой частью в исходное. Получим уравнение для $C(x)$: $C'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} - C(x) \cdot p(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} + {}$ ${} + C(x) \cdot p(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} = g(x)$ Откуда $C'(x) = g(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \Leftrightarrow$ $C(x) = \int g(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$, решение исходного уравнения
$v = e^{-\int p(x)} dx$ Следует подставить в уравнение (*), которое стало эквивалентно уравнению с разделяющимися переменными и приняло вид $u' \cdot v = g(x)$. В результате получим для неизвестной функции $u(x)$ уравнение с разделяющимися переменными. Его решение позволяет найти исходную неизвестную функцию y по формуле $y = u \cdot v$. Окончательно общий интеграл линейного дифференциального уравнения примет вид $y = v(x) \cdot u(x; C)$	$y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$

Пример 42. Решить дифференциальное уравнение

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}$$

Решение.

Уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ). Будем искать решение в виде произведения двух функций $y = u \cdot v$, производная произведения$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Подставим в заданное уравнение эту подстановку, уравнение примет вид^

$$u' \cdot v + u \cdot v' + 2x\, u \cdot v = xe^{-x^2}$$

Вынесем за скобки u: $u'v+u(v'+2xv)=xe^{-x^2}$. (*)

Найдем *одну* из функций v, такую, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль: $v'+2xv=0$. Это уравнение будет с разделяющимися переменными. Решим его:

$$\frac{dv}{dx}+2xv=0,$$

$$dv=-2xvdx,$$

$$\frac{dv}{v}=-2xdx,$$

$$\ln|v|=-x^2$$

$$v=e^{-x^2}$$

Подставим найденную функцию в уравнение (*):

$$u'e^{-x^2}=xe^{-x^2}.$$

$$u'=x,$$

$$\frac{du}{dx}=x,$$

$$du=xdx,$$

$$u=\frac{x^2}{2}+C$$

Так как $y=uv$, то $y=(\frac{x^2}{2}+C)\cdot e^{-x^2}$ - общее решение данного уравнения.

Рекомендуемая литература: [3, 4, 9, 13].

Контрольные вопросы

1. Приведите примеры видов дифференциальных уравнений первого порядка.

2. Чем отличаются общее и частное решения? Задача Коши что решает?

3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными как решаются?

4. Что такое «Однородные дифференциальные уравнения первого порядка»?

5. Опишите вид «Линейные дифференциальные уравнения первого порядка».

6. Как «узнать» Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка?

7. Опишите, как решаются «Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами».

8. Сколько произвольных постоянных содержит общее решение дифференциального уравнения первого порядка? Третьего порядка?

Тема 11. Числовые и функциональные ряды

Перечень изучаемых вопросов

Числовой ряд. Сумма ряда. Свойства сходящихся рядов. Необходимый признак сходимости ряда. Сравнение рядов с положительными членами. Признаки сходимости Даламбера, Коши, интегральный. Знакочередующийся ряд. Абсолютная и условная сходимость. Степенные ряды. Радиус сходимости. Ряды Тейлора и Маклорена. Примеры разложений. Применение рядов в приближенных вычислениях.

Методические указания

При изучении многих вопросов естествознания и техники применяется метод поэтапного исследования объекта, где на каждом этапе исследования уточняются характеристики изучаемого объекта. Одним из математических понятий, при помощи которых моделируются такие ситуации, является понятие «суммы» бесконечного числа слагаемых, т. е. ряд.

Теория рядов широко используется в теоретических исследованиях различных дисциплин и в приближенных вычислениях. С помощью рядов можно вычислять приближенные значения функций, значения интегралов, решать дифференциальные уравнения и т. д.

Ряды с действительными членами можно разделить на две основные группы: числовые ряды и функциональные. Среди числовых рядов выделяют: ряды с положительными членами и знакопеременные ряды. Среди функциональных рядов особый интерес представляют степенные и тригонометрические ряды.

Ряды являются обобщением обычных сумм и многочленов на бесконечное число слагаемых. Для изучения рядов используется частный случай функций: функций натурального аргумента – последовательностей и их пределов при $n \to \infty$, понятие о которых дается в курсе дифференциального исчисления. Введение рядов позволяет изучать функции, не являющиеся элементарными, находить интегралы, которые невозможно вычислить методами, описанными в курсе интегрального исчисления. Ряды находят применение в курсе теории вероятностей. При изучении данного раздела необходимо уметь находить предел функции, дифференцировать, интегрировать.

Основные теоретические сведения

Необходимое условие сходимости ряда (но недостаточное):

Если ряд$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то предел его общего члена стремится к нулю при $n \to \infty$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Пример 43. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}$.

Решение

Вычислим

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{-1}$ = (используя второй замечательный предел) $=\frac{1}{e}\neq 0$.

Ряд расходится.

Признак Даламбера

Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ существует $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l$.

Тогда при $l<1$ ряд сходится, при $l>1$ ряд расходится, при $l = 1$ ряд может сходиться или расходиться и в этом случае требуется дополнительное исследование.

Замечание. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, то ряд расходится.

Радикальный признак Коши

Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l$.

Тогда при $l<1$ ряд сходится; при $l>1$ ряд расходится, при $l = 1$ – требуется дополнительное исследование.

Интегральный признак Коши

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Пусть функция $f(x)$ - не возрастающая при $x \geq 1$ и $f(n) = a_n$. Тогда если несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится; если несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится.

Знакочередующиеся ряды

Рассмотрим ряд с членами произвольного знака $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ряд с членами произвольного знака *называется абсолютно сходящимся*, если сходится как он сам, так и ряд, составленный из абсолютных величин его членов $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$. Ряд называется условно сходящимся, если сам он сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Если ряд сходится абсолютно, то он сходится и условно.

Признак Лейбница

Если выполняются условия:

1) $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

то знакочередующийся ряд сходится, и его сумма не превосходит первого члена ряда: $S < u_1$.

Пример 44. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\, n!}{n^n}.$$

Решение

Имеем по признаку Даламбера: $u_n = \dfrac{3^n n!}{n^n}$, $u_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$.

Вычислим

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot 3^n n!} = \frac{3n^n}{(n+1)^n} = \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1.$$

Ряд расходится.

Пример 45. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$.

Решение

Для этого ряда применим радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0<1.$$

Следовательно, ряд сходится.

Пример 46. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)^3}$.

Решение

Для этого ряда применим признак Лейбница:

Проверим условия теоремы Лейбница для знакочередующегося ряда:

1) его члены монотонно убывают $\left(1>\frac{1}{2^3}>\frac{1}{4^3}>\ldots\right)$,

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n)^3}=0$.

Следовательно, этот ряд сходится.

Этот ряд сходится абсолютно, так как сходится ряд из абсолютных величин членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^3}$.

Этот ряд сходится по признаку сравнения (сравнить его с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, который сходится).

Степенные ряды

Степенным рядом называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n(x-x_0)^n=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\ldots+c_n(x-x_0)^n+\ldots,$$

числа $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ называются коэффициентами степенного ряда.

Множество всех значений x, при которых соответствующий числовой ряд сходится, называется *областью сходимости* ряда. Степенной ряд всегда сходится в точке $x=x_0$.

Число R – такое, что при $|x|<R$ степенной ряд сходится, а при $|x|>R$ – расходится, называется *радиусом сходимости* степенного ряда. Интервал (x_0-R, x_0+R) называется *интервалом сходимости* степенного ряда. Радиус сходимости степенного ряда может быть найден по формуле:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

Заметим, что вопрос о сходимости степенного ряда на границах интервала сходимости исследуется для каждого ряда отдельно.

Пример 47. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\,10^n}$.

Решение

Радиус сходимости вычислим по формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Имеем:

$$a_n = \frac{1}{n\cdot 10^n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\cdot 10^{n+1}}.$$

Поэтому

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 10^{n+1}}{n\cdot 10^n} = 10\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 10.$$

Значит, данный ряд сходится при значениях, удовлетворяющих неравенству: $|x| < 10$ или $-10 < x < 10$.

Исследуем поведение ряда на концах промежутка. Подставляя в данный ряд $x = 10$, получим гармонический расходящийся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

При $x = -10$ получим числовой, знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, который сходится условно.

Таким образом, данный степенной ряд сходится при всех значениях x, удовлетворяющих неравенствам $-10 \le x < 10$.

Рекомендуемая литература: [3, 4, 8].

Контрольные вопросы

1. Что значит «Сходимость и сумма ряда»?
2. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда. Что это?
3. Какой числовой ряд называется гармоническим?
4. Какой числовой ряд называется рядом с положительными членами?
5. Какой числовой ряд называется знакочередующимся рядом?
6. Назовите теоремы сравнения.
7. Сформулируйте Признак Даламбера.
8. Сформулируйте Признак Коши.
9. Сформулируйте Интегральный признак сходимости ряда.
10. В каких случаях применяют Теорему Лейбница?
11. Как оценить остаток знакочередующегося ряда?
11. Сформулируйте Теорему о сходимости абсолютно сходящегося ряда.
12. Как находят интервал и радиус сходимости степенного ряда?
13. Напишите пример разложения функции в степенной ряд.
14. Напишите формулу «Ряд Тейлора».
15. Ряд Маклорена и ряд Тейлора это одно и то же?

Тема 12. Теория вероятностей случайных событий

Перечень изучаемых вопросов

Предмет теории вероятностей. Классификация событий, алгебра событий. Элементы комбинаторики. Различные подходы к введению понятия вероятности события. Аксиомы теории вероятностей. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Полная вероятность. Формулы Бейеса, Бернулли, Пуассона. Вероятность наступления хотя бы одного события. Локальная и интегральная теоремы Лапласа. Невероятнейшее число наступления события.

Методические указания

Теория вероятностей изучает объективные закономерности массовых случайных событий. Она является теоретической базой для математической статистики, занимающейся разработкой методов сбора, описания и обработки результатов наблюдений.

Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники: в теории надежности, теории массового обслуживания, в теоретической физике, геодезии, астрономии, теории стрельбы, теории ошибок наблюдений, теории автоматического управления, общей теории связи и во многих других теоретических и прикладных науках. Все это предопределяет необходимость овладения методами теории вероятностей и математической статистики как инструментом статистического анализа и прогнозирования экономических и технологических явлений и процессов.

Основные теоретические сведения

При *классическом определении* за вероятность события A принимают отношение числа благоприятных этому событию исходов m к числу всех возможных исходов опыта n:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{m}{n}$$

n – общее число всех равновозможных, элементарных исходов этого испытания, которые образуют полную группу событий;

m – количество элементарных исходов, *благоприятствующих* событию А.

*Принято считать***,** что вероятность может изменяться в пределах

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Сочетаниями из n элементов по m (m ≤ n) называют соединения, в каждое из которых входит m элементов, взятых из данных nэлементов, и которые отличаются только элементами (хотя бы одним).

Общее же количество таких сочетаний рассчитывается по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\cdot m!}$$

Пример 48. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобрали 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 6 отличников.

Решение.

Общее число возможных элементарных исходов испытания n равно числу способов, которыми можно отобрать 9 студентов из 12, т. е. числу *сочетаний* из 12 элементов по 9 элементов:

$$n = C^9_{12}$$

Определим число исходов m, благоприятствующих интересующему нас событию ***А*** (среди 9 студентов 6 отличников). Надо выбрать 6 студентов отличников из 8 отличников $\boldsymbol{C^6_8}$ способами.

При этом остальные 9 – 6 = 3 студента не отличники. Выбрать трех студентов не отличников из 12 – 8 = 4 можно $\boldsymbol{C^3_4}$ способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно

$$m = \boldsymbol{C^6_8 \cdot C^3_4}.$$

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{\boldsymbol{C^6_8 \cdot C^3_4}}{\boldsymbol{C^9_{12}}} = \frac{8!\cdot 4!\cdot 9!\cdot(12-9)!}{6!\cdot 2!\ 3!\cdot(4-3)!\cdot 12!} = \frac{6!\cdot 7\cdot 8\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 9!\ 3!}{6!\cdot 2\cdot 3!\ 9!\cdot 10\cdot 11\cdot 12} = \frac{56}{220} = \frac{14}{55}.$$

Ответ: вероятность того, что среди отобранных 9 студентов 6 отличников равна 14/55.

Теорема 1. Сумма вероятностей событий, которые образуют полную группу, равна единице.

Теорема 2. Сложение вероятностей *несовместных* событий.

Вероятность появления одного из двух ***несовместных*** событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$\boldsymbol{P(A+B) = P(A)+P(B).}$$

Теорема 3. Сложение вероятностей *совместных* событий.

Вероятность появления **хотя бы одного** ***из двух совместных*** событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$\mathbf{P\ (A+B) = P\ (A) + P(B) - P(AB).}$$

Для **независимых** событий:

$$\mathbf{P\ (A + B) = P(A) + P(B) – P(A) \bullet P(B);}$$

Для **зависимых** событий:

$$\mathbf{P\ (A + B) = P(A) + P(B) – P(A) \bullet P_A(B).}$$

Теорема 4. Умножение вероятностей.

Вероятность ***совместного*** появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P\ (AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$

$$\text{или} \quad P\ (AB) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Для независимых событий $P\ (AB) = P\ (A) \cdot P\ (B)$.

Вероятность события A, которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события A :

$$P\ (A) = P\ (H_1) \cdot P_{H1}(A) + P\ (H_2) \cdot P_{H2}(A) + \ldots + P(H_n) \cdot P_{Hn}(A) \quad (*)$$

$$\text{где} \quad P\ (H_1) + P\ (H_2) + \ldots + P(H_n) = 1.$$

Равенство **(*)** называют ***формулой полной вероятности.***

Формула Бернулли. Вероятность того, что в ***n*независимых** испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна ***p (0<p<1)*****, событие наступит ровно *k*раз** (безразлично, в какой последовательности), равна

$$P_n(k) = C^k_n\, p^k q^{n-k},$$

или

$$P_n(k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Для больших значений ***n*** ***и*k**формулой Бернулли для вычисления вероятности того, что событие наступит ровно kраз

$P_n(k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} p^k q^{n-k}$ пользоваться затруднительно. Для этих случаев используют локальную теорему Лапласа.

Теорема 5. Локальная теорема Лапласа.

Вероятность того, что в ***пнезависимых*** *испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна* ***p (0 <p<1), событие наступит ровно k раз*** *(безразлично, в какой последовательности), приближенно равна (тем точнее, чем больше* **n***)*

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x2}{2}}$, $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$

Таблица функции $\varphi(x)$ для положительных значений x приведена **в** Приложении 1[1, 13, 7]; для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей, так как функция $\varphi(x)$ четная, $\varphi(-x) = \varphi(x)$].

Теорема 6. Интегральная теорема Лапласа

Вероятность того, что в ***пнезависимых*** *событиях, в каждом из которых вероятность появления события равна* ***p(0<p<1)****, событие* ***наступит не менее k₁ раз и не более k₂ раз,*** *приближенно равна*

$$P(k_1; k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-z^2}{2}} \cdot dz$ – функция Лапласа, $x' = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$ $x'' = \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$.

Таблица функции Лапласа для положительных значений $x (0 \le x \le 5)$ приведена в Приложении 2 [1, 13, 7], для значений $x>5$ полагают $\Phi(x) = 0{,}5$.

Для отрицательных значений x используют эту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечетная $[\Phi(-x) = -\Phi(x)]$.

Пример 49. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна р = 0,6. Найти вероятность того, что событие появится не менее 55 раз и не более 80 раз.

Решение.

Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P(k_1; k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

где Ф(х) – функция Лапласа,

$$x' = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

По условию задачи: $n = 100$; $p = 0{,}6$; $q = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$; $k_1 = 55$; $k_2 = 80$.

Вычислим x' и x'':

$$x' = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}} = \frac{55-100\cdot0{,}6}{\sqrt{100\cdot0{,}6\cdot0{,}4}} = \frac{-5}{4{,}9} = -1{,}02;$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 100 \cdot 0,6}{\sqrt{100 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = \frac{20}{4,9} = 4,08.$$

Учитывая, что функция Лапласа нечетная, т.е. ***Ф(-x) = - Ф(x),*** получим

$$P_{100}(55; 80) = Ф(4,08) – Ф(- 1,02) = Ф(4,08) + Ф(1,02).$$

По таблице Приложения 2 найдем Ф(4,08) = 0,4999 ; Ф(1,02) = 0,3461.

Искомая вероятность $P_{100}(55; 80) = 0,4999 + 0,3461 = 0,846$.

Ответ: вероятность того, что событие появится не менее 55 раз и не более 80 раз, равна 0,846;

Рекомендуемая литература: [1, 13, 7].

Контрольные вопросы

1. Что такое «Случайные события»? Классическое определения вероятности.

2. В каких случаях вычисляют «Произведение событий»? Чем отличаются Зависимые и независимые события? Напишите Теоремы умножения вероятностей.

3. Что значит «Сумма событий»? В каких случаях применяют Теоремы сложения?

4. Напишите Формулу полной вероятности. Формулы Бейеса для каких случаев применяется?

5. Сочетания: основные формулы комбинаторики.

6. Повторение испытаний. Напишите Формулу Бернулли и ее частные случаи.

6. Сформулируйте Локальную и Интегральную теоремы Лапласа.

Тема 13. Теория вероятностей случайных величин

Перечень изучаемых вопросов

Случайные величины, дискретные и непрерывные случайные величины. Распределение дискретных случайных величин. Функция распределения, ее основные свойства. Числовые характеристики дискретных случайных величин. Функция распределения вероятностей, плотность распределения непрерывных случайных величин, их свойства. Числовые характеристики непрерывных случайных величин, их свойства. Примеры законов распределения случайных величин и их числовые характеристики. Предельные теоремы вероятностей (закон больших чисел).

Методические указания

Знания о случайных величинах и их распределениях играют важную роль в различных областях экономических дисциплин. При решении многих экономических задач, связанных с неопределенностью и риском, необходимо применение концепций дискретных и непрерывных случайных величин.

Теория вероятностей и распределения случайных величин являются основополагающими концепциями в экономике и финансах. Они помогают анализировать данные, принимать более обоснованные решения и управлять рисками в условиях неопределенности. Умение применять эти методы позволяет экономистам и финансистам более точно прогнозировать и адаптироваться к изменениям в экономическом окружении.

Основные теоретические сведения

Случайная величина, которая может принимать лишь отдельные, изолированные друг от друга на числовой оси значения, называется ***дискретной***.

Случайная величина называется ***непрерывной***, если она может принимать все числовые значения, сплошь заполняющие некоторый промежуток на числовой оси.

Законом распределения случайной величины (**рядом распределения**) называется соотношение, устанавливающее связь между всеми возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Чаще всего закон записывают таблицей (аналитическое задание закона распределения вероятностей)

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Функция распределения вероятностей дискретной случайной величиныF(X) характеризует вероятность, она может принимать значения лишь из промежутка $0 \leq F(X) \leq 1$ и никакие другие!

Пример 50. Найти функцию распределения дискретной случайной величины X, заданной законом распределения

x_i	–2	0	3	7
p_i	0,4	0,1	0,3	0,2

Решение

Рассмотрим формальный ***алгоритм построения функции распределения.***

Сначала берём первое значение $x_1 = -2$и составляем нестрогое неравенство $x \leq -2$. На этом промежутке $F(x) = 0$.

На промежутке $-2 < x \le 0$(между x_1и x_2): $F(x) = 0{,}4$

На промежутке $0 < x \le 3$(между x_2и x_3): $F(x) = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5$

На промежутке $3 < x \le 7$(между x_3и x_4): $F(x) = 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8$

И, наконец, если Xстрого больше самого последнего значения $x_4 = 7$, то:

$$F(x) = 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}8 + 0{,}2 = 1.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le -2 \\ 0{,}4, & \text{если} \quad -2 < x \le 0 \\ 0{,}5, & \text{если} \quad 0 < x \le 3 \\ 0{,}8, & \text{если} \quad 3 < x \le 7 \\ 1, & \text{если} \quad x > 7 \end{cases}$$

Математическим ожиданием **дискретной случайной величины X** называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$\mathbf{M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n.}$$

или сокращенно $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Дисперсией дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$\mathbf{D(X) = M[x - M(X)]^2.}$$

Удобнее для вычисления дисперсии пользоваться формулой:

$$\mathbf{D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.}$$

Средним квадратическим отклонением дискретной случайной величины X называется корень квадратный из дисперсии

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{(X)} = \sqrt{D(X)}.$$

Многоугольником распределения вероятностей **дискретной случайной** величины называют ломаную, звенья которой соединяют соседние точки (x_i; y_i).

Пример 51. Построить многоугольник распределения вероятностей случайной величины X

x_i	–2	0	3	6	7,5
p_i	0,2	0,1	0,2	0,3	0,2

Решение

Многоугольник распределения показан на рисунке 5.

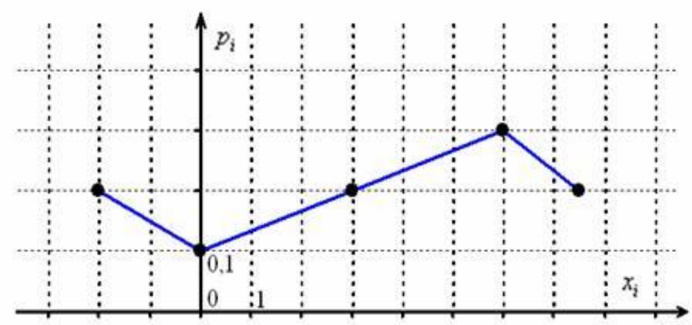


Рисунок 5

Функция распределения непрерывной случайной величины X определяется точно так же, как и функция распределения дискретной случайной величины (ДСВ).

Пример 52. Построить график функция распределения непрерывной случайной величин

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0\\ \dfrac{x^2}{9}, & \text{если} \quad 0\le x\le 3\\ 1, & \text{если} \quad x>3\end{cases}.$$

Решение

Важной особенностью является тот факт, что функция распределения непрерывной случайной величины всегда и всюду непрерывна! График может быть в «кусочном» виде, однако в точках «стыка» значения функции справа и слева должны быть одинаковы $F(0)=\dfrac{0^2}{9}=0,\quad F(3)=\dfrac{3^2}{9}=1$, если там разрыв, то вы имеете дело с опечаткой или откровенной ошибкой!

При построении чертежа целесообразно найти опорные точки; в нашем примере удобно взять: $F(1)=\dfrac{1^2}{9}\approx 0{,}11,\quad F(2)=\dfrac{2^2}{9}\approx 0{,}44$ и плавно-плавно провести карандашом кусочек параболы $y=\dfrac{x^2}{9}$:

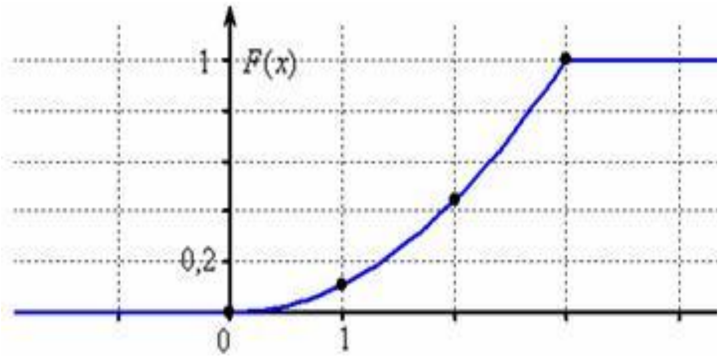


Рисунок 6

Левый нижний луч следует прочертить жирно (чтобы он не сливался с осью OX), а правый верхний луч продолжить за остриё оси OX (так как график бесконечен). Также не забываем, что $F(x)$ не может убывать, и если вдруг окажется, что какой-то кусок графика идёт «сверху вниз», то ищите ошибку или опять же – имеет место опечатка. График функции распределения непрерывной случайной величины X показан на рисунке 6.

Плотность распределения *вероятностей непрерывной случайной величины или дифференциальная функция распределения представляет собой* ***производную функции распределения:***

$$f(x) = F'(x)$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, *возможные значения которой принадлежат отрезку [a; b], называется определенный интеграл:*

$$\mathbf{M(X)} = \int_a^b x\, f(x) \cdot dx,$$

где f(x) – функция плотности распределения этой случайной величины.

Если возможные значения принадлежат всей оси OX, то:

$$\mathbf{M(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x) \cdot dx$$

Дисперсия непрерывной случайной величины X.

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2$$

Средним квадратическим отклонением непрерывной случайной величины X называется корень квадратный из дисперсии

$$\sigma\,(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Пример 53. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{10}(x^3 + x), & \text{если} \quad 0 \le x \le 2 \\ 1, & \text{если} \quad x > 2 \end{cases}$$

Требуется:

а) найти плотность вероятности f(X);

б) вычислить математическое ожидание M(x);

в) вычислить дисперсию D(x);

г) вычислить среднее квадратическое отклонение σ (X).

Решение

а) плотность вероятности f(X);

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{10}(3x^2 + 1), & \text{если} \quad 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{если} \quad x > 2 \end{cases}$$

б) математическое ожидание (средне ожидаемое значение) случайной величины X

$$\text{M(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x) \cdot dx,$$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot dx + \frac{1}{10}\int_{0}^{2} x(3x^2 + 1)dx + \int_{2}^{+\infty} x \cdot 0 \cdot dx = 0 + \frac{1}{10}\int_{0}^{2}(3x^3 + x)dx + 0 =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{3x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{10} \cdot (12 + 2 - 0 - 0) = \frac{14}{10} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

в) дисперсию (меру рассеяния случайных значений относительно математического ожидания вычислим по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2$$

Сначала вычислим интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{10}\int_0^2 x^2(3x^2+1)dx = \frac{1}{10}\int_0^2 (3x^4+x^2)dx =$$

$$= \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{3x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{96}{5}+\frac{8}{3}-0-0\right) = \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{288+40}{15}\right) = \frac{1}{10}\cdot\frac{328}{15} = \frac{164}{75}$$

Вычисляем дисперсию по формуле и получим:

$$D(X) = \frac{164}{75} - \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{164}{75} - \frac{49}{25} = \frac{164}{75} - \frac{147}{75} = \frac{17}{75} \approx 0{,}23$$

г) среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

$$\sigma\,(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}23} \approx 0{,}48.$$

Нормальное распределение

Нормальным распределением **называют распределение непрерывной случайной величины, плотность распределения которой имеет вид**

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a **– математическое ожидание,** σ **– среднее квадратическое отклонение нормальной случайной величины.**

Вероятность попадания нормальной случайной величины в интервал (α, β) **находится по формуле:**

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где Ф(х) – интегральная функция Лапласа.

Вероятность отклонения от среднего на величину, меньшую δ, выражается равенством:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Пример 54. Заданы математическое ожидание **а = 5** и среднее квадратическое отклонение **σ = 2** нормально распределенной случайной величины X. Найти: 1) вероятность того, что **х** примет значение, принадлежащее интервалу (8; 10); 2) вероятность того, что абсолютная величина отклонения **х - а** окажется меньше**δ = 0,5**.

Решение.

α = 8, β = 10, a = 5, σ= 2, δ = 0,5

1) Найдём вероятность того, что **х** примет значение, принадлежащее интервалу (8; 10). Воспользуемся формулой

$$P(\alpha<x<\beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma})$$

Получим

P(8 < x <10) = $\Phi(\frac{10-5}{2}) - \Phi(\frac{8-5}{2})$

P(8 < x <10) = Ф(2,5) – Ф(1,5).

По таблице приложения 2 [1, 7, 13] находим Ф(2,5) = 0,4938 и Ф(1,5) = 0,4332.

Вероятность того, что **x** примет значение, принадлежащее интервалу (8;10), равна:

$$P(8 < X < 10) = 0{,}4938 - 0{,}4332 = 0{,}0606$$

2) Определим вероятность того, что абсолютная величина отклонения **x - a** окажется меньше **δ = 0,5**. Воспользуемся формулой

$$P(|x - a| < \delta) = 2\Phi_0(\frac{\delta}{\sigma}).$$

Подставляем a = 5, σ= 2, δ = 0,5, получим:

P(│X - 5│ < 0,5) = 2Ф(0,5 / 2) = 2 Ф(0,25) = 2 · 0,0987 = 0,1974.

Ответ: 1) вероятность того, что X примет значения, принадлежащие интервалу (8; 10), равна 0,0606; 2) вероятность того, что абсолютная величина отклонения x - 5 окажется меньше δ =0,5 , равна 0,1974.

Пример 55. Заданы среднее квадратическое отклонение σ=3 нормально распределённой случайной величины X, выборочная средняя $\bar{x}_в$ = 18,21, объем выборки n = 100. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания α с заданной надёжностью γ = 0,95.

Решение

Воспользуемся формулой $\gamma = 2\Phi(t) = 2\Phi\left[\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right]$.

Приравняем известное γ = 0,95: тогда 0,95 = 2Ф(t),
вычисляем Ф(t)

Ф(t) = 0,95/2 = 0.475.

Найдём значение **t** для значения Ф(t) = 0.475 из таблицы приложения 2 [1, 7, 13]

Получаем t =1,96.

Вычислим точность оценки из равенства $t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$.

Среднее квадратическое отклонение σ=3

$$\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1.96 \cdot 3}{10} = 0{,}59.$$

Найдём доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания с заданной надёжностью γ =0,59:

$$\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\delta} < \alpha < \bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\delta}$$

Выборочная средняя $\bar{x}_в$ = 18,21, вычислили $\delta = 0{,}59$.

$$18{,}21-0{,}59 < \alpha < 18{,}21+0{,}59;$$

$$17{,}62 < \alpha < 18{,}80.$$

Ответ: доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания α с заданной надёжностью γ = 0,95 равен (17,62; 18,80).

Рекомендуемая литература: [13, 3, 7].

Контрольные вопросы

1. Приведите примеры дискретных случайных величин.
2. Закон распределения – это что?
3. Назовите числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин.
4. Поясните, как находится Интегральная функция распределения.
5. Приведите примеры непрерывных случайных величин.
6. Как находится Дифференциальная функция распределения (плотность вероятности)?

1.3. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

Лекции составляют основу теоретической подготовки и посвящены наиболее важным моментам при изучении дисциплины Высшая математика.
На занятиях теоретический материал обычно дополняется схемами, графиками, таблицами, рисунками, приведением и рассмотрением различных примеров и конкретных задач и студент должен аккуратно в конспект вносить все иллюстрации и комментарии. Студенту рекомендуется после учебных занятий изучить учебный материал, изложенный в ЭИОС и в предложенной для изучения литературе для полного понимания учебного материала и ответить на контрольные вопросы, изложенные в данном пособии после каждой темы.

Практические занятия проводятся для закрепления основных теоретических положений курса и реализации их в практических расчетах, формирования и развития у студентов мышления в рамках будущей профессии. На практических занятиях студенту следует добиваться точного и адекватного владения теоретическим материалом и его применения для решения задач.

Преподаватель контролирует степень усвоения студентами текущего материала, а также уровень остаточных знаний по уже изученным темам. Студенту рекомендуется посещать индивидуальные консультации с преподавателем по расписанию.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Важным звеном в системе обучения является самостоятельная работа обучающихся. В широком смысле под ней следует понимать совокупность всей самостоятельной деятельности студентов, как в отсутствии преподавателя, так и в контакте с ним. Она является одним из основных методов поиска и приобретения новых знаний, работы с литературой, а также выполнения предложенных заданий. Преподаватель призван оказывать в этом методическую помощь студентам и осуществлять руководство их самостоятельной работой.

Для формирования мотивации и повышения интереса к предмету в ЭИОС студентам предложено самостоятельно ознакомиться с учебным материалом и решениями задач, примерами из практической сферы, которые связывают теоретические положения с будущей профессиональной деятельностью студентов.

В период обучения студент должны самостоятельно контролировать усвоение им материала лекций, разделов программы, выносимых на самостоятельную проработку, а также подготовиться к практическим занятиям по материалам лекции и дополнительным источникам, подготовиться к сдаче экзамена.

В ходе самостоятельной подготовки студентов к занятию необходимо не только воспользоваться литературой, рекомендованной преподавателем, но и проявить самостоятельность в отыскании новых источников.

При организации самостоятельного изучения ряда тем лекционного курса студент работает в соответствии с указаниями, выданными преподавателем. Указания по изучению теоретического материала курса составляются дифференцированно по каждой теме и включают в себя следующие элементы: название темы; цели и задачи изучения темы; основные вопросы темы; характеристику основных понятий и определений, необходимых обучаемому для усвоения данной темы; список рекомендуемой литературы; наиболее важные фрагменты текстов рекомендуемых источников, в том числе таблицы, рисунки, схемы и т. п.; краткие выводы, ориентирующие обучаемого на определенную совокупность сведений, основных идей, ключевых положений, систему доказательств, которые необходимо усвоить; контрольные вопросы, предназначенные для самопроверки знаний.

3. ТЕКУЩИЙ КОНТРОЛЬ УСПЕВАЕМОСТИ (ТЕКУЩАЯ АТТЕСТАЦИЯ)

Текущий контроль результатов обучения предполагает систематическую проверку качества полученных обучающимися знаний, умений и навыков по всем изучаемым в соответствующем семестре темам. Текущий контроль осуществляется по ходу обучения и даёт возможность определить степень сформированности знаний, а также их глубину и прочность.

Для оценивания поэтапного формирования результатов освоения дисциплины (текущий контроль) предусмотрены выполнение студентами различных заданий.

Текущий контроль предполагает активизацию учебной деятельности студентов на занятиях, побуждение их к самостоятельной систематической работе. Он необходим обучающимся для самоконтроля на разных этапах обучения. Их результаты учитываются выставлением преподавателем оценок в журнале учета успеваемости и в ходе ежемесячной аттестации.

При изучении дисциплины предусмотрены следующие формы текущего контроля:

– активность студента на лекционных, практических и семинарских занятиях;

– опросы по теоретическому материалу;

– контроль на практических занятиях;

– проверочные контрольные работы в аудитории;

– выполнение индивидуальных домашних заданий –ИДЗ;

– тестирование;

– самостоятельная работа обучающихся;

– посещаемость аудиторных занятий.

Посещаемость занятий и выполнение индивидуального задания студентом отмечается в учетной карточке, которую ведет преподаватель. Преподаватель по завершении занятия подводит итоги по изучаемой теме.

Студенту предстоит по разделам дисциплины элементы линейной и векторной алгебры, аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве, введение в математический анализ, дифференциальное исчисление функции одной переменной, интегральное исчисление функции одной переменной, дифференциальные уравнения, ряды, теория вероятностей выполнить по три индивидуальных задания в каждом семестре (ИДЗ).

Студент выполняет ИДЗ по варианту. Предусмотрено два уровня сложности каждого ИДЗ. Первый уровень студент должен выполнить в обязательном порядке. Критерии оценивания ИДЗ первого уровня представлены в таблице 6.

Для получения оценки «зачтено» при выполнении ИДЗ первого уровня студент должен верно решить все предложенные задания.

Таблица 6 – Оценка индивидуальных домашних заданий первого уровня.

Не зачтено	**Зачтено**
Расчёты произведены неправильно, использованы неверные алгоритмы и формулы; при защите ИДЗ студент не может дать пояснения к расчётам, обозначениям величин и т. п., не может ответить на контрольные вопросы	Расчёты выполнены по верным формулам и алгоритмам и произведены правильно; при защите студент демонстрирует понимание хода выполнения ИДЗ, может дать пояснения по содержанию работы, ответить на контрольные вопросы

Материалы ИДЗ размещены в ЭИОС. Студент должен выполнить задания в указанные сроки.

Для выполнения ИДЗ второго уровня студенту предлагается самостоятельно изучить дополнительный учебный материал, посмотреть решения более сложного уровня заданий, изучить практическое применение математических знаний в профессиональной сфере.

Решения заданий ИДЗ первого уровня оценивается на «зачтено», второго уровня на оценку «5», «4» или «3».

Шкала оценивания контрольных аудиторных работ и ИДЗ второго уровня основана на четырехбалльной системе. Оценка «отлично» выставляется при правильном выполнении не менее 90 % заданий. Оценка «хорошо» выставляется при правильном выполнении не менее 80 % заданий. Оценка «удовлетворительно» выставляется при правильном выполнении не менее 60 % заданий. Оценка «неудовлетворительно» выставляется при правильном выполнении менее 60 % заданий. Результаты измерений индикатора считаются положительными при правильном выполнении не менее 60 % заданий.

Тестирование и решение практических задач студентами проводится на практических занятиях после изучения соответствующих тем. Перечень примерных тестовых и практических заданий представлен в фонде оценочных средств по данной дисциплине (ФОС).

4. ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ (ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ КОНТРОЛЬ)

Промежуточный контроль осуществляется в форме сдачи экзамена и имеет целью определить степень достижения учебных целей по дисциплине. К экзамену допускаются студенты, положительно аттестованные по результатам текущего контроля.

Экзаменационные материалы включают: 1) перечень теоретических вопросов, 2) банк практических заданий. Задания формируются в виде экзаменационного билета, содержащего два теоретических вопроса и три практических задания.

На усмотрение экзаменатора экзамен может быть проведен в письменной, устной или комбинированной форме. Экзаменационные материалы перед проведением аттестации корректируются преподавателем.

Актуальные экзаменационные материалы размещаются в ЭИОС.

Шкала оценивания результатов освоения дисциплины на экзамене основана на четырехбалльной системе.

Оценка «отлично» выставляется в случае, если студент исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно излагал ответы на вопросы билета, обосновывая их в числе прочего и знаниями из общеобразовательных и общеинженерных дисциплин, умеет делать обобщения и выводы, владеет основными терминами и понятиями, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, использовал в ответе материал дополнительной литературы, дал правильные ответы на дополнительные вопросы.

Оценка «хорошо» выставляется в случае, если студент грамотно и по существу излагал ответ на вопросы билеты, не допуская существенных неточностей, но при этом его ответы были недостаточно обоснованы, владеет основными терминами и понятиями, правильно применяет теоретические положения при решении задач, использует в ответе материал только основной литературы; владеет основными умениями; при ответе на дополнительные вопросы допускал неточности и незначительные ошибки.

Оценка «удовлетворительно» выставляется в случае, если студент при ответе на вопросы продемонстрировал знания только основного материала, но допускал неточности, использовал недостаточно правильные формулировки, испытывает затруднения при решении задач; использовал при ответе только лекционный материал; при ответе на дополнительные вопросы допускал ошибки.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется в случае, если студент не смог объяснить смысл написанного им при подготовке к ответу текста; не ориентируется в терминологии дисциплины; не может ответить на дополнительные вопросы.

Образцы типовых тестов, индивидуальных заданий и вариантов контрольных работ приведены в ФОС по дисциплине.

При подготовке к экзамену большую роль играют правильно подготовленные заранее записи и конспекты. В этом случае остается лишь повторить пройденный материал, учесть, что было пропущено, восполнить пробелы, закрепить ранее изученный материал.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 12-е изд. – Москва: Юрайт, 2014. – 478 с.

2. Карлов, А. М. Высшая математика для экономистов: учеб. пособие / А. М. Карлов, Е. Н. Кикоть; Балт. ин-т экономики и финансов. – Калининград: БИЭФ, Ч. 1. – 2007. – 211с.

3. Карлов, А. М. Высшая математика для экономистов: учеб. пособие / А. М. Карлов, Е. Н. Кикоть; Балт. ин-т. экономики и финансов. – Калининград: БИЭФ, Ч. 2. – 2012. – 212 с.

4. Красс, М. С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: учебник / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов; Акад. нар. хоз-ва при Правительстве Российской Федерации. – 6-е изд., испр. – Москва: Дело, 2008. – 720 с.

Дополнительная литература

5. Вялова, А. В. Матрицы и системы линейных уравнений: учеб. пособие / А. В. Вялова. – Калининград: ФГОУ ВПО «КГТУ». – 2009. – 63 с.

6. Вялова, А. В. Элементы векторной алгебры: учеб.-метод. пособие по дисциплине «Алгебра и аналитическая геометрия» / А. В. Вялова. – Калининград: ФГОУ ВПО «КГТУ». – 2011. – 70 с.

7. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 11-е изд., перераб. и доп. – Москва: Юрайт, 2014. – 404 с.

8. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие / П. Е. Данко [и др.]. – 7-е изд., испр. – Москва: АСТ: Мир и Образование; Минск: Харвест, 2014. – 815 с.

9. Елисеева, Н. А. Дифференциальные уравнения: метод. указ. к решению задач для студентов направления 020800.62 Экология и природопользование / Н. А. Елисеева. – Калининград: КГТУ, 2008. – 30 с.

10. Исследование функций с помощью производных: метод. указания по выполнению индивид. контр. задания для студентов направления 020800.62 Экология и природопользование / Н. А. Елисеева; Калинингр. гос. техн. ун-т. – Калининград: КГТУ, 2009. – 19 с.

11. Ефимов, Н. В. Краткий курс аналитической геометрии: учебник / Н. В. Ефимов. – 13-е изд., стер. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 240 с.

12 Зубарева, Н. П. Высшая математика. Раздел «Аналитическая геометрия»: учеб.-метод. пособие по практ. занятиям для студентов направлений подгот. в бакалавриате 38.03.01 Экономика, 38.03.02 Менеджмент / Калинингр. гос. техн. ун-т. – Калининград: КГТУ, 2024. – 89 с.

13 Зубарева, Н. П. Учебно-методическое пособие по выполнению контрольной работы № 2 по дисциплинам Математика и математическая статистика по направлениям подготовки 35.03.04, 35.03.03 и Математика по направлениям подготовки 36.03.02, 36.03.01 и 35.03.08 в бакалавриате студентами заочной формы обучения / Н. П. Зубарева. – Калининград: КГТУ, 2021. – 117 с.

14. Клетеник, Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии: учеб. пособие / Д. В. Клетеник; под ред. Н. В. Ефимова. – 17-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Профессия, 2005. – 199 с.

Локальный электронный методический материал

Надежда Петровна Зубарева

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Редактор С. Кондрашова
Корректор Т. Звада

Уч.-изд. л. 6,3. Печ. л. 5,9.

Издательство федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Калининградский государственный технический университет».
236022, Калининград, Советский проспект, 1