Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

И. В. Воробейкина

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

учебно-методическое пособие по выполнению практических работ
для студентов специальности
10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем

Калининград
Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ»
2022

Рецензент
Доцент кафедры информационной безопасности ФГБОУ ВО
«Калининградский государственный технический университет»
А. Г. Жестовский

Воробейкина И. В.
Математические модели в информационной безопасности: учеб-методич. пособие по практическим работам для студентов специальности 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» / И. В. Воробейкина. - Калининград: Изд-во ФГБОУ ВО «КГТУ», 2022. – 136 с.

Учебно-методическое пособие является руководством по проведению цикла практических работ по дисциплине «Математические модели в информационной безопасности» студентами, обучающимися по специальности 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем».

Практические работы предназначены для закрепления теоретического материала.

Список лит. – 7 наименований

Учебно-методическое пособие рассмотрено и одобрено в качестве локального электронного методического материала кафедрой информационной безопасности 14 июня 2022 г., протокол № 09

Учебно-методическое пособие рекомендовано к использованию в учебном процессе в качестве локального электронного методического материала методической комиссией института цифровых технологий 28 июня 2022 г., протокол № 4

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов специальности 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем», изучающих дисциплину «Математические модели в информационной безопасности».

Цель практических работ по дисциплине: освоение и закрепление на практике основных положений дисциплины, приобретение навыков их применения в информационной безопасности.

Практикум содержит 26 практических работ.

Практические работы проводятся в лабораториях кафедры.

В результате выполнения практических работ ожидается, что студенты сформируют навыки применения математических моделей в последующих дисциплинах.

2. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1. МАТРИЦА СМЕЖНОСТИ И МАТРИЦА ИНЦИДЕНТНОСТИ. ИЗОМОРФНЫЕ ГРАФЫ. СТЕПЕНЬ ВЕРШИНЫ. ТЕОРЕМА О СУММЕ СТЕПЕНЕЙ ВЕРШИН.

2.1. Общие сведения

Цель: научиться строить матрицы смежности и инцидентности и определять изоморфные графы.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: тетрадь, калькулятор.

Условия допуска к выполнению: показать конспект по теоретической подготовке.

Критерии положительной оценки: показать выполненную работу, четко ответить на вопросы, увязать последовательность изученных разделов дисциплины.

2.2. Теоретическое введение

Правила построения матрицы смежности

Матрица смежности ориентированного графа есть квадратная $(n\times n)$ матрица $M=[a_{ij}]_{n\times n}$, строки и столбцы которой соответствуют вершинам графа, а элементы матрицы a_{ij} – булевые переменные, которые равны соответственно: 1, если существует дуга (x_i, x_j), и 0, если дуга (x_i, x_j) не существует.

Для неориентированного графа элементы матрицы смежности a_{ij} будут равны: 1, если есть ребро (звено), соединяющее x_i с x_j и 0, если такое ребро отсутствует.

Матрица смежности мультиграфа – это квадратная $(n\times n)$ матрица $M=[a_{ij}]_{nxn}$, где a_{ij} – это число ребер, соединяющих вершины v_i и v_j, причем петли, соединяющие вершину с самой собой, считаются дважды.

Правила построения матрицы инцидентности

Матрица инцидентности графа, имеющего n и m ребер, – это матрица $I=[b_{ij}]_{n\times m}$, состоящая из n строк и m столбцов.

Если граф ориентированный, тогда:

$b_{ij}=1$, если ребро e_j выходит из вершины v_i;

$b_{ij}=-1$, если ребро e_j входит в вершину v_i;

$b_{ij}=0$, если ребро e_j неинцидентно вершине v_i или является петлей при этой вершине.

Если граф неориентированный, тогда:

$b_{ij}=1$, если ребро e_j инцидентно вершине v_i и не является ее петлей;

$b_{ij}=2$, если ребро e_j – петля при вершине v_i;

$b_{ij}=0$, если ребро e_j неинцидентно вершине v_i.

Литература:

Воробейкина, И. В. Математические модели в информационной безопасности: учебное пособие для студентов специальности 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» очной формы обучения / И. В. Воробейкина; БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ». – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2021.

Глава 1. Основные понятия теории графов.

2.3. Задание к практической работе.

Сформулировать критерий изоморфности графов

Вопросы, на которые необходимо дать ответ:

1. Дайте определение графа, орграфа.
2. Что такое степени вершин графа?
3. Сформулируйте теорему о сумме степеней вершин.
4. Как построить матрицы смежности и инцидентности?
5. Что такое изоморфные графы?
6. От чего зависит изоморфизм графов?

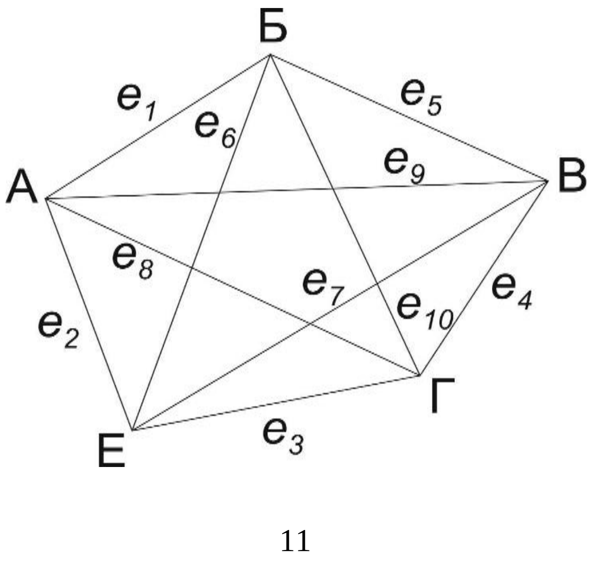
2.4. Методические указания и порядок выполнения работы

Пример 1.1. Рукопожатия

Александр, Борис, Владимир, Григорий и Дмитрий при встрече обменялись рукопожатиями (каждый пожал руку каждому по одному разу). Сколько всего рукопожатий было сделано? Составить матрицы смежностей и инцидентностей.

Решение.

Пусть каждому из пяти человек соответствует вершина графа, названная первой буквой его имени, а производимому рукопожатию – ребро, соединяющее эти вершины. Очевидно, граф полный, неориентированный, следовательно, можно применить формулу: $m=n(n-1)$. Значит, всего было 10 рукопожатий.



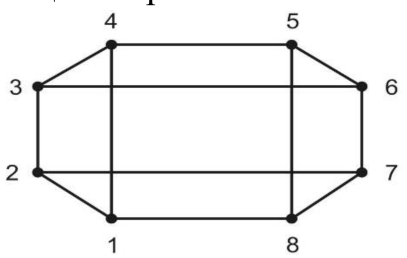
Матрица смежности порядка *n*=5

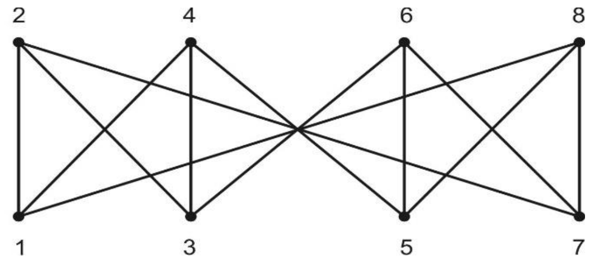
	А	*Б*	*В*	*Г*	*Д*
А	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*
Б	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*
В	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*
Г	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*
Д	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*

Матрица инцидентности *5×10*

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
А	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*
Б	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*
В	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*
Г	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*
Д	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*

Пример 1.2 Проверим изоморфность графов, пронумеровав вершины следующим образом:





Матрицы смежности.

Матрица смежности G_1

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*
2	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*
3	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*
4	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*
5	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*
6	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*
7	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*
8	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*

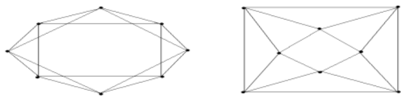
Матрица смежности G_2

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*
2	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*
3	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*
4	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*
5	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*
6	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*
7	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*
8	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*

Матрицы смежности одинаковы, следовательно, графы изоморфны.

2.5. Индивидуальное задание

Вариативность не предполагается. Пронумеровать вершины графов. Проверить изоморфность графов.



2.6. Требования к отчету и защите

Показать выполненную в тетради работу. Знать ответы на сформулированные выше вопросы. Защита работы проводится во время занятий. После защиты работа помещается в ЭИОС.

3. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2. ПОДГРАФЫ ГРАФА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

3.1. Общие сведения

Цель: изучить операции над графами.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: тетрадь, калькулятор.

Условия допуска к выполнению: показать конспект по теоретической подготовке.

Критерии положительной оценки: показать выполненную работу, четко ответить на вопросы, увязать последовательность изученных разделов дисциплины.

3.2. Теоретическое введение

Пусть дан граф $G = (X, A)$, где $X = \{x_i\}$, $i=1, 2, ..., n$ – множество вершин, $A=\{a_i\}$, $i = 1, 2, ..., m$ – множество дуг.

О. Подграфом $G'=(X',A')$ исходного графа G называется такой граф G', для которого $X'\subseteq X$ и $A'\subseteq A$. Примеры подграфов показаны на рис. *б*, а исходный граф – на рис. *а*.

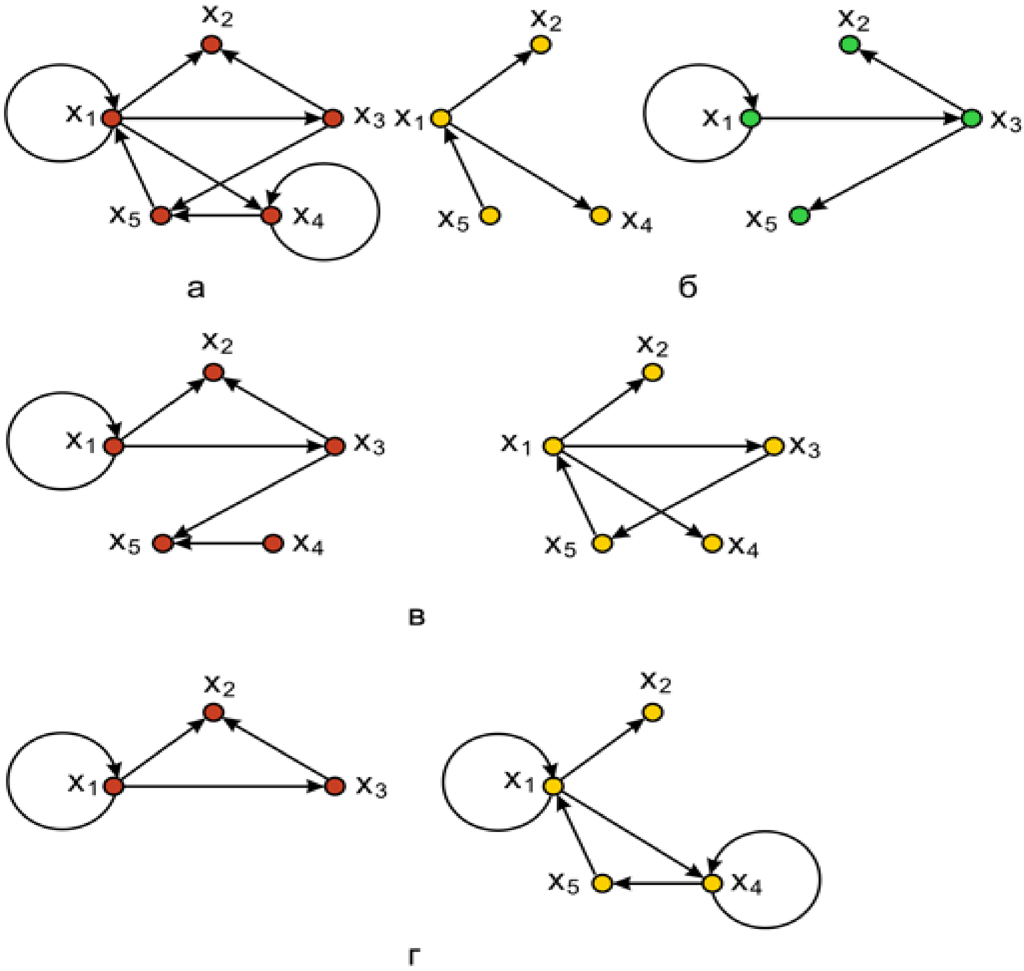


Рис. 1

Виды подграфов: *а* – исходный граф; *б* – подграфы; *в* – остовные подграфы; *г* – порожденные подграфы.

О. Остовным подграфом $G_p=(X, A_p)$ графа G называется граф, для которого $A_p \subset A$.

Таким образом, остовный подграф имеет то же самое множество вершин, что и исходный граф G, но множество дуг подграфа G_p является подмножеством множества дуг исходного графа. Примеры остовных подграфов приведены на рис. 1в. Для графа, имеющего m дуг, можно построить k остовных подграфов: $k=C^1{}_m+C^2{}_m+\ldots+C^{m-1}{}_m=2^m-1$

О. Порожденным подграфом $G_s=(X_s, \Gamma_s)$ называется граф, для которого $X_s \subset X$ и для каждой вершины $x_i \in X_s$ прямое отображение $\Gamma_s(x_i)=\Gamma(x_i) \cap X_s$.

Таким образом, порожденный подграф состоит из подмножества вершин X_s *множества* вершин исходного графа и всех таких дуг графа G, у которого *конечные* и начальные вершины принадлежат подмножеству X_s . Примеры порожденных подграфов приведены на рис. 1г.

Литература:

Воробейкина, И.В. Математические модели в информационной безопасности: учебное пособие для студентов специальности 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» очной формы обучения / И.В. Воробейкина; БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ». – Калининград: Издательство БГАРФ, 2021.

Глава 1. Основные понятия теории графов.

3.3. Задание к практической работе

1. Дать определения подграфа, остовного подграфа, порожденного подграфа.

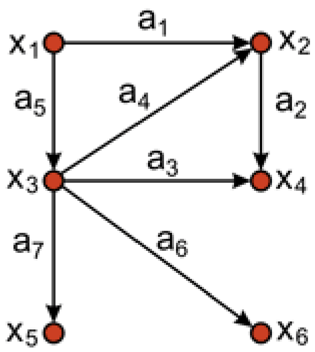
2. Назвать правила построения матриц смежности.

3. Дать определение всех операций над подграфами.

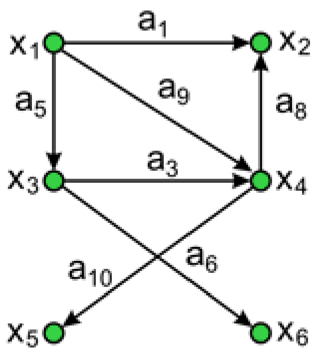
4. Построить матрицы смежности для кольцевой суммы графов G_1 и G_2 (рис. 1). Начертить результирующий граф.

3.4. Методические указания и порядок выполнения работы

Объединение графов $G_1=(X_1,A_1)$ (рис. 1а) и $G_2=(X_2,A_2)$ (рис. 1б), обозначаемое как $G_1 \cup G_2$, представляет такой граф $G_3=(X_1 \cup X_2,\ A_1 \cup A_2)$ (рис. 1д), что множество его вершин является объединением X_1 и X_2, а множество ребер – объединением A_1 и A_2. Матрица смежности результирующего графа (рис. 1е) получается операцией поэлементного логического сложения матриц смежности исходных графов G_1 (рис. 1в) и G_2 (рис. 1г).



а



б

$A_1=$

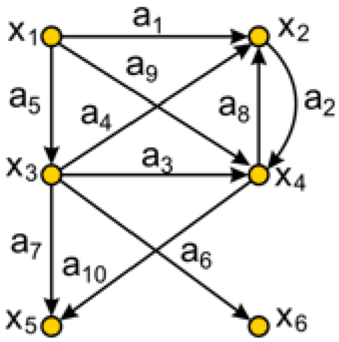
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1	1			
x_2				1		
x_3		1		1	1	1
x_4						
x_5						
x_6						

в

$A_2=$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1	1	1		
x_2						
x_3				1		1
x_4		1			1	
x_5						
x_6						

г



д

$A_3=$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1	1	1		
x_2				1		
x_3		1		1	1	1
x_4		1			1	
x_5						
x_6						

е

Рис. 2

Пересечение графов G_1 и G_2, обозначаемое как $G_1 \cap G_2$, представляет собой граф $G=(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2)$. Таким образом, множество вершин графа G состоит из вершин, присутствующих одновременно в G_1 и G_2. Результирующая матрица смежности получается операцией поэлементного логического умножения матриц смежности исходных графов G_1 и G_2.

Кольцевая сумма двух графов G_1 и G_2, обозначаемая как $G_1 \oplus G_2$, представляет собой граф G, порожденный на множестве ребер $A_1 \oplus A_2$. Другими словами, граф G не имеет изолированных вершин и состоит только из ребер, присутствующих либо в G_1, либо в G_2, но не в обоих одновременно. Результирующая матрица смежности получается операцией поэлементного логического сложения по *mod 2* матриц смежности исходных графов G_1 и G_2.

Рассмотрим унарные операции на графе.

Удаление вершины. Если x_i – вершина графа $G = (X, A)$, то $G–x_i$ – порожденный подграф графа G на множестве вершин $X–x_i$, т. е. $G–x_i$ является графом, получившимся после удаления из графа G вершины x_i и всех ребер, инцидентных этой вершине. Результирующая матрица смежности графа после выполнения операции удаления вершины x_i получается путем удаления соответствующего i-го столбца и i-й строки из исходной матрицы и «сжимания» матрицы по вертикали и горизонтали начиная с $(i+1)$-го столбца и $(i+1)$-й строки.

Удаление ребра (дуги). Если a_i – дуга графа $G = (X, A)$, то $(G–a_i)$ – подграф графа G, получающийся после удаления из G дуги a_i. Заметим, что концевые вершины дуги a_i не удаляются. Удаление из графа множества вершин или дуг определяется как последовательное удаление определенных вершин или дуг. Результирующая матрица смежности графа после выполнения операции удаления дуги a_i получается путем удаления соответствующих элементов из исходной матрицы.

Замыкание или отождествление. Говорят, что пара вершин x_i и x_j в графе G замыкается (или отождествляется), если они заменяются такой новой вершиной, что все дуги в графе G, инцидентные x_i и x_j, становятся инцидентными новой вершине. Матрица смежности графа после выполнения операции замыкания вершин x_i и x_j получается путем поэлементного логического сложения i-го и j-го столбцов и i-й и j-й строк в исходной матрице и «сжимания» матрицы по вертикали и горизонтали.

Стягивание. Под стягиванием подразумевают операцию удаления дуги или ребра и отождествление его концевых вершин.

3.5. Индивидуальное задание

Вариативность не предполагается.

1. Построить пересечение графов $G_1=(X_1,A_1)$ (рис. 2а) и $G_2=(X_2,A_2)$ (рис. 2б) путем создания результирующей матрицы смежности.

2. Удалить вершину x_3 в графе на рис. 3. Удалить дуги a_4 и a_7. Замкнуть вершины x_1 и x_2. Стянуть дуги a_1, a_6 и a_7.

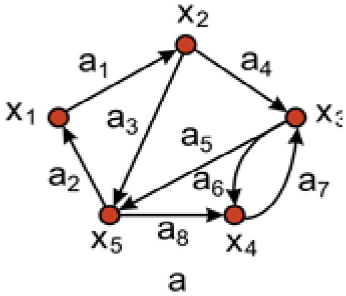


Рис. 3

3.6. Требования к отчету и защите

Показать выполненную в тетради работу. Знать ответы на сформулированные выше вопросы. Защита работы проводится во время занятий. После защиты работа помещается в ЭИОС.

4. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3. ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

4.1. Общие сведения

Цель: Изучить задачу коммивояжера.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: тетрадь, калькулятор.

Условия допуска к выполнению: показать конспект по теоретической подготовке.

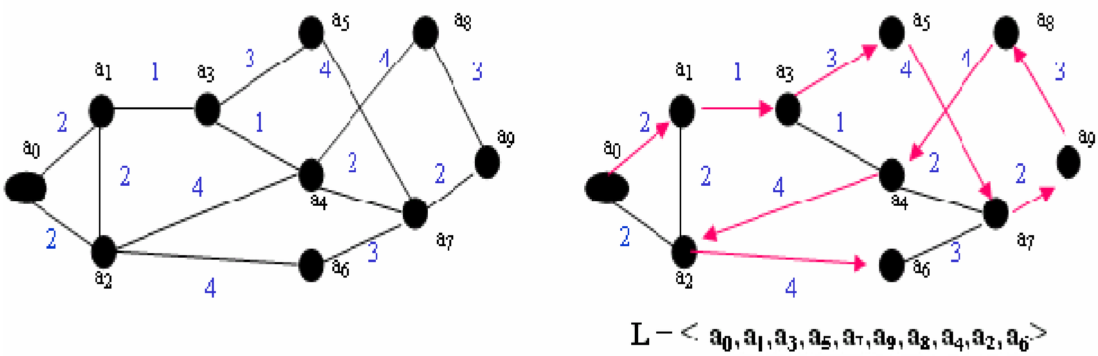
Критерии положительной оценки: Показать выполненную работу, четко ответить на вопросы, увязать последовательность изученных разделов дисциплины.

4.2. Теоретическое введение

Коммивояжер (бродячий торговец) должен выйти из первого города, посетить по разу в неизвестном порядке города *1,2,3...n* и вернуться в первый город. Расстояния между городами известны. В каком порядке следует обходить города, чтобы замкнутый путь коммивояжера был кратчайшим?

Если городам поставить в соответствии вершины графа, а соединяющих их дорогам дуги, то задача заключается в определении гамильтонова контура минимальной длины. Гамильтоновым контуром называется путь, проходящий через все вершины графа, у которого начальная вершина совпадает с конечной. Здесь под длиной контура понимают не количество дуг, входящих в контур, а сумму их длин. Длина соответствующей дороги – вес ребра. Граф должен быть полным, т.е. в нем имеются все возможные ребра. Если же граф не является полным, то его можно дополнить недостающими ребрами с весом равным ∞.

Постановка задачи коммивояжера как задачи на графе:



$L - \langle a_0, a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, a_8, a_4, a_2, a_6 \rangle$

2+1+3+4+2+2+3+4+4+4

Метод ветвей и границ. Для практической реализации идеи метода ветвей и границ применительно к задаче коммивояжера нужно найти метод определения нижних границ подмножества и разбиения множества гамильтоновых контуров на подмножества (ветвление). Определение нижних границ базируется на том утверждении, что если ко всем элементам i-й строки или j-го столбца матрицы C прибавить или отнять число α, то задача останется эквивалентной прежней, т. е. оптимальность маршрута коммивояжера не изменится, а длина любого гамильтонова контура изменится на данную величину α.

Для решения задачи коммивояжера методом ветвей и границ необходимо выполнить следующий алгоритм:

1. Построение матрицы с исходными данными.
2. Нахождение минимума по строкам.
3. Редукция строк.
4. Нахождение минимума по столбцам.
5. Редукция столбцов.
6. Вычисление оценок нулевых клеток.
7. Редукция матрицы.
8. Если полный путь еще не найден, переходим к пункту 2, если найден к пункту 9.
9. Вычисление итоговой длины пути и построение маршрута.

Литература:

Воробейкина, И.В. Математические модели в информационной безопасности: учебное пособие для студентов специальности 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» очной формы обучения / И.В. Воробейкина; БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ». – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2021.

Глава 2. Связные графы. Двудольные графы. Метрические характеристики графа. Обходы графов. 2.5. Задача коммивояжера.

4.3. Задание к практической работе.

Вопросы, на которые необходимо дать ответ:

1. Какие способы обходов графов существуют? Опишите их алгоритм.
2. Перечислите алгоритмы решения задачи коммивояжера.
3. Дайте определение гамильтонова графа.
4. Как осуществляется редукция матрицы?

4.4. Методические указания и порядок выполнения работы

Пример: у нас 4 города и в таблице указано расстояние от каждого города к 3 другим, в зависимости от направления движения (т.к. некоторые ж/д пути могут быть с односторонним движением и т.д.). Расстояние от города к этому же городу обозначено буквой *M*. Также используется знак бесконечности ∞.

Методика решения задачи коммивояжера:

1. Построение матрицы с исходными данными. Сначала необходимо длины дорог соединяющих города представить в виде следующей таблицы:

Исходные данные.

Город	1	2	3	4
1	M	5	11	9
2	10	M	8	7
3	7	14	M	8
4	12	6	15	M

2. Нахождение минимума по строкам. Находим минимальное значение в каждой строке (d_i) и выписываем его в отдельный столбец.

Минимальные значения по строкам.

Город	1	2	3	4	di
1	M	5	11	9	5
2	10	M	8	7	7
3	7	14	M	8	7
4	12	6	15	M	6

3. Редукция строк. Производим редукцию строк – из каждого элемента в строке вычитаем соответствующее значение найденного минимума (d_i).

Редукция строк.

Город	1	2	3	4	di
1	M	0	6	4	5
2	3	M	1	0	7
3	0	7	M	1	7
4	6	0	9	M	6

В итоге в каждой строке будет хотя бы одна нулевая клетка.

4. Нахождение минимума по столбцам. Далее находим минимальные значения в каждом столбце (d_j). Эти минимумы выписываем в отдельную строку.

Минимальные значения по столбцам.

Город	1	2	3	4	di
1	M	0	6	4	5
2	3	M	1	0	7
3	0	7	M	1	7
4	6	0	9	M	6
dj	0	0	1	0	

5. Редукция столбцов. Вычитаем из каждого элемента матрицы соответствующее ему d_j. В итоге в каждом столбце будет хотя бы одна нулевая клетка.

6. Вычисление оценок нулевых клеток. Для каждой нулевой клетки получившейся преобразованной матрицы находим «оценку». Ею будет сумма минимального элемента по строке и минимального элемента по столбцу, в которых размещена данная нулевая клетка. Сама она при этом не учитывается. Найденные ранее d_i и d_j не учитываются. Полученную оценку записываем рядом с нулем в скобках.

Пример оценки нулевых клеток.

Город	1	2	3	4
1	M	0 (4)	5	4
2	3	M	0	0
3	0	7	M	1
4	6	0	8	M

И так по всем нулевым клеткам:

Оценка всех нулевых клеток.

Город	1	2	3	4
1	M	0 (4)	5	4
2	3	M	0 (5)	0 (1)
3	0 (4)	7	M	1
4	6	0 (6)	8	M

7. Редукция матрицы.

Выбираем нулевую клетку с наибольшей оценкой. Заменяем ее на *M*. Мы нашли один из отрезков пути. Выписываем его (от какого города к какому движемся, в нашем примере от 4-го к 2-му).

Редукция матрицы.

Город	1	2	3	4
1	M	0 (4)	5	4
2	3	M	0 (5)	0 (1)
3	0 (4)	7	M	1
4	6	0 (6)	8	M

Ту строку и тот столбец, где образовалось две *M,* вычеркиваем. В клетку, соответствующую обратному пути, ставим еще одну букву *M* (т.к. мы уже не будем возвращаться обратно).

Результат.

Город	1	2	3	4
1	M	0 (4)	5	4
2	3	M	0 (5)	M
3	0 (4)	7	M	1
4	6	M	8	M

8. Если полный путь еще не найден, переходим к пункту 2, если найден к пункту 9.

Если мы еще не нашли все отрезки пути, то возвращаемся ко 2-му пункту и вновь ищем минимумы по строкам и столбцам, проводим их редукцию, считаем оценки нулевых клеток и т. д.

Если все отрезки пути найдены (или найдены еще не все отрезки, но оставшаяся часть пути очевидна) – переходим к пункту 9.

9. Вычисление итоговой длины пути и построение маршрута. Найдя все отрезки пути, остается только соединить их между собой и рассчитать общую длину пути (стоимость поездки по этому маршруту, затраченное время и т.д.). Длины дорог, соединяющих города, берем из самой первой таблицы с исходными данными. В нашем примере маршрут получился следующий: $4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 4$. Общая длина пути: $L = 30$.

4.5. Индивидуальное задание

Вариативность не предполагается.

Решить задачу обхода городов *1,2,3,4,5*. Матрица расстояний

	1	2	3	4	5
1	*M*	*90*	*80*	*40*	*100*
2	*60*	*M*	*40*	*50*	*70*
3	*50*	*30*	*M*	*60*	*20*
4	*10*	*70*	*20*	*M*	*50*
5	*20*	*40*	*50*	*20*	*M*

4.6. Требования к отчету и защите

Показать выполненную в тетради работу. Знать ответы на сформулированные выше вопросы. Защита работы проводится во время занятий. После защиты работа помещается в ЭИОС.

5. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4. ОСТОВНЫЕ ДЕРЕВЬЯ. ЦЕНТРОИД ДЕРЕВА, ЦИКЛОМАТИЧЕСКОЕ ЧИСЛО ГРАФА

5.1. Общие сведения

Цель: получить понятия об остовных деревьях и их характеристиках.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: тетрадь, калькулятор.

Условия допуска к выполнению: показать конспект по теоретической подготовке.

Критерии положительной оценки: Показать выполненную работу, четко ответить на вопросы, увязать последовательность изученных разделов дисциплины.

5.2. Теоретическое введение

Для представления данных в алгоритмах на дискретных структурах используются графы, которые называются деревьями.

О. Деревом называют любой связный граф, не содержащий циклов.

О. Лес – упорядоченное множество упорядоченных деревьев. Любой граф без циклов называется лесом (или ациклическим графом). Таким образом, компонентами леса являются деревья.

О. Вершина с нулевой степенью захода называется **корнем дерева**, вершины с нулевой степенью исхода (из которых не исходит ни одна дуга) называются **концевыми вершинами** или **листьями.**

Висячая вершина в дереве – вершина степени 1. Висячие вершины называются **листьями,** все остальные – **внутренними вершинами**.

Если в дереве особо выделена одна вершина, называемая корнем, то такое дерево называется **корневым**, иначе – **свободным.**

Ветвь к вершине v дерева – это максимальный подграф, содержащий v в качестве висячей вершины. Вес вершины k – наибольший размер ее ветвей.

О. Центроид (или центр масс) дерева C – множество вершин с наименьшим весом: $C = \{v| c(v) = c_{min}\}$.

Вес любого листа дерева равен размеру дерева. Высота дерева с корнем, расположенным в центроиде, не больше наименьшего веса его вершин.

Свободное дерево порядка n с двумя центроидами имеет четное количество вершин, а вес каждого центроида равен $n/2$.

Теорема Жордана. Каждое дерево имеет центроид, состоящий из одной или двух смежных вершин.

О. контурный ранг (**цикломатическое числ**о) неориентированного графа − это минимальное число ребер, удаление которых разрушает все циклы графа, превращая его в дерево (для связного графа) или лес (для несвязного графа). Цикломатическое число можно понимать также как число независимых циклов в графе.

Цикломатическое число вычисляется по формуле

$$r = m - n + c \,,$$

где m − число ребер заданного графа, n − число вершин, а c − число компонент связности.

Цикломатическое число несвязного графа равно сумме цикломатических чисел связных компонент. Очевидно, что для любого графа-дерева это число равно нулю.

Пусть G – связный граф, содержащий n вершин и m ребер.

О. Остовным деревом *T* графа G называется любой его связный подграф, содержащий все вершины графа G и являющийся деревом.

Иначе говоря, остовное дерео состоит из некоторого подмножества ребер графа, таких, что из любой вершины графа можно попасть в любую другую вершину, двигаясь по этим ребрам, и в нем нет циклов, то есть из любой вершины нельзя попасть в саму себя, не пройдя какое-то ребро дважды.

Остовное дерево графа G должно содержать $(n–1)$ ребер (ветви остова). Таким образом, любое остовное дерево есть результат удаления ровно

$$m-(n-1)=m-n+1$$

ребер (хорды остова).

О. Матрицей Кирхгофа простого графа называется матрица, элементы которой определяются равенством:

$$k_{ij}=\begin{cases}\deg(v_i) & i=j\\ -1 & (v_i,v_j)\in E, \text{если } i \text{ и } j \text{ смежны}\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

То есть, на главной диагонали матрицы Кирхгофа находятся степени вершин, а на пересечении i-й строки и j-го столбца ($i\neq j$) стоит (-1), если вершины с номерами i и j смежны, и 0 в противном случае.

Утверждение: Сумма элементов каждой строки (столбца) матрицы Кирхгофа равна нулю:

Утверждение: Определитель матрицы Кирхгофа равен нулю: $det\ K=0$.

Теорема Кирхгофа. Пусть G – связный помеченный граф с матрицей Кирхгофа M. Все алгебраические дополнения матрицы Кирхгофа M равны между собой, и их значение равно количеству остовных деревьев графа G.

О. *Помеченный граф* – это граф, у которого все вершины «помечены» целыми числами от 1 до n.

Теорема Кэли. Существует ровно n^{n-2} различных помеченных деревьев с n вершинами. Число остовных деревьев в **полном** графе K_n равно n^{n-2}.

Литература:

Воробейкина, И.В. Математические модели в информационной безопасности: учебное пособие для студентов специальности 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» очной формы обучения / И.В. Воробейкина; БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ». – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2021.

Глава 3. Понятие дерева. Свойства деревьев.

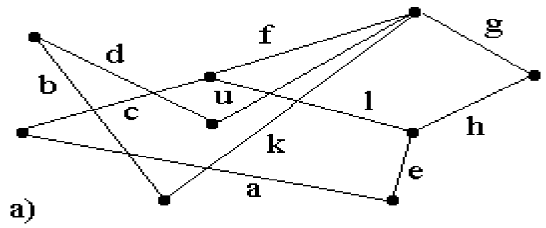
5.3. Задание к практической работе.

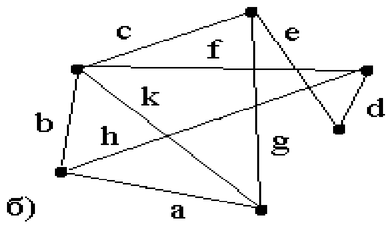
Вопросы, на которые необходимо дать ответ:

1. Что такое остовное дерево?
2. Дайте определение центроида и цикломатического числа графа.
3. Сформулируйте теорему Жордана о центроидах дерева.
4. Сформулируйте теоремы Кирхгофа и Кэли.
5. Сформулируйте правила построения матрицы Кирхгофа.
6. Почему в формулировках теорем Кирхгофа и Кэли количество остовных деревьев различно?

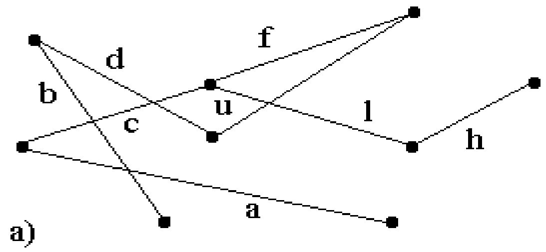
5.4. Методические указания и порядок выполнения работы

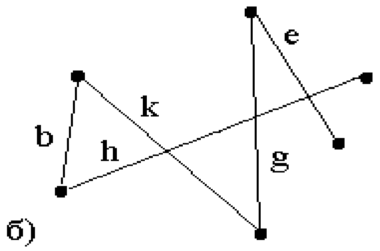
Пример. Сколько и какие ребра следует удалить в графах, чтобы превратить их в дерево?



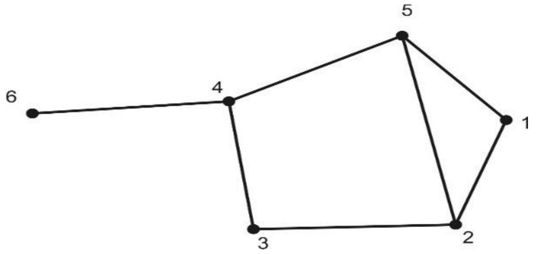


Решение. Граф *а)* включает *9* вершин и *11* ребер. Соответственно его цикломатическое число равно $11-9+1=3$. Для графа *б)* эти расчеты дают $9-6+1=4$. Вариантов удаления ребер из графа может быть довольно много. На рисунке ниже показаны графы, полученные удалением ребер из графа *а),* и ребер из графа *б).*





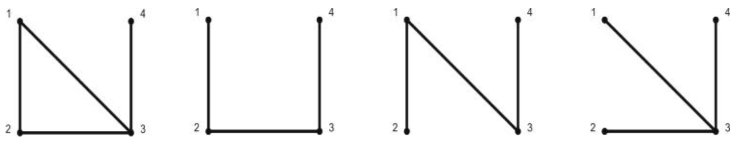
Пример. Матрица Кирхгофа.



Матрица Кирхгофа.

	1	2	3	4	5	6
1	*2*	*-1*	*0*	*0*	*-1*	*0*
2	*-1*	*3*	*-1*	*0*	*-1*	*0*
3	*0*	*-1*	*2*	*-1*	*0*	*0*
4	*0*	*0*	*-1*	*3*	*-1*	*-1*
5	*-1*	*-1*	*0*	*-1*	*3*	*0*
6	*0*	*0*	*0*	*-1*	*0*	*1*

Пример. Теорема Кирхгофа.



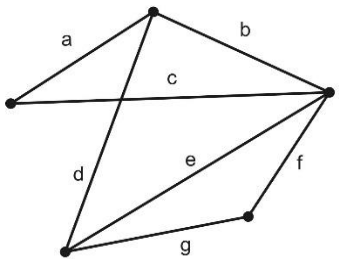
$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ алгебраическое дополнение: } M_{1,2} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Алгебраическое дополнение элемента, например, $M_{1,2}=3$, что совпадает с количеством остовных деревьев.

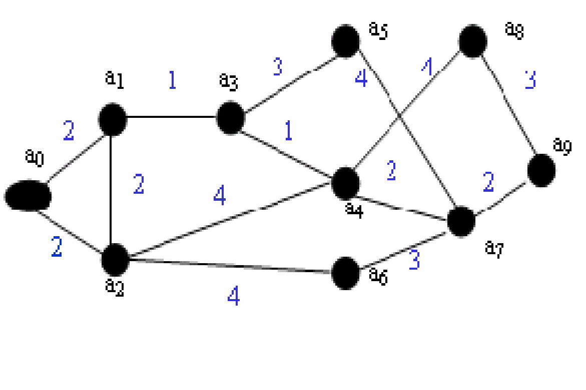
5.5. Индивидуальное задание

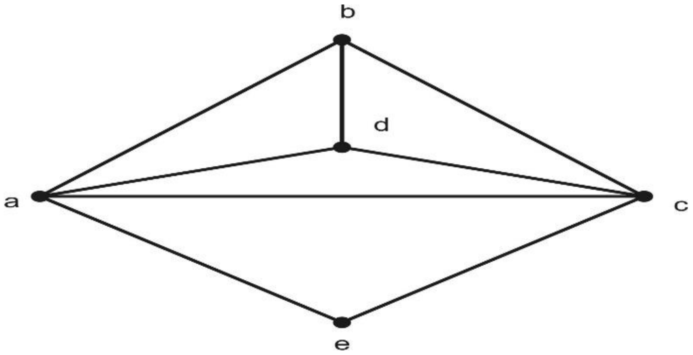
Вариативность не предполагается.

1. Найти два разных остовных дерева в графе:



2. Сколько и какие ребра следует удалить в графах, чтобы превратить их в дерево?





3. Найти число остовных деревьев в графе К5.

5.6. Требования к отчету и защите

Показать выполненную в тетради работу. Знать ответы на сформулированные выше вопросы. Защита работы проводится во время занятий. После защиты работа помещается в ЭИОС.

6. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5. ПОСТРОЕНИЕ КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ В ГРАФЕ ПО АЛГОРИТМУ ДЕЙКСТРА

6.1. Общие сведения

Цель: научиться строить минимальные пути в графе, используя алгоритм Дейкстра.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: тетрадь, калькулятор.

Условия допуска к выполнению: показать конспект по теоретической подготовке.

Критерии положительной оценки: Показать выполненную работу, четко ответить на вопросы, увязать последовательность изученных разделов дисциплины.

6.2. Теоретическое введение

Алгоритм Дейкстра находит кратчайшие пути от одной из вершин графа до всех остальных. Алгоритм работает только для графов без ребер отрицательного веса.

Определение: дан взвешенный ориентированный граф *G=(V,E)* без дуг отрицательного веса. Найти кратчайшие пути от некоторой вершины *a* графа *G* до всех остальных вершин этого графа.

Каждой вершине из *V* сопоставляется метка – минимальное известное расстояние от этой вершины до *a*. На каждом шаге алгоритма *посещается* одна вершина и делается попытка уменьшать метки. Работа алгоритма завершается, когда все вершины *посещены*.

Инициализация. Метка самой вершины *a* полагается равной *0*, метки остальных вершин – бесконечности. То есть расстояния от *a* до других вершин пока неизвестны. Все вершины графа помечаются как *непосещенные*.

Шаг алгоритма. Если все вершины посещены, алгоритм завершается. В противном случае, из еще не посещенных вершин выбирается вершина *u*, имеющая минимальную метку. Рассматриваются всевозможные маршруты, в которых *u* является предпоследним пунктом. Вершины, в которые ведут ребра из *u*, назовем *соседями* этой вершины. Для каждого соседа вершины *u*, кроме отмеченных как посещенные, рассматривается новая длина пути, равная сумме значений текущей метки *u* и длины ребра, соединяющего *u* с этим соседом. Если полученное значение длины меньше значения метки соседа, заменим значение метки полученным значением длины. После рассмотрения всех соседей, вершина *u* помечается, как посещенная, и шаг алгоритма повторяется.

Литература:

Воробейкина, И.В. Математические модели в информационной безопасности: учебное пособие для студентов специальности 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» очной формы обучения / И.В. Воробейкина; БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ». – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2021.

Глава 4. Построение минимального пути в графе.

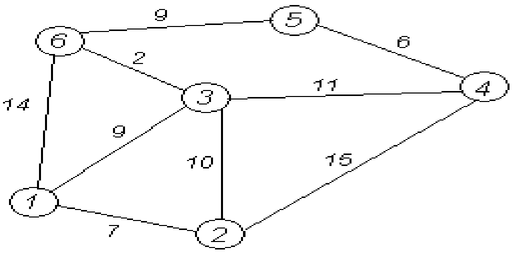
6.3. Задание к практической работе.

Вопросы, на которые необходимо дать ответ:

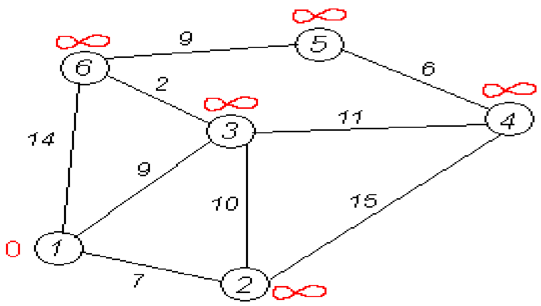
1. Что такое взвешенный граф? Могут ли во взвешенном графе присутствовать дуги отрицательного веса?
2. Сформулируйте правила нахождения минимальных расстояний в графике по алгоритму Дейкстра.

6.4. Методические указания и порядок выполнения работы

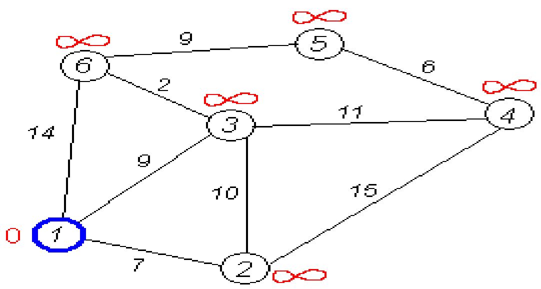
Рассмотрим выполнение алгоритма на примере графа, показанного на рисунке ниже. Пусть требуется найти кратчайшие расстояния от *1*-й вершины до всех остальных.



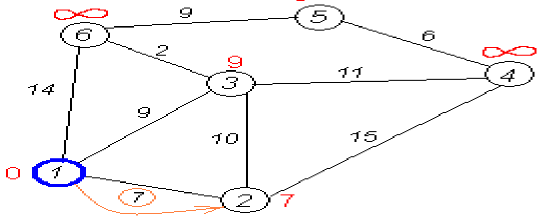
Кружками обозначены вершины, линиями – пути между ними (ребра графа). В кружках обозначены номера вершин, над ребрами обозначена длина пути. Рядом с каждой вершиной обозначена метка – длина кратчайшего пути в эту вершину из вершины *1*.



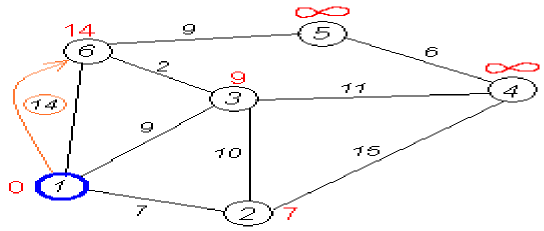
Шаг 1. Минимальную метку имеет вершина *1*. Ее соседями являются вершины *2*, *3* и *6*.



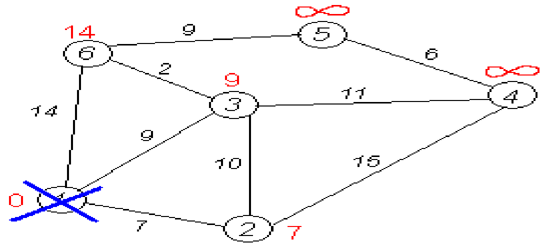
Первый по очереди сосед вершины *1* – вершина *2*, потому что длина пути до нее минимальна. Длина пути в нее через вершину *1* равна сумме значения метки вершины *1* и длины ребра, идущего из *1*-й в *2*-ю, т. е. *0+7=7*. Это меньше текущей метки вершины *2* (бесконечности), поэтому новая метка *2*-й вершины равна *7*.



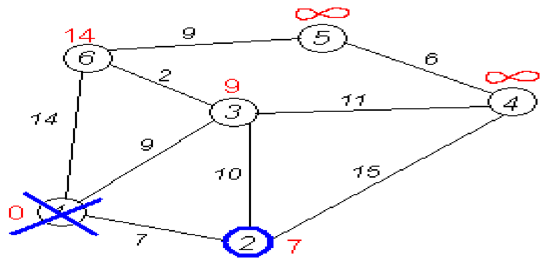
Аналогичную операцию проделываем с двумя другими соседями *1*-й вершины – *3*-й и *6*-й.



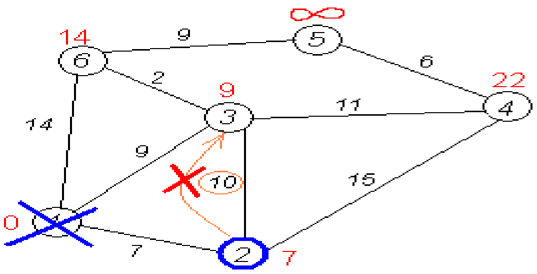
Все соседи вершины *1* проверены. Текущее минимальное расстояние до вершины *1* считается окончательным и пересмотру не подлежит. Вычеркнем ее из графа, чтобы отметить, что эта вершина посещена.



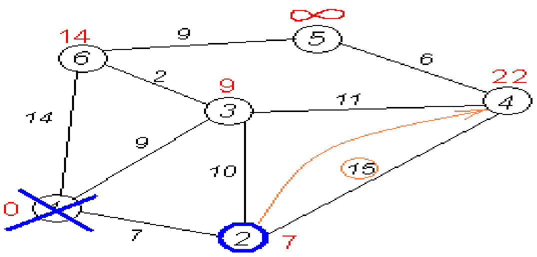
Шаг 2. Шаг алгоритма повторяется. Снова находим ближайшую из непосещенных вершин. Это вершина *2* с меткой *7*.



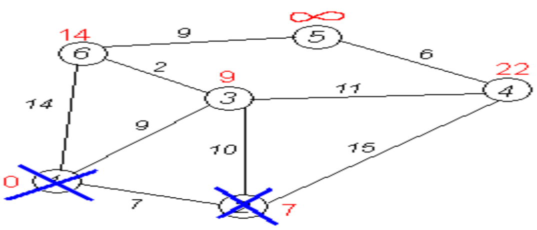
Снова пытаемся уменьшить метки соседей выбранной вершины, пытаясь пройти в них через *2*-ю вершину. Соседями вершины *2* являются вершины *1*, *3* и *4*. Первый по порядку сосед вершины *2* – вершина *1*. Но она уже посещена, поэтому с *1*-й вершиной ничего не делаем. Следующий сосед вершины *2* – вершина *3*, так как имеет минимальную метку из вершин, отмеченных как не посещенные. Если идти в нее через *2*, то длина такого пути будет равна *17 (7 + 10 = 17)*. Но текущая метка третьей вершины равна *9*, а это меньше *17*, поэтому метка не меняется.



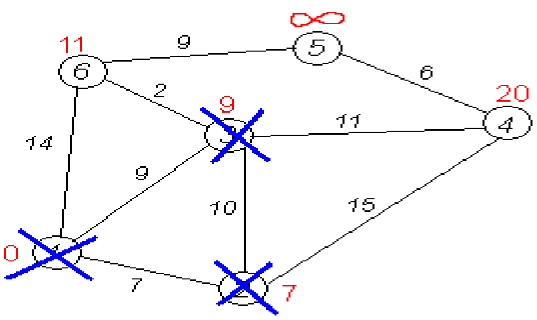
Еще один сосед вершины *2* – вершина *4*. Если идти в нее через *2*-ю, то длина такого пути будет равна сумме кратчайшего расстояния до *2*-й вершины и расстояния между вершинами *2* и *4*, т. е. *22 (7+15=22)*. Поскольку $22<\infty$, устанавливаем метку вершины *4* равной *22*.



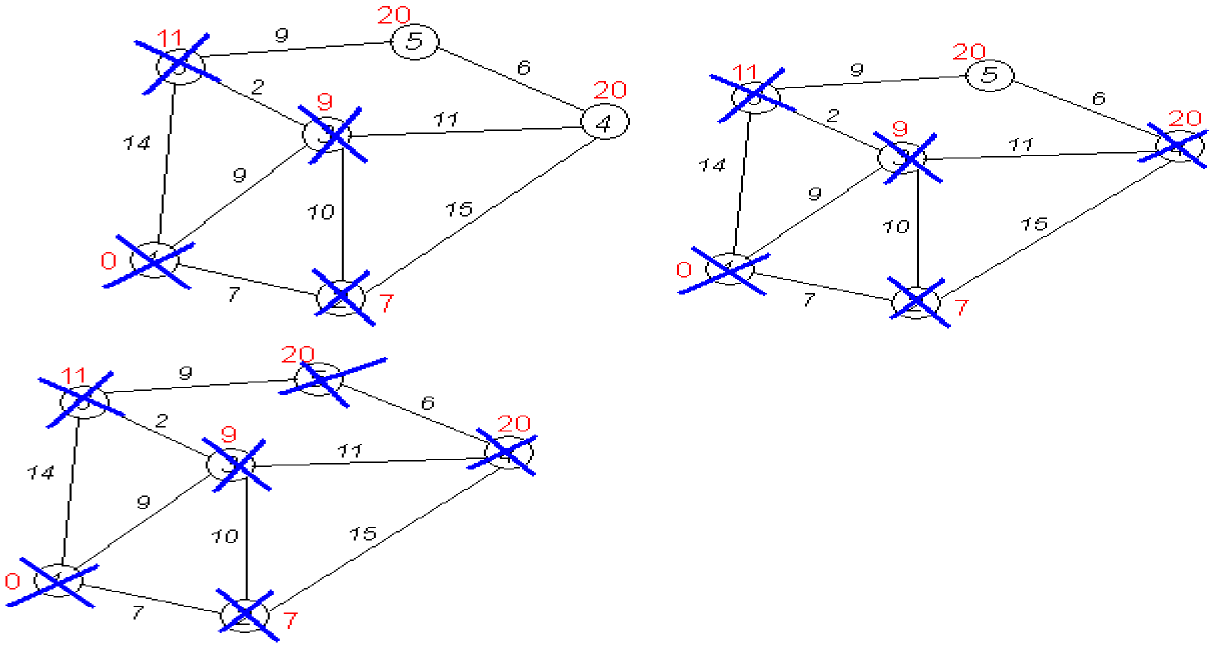
Все соседи вершины *2* просмотрены, замораживаем расстояние до нее и помечаем ее как посещенную.



Шаг 3. Повторяем шаг алгоритма, выбрав вершину *3*. После ее обработки получим такие результаты:



Дальнейшие шаги. Повторяем шаг алгоритма для оставшихся вершин. Это будут вершины *6*, *4* и *5*, соответственно порядку.

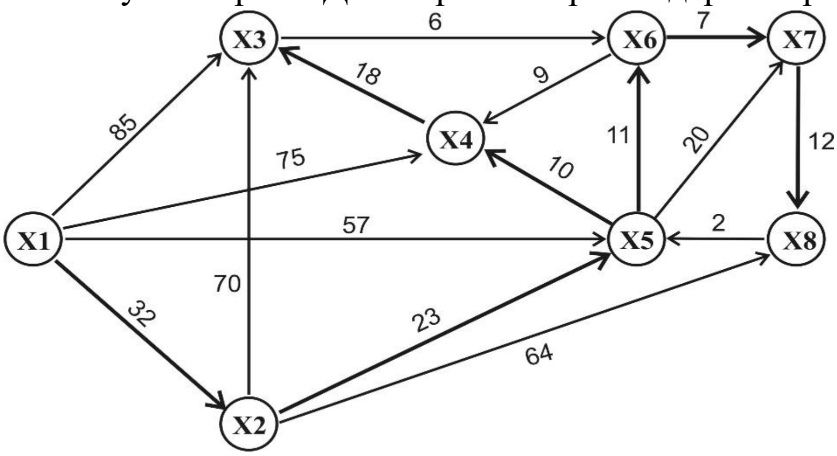


Завершение выполнения алгоритма. Алгоритм заканчивает работу, когда нельзя больше обработать ни одной вершины. В данном примере все вершины зачеркнуты, однако так будет не в любом примере – некоторые вершины могут остаться незачеркнутыми, если до них нельзя добраться, т. е. если граф несвязный. Результат работы алгоритма виден на последнем рисунке: кратчайший путь от вершины 1 до 2-й составляет 7, до 3-й – 9, до 4-й – 20, до 5-й – 20, до 6-й – 11.

6.5. Индивидуальное задание

Вариативность не предполагается.

Найти кратчайшие пути в орграфе от первой вершины ко всем остальным, используя алгоритм Дейкстра. Постройте дерево кратчайших путей.



6.6. Требования к отчету и защите

Показать выполненную в тетради работу. Знать ответы на сформулированные выше вопросы. Защита работы проводится во время занятий. После защиты работа помещается в ЭИОС.

7. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6. ПОСТРОЕНИЕ КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ В ГРАФЕ ПО АЛГОРИТМАМ ПРИМА И КРАСКАЛА

7.1. Общие сведения

Цель: научиться строить минимальные пути в графе, используя алгоритмы Прима и Краскала.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: тетрадь, калькулятор.

Условия допуска к выполнению: показать конспект по теоретической подготовке.

Критерии положительной оценки: Показать выполненную работу, четко ответить на вопросы, увязать последовательность изученных разделов дисциплины.

7.2. Теоретическое введение

Алгоритм Прима – алгоритм построения минимального остовного дерева взвешенного связного неориентированного графа. На вход алгоритма подается связный неориентированный граф. Для каждого ребра задается его вес (стоимость). Сначала берется произвольная вершина и находится ребро, инцидентное данной вершине и обладающее наименьшим весом. Найденное ребро и соединяемые им две вершины образуют дерево. Затем, рассматриваются ребра графа, один конец которых – уже принадлежащая дереву вершина, а другой – нет; из этих ребер выбирается ребро наименьшего веса. Выбираемое на каждом шаге ребро присоединяется к дереву. Рост дерева происходит до тех пор, пока не будут исчерпаны все вершины исходного графа. Результатом работы алгоритма является остовное дерево минимального веса.

Вес остовного дерева равен сумме весов его ребер.

Алгоритм Краскала – алгоритм построения минимального остовного дерева взвешенного связного неориентированного графа. Вначале текущее множество ребер устанавливается пустым. Затем, пока это возможно, проводится следующая операция: из всех ребер, добавление которых к уже имеющемуся множеству не вызовет появление в нем цикла, выбирается ребро минимального веса и добавляется к уже имеющемуся множеству. Когда таких ребер больше нет, алгоритм завершен. Подграф данного графа, содержащий все его вершины и найденное множество ребер, является его остовным деревом минимального веса.

О. Минимальное остовное дерево (МОД) – дерево, вес которого меньше либо равен весу любого другого остовного дерева.

Литература:

Воробейкина, И.В. Математические модели в информационной безопасности: учебное пособие для студентов специальности 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» очной формы обучения / И.В. Воробейкина; БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ». – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2021.

Глава 4. Построение минимального пути в графе.

7.3. Задание к практической работе.

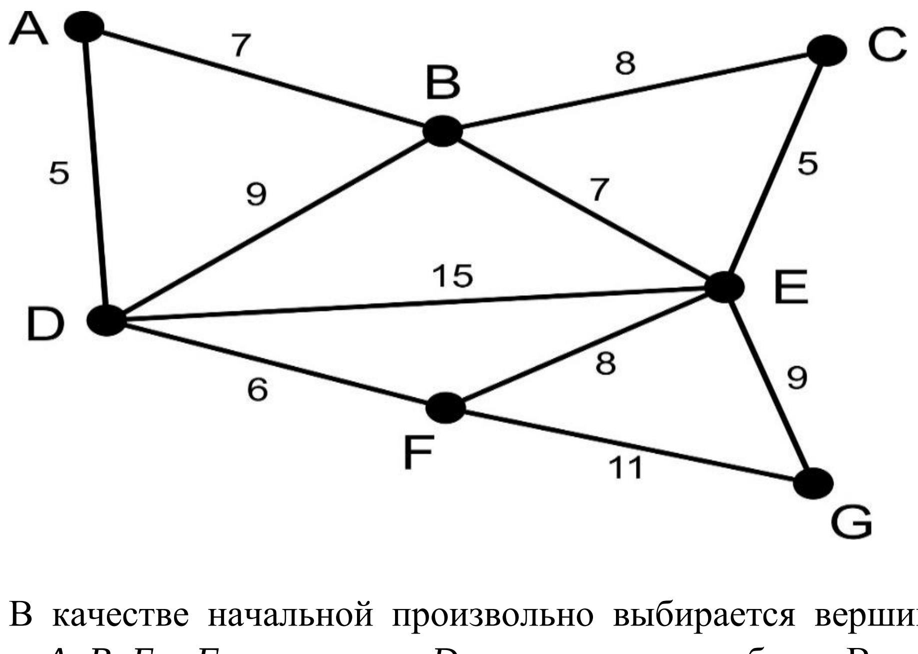
Вопросы, на которые необходимо дать ответ:

1. Сформулируйте алгоритм Прима.
2. Сформулируйте алгоритм Краскала.
3. В чем отличие вышеназванных алгортмов?

7.4. Методические указания и порядок выполнения работы

Построить МОД методом Прима.

Дан взвешенный граф. Числа возле ребер показывают их веса, которые можно рассматривать как расстояния между вершинами.



В качестве начальной произвольно выбирается вершина *D*. Каждая из вершин *A, B, E* и *F* соединена с *D* единственным ребром. Вершина *A* – ближайшая к *D*, и выбирается как вторая вершина вместе с ребром *AD*. ***(D,A)=5,*** *(D,B)=9, (D,E)=15, (D,F)=6.*

Следующая вершина – ближайшая к любой из выбранных вершин *D* или *A*. *B* удалена от *D* на *9* и от *A* – на *7*. Расстояние до *E* равно *15*, а до *F* – *6*. *F* является ближайшей вершиной, поэтому она включается в дерево *F* вместе с ребром *DF*. *(D,B)=9, (D,E)=15,* ***(D,F)=6,*** *(A,B)=7.*

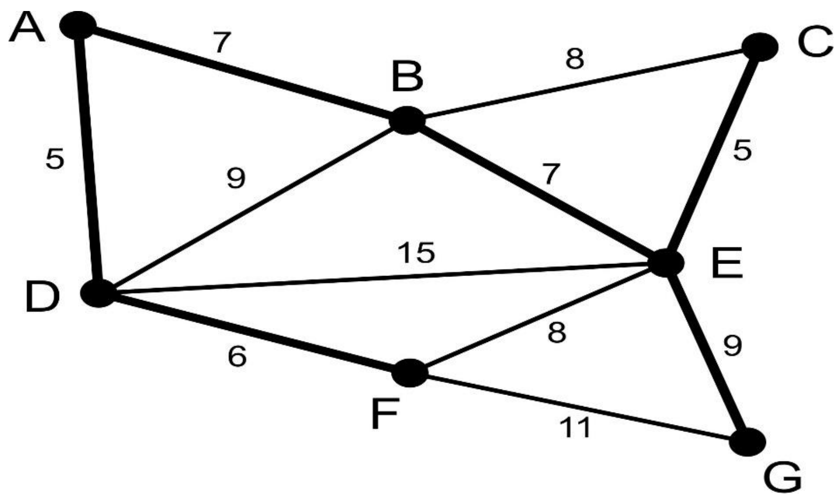
Аналогичным образом выбирается вершина *B*, удаленная от *A* на *7*. *(D,B)=9, (D,E)=15,* ***(A,B)=7****, (F,E)=8, (F,G)=11*.

В этом случае есть возможность выбрать либо *C*, либо *E*, либо *G*. *C* удалена от *B* на *8*, *E* удалена от *B* на *7*, а *G* удалена от *F* на *11*. *E* – ближайшая вершина, поэтому выбирается *E* и ребро *BE*. *(B,C) = 8,* ***(B,E)=7****, (D,B)=9* цикл, *(D,E)=15, (F,E)=8, (F,G)=11*.

Здесь доступны только вершины *C* и *G*. Расстояние от *E* до *C* равно *5*, а до *G* – *9*. Выбирается вершина *C* и ребро *EC*. *(B,C) = 8, (D,B)=9* цикл, *(D,E)=15* цикл, ***(E,C)=5****, (E,G)=9, (F,E)=8* цикл, *(F,G)=11*.

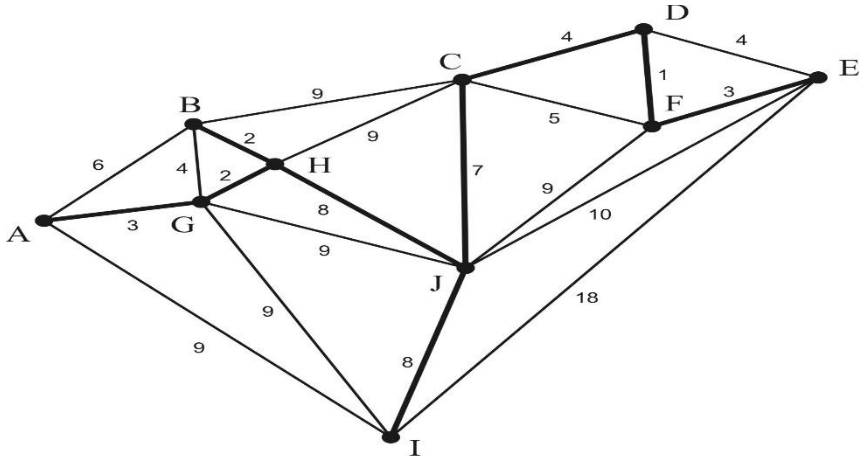
Единственная оставшаяся вершина – *G*. Расстояние от *F* до нее равно *11*, от *E* – *9*. *E* ближе, поэтому выбирается вершина *G* и ребро *EG*. *(B,C)=8* цикл, *(D,B)=9* цикл, *(D,E)=15* цикл, ***(E,G)=9****, (F,E)=8* цикл, *(F,G)=11*.

Выбраны все вершины, минимальное остовное дерево построено (выделено жирным). В этом случае его вес равен *39*. *(B,C)=8* цикл, *(D,B)=9* цикл, *(D,E)=15* цикл, *(F,E)=8* цикл, *(F,G)=11* цикл.



•

Построить МОД методом Краскала:



Составим матрицу расстояний:

Расстояния между вершинами

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*
A	–	*6*	–	–	–	–	*3*	–	*9*	–
B	*6*	–	*9*	–	–	–	*4*	*2*	–	–
C	–	*9*	–	*4*	–	*5*	–	*9*	–	*7*
D	–	–	*4*	–	*4*	*1*	–	–	–	–
E	–	–	–	*4*	–	*3*	–	–	*18*	*10*
F	–	–	*5*	*1*	*3*	–	–	–	–	*9*
G	*3*	*4*	–	–	–	–	–	*2*	*9*	*9*
H	–	*2*	*9*	–	–	–	*2*	–	–	*8*
I	*9*	–	–	–	*18*	–	*9*	–	–	*8*
J	–	–	*7*	–	*10*	*9*	*9*	*8*	*8*	–

1) DF=FD=1;

2) BH=HB=GH=HG=2;

3) AG=GA=FE=EF=3;

4) BG=GB=CD=DC=DE=ED=4, здесь *BG=GB* и *DE=ED* исключаем, так как образовался цикл, оставляем ребро *CD;*

5) CF=FC=5 исключаем, так как образовался цикл;

6) AB=BA=6 исключаем, так как образовался цикл;

7) CJ=JC=7;

8) HJ=JH=IJ=JI=8 включаем оба ребра;

9) AI=IA=BC=CB=CH=HC=FJ=JF=GI=IG=GJ=JG=9 исключаем, т.к. образовался цикл;

10) EJ=JE=10 исключаем, так как образовался цикл;

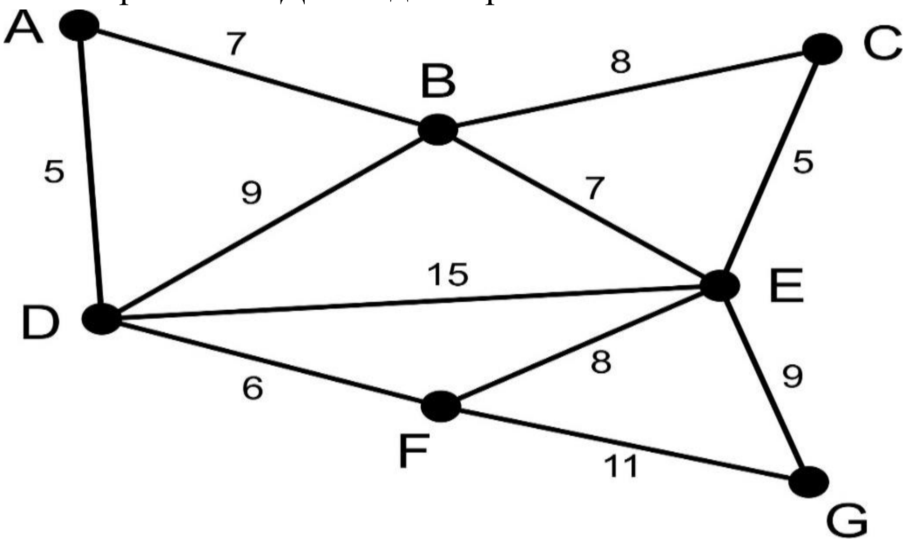
11) EI=IE=18 исключаем, так как образовался цикл.

На рисунке жирным выделено МОД.

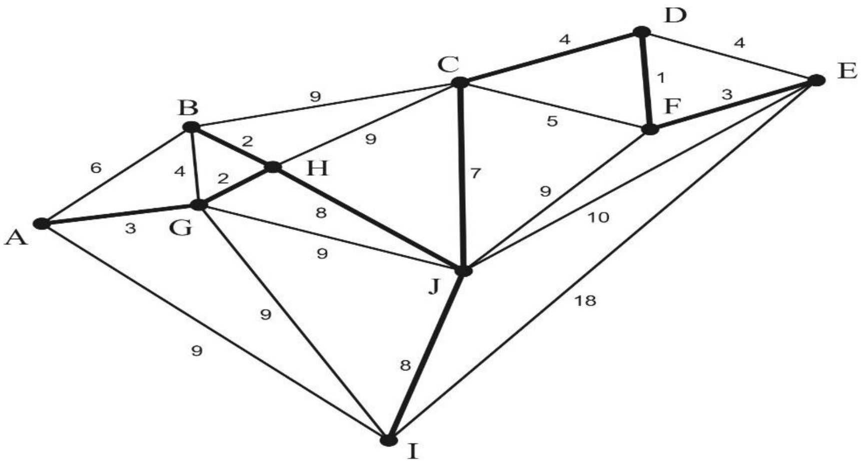
7.5. Индивидуальное задание

Вариативность не предполагается.

1. Построить МОД методом Краскала:



2. Построить МОД методом Прима:



7.6. Требования к отчету и защите

Показать выполненную в тетради работу. Знать ответы на сформулированные выше вопросы. Защита работы проводится во время занятий. После защиты работа помещается в ЭИОС.

8. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7. УСЛОВИЯ ПЛАНАРНОСТИ. ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА О МНОГОГРАННИКАХ (О ПЛАНАРНЫХ ГРАФАХ). КРИТЕРИЙ ПОНТРЯГИНА-КУРАТОВСКОГО

8.1. Общие сведения

Цель: получить представление о планарных графах и их свойствах.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: тетрадь, калькулятор.

Условия допуска к выполнению: показать конспект по теоретической подготовке.

Критерии положительной оценки: Показать выполненную работу, четко ответить на вопросы, увязать последовательность изученных разделов дисциплины.

8.2. Теоретическое введение

Говорят, что граф $G(V, E)$ укладывается на поверхности, если его можно на ней изобразить таким образом, что любое пересечение его ребер является вершиной графа. Если граф укладывается на плоскости, то он называется ***планарным.*** Граф, уложенный на плоскости, называется ***плоским*** графом.

Плоский граф определяет области на плоскости. При этом неограниченная область называется внешней гранью графа, а остальные области – внутренние грани.

Для **плоских** графов справедлива **теорема Эйлера о многогранниках**:

$n+k=m+2$, где n – число вершин графа, k – число граней, m – число ребер.

О. Два графа G' и G'' называются ***гомеоморфными***, если они могут быть получены из некоторого графа с помощью последовательности элементарных стягиваний его ребер.

Классическими примерами непланарных графов являются K_5 (полный граф на 5 вершинах) и $K_{3,3}$ (называемый еще «*домики и колодцы*» – полный двудольный граф, имеющий по 3 вершины в каждой доле). Если граф G содержит подграф, гомеоморфный K_5 или $K_{3,3}$, то он непланарен.

Обычно возникают вопросы:

- граф планарен?
- Как получить планарное изображение графа?

Если граф не планарен, то приходится удалять (переносить на другой слой, на другую плоскость) отдельные ребра.

О. Минимальное число ребер, которое надо удалить для получения плоского изображения, называется **числом планарности графа** и обозначается $\Theta(G)$.

Для полных графов с количеством вершин $n\geq 4$ справедлива формула:

$$\Theta(K_n) = (n-3)(n-4)/2.$$

Из формулы следует, что при $n=4$ $\Theta(K_4)=0$. Для K_5 $\Theta(K_5)=1$, следовательно, чтобы граф K_5 стал плоским, из него надо удалить одно ребро. При перенесении на вторую плоскость, перенесенная часть может опять оказаться не плоской. Тогда отдельные ребра переносят на новую плоскость и т.д.

О. Минимальное число плоскостей, при котором граф разбивается на плоские части, называется **толщиной графа** и обозначается $t(G)$.

Грани плоского графа. У плоского графа кроме вершин и ребер можно выделить еще один геометрический образ – грань.

О. Область плоскости, ограниченная ребрами связного плоского графа и не содержащая внутри себя ни ребер, ни вершин, называется его **гранью**.

Внешняя неограниченная грань называется бесконечной гранью. Например, граф на рис. *б* обладает четырьмя гранями: f_1, f_2, f_3, f_4, где f_4 – бесконечная грань. У графа без циклов ровно одна грань – бесконечная. Не следует думать, что она какая–то исключительная. При укладке графа на сферу эта грань ничем не будет отличаться от других.

Теорема Эйлера. Число граней f в связном плоском графе определяется из соотношения $f=m-n+2$, где n – число вершин, m – число ребер.

Теорема (критерий) Понтрягина – Куратовского. Граф планарен тогда и только тогда, когд*а* он не содержит подграфов, гомеоморфных полному графу из пяти вершин (K_5) или графу «домики и колодцы» $(K_{3,3})$.

Литература:

Воробейкина, И.В. Математические модели в информационной безопасности: учебное пособие для студентов специальности 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» очной формы обучения / И.В. Воробейкина; БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ». – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2021.

Глава 5. Планарные графы.

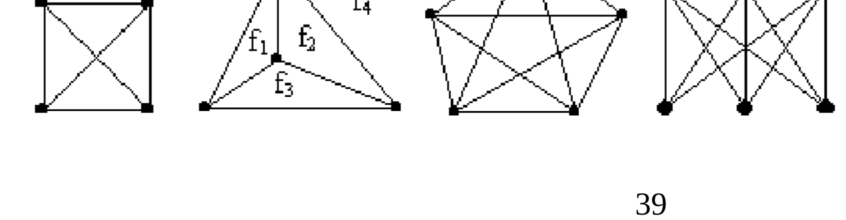
8.3. Задание к практической работе.

Вопросы, на которые необходимо дать ответ:

1. Дайте определение планарных графов.
2. Приведите пример непланарных графов.
3. Запишите условия планарности графов.

8.4. Методические указания и порядок выполнения работы

Ответ на вопрос: граф планарен? – можно получить, если воспользоваться условиями планарности. У связного плоского графа с $n \geq 3$ вершин число ребер m удовлетворяет условию: $m \leq 3n-6$, у связного плоского двудольного графа условие $m \leq 2n-4$



Пример. Полный граф K_4 (рис. а) планарен? В этом графе $n=4$, $m=6$. Подставим эти значения в условие планарности $6\leq 3\cdot 4-6=6$. Условие выполняется. Следовательно, граф планарен. Действительно, граф K_4 можно представить так, как показано на рис. *б*. Из рисунка ясно, что граф K_4 планарен.

Полный граф K_5 (рис. *в*) планарен? В этом графе $n=5$, $m=10$. Подставим эти значения в условие планарности $10\leq 3\cdot 5-6=9$. Условие не выполняется. Следовательно, граф не планарен.

Двудольный полный граф $K_{3,3}$ (рис. *г*) планарен? В этом графе $n=6$, $m=9$. Подставим эти значения в условие планарности $9\leq 2\cdot 6-4=8$. Условие не выполняется. Следовательно, граф не планарен.

8.5. Индивидуальное задание

Вариативность не предполагается.

1. Является ли планарным двудольный граф с двумя вершинами? Полный граф K_6?

2. Является ли планарным граф

G_1: 12 13 14 25 26 27 35 37 36 46 47 45 56 67?

G_2: 12 23 34 48 81 14 82 45 56 67 87 46?

8.6. Требования к отчету и защите

Показать выполненную в тетради работу. Знать ответы на сформулированные выше вопросы. Защита работы проводится во время занятий. После защиты работа помещается в ЭИОС.

9. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ПЛОСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ ГРАФА

9.1. Общие сведения

Цель: научиться строить плоские графы.

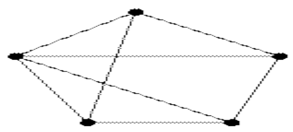
Материалы, оборудование, программное обеспечение: тетрадь, калькулятор.

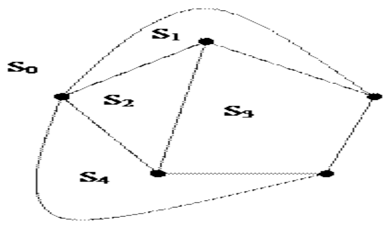
Условия допуска к выполнению: показать конспект по теоретической подготовке.

Критерии положительной оценки: показать выполненную работу, четко ответить на вопросы, увязать последовательность изученных разделов дисциплины.

9.2. Теоретическое введение

Граф $G(V, X)$ укладывается на плоскости, если его можно на ней изобразить таким образом, что его ребра пересекаются только в вершинах графа. На рисунке представлен планарный граф и соответствующий ему плоский граф с гранями S_0, S_1, S_2, S_3, S_4:





Для плоских графов справедлива формула Эйлера: $n+k = m+2$, где n – число вершин графа, k – число граней, m – число ребер.

Для представленного графа: число вершин равно 5, число ребер – 8, число граней – 5. Проверим формулу Эйлера: $5+5=8–2$ – равенство верно.

Ответ на вопрос: как получить плоское изображение графа? – дает алгоритм, рассмотренный ниже.

Пусть задана часть $G_1 = (V_1, E_1)$ графа $G = (V, E)$. Будем называть куском графа G относительно G_1:

1. ребро $e \not\in E_1$ вместе с его концами, которые принадлежат V_1, ;

2. а также компоненту связности $G'_i = (V'_i, E'_i)$ подграфа, порожденного подмножеством вершин $V \backslash V_1$, дополненную всеми ребрами, инцидентными вершинам из V'_i, и всеми вершинами этих ребер, принадлежащими V_1, которые называются «контактными точками».

Алгоритм использует последовательный процесс присоединения к некоторому плоскому подграфу G_i^p цепи μ_i, оба конца которой (и только они) – вершины G_i^p. Эта цепь разобьет одну из граней G_i^p на две. В качестве начального плоского графа G_1^p выбирают некоторый цикл графа G. Чтобы перейти от подграфа G_i^p к G_{i+1}^p, предварительно рассматривают все куски P_j графа G относительно G_i^p.

Грань f_k графа G_i^p и кусок P_j **совместимы**, если все его контактные точки принадлежат множеству вершин этой грани. Для каждого куска определяем грани, которые с ним совместимы. Возможны три случая:

1. Некоторый кусок не совместим ни с какой гранью графа G_i^p. Тогда граф не плоский.

2. Какой-либо кусок совместим с единственной гранью f_k графа G_i^p. Тогда выберем в этом куске цепь μ_i такую, что оба ее конца (и только они) принадлежат G_i^p. Дополняя G_i^p ребрами и вершинами этой цепи, получаем G_{i+1}^p, проводя μ_i внутри грани f_k.

3. Если каждый из кусков P_j совместим, по крайней мере, с двумя гранями графа G_i^p, то можно выбрать цепь μ_i в любом из кусков и действовать как в случае 2.

Литература:

Воробейкина, И.В. Математические модели в информационной безопасности: учебное пособие для студентов специальности 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» очной формы обучения / И.В. Воробейкина; БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ». – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2021.

Глава 5. Планарные графы. 5.3. Алгоритм построения плоского изображения графа.

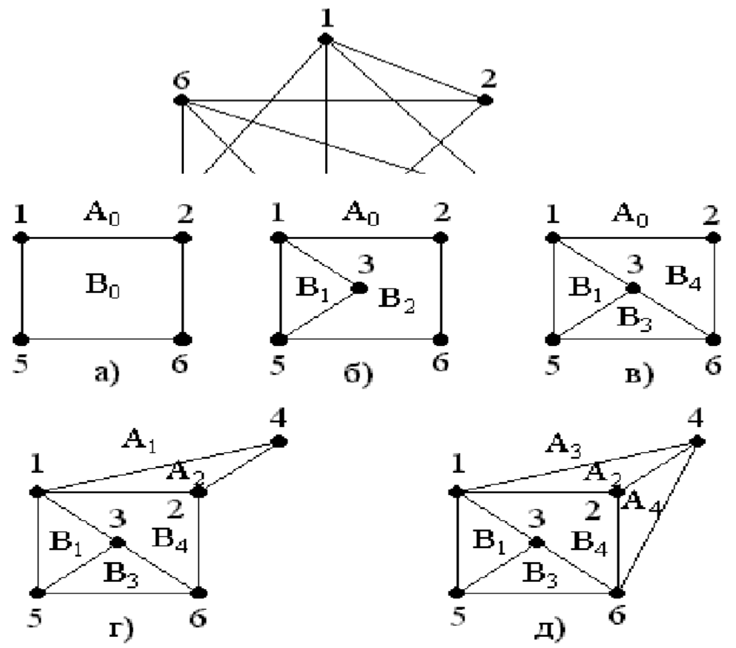
9.3. Задание к практической работе.

Вопросы, на которые необходимо дать ответ:

1. Что такое «контактные точки»?
2. Что означает совместимость грани и куска графа?
3. Если некоторый кусок не совместим ни с какой гранью графа, значит ли это, что граф плоский?

9.4. Методические указания и порядок выполнения работы

Пример. Проиллюстрируем алгоритм построения плоского графа.



Шаг 1. Берем произвольный цикл, например $u_0 = (1, 2, 6, 5, 1)$, представляющий плоский граф G_1^p (рис. а). Грани G_1^p : A_0 – внешняя грань *(1,2, 6, 5, 1)*, B_0 – внутренняя грань *(1,2,6,5,1)*. Куски графа G относительно G_1^p :

Куски	Вершины куска	Контактные точки	Совместимые грани
P_1	*{1, 3, 5, 6}*	*{1, 5, 6}*	A_0 и B_0
P_2	*{1,2, 4, 6}*	*{1,2, 6}*	A_0 и B_0

Шаг 2. Определяем G_2^p . Все куски совместимы с двумя гранями (случай 3). Выбираем, например, цепь *(1,3, 5)* из куска P_1 и проводим ее в грани B_0. Эта грань в G_2^p заменяется двумя гранями: B_1 – внутренней к *(1,3, 5, 1)* и B_2 – внутренней к *(1, 2, 6, 5, 3, 1)* (рис. б). Куски G относительно G_2^p :

Куски	Вершины кусков	Контактные точки	Совместимые грани
$P_1^{'}$	*{3, 6}*	*{3, 6}*	B_2
$P_2^{'}$	*{1, 2, 4, 6}*	*{1,2, 6}*	A_0 и B_2

Шаг 3. Определяем G_3^p . Кусок P_1 совместим лишь с одной гранью B_2 (случай 2). Цепь *(3, 6)* должна быть помещена в грань B_2, которую она разобьет на две грани: B_3 – внутреннюю к *(3, 5, 6, 3)* и B_4 – внутреннюю к *(1, 2, 6, 3, 1)* (рис. в). Куски G относительно G_3^p :

Кусок	Вершины куска	Контактные точки	Совместимые грани
$P_1^{''}$	{1,2, 4, 6}	*{1,2, 6}*	A_0 и B_4

Шаг 4. Определяем G_4^p . Кусок $P_1^{''}$ совместим с двумя гранями A_0 и B_4 (случай 3). Возьмем, например, цепь *(1, 4, 2)* и поместим ее в грань A_0. Получаем две новые грани: A_1 – внешнюю к *(1, 4, 2, 6, 5, 1)* и A_2 – внутреннюю к *(1, 4, 2, 1)* (рис. г). Куски G относительно G_4^p :

Кусок	Вершины куска	Контактные точки	Совместимые грани
$P_1^{'''}$	{4, 6}	{4, 6}	A_1

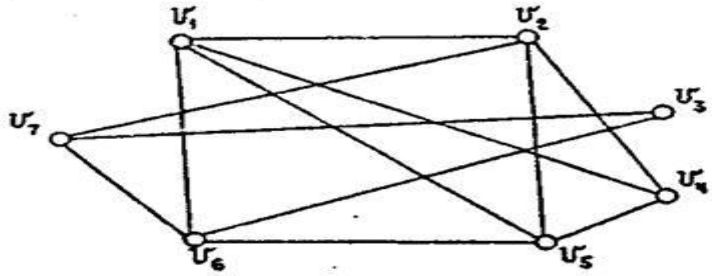
Шаг 5. Определяем G_5^p . Кусок $P_1^{'''}$ совместим с одной гранью A_1 (случай 2). Помещаем единственную цепь *(4, 6)* в A_1 и получаем новые грани: A_3 – внешнюю к *(1,4, 6, 5, 1)* и A_4 –внутреннюю к *(2, 4, 6, 2)* (рис. д).

Таким образом, получаем плоское изображение графа.

9.5. Индивидуальное задание

Вариативность не предполагается.

Получить плоское изображение графа:



9.6. Требования к отчету и защите

Показать выполненную в тетради работу. Знать ответы на сформулированные выше вопросы. Защита работы проводится во время занятий. После защиты работа помещается в ЭИОС.

10. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9. ХРОМАТИЧЕСКОЕ ЧИСЛО И ХРОМАТИЧЕСКИЙ ИНДЕКС ГРАФА. РАСКРАСКИ ПЛОСКИХ ГРАФОВ. ХРОМАТИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ, ИХ СВОЙСТВА

10.1. Общие сведения

Цель: получить представление о раскраске графов, хроматическом числе и хроматическом индексе. Научиться строить хроматические полиномы и пользоваться ими.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: тетрадь, калькулятор.

Условия допуска к выполнению: показать конспект по теоретической подготовке.

Критерии положительной оценки: показать выполненную работу, четко ответить на вопросы, увязать последовательность изученных разделов дисциплины.

10.2. Теоретическое введение

О. *Раскраской вершин* графа называется назначение цветов его вершинам. Раскраска называется *правильной*, если любые две смежные вершины имеют разные цвета.

Когда говорят о раскраске графов, почти всегда подразумевают под этим раскраску их вершин, то есть присвоение цветовых меток вершинам графа так, чтобы любые две вершины, имеющие общее ребро, имели разные цвета.

Такие метки как *красный* или *синий* используются, только когда число цветов мало, обычно же подразумевается, что метки являются целыми числами 1,2,3,…

Раскраска с использованием k цветов называется **k-раскраской**. Наименьшее число цветов, необходимое для раскраски графа, называется его *хроматическим числом* и часто записывается как $\chi(G)$. Иногда используется $\gamma(G)$, с тех пор как χ обозначает Эйлерову характеристику. Подмножество вершин, выделенных одним цветом, называется *цветовым классом*, каждый такой класс формирует независимый набор. Таким образом, k-раскраска – это то же самое, что и разделение вершин на k независимых наборов

Реберная раскраска – назначение «цветов» ребрам графа таким образом, что никакие два смежных ребра не имеют один и тот же цвет. **Задача реберной раскраски** задается вопросом, можно ли раскрасить ребра заданного графа максимум в k различных цветов для заданного значения k или для минимального возможного числа цветов. Минимальное требуемое число цветов для раскраски ребер заданного графа называется *хроматическим индексом* графа.

По **теореме Визинга** число цветов, необходимых для реберной раскраски простого графа, либо равно максимальной степени вершин Δ, либо $\Delta+1$. Для некоторых графов, таких как двудольные графы и планарные графы высокой степени, число цветов всегда равно Δ, а для мультиграфов число цветов может быть вплоть до $3\Delta/2$.

Граф-цикл может быть раскрашен в 2 цвета если длина цикла четна – просто используем поочередно 2 цвета последовательно проходя ребра цикла. Однако в случае нечетной длины потребуется 3 цвета. Ребра полного графа K_n с n вершинами могут быть раскрашены $n–1$ цветами, если n четно. Если n нечетно, требуется n цветов.

Для хроматического числа имеются оценки:

Теорема. Для любого неполного графа G хроматическое число $\chi(G)\leq \Delta(G)$, если $\Delta(G)\geq 3$ – максимальная из степеней вершин графа.

Для определения количества способов раскраски графа в x цветов можно составить *хроматический полином* $P(G,x)$.

Значение полинома при некотором $x=x_0$ равно числу правильных раскрасок графа в x_0 цветов.

Лемма. Хроматический полином графа имеет вид

$$P(G, x) = P(G_1, x) + P(G_2, x),$$

где G_1 – граф, полученный из G добавлением нового ребра (u, v), а граф G_2 получается из G отождествлением вершин u и v.

Другой вариант леммы:

$$P(G, x) = P(G_1, x) - P(G_2, x),$$

где G_1 – граф, полученный из G удалением ребра (u, v), а граф G_2 получается из G отождествлением вершин u и v.

Оба варианта леммы составляют основу для *хроматической редукции* графа. Хроматическая редукция графа – представление графа в виде нескольких пустых или полных графов, сумма хроматических полиномов которых равна хроматическому полиному графа. Мы знаем, что хроматический полином пустого графа O_n равен x^n (каждая вершина может быть раскрашена независимо от других), а для полного графа

$$P(K_n, x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1).$$

При получении хроматического полинома полезны следующие теоремы:

Теорема 1. Коэффициенты хроматического полинома составляют знакопеременную последовательность.

Теорема 2. Абсолютная величина второго коэффициента хроматического полинома равна числу ребер графа.

Теорема 3. Наименьшее число i, для которого отличен от нуля коэффициент при x^i в хроматическом полиноме графа G, равно числу компонент связности графа G.

Важно! Здесь операция сложения или вычитания относится не к самому графу, а к его хроматическому полиному.

Литература:

Воробейкина, И.В. Математические модели в информационной безопасности: учебное пособие для студентов специальности 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» очной формы обучения / И.В. Воробейкина; БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ». – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2021.

Глава 6. Раскраски графов.

.

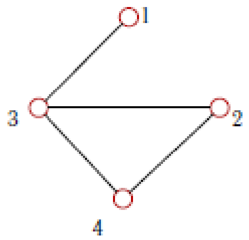
10.3. Задание к практической работе.

Вопросы, на которые необходимо дать ответ:

1. Дайте определение реберной и вершинной раскраски графа.
2. Что такое хроматический индекс графа?
3. Сформулируйте леммы построения хроматического полинома графа.
4. Каков критерий выбора леммы при построении графа?
5. Будут ли совпадать хроматические многочлены конкретного графа, если их построить по обеим леммам?

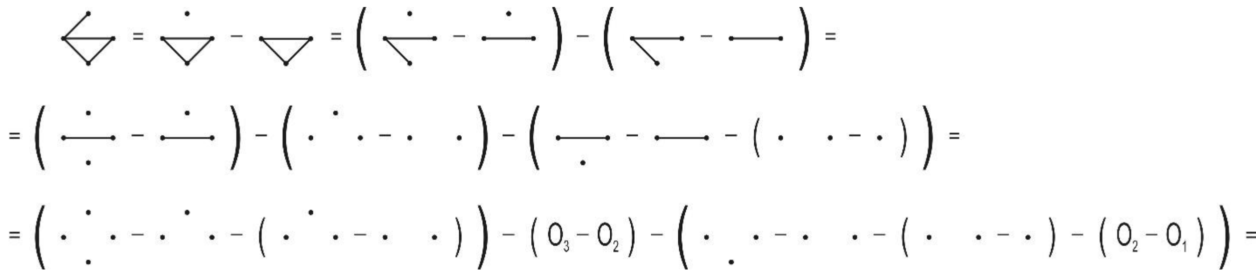
10.4. Методические указания и порядок выполнения работы

Найти хроматический полином графа:

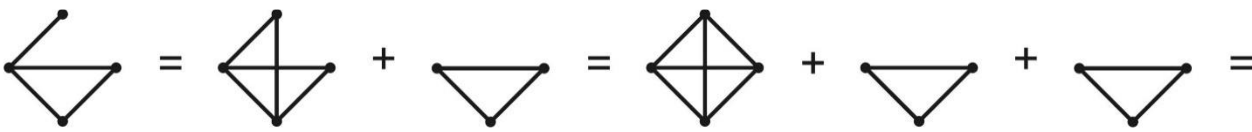


Решение. В зависимости от числа ребер графа можно использовать один из вариантов леммы хроматической редукции. Если граф почти полный, то, добавив несколько ребер, по первому варианту получим хроматический полином в виде суммы факториальных степеней. Если же ребер мало, и для получения пустого графа требуется удалить только несколько ребер, то следует использовать второй вариант с удалением ребер.

1. *Хроматическая редукция по пустым графам*. Воспользуемся вторым вариантом леммы. Удаляя ребра и отождествляя соответствующие вершины, приведем исходный граф к пустым графам. Сначала разложим граф на два, убрав и стянув ребро *1-3,* далее будем раскладывать <u>каждый</u> из графов до получения пустых графов с помощью той же леммы:

- 
- $=O_4 - O_3 - O_3 + O_2 - O_3 + O_2 - O_3 + O_2 + O_2 - O_1 + O_2 - O_1 =$
- $=O_4 - 4O_3 + 5O_2 - O_1 = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$
- Результат соответствует утверждению теорем 1 – 3: коэффициенты образуют знакопеременную последовательность, коэффициент при x^3 равен 4 – числу ребер, наименьшая степень x равна *1*, т.е. числу компонент связности графа.

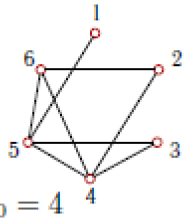
2. *Хроматическая редукция по полным графам*. Воспользуемся первым вариантом леммы. Добавив к графу ребро *1-4* и отождествив вершины *1* и *4*, далее будем раскладывать <u>каждый</u> из графов до получения полных графов с помощью той же леммы:

- 
- $=K_4 + 2K_3 = x(x-1)(x-2)(x-3) + 2x(x-1)(x-2) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$

10.5. Индивидуальное задание

Вариативность не предполагается.

Найти хроматический полином графа *G:*



$x_0 = 4$

10.6. Требования к отчету и защите

Показать выполненную в тетради работу. Знать ответы на сформулированные выше вопросы. Защита работы проводится во время занятий. После защиты работа помещается в ЭИОС.

11. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 10. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ КОНДЕНСАЦИИ. БАЗА ОРГРАФА

11.1. Общие сведения

Цель: научиться строить конденсацию и базы графов.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: тетрадь, калькулятор.

Условия допуска к выполнению: показать конспект по теоретической подготовке.

Критерии положительной оценки: Показать выполненную работу, четко ответить на вопросы, увязать последовательность изученных разделов дисциплины.

11.2. Теоретическое введение

О. Конденсация орграфа G – орграф G^*, вершины $S_1, S_2, \dots, S_m$ которого соответствуют сильным компонентам орграфа G, и дуга (S_i,S_j) принадлежит орграфу G^* тогда и только тогда, когда в G существует дуга, начало которой находится в сильной компоненте S_i, конец – в S_j.

Конденсация G^* любого орграфа не имеет контуров.

Алгоритм построения конденсации.

1. Построим матрицу достижимости орграфа $G = (V, A)$:

$R=||r_{ij}||,\ i,j=1,\dots,p$

2. Построить матрицу контрдостижимости орграфа G:

$R=||r_{ij}||,\ i,j=1,\dots,p,\ Q=R^T$

3. Найдем матрицу взаимной достижимости, где "$\otimes$" – оператор поэлементного умножения матриц:

$S=R\otimes Q=R\otimes R^T,\ s_{ij}=r_{ij}\times q_{ij},\ i,j=1,\dots p.$

4. Выберем некоторую вершину $v_i \in V$, тогда сильная компонента орграфа, содержащая вершину v_i, определяется единичными элементами i-той строки матрицы S. Иначе: перестановкой строк и столбцов можно привести матрицу S

к блочно-диагональному виду, где каждый блок (подматрица) единиц будет соответствовать некоторой сильной компоненте орграфа G.

О. База орграфа $\boldsymbol{G}$ – наименьшее (относительно включения) подмножество вершин B, удовлетворяющее условию: любая вершина $v \in V/B$ достижима из какой-либо вершины $u \in B$.

Базовая компонента – сильная компонента орграфа G, в которую не входит ни одна дуга из других сильных компонент.

В конденсации G^* таким компонентам соответствуют вершины с нулевыми полустепенями захода.

База определяется не единственным образом, исключая ациклический или бесконтурный граф.

Вершины − полустепени захода, которые равны *0*, принадлежат базе.

Алгоритм нахождения базы.

1. Построить конденсацию G^*.
2. Выделить в конденсации вершины с нулевыми полустепенями захода. Такие вершины будут определять базовые компоненты.
3. Из каждой базовой компоненты выбирается по одной вершине, таким образом, база орграфа может быть определена не единственным образом.

Литература:

Воробейкина, И.В. Математические модели в информационной безопасности: учебное пособие для студентов специальности 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» очной формы обучения / И.В. Воробейкина; БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ». – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2021.

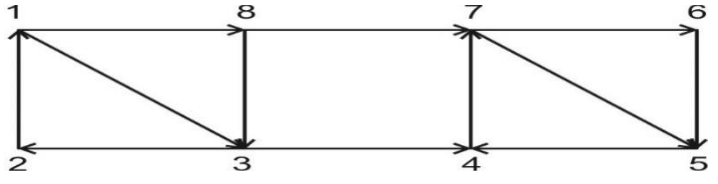
Глава 8. База и ядро орграфа. Конденсация орграфа.

11.3. Задание к практической работе.

Вопросы, на которые необходимо дать ответ:
1. Дайте определения конденсации и базы.
2. Опишите алгоритмы построения конденсации и базы.
3. В каких графах база определяется не единственным образом?

11.4. Методические указания и порядок выполнения работы

Найти базу графа.



Сначала строим конденсацию G^*.

Строим матрицу достижимости R: $\begin{cases} 1, & j \to i \\ 0, & else \end{cases}$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*
2	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*
3	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*
4	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
5	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
6	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
7	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
8	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*

Строим матрицу контрдостижимости Q: $\begin{cases} 1, & i \to j \\ 0, & else \end{cases}$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
2	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
3	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
4	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*
5	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*
6	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*
7	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*
8	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*

Строим матрицу взаимной достижимости $S=R\otimes Q$:

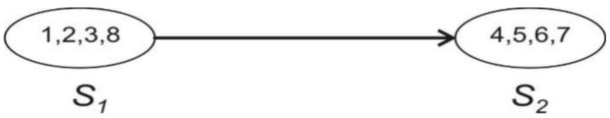
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*
2	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*
3	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*
4	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*
5	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*
6	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*
7	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*
8	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*

Перестановкой строк и столбцов приводим матрицу S к блочно-диагональному виду, где каждый блок (подматрица) единиц будет соответствовать некоторой сильной компоненте орграфа G (перестановка делается исключительно для наглядности):

	1	2	3	8	4	5	6	7
1	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*
2	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*
3	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*
8	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*
4	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*
5	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*
6	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*
7	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*

Сильные компоненты орграфа G: $S_1=\{1,2,3,8\}$, $S_2=\{4,5,6,7\}$. Получили орграф G^* с вершинами S_1 и S_2 – конденсацию орграфа G.

Теперь ищем в исходном орграфе G дугу, начало которой находится в S_1, а конец – в S_2. Нашли дуги *(3,4)* и *(8,7)*. Следовательно, $S_1 \rightarrow S_2$:

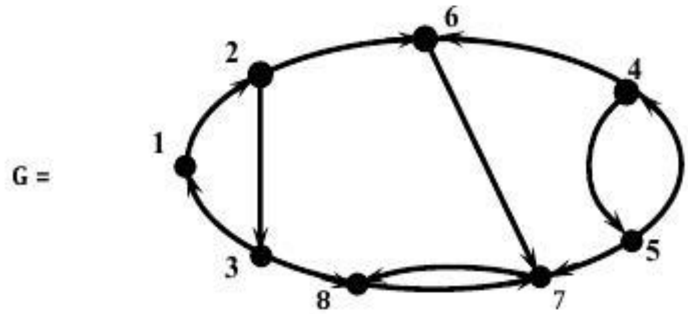


Для определения базы выделяем в конденсации G^* (а не в исходном графе!) вершины с нулевыми полустепенями захода. **Такие вершины будут определять базовые компоненты**. Здесь S_1 – вершина (роль вершины выполняет не точка, а множество *{1,2,3,8}*) с нулевыми полустепенями захода. Следовательно, S_1 – базовая компонента. Теперь из базовой компоненты выбираем по одной вершине. Здесь базы – *{1}, {2}, {3}, {8}*.

11.5. Индивидуальное задание

Вариативность не предполагается.

Задан орграф G. Найти базу.



11.6. Требования к отчету и защите

Показать выполненную в тетради работу. Знать ответы на сформулированные выше вопросы. Защита работы проводится во время занятий. После защиты работа помещается в ЭИОС.

12. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 11. АНТИБАЗА ОРГРАФА. ЯДРО ГРАФА

12.1. Общие сведения

Цель: научиться строить антибазы графов.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: тетрадь, калькулятор.

Условия допуска к выполнению: показать конспект по теоретической подготовке.

Критерии положительной оценки: показать выполненную работу, четко ответить на вопросы, увязать последовательность изученных разделов дисциплины.

12.2. Теоретическое введение

Антибаза орграфа *П* – наименьшее (относительно включения) подмножество вершин *B'*, удовлетворяющее условию: любая вершина $v \in V$, достижима из какой-либо вершины $u \in V/B'$.

Алгоритм построения антибазы.

1. Построить конденсацию G^*.
2. Выделить в конденсации вершины с нулевыми полустепенями исхода.
3. Из каждой компоненты, соответствующей такой вершине, выбирается по одной вершине.

О. Множество вершин графа называется ***независимым*** (или *внутренне устойчивым*), если никакие две вершины из этого множества не являются смежными.

О. Множество внешней устойчивости – такое множество вершин графа, что:

1) либо вершины принадлежат этому множеству.

2) либо они имеют дуги в этом множестве.

Другими словами, внутренняя устойчивость – между вершинами ядра нет ребер. Внешняя устойчивость – нет ребер, ведущих из «неядра» в «ядро».

О. Независимое множество называется **максимальным**, если оно не является собственным подмножеством некоторого другого независимого множества.

О. Доминирующее множество вершин S графа $G = (V, A)$ – подмножество вершин такое, что для любой вершины $w \in V \backslash S$ существует такая вершина $v \in S$, что $(v,w) \in A$.

О. Ядро графа – множество вершин, которое одновременно является доминирующим и независимым множеством.

Независимым (необязательно наибольшим) множество является тогда и только тогда, когда оно доминирующее. Таким образом, ядра графа – это максимальные независимые множества вершин.

Литература:

Воробейкина, И.В. Математические модели в информационной безопасности: учебное пособие для студентов специальности 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» очной формы обучения / И.В. Воробейкина; БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ». – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2021.

Глава 8. База и ядро орграфа. Конденсация орграфа.

12.3. Задание к практической работе.

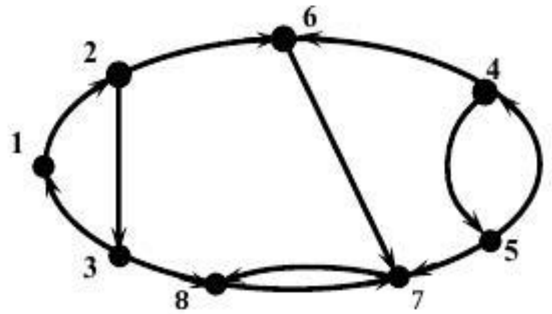
Вопросы, на которые необходимо дать ответ:

1. Опишите алгоритм построения антибазы.
2. Как найти ядро орграфа?

12.4. Методические указания и порядок выполнения работы

Задан орграф G. Найти базу и антибазу.

G =



Построим конденсацию G^*.

Строим матрицу достижимости R: $\begin{cases} 1, & j \to i \\ 0, & else \end{cases}$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*
2	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*

3	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*
4	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
5	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
6	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*
7	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*
8	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*

Строим матрицу контрдостижимости Q: $\begin{cases} 1, & i \to j \\ 0, & else \end{cases}$

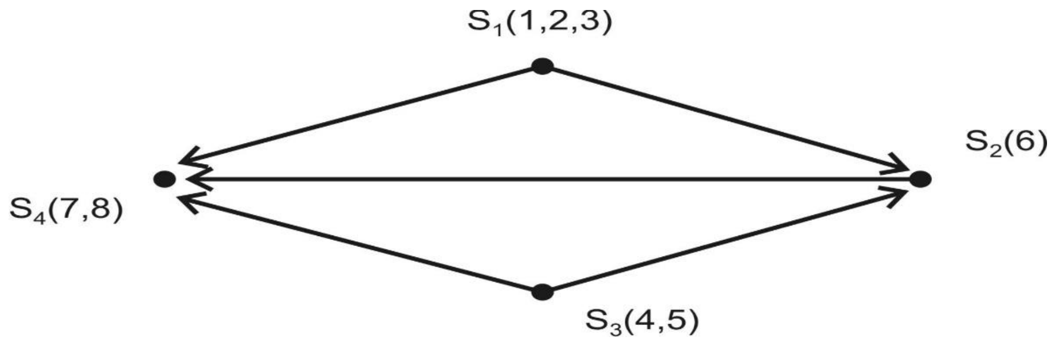
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
2	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
3	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
4	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*
5	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*
6	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*
7	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
8	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*

Строим матрицу взаимной достижимости $S=R\otimes Q$:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
2	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
3	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
4	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*
5	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*
6	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*
7	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*
8	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*

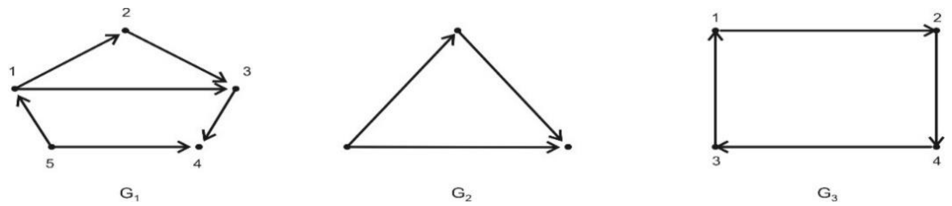
Сильные компоненты орграфа G: $S_1=\{1,2,3\}$, $S_2=\{6\}$, $S_3=\{4,5\}$, $S_4=\{7,8\}$.

Конденсация G^* орграфа G:



Для определения базы выделим в конденсации вершины с нулевыми полустепенями захода. Базовые компоненты S_1 и S_3. Базы орграфа *G: {1,4}; {1,5}; {2,4}; {2,5}; {3,4}; {3,5}.*

Для антибазы: выделим в конденсации вершины с нулевыми полустепенями исхода. Антибазовая компонента S_4. Антибаза орграфа *G: {7}; {8}.*



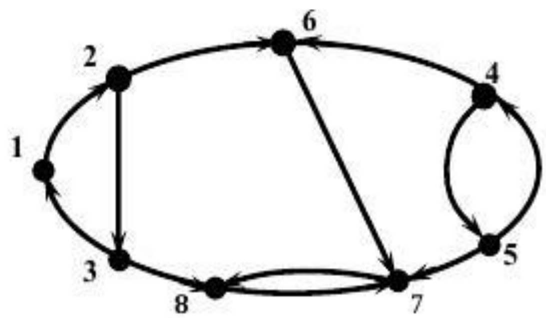
В орграфе G_1 множество вершин *{2,5}* – ядро; в орграфе G_2 ядра не существует; в орграфе G_3 два ядра: *{1,4}* и *{2,3}*.

12.5. Индивидуальное задание

Вариативность не предполагается.

Задан орграф G. Найти антибазу.

G =



12.6. Требования к отчету и защите

Показать выполненную в тетради работу. Знать ответы на сформулированные выше вопросы. Защита работы проводится во время занятий. После защиты работа помещается в ЭИОС.

13. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 12. РАБОТЫ И СОБЫТИЯ. ФИКТИВНАЯ РАБОТА

13.1. Общие сведения

Цель: изучить задачи, связанные с сетевыми графиками.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: тетрадь, калькулятор.

Условия допуска к выполнению: показать конспект по теоретической подготовке.

Критерии положительной оценки: показать выполненную работу, четко ответить на вопросы, увязать последовательность изученных разделов дисциплины.

13.2. Теоретическое введение

Основными элементами сетевой модели являются *работы* и *события*. Под работой понимается процесс, требующий для своего осуществления затрат определенного времени и ресурсов (материалов, оборудования, исполнителей, финансов, энергии и т. п.). Частным видом работы является *ожидание* – процесс, входящий необходимым элементом в технологию производства, длящийся определенное время и не требующий иных затрат в виде труда или каких-либо ресурсов (например, остывание металла после плавки, просушка после покраски, старение металла, твердение бетона и т. п.).

Особым видом работ являются *фиктивные работы*. Они обозначают логическую связь между работами или группами работ и не требуют затрат ни времени, ни труда, ни материальных ресурсов, продолжительность фиктивной работы считается равной нулю. Фиктивная работа указывает на то, что какая-то работа или группа работ может начаться лишь после того, как завершится какая-то другая (предшествующая) работа или группа работ. Фиктивная работа используется тогда, когда надо отделить друг от друга разные по смысловому содержанию события (окончание и начало работ), которые могут произойти одновременно.

Под событием понимается момент, отражающий определенный этап выполнения проекта, это момент завершения отдельной работы или группы работ и возможность начать новую работу или группу работ. Событие не имеет продолжительности во времени, считается, что событие свершается мгновенно. Среди событий сетевого графика выделяют *исходное* (*начальное*) событие, обозначающее начало работ (начало осуществления проекта) и *завершающее* (*конечное*) событие, которое означает окончание всех работ рассматриваемого комплекса (завершение проекта).

События на сетевом графике изображаются кружочками (вершинами графа), а работы – стрелками (дугами ориентированного графа), при этом фиктивные работы принято изображать пунктирными стрелками.

При построении сетевого графика необходимо соблюдать следующие правила:

1) в сетевом графике должно быть одно исходное (начальное) событие и одно завершающее (конечное) событие. В нем не должно быть других событий (кроме исходного), которым не предшествует хотя бы одна работа; в нем не должно быть также других событий (кроме завершающего), за которыми не следует непосредственно хотя бы одна работа, т. е. не должно быть так называемых «хвостов» и «тупиков»;

2) любые два события сетевого графика должны быть соединены не более чем одной работой (стрелкой); в случае необходимости вводятся фиктивные работы;

3) в сетевом графике не должно быть циклов и петель.

Исходным материалом для сетевого планирования служит список работ с указанием их взаимной последовательности, обусловленности возможного начала одних работ завершением других (опорой одних работ на другие) и продолжительностью выполнения каждой работы.

Литература:

Воробейкина, И.В. Математические модели в информационной безопасности: учебное пособие для студентов специальности 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» очной формы обучения / И.В. Воробейкина; БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ». – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2021.

Глава 9. Задачи, связанные с сетевыми графиками. Критические работы.

13.3. Задание к практической работе.

Вопросы, на которые необходимо дать ответ:

1. Что такое фиктивная работа?
2. Опишите построение сетевого графика.

13.4. Методические указания и порядок выполнения работы

Построить сетевой график

Исходные данные.

Работа	Продолжитель-	Опирается на
b_1	5	–
b_2	8	–
b_3	3	–

b_4	6	b_1
b_5	4	b_1
b_6	1	b_3
b_7	2	b_2, b_5, b_6
b_8	6	b_2, b_5, b_6
b_9	3	b_4, $b7$
b_{10}	9	b_3
b_{11}	7	b_2, b_5, b_6, b_{10}

Или в компактной записи:

$b_1(5) \to b_4(6), b_5(4);$

$b_3(3) \to b_6(1), b_{10}(9);$

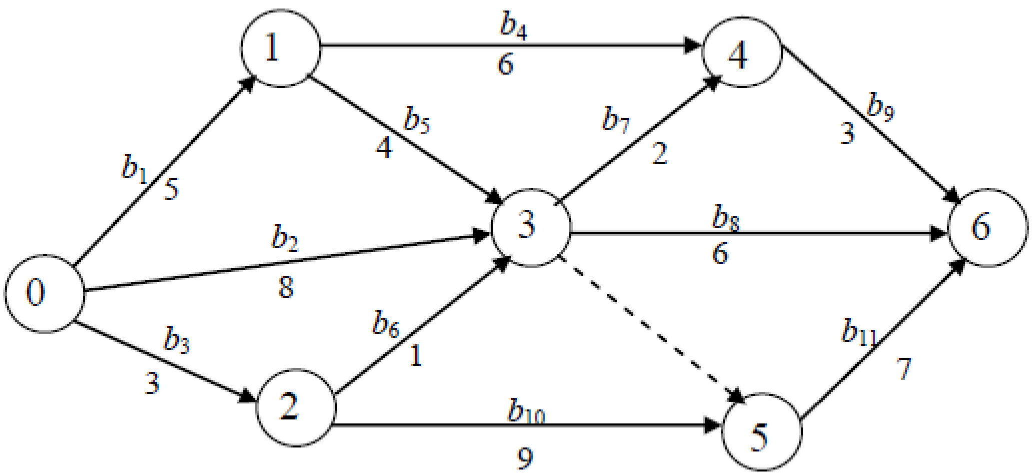
$b_2(8), b_5(4), b_6(1) \to b_7(2), b_8(6);$

$b_4(6), b_7(2) \to b_9(3);$

$b_2(8), b_5(4), b_6(1), b_{10}(9) \to b_{11}(7).$

Решение:

Строим структурный сетевой график и вводим правильную нумерацию событий:



13.5. Индивидуальное задание

Вариативность не предполагается.

Построить сетевой график

Исходные данные.

Работа	Продолжительность работы	Опирается на работы
$b_1(0,1)$	1	–
$b_2(0,2)$	5	–
$b_3(1,2)$	3	b_1

$b_4(1,3)$	2	b_1
$b_5(2,3)$	6	b_2, b_3
$b_6(2,4)$	3	b_2, b_3
$b_7(3,5)$	5	b_4, b_5
$b_8(4,5)$	3	b_6
$\phi(3,4)$	0	b_4, b_5

13.6. Требования к отчету и защите

Показать выполненную в тетради работу. Знать ответы на сформулированные выше вопросы. Защита работы проводится во время занятий. После защиты работа помещается в ЭИОС.

14. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 13. ЗАДАЧИ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

14.1. Общие сведения

Цель: освоить метод критического пути решения задачи сетевого планирования.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: тетрадь, калькулятор.

Условия допуска к выполнению: показать конспект по теоретической подготовке.

Критерии положительной оценки: Показать выполненную работу, четко ответить на вопросы, увязать последовательность изученных разделов дисциплины.

14.2. Теоретическое введение

Основными задачами сетевого планирования являются:

1) построение сетевого графика и расчет его временных характеристик (метод критического пути);

2) расчет вероятностных показателей для трехпараметрической или двухпараметрической сетевой модели;

3) оптимизация стоимости выполнения проекта.

Литература:

Воробейкина, И.В. Математические модели в информационной безопасности: учебное пособие для студентов специальности 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» очной формы обучения / И.В. Воробейкина; БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ». – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2021.

Глава 9. Задачи, связанные с сетевыми графиками. Критические работы.

14.3. Задание к практической работе.

Вопросы, на которые необходимо дать ответ:

1. Как рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий?

2. Что такое критические работы?

3. Назовите интервалы значений коэффициента напряженности, составляющие критическую, подкритическую и резервную зоны.

14.4. Методические указания и порядок выполнения работы

Задача «Метод критического пути». Построить сетевой график, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг с помощью данных, представленных в таблице.

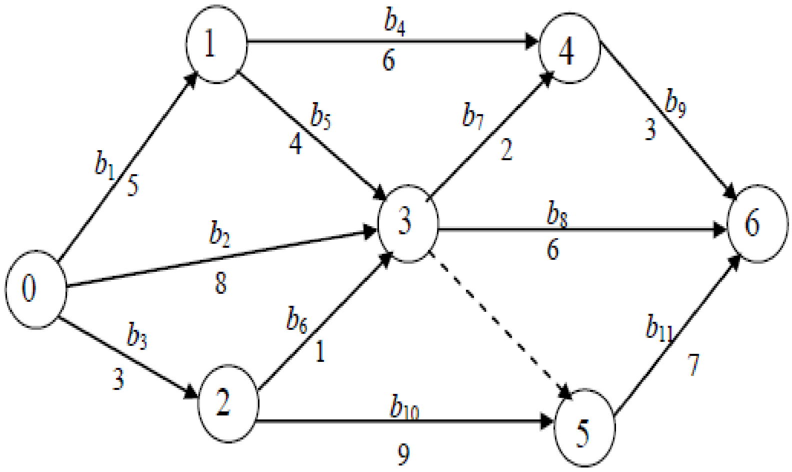
Пример.

Исходные данные.

Работа	Продолжительность	Опирается
b_1	5	–
b_2	8	–
b_3	3	–
b_4	6	b_1
b_5	4	b_1
b_6	1	b_3
b_7	2	b_2, b_5, b_6
b_8	6	b_2, b_5, b_6
b_9	3	b_4, $b7$
b_{10}	9	b_3
b_{11}	7	b_2, b_5, b_6, b_{10}

Решение:

Сначала строим структурный сетевой график и вводим правильную нумерацию событий:



Наиболее ранние сроки наступления событий находим по формуле

$$T_p(i)=max(T_p(j) + t_{ji}),$$

где максимум берется по всем событиям j, <u>непосредственно</u> предшествующим событию i. Начальному событию присваиваем $T_p(0)=0$. Тогда:

$T_p(1)= T_p(0) + t_{01}=0 + 5=5$

$T_p(2)= T_p(0) + t_{02}=0 + 3=3$

$T_p(3)= max(T_p(0) + t_{03}, T_p(1) + t_{13}, T_p(2) + t_{23})=max(0+8, 5+4, 3+1)=9$

$T_p(4)= max(T_p(1) + t_{14}, T_p(3) + t_{34})=max(5+6, 9+2)=11$

$T_p(5)= max(T_p(2) + t_{25}, T_p(3) + t_{35})=max(3+9, 9+0)=12$

$T_p(6)= max(T_p(3) + t_{36}, T_p(4) + t_{46}, T_p(5) + t_{56})=max(9+5, 11+3, 12+7)=19$

Итак, критическое время $T_{кр}=19$. Минимальный срок выполнения проекта – 19 дней.

Наиболее поздние сроки наступления событий находим по формуле

$$T_n(i)=min(T_p(j) – t_{ij}),$$

где минимум берется по всем событиям j, непосредственно следующим за событием i. Конечному событию присваиваем наиболее поздний срок наступления, равный критическому времени $T_n(6)= T_{кр}=19$. Тогда:

$T_n(5)= T_n(6) – t_{56} =19–7=12$

$T_n(4)= T_n(6) – t_{46} =19–3=16$

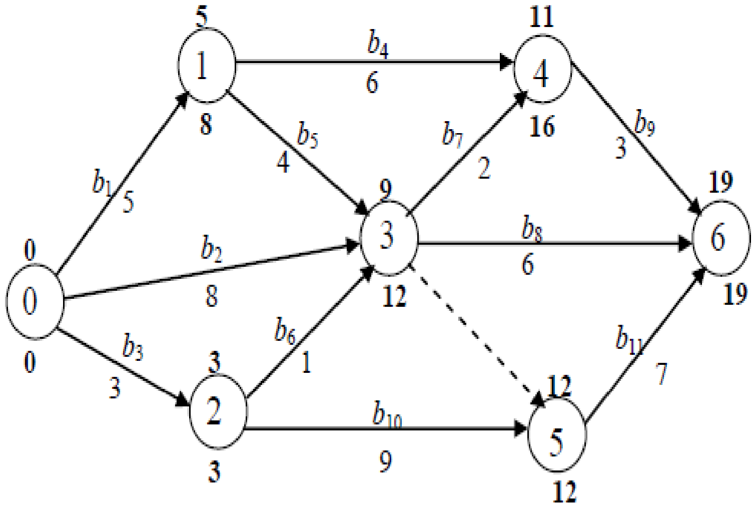
$T_n(3)= min(T_n(6) – t_{36}, T_n(5) – t_{35}, T_n(4) – t_{34})=min(19–6, 12–0, 16–2)=12$

$T_n(2)= min(T_n(5) – t_{25}, T_n(3) – t_{23})=min(12–9, 12–1)=3$

$T_n(1)= min(T_n(4) – t_{14}, T_n(3) – t_{13})=min(16–6, 12–4)=8$

$T_n(0)= min(T_n(3) – t_{03}, T_n(2) – t_{02}, T_n(1) – t_{01})=min(12–8, 3–3, 8–5)=0$

Результаты расчетов отразим на сетевом графике. Ранние сроки наступления событий запишем над кружками, изображающими эти события, поздние сроки наступления событий – под кружками.



Критическое время $T_{кр} = 19$.

Временные характеристики событий.

Событие	Ранний срок $T_р(i)$	Поздний срок $T_п(i)$	Резерв времени $R(i)$
* 0	0	0	0
1	5	8	3
* 2	3	3	0
3	9	12	3
4	11	16	5
* 5	12	12	0
* 6	19	19	0

Резервы времени событий находим по формуле $R(i)=T_п(i) – T_р(i)$.

Критический путь проходит через события с нулевым резервом времени, т. е. через события 0, 2, 5, 6.

Найдем резервы времени работ.

Наиболее ранний возможный срок начала работы $b_k = (i, j)$ равен наиболее раннему сроку наступления события i: $S_р(b_k) = T_р(i)$, а наиболее поздний допустимый срок окончания работы $b_k =(i, j)$ равен наиболее позднему сроку наступления события j: $E_п(b_k) = T_п(j)$.

Полный резерв времени работ найдем по формуле

$r_п(b_k)= r_п(i,j)= T_п(j) – T_р(i) – t_{ij}= E_п(b_k) – S_р(b_k) – t_{ij}$

Независимый резерв времени работ найдем по формуле

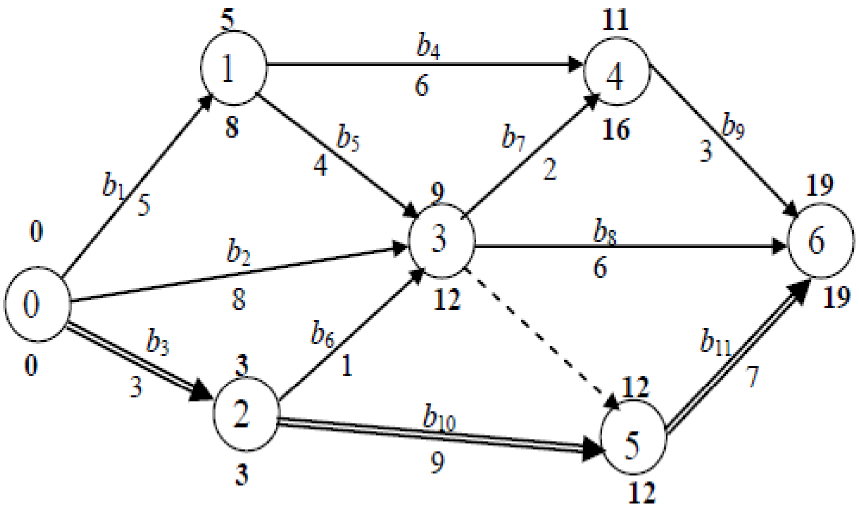
$r_н(b_k)= r_н(i,j)= T_р(j) – T_п(i) – t_{ij}$

Сведем полученные данные в таблицу:

Полученные данные.

Работа $b_k = (i, j)$	Продолжительность работы, $t(b_k) = t_{ij}$	$S_p(b_k)$	$E_п(b_k)$	$r_п(b_k)$	$r_н(b_k)$
$b_1 = (0, 1)$	5	0	8	3	0
$b_2 = (0, 3)$	8	0	12	4	1
* $b_3 = (0, 2)$	3	0	3	0	0
$b_4 = (1, 4)$	6	5	16	5	–3
$b_5 = (1, 3)$	4	5	12	3	–3
$b_6 = (2, 3)$	1	3	12	8	5
$b_7 = (3, 4)$	2	9	16	5	–3
$b_8 = (3, 6)$	6	9	19	4	1
$b_9 = (4, 6)$	3	11	19	5	0
* $b_{10} = (2, 5)$	9	3	12	0	0
* $b_{11} = (5, 6)$	7	12	19	0	0
$\varphi = (3, 5)$	0	9	12	3	0

Работа $\varphi = (3, 5)$ – фиктивная работа. Критические работы – b_3, b_{10}, b_{11}. Резервы времени этих работ равны нулю. Выделим критический путь двойными стрелками.



Резерв времени некритической дуги b находим как разность между длиной замыкающего критического участка и длиной самой некритической дуги *a:*

$$R(b)=a–b.$$

Коэффициент напряженности некритической дуги определим по формуле

$$N(b) = \frac{b}{a} = 1 - \frac{R(b)}{a}.$$

Резервы времени и коэффициенты напряженности резервных дуг.

Некритические дуги	a	b	Резерв времени дуги, $R(b)$	Коэффициент напряженности дуги, $N(b)$

(2, 3, 5)	9	1	8	1/9 ≈ 0,11
(0, 3, 5)	12	8	4	2/3 ≈ 0,67
(0, 1, 3, 5)	12	9	3	3/4 = 0,75
(0, 3, 6)	19	14	5	14/19 ≈ 0,74
(0, 1, 3, 6)	19	15	4	15/19 ≈ 0,79
(0, 1, 4, 6)	19	14	5	14/19 ≈ 0,74
(0, 1, 3, 4, 6)	19	14	5	14/19 ≈ 0,74
(2, 3, 6)	16	7	9	7/16 ≈ 0,44
(2, 3, 4, 6)	16	6	10	6/16 = 0,375

Дуги, коэффициент напряженности которых $N(b)>0{,}8$, составляют критическую зону, дуги с коэффициентом напряженности $0{,}6\le N(b)\le 0{,}8$ образуют подкритическую зону, а дуги с коэффициентом N(b)<0,6 дают резервную зону. В нашем случае в критическую зону попадает только критический путь, в подкритической зоне находятся дуги *(0, 1, 3, 6)*, *(0, 1, 3, 5)*, *(0, 3, 6)*, *(0, 1, 4, 6)*, *(0, 1, 3, 4, 6)* и *(0, 3, 5)*. Из них самая напряженная дуга *(0, 1, 3, 6)*. Она быстрее других может перейти на критический путь. Дуги *(2, 3, 5)*, *(2, 3, 6)* и *(2, 3, 4, 6)* образуют резервную зону.

14.5. Индивидуальное задание

Вариативность не предполагается.

Построить сетевой график, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

Исходные данные.

Работа	Продолжительность работы	Опирается на работы
$b_1(0,1)$	1	–
$b_2(0,2)$	5	–
$b_3(1,2)$	3	b_1
$b_4(1,3)$	2	b_1
$b_5(2,3)$	6	b_2,b_3
$b_6(2,4)$	3	b_2,b_3
$b_7(3,5)$	5	b_4,b_5
$b_8(4,5)$	3	b_6
$\phi(3,4)$	0	b_4,b_5

14.6. Требования к отчету и защите

Показать выполненную в тетради работу. Знать ответы на сформулированные выше вопросы. Защита работы проводится во время занятий. После защиты работа помещается в ЭИОС.

15. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 14. МАКСИМАЛЬНЫЙ ПОТОК, РАЗРЕЗ, ПРОПУСКНАЯ СПОСОБНОСТЬ. ТЕОРЕМА ФОРДА-ФАЛКЕРСОНА О ВЕЛИЧИНЕ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА

15.1. Общие сведения

Цель: изучить понятие потока через сеть, максимальный поток, разрез, пропускную способность.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: тетрадь, калькулятор.

Условия допуска к выполнению: показать конспект по теоретической подготовке.

Критерии положительной оценки: Показать выполненную работу, четко ответить на вопросы, увязать последовательность изученных разделов дисциплины.

15.2. Теоретическое введение

К классу потоковых задач можно отнести следующую задачу: *существует система, модель которой можно представить в виде орграфа. На вход системы поступает поток с некоторой интенсивностью, пропускная способность элементов системы ограничена. Необходимо спланировать поток в системе таким образом, чтобы не нарушались ограничения пропускной способности, и интенсивность потока была максимальной или равной требуемой величине.*

Под моделью сети понимается орграф, в котором выделяются две вершины: s – исток (источник) и t – сток, а дугам присвоен вес, означающий пропускную способность. Дуга называется ***насыщенной***, если в ней интенсивность потока равна пропускной способности. Пропускная способность пути $P(s,t)$ из s в t равна наименьшей из пропускных способностей входящих в него дуг.

$c[P(s,t)]=min[c(u_1),c(u_2),\dots,c(u_m)]$, u_i – дуги, c – пропускная способность.

Поток представляет собой совокупность объектов, транспортируемых из s в t, причем эти объекты могут быть распределены по дугам сети различным образом. Обозначим поток как неотрицательную функцию $f(u,v)$, определенную на ребрах графа, такую, что $f(u,v)\leq c(u,v)$

$\sum f(u,v) - \sum c(u,v)=0,\ \forall u\neq\{s,t\},\ (u,v)\in E$

Первое условие ограничивает поток через ребро его пропускной способностью, а второе гарантирует отсутствие источников и стоков вне выделенной пары вершин.

Задача поиска максимального потока состоит в максимизации величины $M(f)= \sum f(s,v)\rightarrow max,\ (s,v)\in E$ по всем допустимым потокам.

О. *(s-t)-**разрезом графа*** называется разбиение вершин графа на два множества S и T, таких, что $S \cup T = V$, где V – множество вершин графа, $S \cap T = \varnothing$, $s \in S$, $t \in T$ (s – исток, t – сток).

О. ***Величиной разреза*** называется сумма пропускных способностей всех ребер, один конец которых находится в множестве S, а другой – в множестве T.

$c(S,T) = \sum c(u,v),\ (u,v) \in E,\ u \in S,\ v \in T$

Теорема Форда-Фалкерсона. На любой сети максимальная величина потока из истока s в сток t равна минимальной пропускной способности разреза, отделяющего s от t.

Литература:

Воробейкина, И.В. Математические модели в информационной безопасности: учебное пособие для студентов специальности 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» очной формы обучения / И.В. Воробейкина; БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ». – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2021.

Глава 10. Поток через сеть. Теорема Форда-Фалкерсона о величине максимального потока.

.

15.3. Задание к практической работе.

Вопросы, на которые необходимо дать ответ:

1. Сформулируйте потоковую задачу.
2. Объясните, что такое пропускная способность сети, насыщенная дуга, разрез графа.
3. Сформулируйте теорему Форда-Фалкерсона.

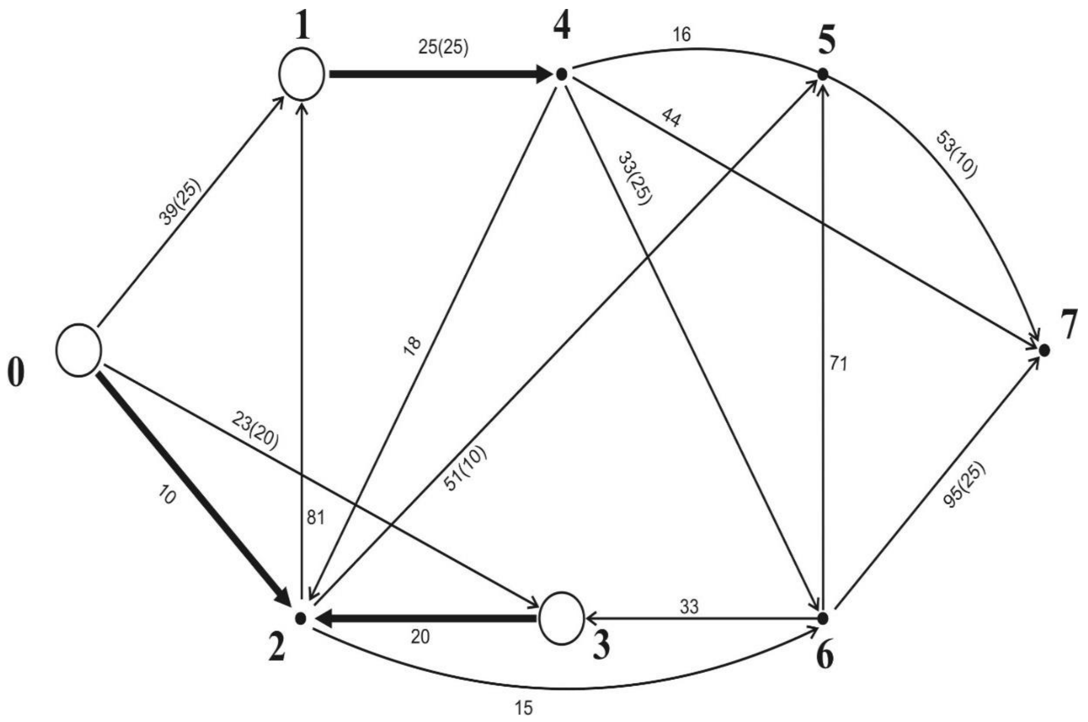
15.4. Методические указания и порядок выполнения работы

Построить сеть, используя таблицу пропускных способностей дуг.

x_0 – исток, x_7 – сток; $x_0, x_7 \in X$. Значения пропускных способностей дуг заданы по направлению ориентации дуг: от индекса i к индексу j.

Пропускные способности дуг.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	*0*	*39*	*10*	*23*	*0*	*0*	*0*	*0*
1	*0*	*0*	*0*	*0*	*25*	*0*	*0*	*0*
2	*0*	*81*	*0*	*0*	*0*	*61*	*15*	*0*
3	*0*	*0*	*20*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
4	*0*	*0*	*18*	*0*	*0*	*0*	*33*	*44*
5	*0*	*0*	*0*	*0*	*16*	*0*	*0*	*53*
6	*0*	*0*	*0*	*33*	*0*	*71*	*0*	*95*
7	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*



Индивидуальное задание

Вариативность не предполагается.

Построить сеть, используя таблицу пропускных способностей дуг. Источник – вершина 1, сток – вершина 2.

Пропускные способности дуг.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	*0*	*32*	*95*	*75*	*57*	*0*	*0*	*0*
2	*0*	*0*	*5*	*0*	*23*	*0*	*0*	*16*
3	*0*	*0*	*0*	*18*	*0*	*6*	*0*	*0*
4	*0*	*0*	*0*	*0*	*24*	*9*	*0*	*0*
5	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*20*	*94*
6	*0*	*0*	*0*	*0*	*11*	*0*	*7*	*0*
7	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*81*
8	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*

15.5. Требования к отчету и защите

Показать выполненную в тетради работу. Знать ответы на сформулированные выше вопросы. Защита работы проводится во время занятий. После защиты работа помещается в ЭИОС.

16. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 15. АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА

16.1. Общие сведения

Цель: освоить алгоритм нахождения максимального потока

Материалы, оборудование, программное обеспечение: тетрадь, калькулятор.

Условия допуска к выполнению: показать конспект по теоретической подготовке.

Критерии положительной оценки: Показать выполненную работу, четко ответить на вопросы, увязать последовательность изученных разделов дисциплины.

16.2. Теоретическое введение

Алгоритм нахождения максимального потока. Для определения потока в сети используют алгоритм Форда-Фалкерсона. Идея алгоритма заключается в следующем. Выбираем произвольный путь от источника s к стоку t. При этом дуги на данном пути могут проходить как в прямом, так и в обратном направлении. Выбираем минимальное значение среди остаточных пропускных способностей дуг данного пути. Увеличиваем поток на каждой из дуг данного пути на выбранное минимальное значение. Если поток становится равен весу дуги, то эта дуга является насыщенной, то есть через нее нельзя пройти при рассмотрении путей в графе, и она исключается из рассмотрения. Так перебираем все возможные пути. Работа алгоритма продолжается до тех пор, пока находятся такие пути. Поток в сети будет равен сумме потоков всех дуг, инцидентных стоку графа (следует заметить, что сумма потоков всех дуг, инцидентных стоку графа равна сумме потоков всех дуг, инцидентных истоку графа).

Описание алгоритма:

1. обнуляем все потоки. Остаточная сеть изначально совпадает с исходной сетью;

2. в остаточной сети находим любой путь из источника в сток. Если такого пути нет, останавливаемся;

3. на найденном пути в остаточной сети ищем ребро с минимальной пропускной способностью c;

4. для каждого ребра на найденном пути увеличиваем поток на c, а в противоположном ему – уменьшаем на c;

5. модифицируем остаточную сеть: для всех ребер на найденном пути, а также для противоположных им ребер, вычисляем новую пропускную способность. Если она стала ненулевой, добавляем ребро к остаточной сети, а если обнулилась, исключаем дугу из рассмотрения как насыщенную;

6. возвращаемся на шаг 2.

Литература:

Воробейкина, И.В. Математические модели в информационной безопасности: учебное пособие для студентов специальности 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» очной формы обучения / И.В. Воробейкина; БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ». – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2021.

Глава 10. Поток через сеть. Теорема Форда-Фалкерсона о величине максимального потока.

16.3. Задание к практической работе.

Вопросы, на которые необходимо дать ответ:

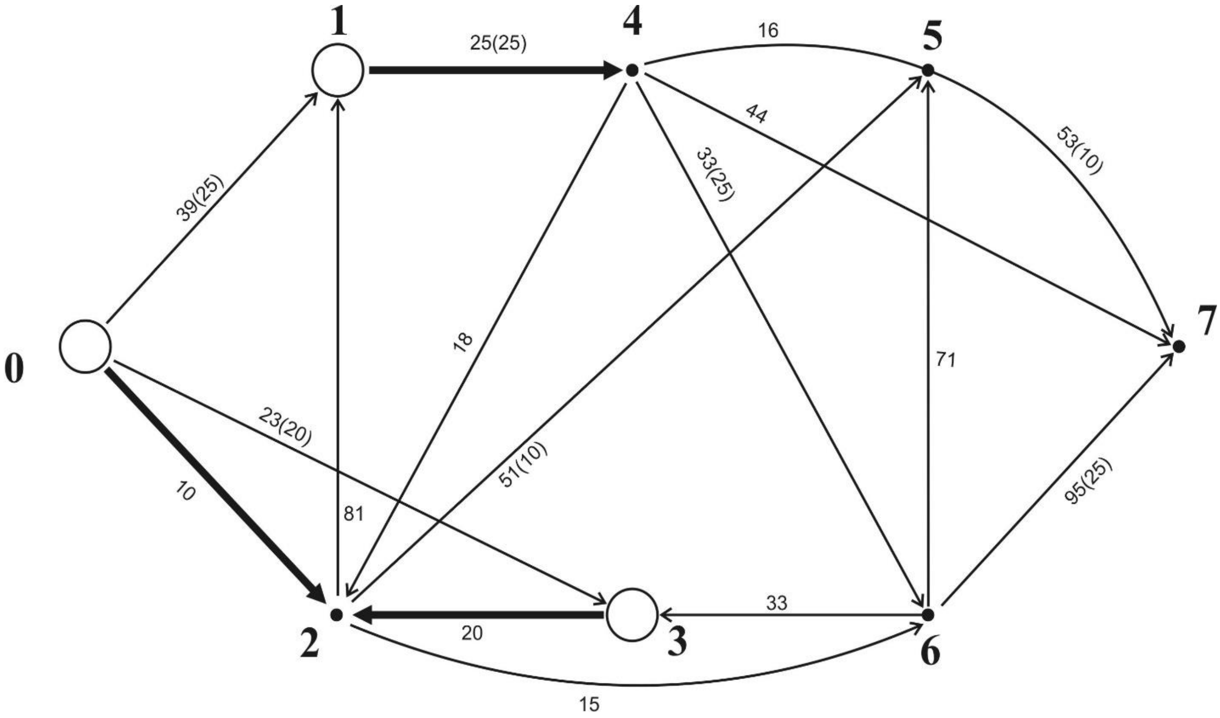
1. Опишите алгоритм нахождения максимального потока.
2. Сформулируйте теорему Форда-Фалкерсона.

16.4. Методические указания и порядок выполнения работы

Решить задачу нахождения максимального потока в сети с помощью алгоритма Форда-Фалкерсона и построить разрез сети *S*. Исходные данные: сеть $S(X,U)$, x_0 – исток, x_7 – сток; $x_0, x_7 \in X$. Значения пропускных способностей дуг заданы по направлению ориентации дуг: от индекса *i* к индексу *j*.

Пропускные способности дуг.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	*0*	*39*	*10*	*23*	*0*	*0*	*0*	*0*
1	*0*	*0*	*0*	*0*	*25*	*0*	*0*	*0*
2	*0*	*81*	*0*	*0*	*0*	*61*	*15*	*0*
3	*0*	*0*	*20*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
4	*0*	*0*	*18*	*0*	*0*	*0*	*33*	*44*
5	*0*	*0*	*0*	*0*	*16*	*0*	*0*	*53*
6	*0*	*0*	*0*	*33*	*0*	*71*	*0*	*95*
7	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*



Зададим на сети нулевой поток, который является начальным допустимым потоком на сети. Значение потока на каждой дуге u_i будем указывать в скобках за пропускной способностью дуги. Значение потока, равное 0, не указываем. Выбираем на сети произвольный путь, ведущий из вершины x_0 в вершину x_7.

1) путь *01467,* пропускные способности дуг *(39, 25, 33,95); min=25,* $\Rightarrow$ на всех дугах этого пути увеличиваем поток на *25,* а дугу *14* вычеркиваем из рассмотрения как насыщенную;

2) путь *0257,* пропускные способности дуг *(10, 61,53); min=10,* $\Rightarrow$ на всех дугах этого пути увеличиваем поток на *10,* а дугу *02* вычеркиваем из рассмотрения как насыщенную;

3) путь *03257,* пропускные способности дуг *(23, 20,61–10,53–10)=(23, 20, 51, 43); min=20,* $\Rightarrow$ на всех дугах этого пути увеличиваем поток на *20,* а дугу *32* вычеркиваем из рассмотрения как насыщенную;

Больше путей из x_0 в x_7 нет, $\Rightarrow$ суммируем все потоки, которые установили: *25+10+20=55.*

Далее – строим разрез; помечаем вершины (обведем в кружок). Сначала все вершины не имеют пометок. Присваивается пометка начальной вершине x_0. Всем вершинам $x_i \in G$, для которых дуга $(x_0\ x_i)$ не насыщена, присваиваем пометки. Дуга $(x_0,x_1)=39(25)$ не насыщена, $\Rightarrow$ помечаем; дуга (x_0,x_2) ранее исключена из рассмотрения как насыщенная; дуга $(x_0,x_3)=23(20)$ не насыщена, $\Rightarrow$ помечаем. Итак, помечены вершины x_0, x_1, x_3. Теперь определяем дуги минимального разреза, т.е. дуги, начала которых находятся в помеченных вершинах, а концы – в непомеченных: u_{02}, u_{14}, u_{32}; разрез $T(u_{02}, u_{14}, u_{32})$; величина разреза=*10+25+20=55*, что соответствует теореме Форда-Фалкерсона.

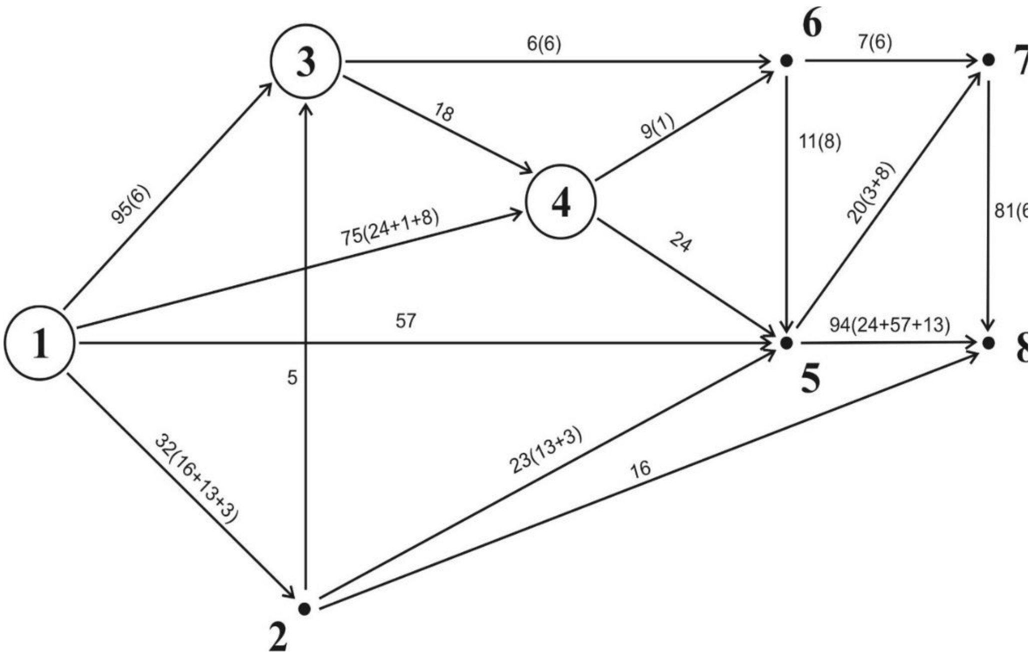
16.5. Индивидуальное задание

Вариативность не предполагается.

Найти максимальный поток и минимальный разрез в сети, используя алгоритм Форда-Фалкерсона. Источник – вершина 1, сток – вершина 2. Матрица пропускных способностей:

Пропускные способности дуг.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	*0*	*32*	*95*	*75*	*57*	*0*	*0*	*0*
2	*0*	*0*	*5*	*0*	*23*	*0*	*0*	*16*
3	*0*	*0*	*0*	*18*	*0*	*6*	*0*	*0*
4	*0*	*0*	*0*	*0*	*24*	*9*	*0*	*0*
5	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*20*	*94*
6	*0*	*0*	*0*	*0*	*11*	*0*	*7*	*0*
7	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*81*
8	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*



16.6. Требования к отчету и защите

Показать выполненную в тетради работу. Знать ответы на сформулированные выше вопросы. Защита работы проводится во время занятий. После защиты работа помещается в ЭИОС.

17. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 16. СПРОС, ПРЕДЛОЖЕНИЕ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

17.1. Общие сведения

Цель: изучить спрос, предложение и их математическое описание.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: тетрадь, калькулятор.

Условия допуска к выполнению: показать конспект по теоретической подготовке.

Критерии положительной оценки: показать выполненную работу, четко ответить на вопросы, увязать последовательность изученных разделов дисциплины.

17.2. Теоретическое введение

Спрос – это желание и возможность покупателя приобрести товар по определенной цене.

Величина спроса – это количество товара, которое покупатели готовы купить по данной цене в определенное время и в определенном месте.

Закон спроса: при прочих равных условиях изменение величины спроса находится в обратной зависимости от изменения цены товара. Чем выше цена, тем меньше количество проданного товара.

Спрос – это желание и возможность покупателя приобрести товар по определенной цене.

Величина спроса – это количество товара, которое покупатели готовы купить по данной цене в определенное время и в определенном месте.

Закон спроса: при прочих равных условиях изменение величины спроса находится в обратной зависимости от изменения цены товара. Чем выше цена, тем меньше количество проданного товара.

Литература:

Воробейкина, И.В. Исследование операций и теория игр: учеб. пособие / И.В. Воробейкина. – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2019. – 150 с.

Глава 1. Предмет исследования операций. 1.6. Понятие спроса и предложения и их математическое описание. Равновесие спроса и предложения.

17.3. Задание к практической работе.

Вопросы, на которые необходимо дать ответ:

1. Сформулируйте законы спроса и предложения.

2. Дана кривая спроса на некоторый товар *X*. Как изменится кривая спроса, если товар станет дешевле?

17.4. Методические указания и порядок выполнения работы

Пример 1. Зависимость объема спроса товара *X* от его цены представлена в таблице.

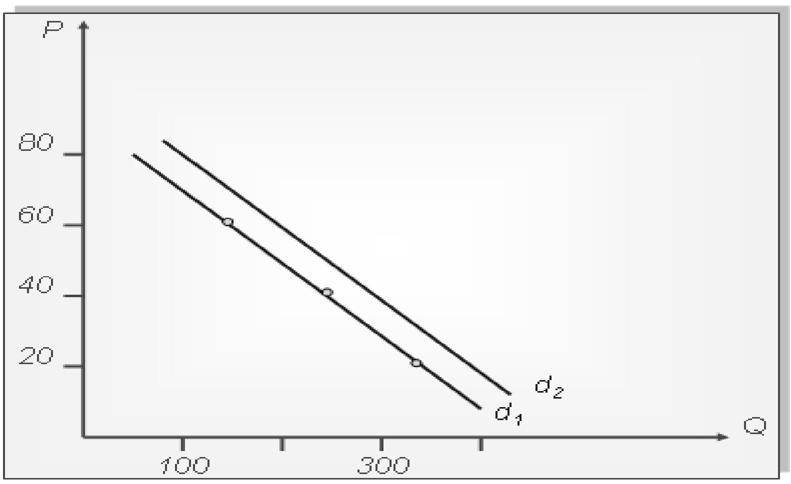
Цена (P) (руб.)	*Объем спроса (Qd) (кг)*
20	*320*
30	*280*
40	*240*
50	*200*
60	*160*
70	*120*

Нарисуйте кривую спроса данного товара и покажите, как она изменится, если покупатели будут предпочитать приобретать на *20 кг* больше при каждом уровне цен?

Решение. Построим еще один столбец в таблице. Увеличение спроса на *20* единиц изменит предпочтения потребителей, что проявится в увеличении объема спроса.

Цена (P) (руб.)	*Объем спроса (Qd_1) (кг)*	*Объем спроса (Qd_2) (кг)*
20	*320*	*340*
30	*280*	*300*
40	*240*	*260*
50	*200*	*220*
60	*160*	*180*
70	*120*	*140*

В результате сдвинется и кривая спроса (разместится правее d_1).



Пример 2. Зависимость объема спроса товара *X* от его цены представлена в таблице.

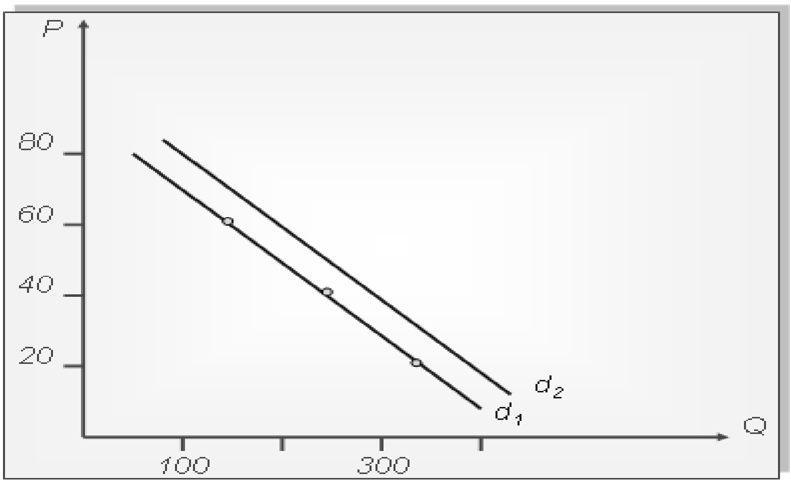
Цена (P) (руб.)	*Объем спроса (Qd) (кг)*
20	*320*
30	*280*
40	*240*
50	*200*
60	*160*
70	*120*

Нарисуйте кривую спроса данного товара и покажите, как она изменится, если покупатели будут предпочитать приобретать на *20 кг* больше при каждом уровне цен?

Решение. Построим еще один столбец в таблице. Увеличение спроса на *20* единиц изменит предпочтения потребителей, что проявится в увеличении объема спроса.

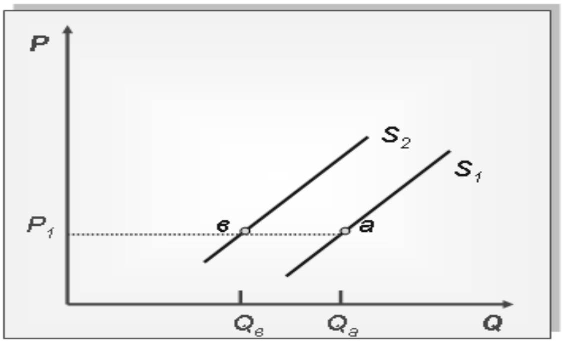
Цена (P) (руб.)	*Объем спроса (Qd_1) (кг)*	*Объем спроса (Qd_2) (кг)*
20	*320*	*340*
30	*280*	*300*
40	*240*	*260*
50	*200*	*220*
60	*160*	*180*
70	*120*	*140*

В результате сдвинется и кривая спроса (разместится правее d_1).



Пример 3. Государство ввело налог на товар *A*. Покажите на графике, какие изменения произойдут в предложении товара.

Решение. Изобразим кривую предложения. Возьмем любую цену P_1 и отметим на кривой предложения s_1 точку *a*, которая характерна для этой цены, при этом объем предложения будет Q_a. Введение налога приведет к снижению дохода, поэтому производитель будет уменьшать производство этого товара, следовательно, и объем предложения товара на рынке уменьшится. Кривая предложения при этом сдвинется влево в положение s_2, так как происходит изменение неценового фактора. Точка переместится в положение *в*, объем предложения уменьшится до $Q_в$.



17.5. Индивидуальное задание

Вариативность не предполагается.

Задание 1. Зависимость объема предложения товара *А* от его цены представлена в таблице.

Цена (Р) (тыс. руб.)	*Объем предложения (Qs) (шт.)*
2	0
3	10
4	20
5	30
6	40
7	50

Покажите на графике, что произойдет с кривой предложения данного товара, если производители увеличат предложение товара *А* на *10* единиц при каждом уровне цен.

Задание 2. Дана кривая предложения на товар *Х*. Покажите изменение предложения, если в производстве будет применяться более дорогое сырье.

Задание 3. Государство ввело дотацию на производство товара *Х*. Как изменится положение кривой предложения этого товара?

17.6. Требования к отчету и защите

Показать выполненную в тетради работу. Знать ответы на сформулированные выше вопросы. Защита работы проводится во время занятий. После защиты работа помещается в ЭИОС.

18. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 17. РАВНОВЕСИЕ СПРОСА И ПРЕДЛОЖЕНИЯ. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ И ОСОБЕННОСТИ ЕЕ РЕШЕНИЯ

18.1. Общие сведения

Цель: изучить равновесие спроса и предложения.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: тетрадь, калькулятор.

Условия допуска к выполнению: показать конспект по теоретической подготовке.

Критерии положительной оценки: показать выполненную работу, четко ответить на вопросы, увязать последовательность изученных разделов дисциплины.

18.2. Теоретическое введение

Равновесная цена – цена, при которой количество товара, предлагаемого продавцами, совпадает с количеством товара, которое готовы купить покупатели. Данная цена устраивает продавца и покупателя.

В точке равновесия величины спроса и предложения совпадают. На основании этого можно сформулировать условие равновесия: $Qd=Qs$, где Qd – спрос, Qs – предложение, Pp – равновесная (рыночная) цена, $Pтов$ – цена товара.

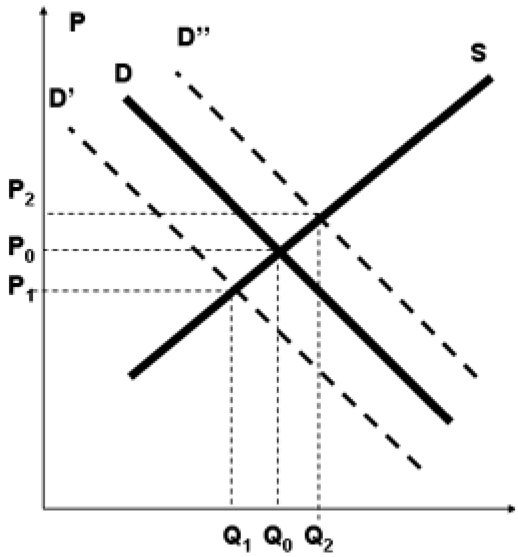
Если условие равновесия не соблюдается, то на рынке может сложиться положение дефицита или избытка товара.

а) избыток товара: $Qd<Qs$, $Pтов>Pp$; при увеличении предложения цена товара снижается;

б) дефицита товара: $Qd>Qs$, $Pтов<Pp$; с увеличением спроса цена товара на рынке повышается.

Реакция рынка на изменение спроса и предложения.

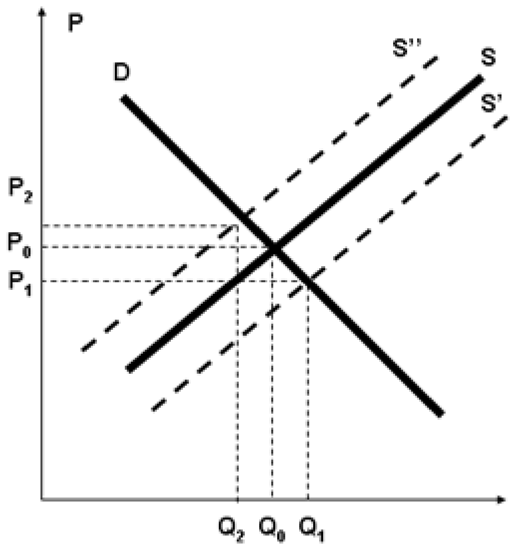
1) Изменение спроса. Предложение неизменно.



а) Спрос возрастает. Кривая спроса сдвигается вправо, следовательно, увеличивается равновесная цена и равновесный объем.

б) Спрос уменьшается. Кривая спроса сдвигается влево, следовательно, уменьшается равновесная цена и равновесный объем.

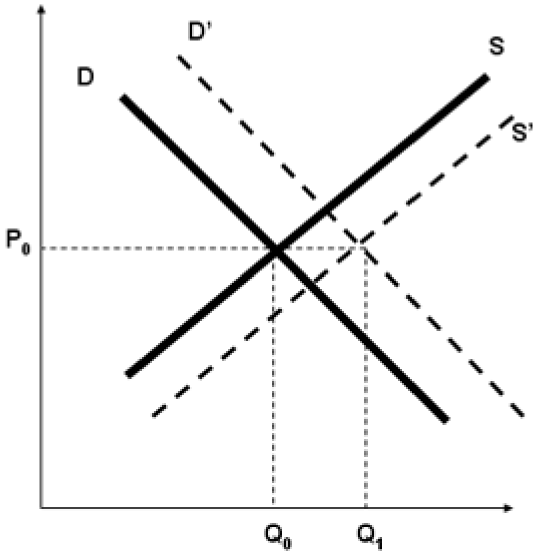
2) Изменение предложения. Спрос неизменный.



а) Предложение увеличивается. Кривая предложения сдвигается вправо, следовательно, уменьшается равновесная цена и увеличивается равновесный объем.

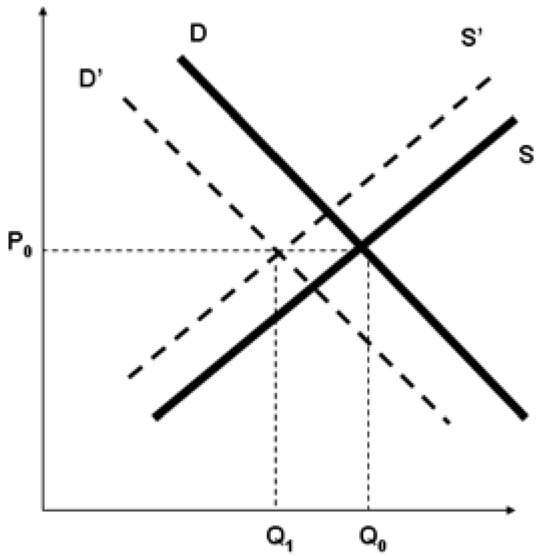
б) Предложение сокращается. Кривая предложения сдвигается влево, следовательно, возрастает равновесная цена и уменьшается равновесный объем.

3) Спрос и предложение изменяются в одном направлении.



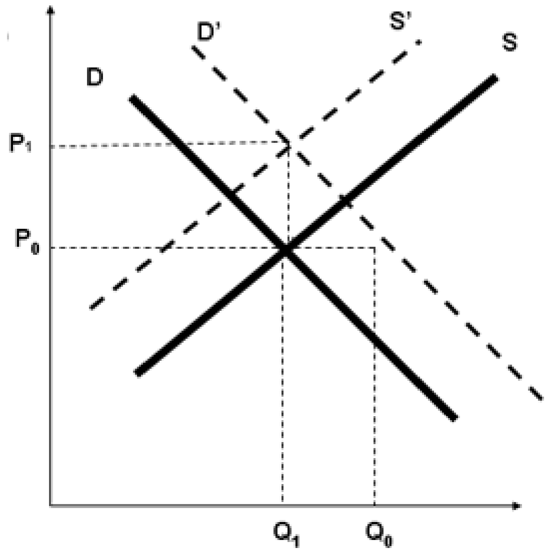
а) Увеличиваются: возрастает только равновесный объем продаж.

б) Уменьшаются: снизится равновесный объем продаж.



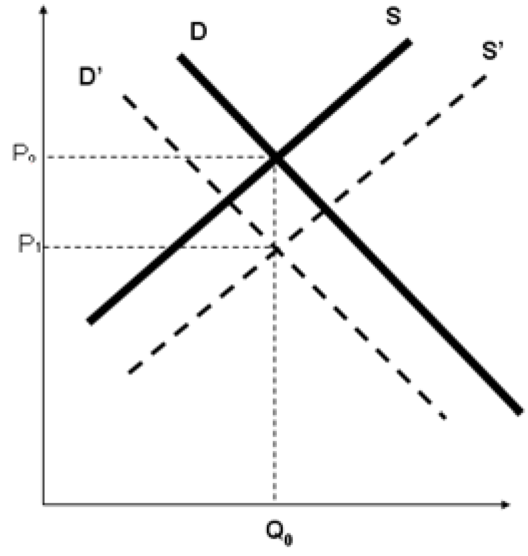
Спрос и предложение сокращаются одновременно в равной степени. Равновесная цена неизменна. Объем продаж снижается.

4) Спрос и предложение изменяются в разных направлениях**.**



а) Спрос увеличивается, предложение сокращается: возрастает только равновесная цена.

б) Спрос сокращается, предложение увеличивается: снижается только равновесная цена.



Спрос сокращается, предложение увеличивается. Равновесная цена снижается. Объем продаж остается неизменным.

Литература:

Воробейкина, И.В. Исследование операций и теория игр: учеб. пособие / И.В. Воробейкина. – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2019. – 150 с.

Глава 1. Предмет исследования операций. 1.7. Задача управления запасами и особенности ее решения

18.3. Задание к практической работе

18.4. Методические указания и порядок выполнения работы

Пример 1. Зависимость спроса и предложения выражена формулами $Qd = 94 – 7P$, $Qs = 15P – 38$. Найти равновесную цену и равновесный объем продаж. Чему равен дефицит или избыток товара при цене *4* руб. за единицу товара?

Решение:

1. Определение равновесной цены. Получаем равенство согласно условию равновесия:

$Qd = Qs$, $94 – 7P = 15P – 38$

$22P = 132.$

$Pp = 6$, $Qp (6) = 94 – 7·6 = 52$ *(ед)*

Равновесная (рыночная) цена составляет *6* руб., проданный объем товара равен *52* единицам.

2. Определение величины спроса при цене *4* руб.:

$Qd = 94 – 7·4 = 66$ *(ед)*

3. Определение величины предложения при цене 4 руб.:

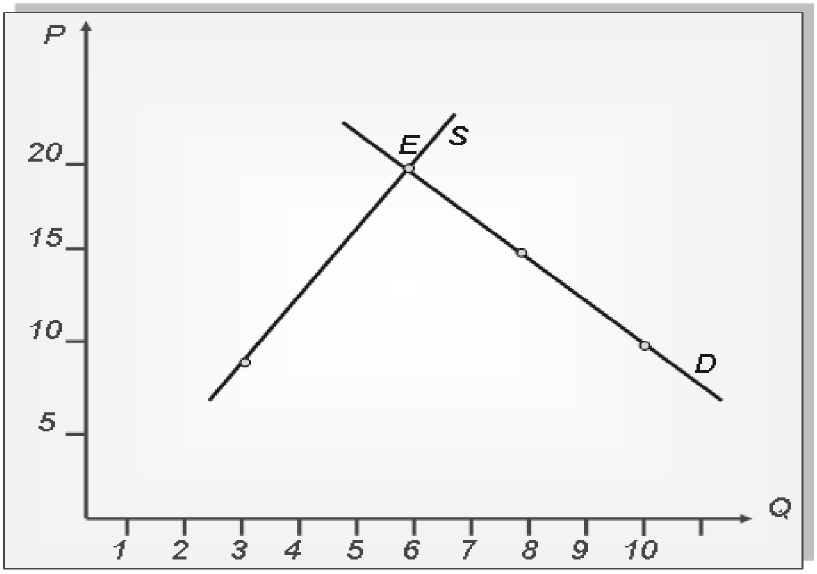
$Qs = 15·4 – 38 = 22$ *(ед)*

В результате вычислений получаем неравенство: $Qd > Qs$. Следовательно, при цене *4* руб. происходит дефицит товара. Размер дефицита составляет *44* единицы.

Пример 2. В таблице представлены данные о ценах, объемах спроса и предложения товара *X*. Начертите кривые спроса и предложения и определите равновесную точку.

Цена (P) (руб.)	*Объем спроса (Qd) (шт.)*	*Объем предложения (Qs) (шт.)*
10	*10*	*2*
12	*9*	*3*
14	*8*	*4*
16	*7*	*5*
18	*6*	*6*
20	*5*	*7*

Решение. Рисуем систему координат. По оси *Ox* откладываем значения объема спроса и предложения, по оси *Oy* – цены товара.



В точке равновесия (*E*) устанавливаются равновесная цена *18* руб. и равновесный объем продаж *6* шт.

Ответ: цена *18* руб., объем продаж *6* шт.

Пример 3. Функция спроса на товар $Qd=15–P$, функция предложения $Qs=-9+3P$. Определите равновесие на рынке данного товара. Что произойдет с равновесием, если объем спроса уменьшится на *1* единицу при любом уровне цен?

Решение. В условиях равновесия объем спроса и объем предложения равны, следовательно, надо приравнять их формулы: $15–P=-9+3P$, отсюда, равновесная цена равна *6*. Чтобы определить равновесный объем продаж, надо подставить равновесную цену в любую формулу: $Qd=15–6=9$ или: $Qs=-9+3\times6=9$. Если спрос уменьшится на *1* единицу, то изменится функция спроса: $Qd_1=(15–1)–P=14–P$. Чтобы найти новую равновесную цену, надо приравнять новый объем спроса и объем предложения $14–P=-9+3P$, $P=5,75$; объем продаж равен *8,25*.

Ответ: равновесная цена *5,75*; равновесный объем продаж *8,25*.

Пример 4. Функция спроса на товар $Qd=15–P$, функция предложения $Qs=-9+3P$. Определите равновесие на рынке данного товара. Что произойдет с равновесием, если объем спроса уменьшится на *1* единицу при любом уровне цен?

Решение. В условиях равновесия объем спроса и объем предложения равны, следовательно, надо приравнять их формулы: $15–P=-9+3P$, отсюда, равновесная цена равна *6*. Чтобы определить равновесный объем продаж, надо подставить равновесную цену в любую формулу: $Qd=15–6=9$ или: $Qs=-9+3\times6=9$. Если спрос уменьшится на *1* единицу, то изменится функция спроса: $Qd_1=(15–1)–P=14–P$. Чтобы найти новую равновесную цену, надо приравнять новый объем спроса и объем предложения $14–P=-9+3P$, $P=5,75$; объем продаж равен $8,25$.

Ответ: равновесная цена $5,75$; равновесный объем продаж $8,25$.

18.5. Индивидуальное задание

Вариативность не предполагается.

Задача 1. Кривая спроса описывается уравнением $Q_d=70–2P$, а кривая предложения – уравнением $Q_s=10+P$. Государство ввело налог на потребителей в размере *9* руб. за единицу.

Определите:

– как изменятся равновесные цена и объем продукции;
– каков доход государства от введения этого налога;
– как скажется этот налог на потребителях и производителях.

Задача 2. Кривая спроса описывается уравнением $Q_d=400–P$, а кривая предложения – уравнением $Q_s=100+2P$. Государство ввело налог на производителей в размере *15* руб. за единицу продукции.

Определите:

– как изменятся равновесные цена и объем продукции;
– каков доход государства от введения этого налога;
– как скажется этот налог на потребителях.

18.6. Требования к отчету и защите

Показать выполненную в тетради работу. Знать ответы на сформулированные выше вопросы. Защита работы проводится во время занятий. После защиты работа помещается в ЭИОС.

19. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 18. ПРИНЦИП «МИНИМАКСА». ЧИСТЫЕ И СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ

19.1. Общие сведения

Цель: познакомиться с понятиями нижняя и верхняя цены игры. Изучить принцип минимакса, чистые и смешанные стратегии.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: тетрадь, калькулятор.

Условия допуска к выполнению: показать конспект по теоретической подготовке.

Критерии положительной оценки: показать выполненную работу, четко ответить на вопросы, увязать последовательность изученных разделов дисциплины.

19.2. Теоретическое введение

Основной принцип теории игр можно сформулировать следующим образом: *выбирай свое поведение так, чтобы оно было рассчитано на наихудший для тебя образ действий противника.*

Решить игру – это значит указать оптимальные стратегии для каждого игрока, такие, что они гарантируют каждому игроку при систематическом их применении в среднем наилучший возможный для него результат.

Рассмотрим игру $m \times n$ со следующей матрицей:

	B_1	B_2	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
. . .			…	
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

i – номер нашей стратегии, j – номер стратегии противника. Определить свою оптимальную стратегию. Проанализируем последовательно каждую из наших стратегий, начиная с A_1. Выбирая стратегию A_i, мы всегда должны рассчитывать на то, что противник ответит на нее той из стратегий B_j, для которой наш выигрыш a_{ij} минимален. Определим это значение выигрыша, т. е. минимальное из чисел a_{ij} в i-*й* строке: $\alpha_i = min\ a_{ij}$. Выпишем числа α_i рядом с матрицей справа в виде добавочного столбца.

Выбирая какую-либо стратегию A_i, мы должны рассчитывать на то, что в результате разумных действий противника мы не выиграем больше чем α_i. Мы должны остановиться на той стратегии A_i, для которой число α_i является максимальным. Обозначим это максимальное значение $\alpha = max\ \alpha_i$:

Величина α называется **нижней ценой** игры, иначе – максиминным выигрышем или просто **максимином**. Та стратегия игрока A, которая соответствует строчке, содержащей α, называется **максиминной стратегией**.

Очевидно, если мы будем придерживаться максиминной стратегии, то нам при любом поведении противника гарантирован выигрыш не меньший α. Поэтому величина α и называется нижней ценой игры.

Аналогичное рассуждение можно провести и за противника B. Так как противник заинтересован в том, чтобы обратить наш выигрыш в минимум, он должен просмотреть каждую свою стратегию с точки зрения максимального выигрыша при этой стратегии. Выпишем внизу матрицы максимальные значения по каждому столбцу: $\beta_j = max\ a_{ij}$ и найдем минимальное из β_j: $\beta = min\ \beta_j$.

Величина β называется **верхней ценой игры**, или **минимаксом**. Соответствующая минимаксному выигрышу стратегия противника называется его «минимаксной стратегией». Придерживаясь своей минимаксной стратегии, противник гарантирует себе следующее: что бы мы ни предприняли против него, он проиграет не больше, чем β.

	B_1	B_2	…	B_n	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	α_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2	…	β_n	

Принцип осторожности, диктующий игрокам выбор соответствующих стратегий (максиминной и минимаксной), называют **принципом минимакса**.

Чистые и смешанные стратегии. Решение игры в смешанных стратегиях

Среди конечных игр, имеющих практическое значение, сравнительно редко встречаются игры с седловой точкой; более типичным является случай, когда нижняя и верхняя цена игры различны. Анализируя матрицы таких игр, мы пришли к заключению, что если каждому игроку предоставлен выбор одной-единственной стратегии, то в расчете на разумно действующего противника этот выбор должен определяться принципом минимакса. Придерживаясь своей максиминной стратегии, мы при любом поведении противника заведомо гарантируем себе выигрыш, равный нижней цене игры α. Возникает вопрос: нельзя ли гарантировать себе средний выигрыш, больший α, если применять не одну-единственную «чистую» стратегию, а чередовать случайным образом несколько стратегий? Такие комбинированные стратегии, состоящие в случайном чередовании чистых стратегий с определенными частотами, называются ***смешанными стратегиями***. Очевидно, каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной, в которой все стратегии, кроме одной, применяются с нулевыми частотами, а данная – с частотой *1*.

Теорема фон Неймана (основная теорема теории игр**).** *Каждая конечная игра имеет, по крайней мере, одно решение (возможно, в области смешанных стратегий).*

Следовательно, согласно теореме Неймана, применяя не только чистые, но и смешанные стратегии, можно для каждой конечной игры получить решение, т. е. пару таких (в общем случае смешанных) стратегий, что при применении их обоими игроками выигрыш будет равен цене игры, а при любом одностороннем отклонении от оптимальной стратегии выигрыш может измениться только в сторону, невыгодную для отклоняющегося.

Из основной теоремы следует, что каждая конечная игра имеет цену. Очевидно, что цена игры v всегда лежит между нижней ценой игры α и верхней ценой игры β:

$$\alpha \leq v \leq \beta.$$

Введем специальное обозначение для смешанных стратегий. Если, например, наша смешанная стратегия состоит в применении стратегий A_1, A_2, A_3 с частотами p_1, p_2, p_3, причем $p_1+p_2+p_3=1$, будем обозначать эту стратегию

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$$

Аналогично смешанную стратегию противника будем обозначать

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}$$

где q_1, q_2, q_3 – частоты, в которых смешиваются стратегии B_1, B_2, B_3, $q_1+q_2+q_3=1$. Оптимальные стратегии, образующие решение игры, обозначим S_A^*, S_B^*. Например, решение игры «орел-решка» образуют смешанные стратегии

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

В оптимальную смешанную стратегию игрока не обязательно должны входить все его стратегии, а только некоторые. Стратегии, входящие в решение игры, называются **активными** (полезными).

Игра, в которой все стратегии обеих сторон являются активными, называется ***полностью усредненной.***

Решение игры обладает замечательным свойством: *если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры v, независимо от того, что делает другой игрок, если только он не выходит за пределы своих активных стратегий.* Он, например, может пользоваться любой из них в чистом виде, а также может смешивать их в любых пропорциях.

Если игра $m \times n$ не имеет седловой точки, то нахождение решения довольно трудная задача, особенно при больших m и n. Иногда эту задачу удается упростить, если предварительно уменьшить число стратегий путем вычеркивания некоторых излишних.

Литература:

Воробейкина, И.В. Исследование операций и теория игр: учеб. пособие / И.В. Воробейкина. – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2019. – 150 с.

Глава 2. Предмет теории игр. 2.2. Нижняя и верхняя цена игры. Принцип «минимакса». 2.3. Чистые и смешанные стратегии. Решение игры в смешанных стратегиях.

19.3. Задание к практической работе.

Вопросы, на которые необходимо дать ответ:

1. Сформулируйте теорему фон Неймана.
2. Что такое максиминная стратегия?
3. Объясните, что значит чистая и смешанная стратегии?

19.4. Методические указания и порядок выполнения работы

Пример 1. Дана игра с матрицей

	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	*2*	*-3*	*4*	*-3*
A_2	*-3*	*4*	*-5*	*-5*
A_3	*4*	*-5*	*6*	*-5*
β_j	4	4	6	

Решение: Нижняя цена игры α=-3, верхняя цена игры β=4. Наша максиминная стратегия A_1; применяя ее систематически, мы можем твердо рассчитывать выиграть не менее -3 (проиграть не более 3). Минимаксная стратегия противника – любая из стратегий B_1 и B_2. Применяя их систематически, он может гарантировать, что проиграет не более 4. Если мы отступим от своей максиминной стратегии (например, выберем стратегию A_2), противник может применить стратегию B_3 и сведет наш выигрыш к -5; равным образом и отступление противника от своей минимаксной стратегии может увеличить его проигрыш до 6.

Пример 2. Рассмотрим конечную игру 3×4 с матрицей

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	*3*	*8*	*2*	*3*	*2*
A_2	*4*	*3*	*8*	*6*	*3**
A_3	*7*	*2*	*1*	*5*	*1*
β_j	*7*	*8*	*8*	*6**	

Требуется указать, какой стратегией должен пользоваться каждый из игроков (предполагается, что игроку можно пользоваться только одной единственной из своих стратегий).

Решение: Проанализируем стратегии игрока *A*. Пусть выбрана стратегия A_1, тогда, учитывая, что противник разумен и заинтересован в том, чтобы проиграть поменьше, он выберет стратегию B_3. Таким образом, число 2 – выигрыш, на который должен ориентироваться игрок A, выбирая стратегию A_1. Аналогично, выбирая стратегию A_2, игрок A должен ориентироваться на выигрыш 3, так как разумный противник выберет стратегию B_2. При стратегии A_3 игрок A может рассчитывать только на выигрыш 1. Очевидно, игрок A должен предпочесть ту стратегию, для которой выигрыш, на который A вправе рассчитывать, максимален. Здесь максимальным из минимумов является число 3 (отмечено звездочкой), следовательно, предпочтительна стратегия A_2. Значит, нижняя цена $\alpha = 3$.

Анализируем стратегии игрока B. Если он выберет стратегию B_1, игрок A ответит стратегией A_3, и B отдаст 7 единиц. Если B выберет стратегию B_2, игрок A ответит стратегией A_1, и B отдаст 8 единиц и т. д. Минимальным из этих максимумов (отмечен звездочкой) равен 6. Значит, верхняя цена $\beta=6$.

Пример 3. Излишние стратегии бывают: дублирующие и заведомо невыгодные. Рассмотрим, например, игру 4×4 с матрицей:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	4	3
A_2	0	2	3	2
A_3	1	2	4	3
A_4	4	3	1	0

Нетрудно убедиться, что стратегия A_3 в точности повторяет (дублирует) стратегию A_1, поэтому любую из них можно вычеркнуть. Далее, сравнивая почленно строки A_1 и A_2 , видим, что каждый элемент строки A_2 меньше (или равен) соответствующего элемента строки A_1. Значит, для игрока A, стремящегося к выигрышу, стратегия A_2 заведомо невыгодна. Вычеркнем и ее. Матрица приведена к виду 2×4.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	4	3
A_4	4	3	1	0

Сравнивая стратегии игрока B, стремящегося отдать как можно меньше, замечаем, что стратегия B_3 заведомо невыгодна по сравнению с B_4. Вычеркивая B_3, приведем матрицу к окончательному виду 2×3:

	B_1	B_2	B_4
A_1	1	2	3
A_4	4	3	0

В таком виде эту игру можно решать.

19.5. Индивидуальное задание

Вариативность не предполагается.

Задача 1. Финансовая компания B ведет переговоры с инициаторами трех инвестиционных проектов B_1 B_2 и B_3. Инвестиционный договор она может заключить только с одним из инициаторов проектов. Конкурирующая компания A ставит своей задачей занять место компании B в инвестировании. Компания A для достижения своей цели может применить одно из двух средств: A_1 – предложить инициаторам проектов более выгодные условия; A_2 – предоставить материалы, компрометирующие компанию B. Действие A_1 компании A приводит к отрицательному результату переговоров компании B с инициаторами проектов B_1, B_2 и B_3 соответственно с вероятностями *0,7; 0,5; 0,3*, а действие A_2 – с вероятностями *0,6; 0,9; 0,4*. Найти решение игры.

Задача 2. Дана игра 5×5 с матрицей:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	6	5	7	5
A_2	9	8	6	8	6
A_3	12	8	10	12	10
A_4	6	7	5	6	5
A_5	9	10	10	8	10

Упростить игру путем вычеркивания дублирующих и заведомо невыгодных стратегий.

19.6. Требования к отчету и защите

Показать выполненную в тетради работу. Знать ответы на сформулированные выше вопросы. Защита работы проводится во время занятий. После защиты работа помещается в ЭИОС.

20. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 19. РЕШЕНИЕ ИГРЫ В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ. ИГРЫ 2×2 И 2×N

20.1. Общие сведения

Цель: научиться решать игры в смешанных стратегиях.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: тетрадь, калькулятор.

Условия допуска к выполнению: показать конспект по теоретической подготовке.

Критерии положительной оценки: Показать выполненную работу, четко ответить на вопросы, увязать последовательность изученных разделов дисциплины.

20.2. Теоретическое введение

Наиболее простыми случаями конечных игр, которые всегда можно решить элементарными способами, являются игры 2×3 и $2\times n$.

Рассмотрим игру 2×2 с матрицей.

	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Здесь могут встретиться два случая: 1) игра имеет седловую точку и 2) игра не имеет седловой точки. В первом случае решение очевидно: это пара стратегий, пересекающихся в седловой точке. Заметим, что в игре 2×2 наличие седловой точки всегда соответствует существованию заведомо невыгодных стратегий, которые должны быть вычеркнуты при предварительном анализе.

Найти решение игры 2×2 с матрицей

	B_1	B_2	α_i
A_1	2	7	2
A_2	4	4	4*
β_j	4*	7	

Решение: $\alpha=\beta=\nu=4$. Оптимальные стратегии сторон – A_2 и B_1. Одновременно замечаем, что для игрока B стратегия B_2 заведомо невыгодна и должна быть вычеркнута заранее до решения задачи.

Рассмотрим второй случай. Пусть седловой точки нет, и, следовательно, нижняя цена игры не равна верхней ($\alpha\neq\beta$). Найдем оптимальную смешанную стратегию игрока A:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$$

Для этого воспользуемся свойством оптимальной стратегии: если A будет применять свою оптимальную стратегию S_A^*, то его выигрыш ν останется неизменным, как бы ни поступала сторона B, если только она не выйдет за пределы своих активных стратегий. Но в нашем случае обе стратегии игрока B – B_1 и B_2 – заведомо активные (иначе игра имела бы седловую точку). Значит, если сторона A будет пользоваться своей стратегией S_A^*, то B может выбрать любую из своих стратегий (B_1 или B_2), не меняя выигрыша ν. Найдем средний выигрыш, если A будет пользоваться смешанной стратегией S_A^*, а B – чистой стратегией

B_1. Среднее значение (математическое ожидание) выигрыша будет равно $a_{11}p_1+a_{21}p_2$. Аналогично, если противник будет пользоваться стратегией B_2, средний выигрыш будет $a_{12}p_1+a_{22}p_2$. В обоих случаях он будет равен цене игры v. Получим два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v \end{aligned}\right\} (*)$$

Учитывая, что $p_1+p_2=1$, получаем

$$a_{11}p_1 + a_{21}(1 - p_1) = a_{12}p_1 + a_{22}(1 - p_1),$$

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

откуда находим оптимальную частоту первой стратегии p_1:

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \quad (**)$$

Частота $p_2=1–p_1$. Цену игры v найдем, подставляя p_1, p_2 в любое из уравнений (*).

Так как цена игры v известна, то для определения оптимальной стратегии игрока B $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$ достаточно одного уравнения, например, $a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v$, откуда, учитывая, что $q_1+q_2=1$ имеем

$$q_1 = \frac{v - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}, \qquad q_2 = 1 - q_1 \ (***)$$

Литература:

Воробейкина, И.В. Исследование операций и теория игр: учеб. пособие / И.В. Воробейкина. – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2019. – 150 с.

Глава 2. Предмет теории игр. 2.2. Нижняя и верхняя цена игры. Принцип «минимакса». 2.3. Чистые и смешанные стратегии. Решение игры в смешанных стратегиях.

20.3. Задание к практической работе.

Вопросы, на которые необходимо дать ответ:

1. Если в игре имеется седловая точка, значит ли это, что игра решается в смешанных стратегиях? Обоснуйте свой ответ.
2. Запишите формулы вычисления оптимальной частоты стратегий.

20.4. Методические указания и порядок выполнения работы

У игрока A имеется два вида вооружений A_1 и A_2, у противника B – два вида помех B_1 и B_2. Вероятность выполнения боевой задачи при различных комбинациях «вооружение – помехи» задана матрицей 2×2

	B_1	B_2	α_i
A_1	*0,2*	*0,8*	*0,2*
A_2	*0,7*	*0,3*	*0,3**
β_j	*0,7**	*0,8*	

Найти решение игры.

Решение: $\alpha=0,3$, $\beta=0,7$. Игра не имеет седловой точки. По формуле (**) получим

$$p_1 = \frac{0,3-0,7}{0,2+0,3-0,8-0,7} = \frac{-0,4}{-1,0} = 0,4; \text{ отсюда } p_2 = 1 - p_1 = 0,6.$$

Цена игры $v=0,2\cdot0,4+0,7\cdot0,6=0,5$.

По формуле (***) $q_1 = \frac{0,5-0,8}{0,2-0,8} = 0,5, \quad q_2 = 1 - 0,5 = 0,5$

Таким образом, оптимальные стратегии стратегии игроков A и B найдены:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \text{ и } S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix},$$

То есть игрок A должен в *40%* всех случаев применять вооружение A_1, а в *60%* – вооружение A_2. Игрок B должен в половине всех случаев применить помехи B_1, а в половине – помехи B_2. Если обе стороны (или, по крайней мере, одна из них) будут применять свои оптимальные стратегии, то вероятность выполнения боевой задачи будет равна $v=0,5$.

20.5. Индивидуальное задание

Вариативность не предполагается.

Задача. Цех-заготовитель (игрок A) поставляет в сборочный [illegible] B) детали двух видов a и b. Определены два срока поставок этих дет[illegible] чение рабочего дня. При поставке в первый срок деталей вида a сбор[illegible] платит заготовительному премию *50* ден. ед., при поставке этого же [illegible] второй срок выплачивается премия *20* ден. ед. При поставке издели[illegible] первый срок премия составляет *30* ден. ед., а во второй – *40* ден. ед. О[illegible] оптимальные стратегии поставок и получения деталей.

20.6. Требования к отчету и защите

Показать выполненную в тетради работу. Знать ответы на сформулированные выше вопросы. Защита работы проводится во время занятий. После защиты работа помещается в ЭИОС.

21. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 20. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ИГРЫ 2×2

21.1. Общие сведения

Цель: научиться решать игры с помощью графиков.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: тетрадь, калькулятор.

Условия допуска к выполнению: показать конспект по теоретической подготовке.

Критерии положительной оценки: Показать выполненную работу, четко ответить на вопросы, увязать последовательность изученных разделов дисциплины.

21.2. Теоретическое введение

Решению игры 2×2 можно дать простую геометрическую интерпретацию. Пусть имеется игра 2×2 с матрицей

	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Возьмем участок оси абсцисс длиной 1 (рис. 1). Левый конец участка (точка с абсциссой $x=0$) будет изображать стратегию A_1, правый конец участка ($x=1$) – стратегию A_2. Проведем через точки A_2 и A_2 два перпендикуляра к оси абсцисс: ось I–I и ось II–II. На оси I–I будем откладывать выигрыши при стратегии A_1; на оси II–II– выигрыши при стратегии A_2.

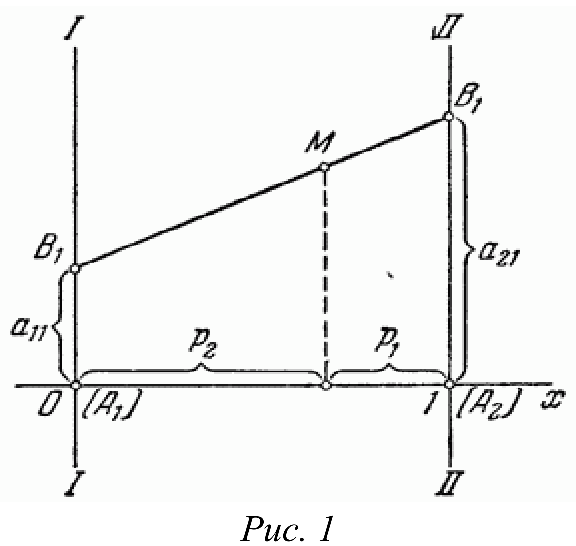


Рис. 1

Рассмотрим стратегию противника B_1; она дает две точки на осях I–I и II–II с ординатами соответственно a_{11} и a_{21}. Проведем через эти точки прямую. Очевидно, если мы при стратегии противника B_1 будем применять смешанную стратегию $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$, то наш средний выигрыш, равный в этом случае $a_{11}p_1+a_{12}p_2$, изобразится точкой M на прямой B_1B_1; абсцисса этой точки равна p_2. Прямую B_1B_1; изображающую выигрыш при стратегии B_1; будем условно называть «стратегией B_1». Очевидно, точно таким же способом может быть построена и стратегия B_2 (рис. 2).

Нам нужно найти оптимальную стратегию S_A^*, т. е. такую, для которой минимальный выигрыш (при любом поведении B) обращался бы в максимум.

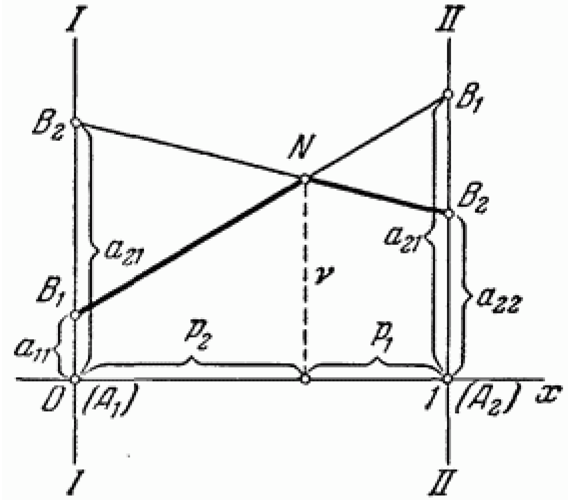


Рис. 2

Для этого построим нижнюю границу выигрыша при стратегиях B_1 и B_2, т. е. ломаную B_1NB_2, отмеченную на рис. 2 жирной линией. Эта нижняя граница будет выражать минимальный выигрыш игрока A при любых его смешанных стратегиях; точка N, в которой этот минимальный выигрыш достигает максимума, и определяет решение и цену игры. Нетрудно убедиться, что ордината точки N есть цена игры v, а ее абсцисса равна p_2 – частоте применения стратегии A_2 в оптимальной смешанной стратегии S_A^*.

Приходим к следующему графическому способу нахождения оптимальной стратегии игрока A:

- построить линии стратегий игрока B;
- обвести нижнюю границу выигрыша;
- найти на ней максимум; он будет равен цене игры v и разделит отрезок между точками A_1 и A_2 в отношении p_2/p_1.

Аналогично ищется оптимальная стратегия игрока B, только вместо нижней границы выигрыша строится верхняя граница, и на ней искать не максимум, а минимум.

Так же может быть решена любая игра $2\times n$, где у нас имеются всего две стратегии, а у противника – произвольное число.

Пусть мы располагаем двумя стратегиями: A_1 и A_2, а противник – n стратегиями: $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Матрица $\|a_{ij}\|$ задана; она состоит из двух строк и n столбцов. Аналогично случаю двух стратегий дадим задаче геометрическую интерпретацию; n стратегий противника изобразятся n прямыми (рис. 3). Строим нижнюю границу выигрыша (ломаную B_1MNB_2) и находим на ней точку N с максимальной ординатой. Эта точка дает решение игры (стратегию $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$); ордината точки N равна цене игры ν, а абсцисса равна частоте p_2 стратегии A_2.

В данном случае оптимальная стратегия противника получается применением смеси двух активных стратегий: B_2 и B_4, пересекающихся в точке N. Стратегия B_3 является заведомо невыгодной, а стратегия B_1 – невыгодной при оптимальной стратегии S_A^*. Если A будет придерживаться своей оптимальной стратегии, то выигрыш не изменится, какой бы из своих «полезных» стратегий ни пользовался B, однако, он изменится, если B перейдет к стратегиям B_1 или B_3. В теории игр доказывается, что у любой конечной игры $m\times n$ имеется решение, в котором число активных стратегий той и другой стороны не превосходит наименьшего из двух чисел m и n.

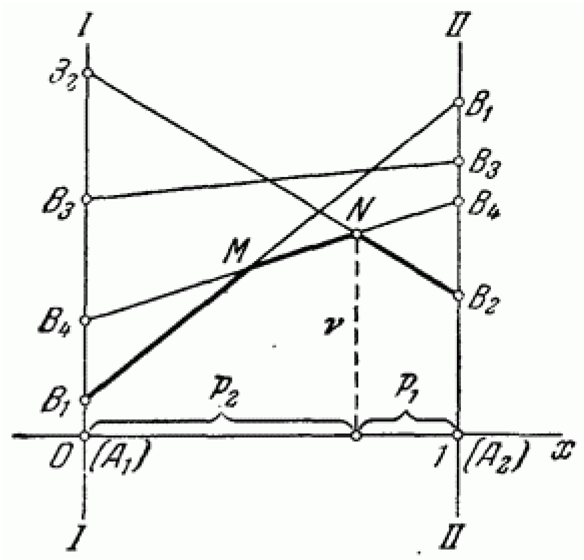


Рис. 3

В частности, из этого следует, что у игры $2\times n$ всегда имеется решение, в котором с той и другой стороны участвует не более двух «полезных» стратегий.

Пользуясь геометрической интерпретацией, можно дать простой способ решения любой игры $2\times n$. По чертежу находим пару «полезных» стратегий противника B_j и B_k, пересекающиеся в точке N (если в точке N пересекается более двух стратегий, берем любые две из них). Мы знаем, что если игрок A придерживается своей оптимальной стратегии, то выигрыш не зависит от того, в какой пропорции применяет B свои «полезные» стратегии, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} p_1a_{1j} + p_2a_{2j} &= \nu \\ p_1a_{1k} + p_2a_{2k} &= \nu \end{aligned}\right\}$$

Из этих уравнений и условия $p_2=1-p_1$, находим p_1, p_2 и цену игры v. Зная цену игры, можно сразу определить оптимальную стратегию $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$ игрока B. Для этого решается, например, уравнение: $q_j a_{1j} + qka_{1k} = v$, где $q_j + q_k = 1$.

В случае, когда мы располагаем n стратегиями, а противник – всего двумя, задача решается аналогичным способом.

Литература:

Воробейкина, И.В. Исследование операций и теория игр: учеб. пособие / И.В. Воробейкина. – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2019. – 150 с.

Глава 2. Предмет теории игр. 2.4. Элементарные методы решения игр. Игры 2×2 и $2\times n$. 2.5. Геометрическая интерпретация игры 2×2.

21.3. Задание к практической работе.

Вопросы, на которые необходимо дать ответ:

1. Расскажите, как строятся графики при решении игр.
2. Можно ли графически решить задачу $3\times n$? $4\times n$?

21.4. Методические указания и порядок выполнения работы

Упростить матрицу и решить игру аналитически и графически:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	6	5	7	5
A_2	9	8	6	8	6
A_3	12	8	10	12	10
A_4	6	7	5	6	5
A_5	9	10	10	8	10

Решение. Стратегия A_1, A_2, A_4 заведомо невыгодны. Вычеркнем их.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	6	5	7	5
A_2	9	8	6	8	6
A_3	12	8	10	12	10
A_4	6	7	5	6	5
A_5	9	10	10	8	10

Матрица приведена к виду 2×5:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_3	12	8	10	12	10
A_5	9	10	10	8	10

Стратегии B_1, B_3, B_5 заведомо невыгодны. Вычеркивая их, приведем матрицу к окончательному виду 2×2:

	B_2	B_4
A_3	8	12
A_5	10	8

В таком виде эту игру можно решать.

	B_2	B_4	α_i
A_3	8	12	8
A_5	10	8	8*
β_j	10*	12	

α=8, β=10. Игра не имеет седловой точки, следовательно, ищем решение в области смешанных стратегий.

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

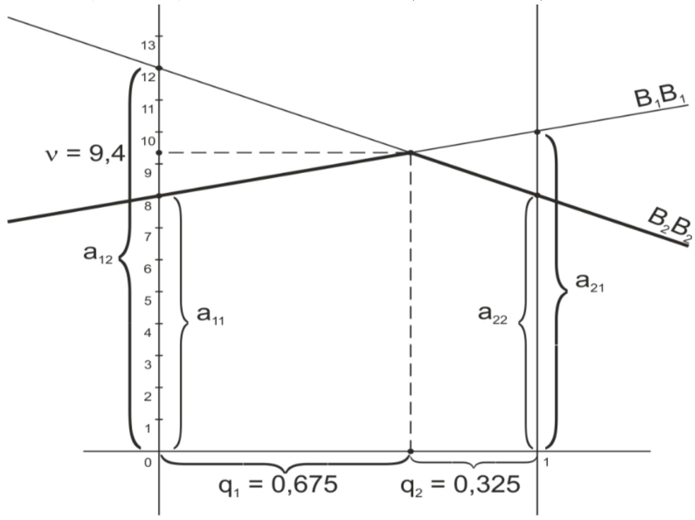
$$p_1 = \frac{8-10}{8+8-12-10} = \frac{1}{3} = 0{,}3;\ \text{ отсюда } p_2 = 1 - p_1 = 0{,}7$$

Цена игры $\nu = a_{11}p_1 + a_{21}p_2$, *ν=8×0,3+10×0,7=9,4.*

$q_1 = \frac{\nu - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}$, $q_1 = \frac{9{,}4-12}{8-12} = 0{,}675$, $\quad q_2 = 1 - 0{,}675 = 0{,}325$.

Таким образом, оптимальные стратегии стратегии игроков *А* и *В* найдены:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_3 & A_5 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \text{ и } S_B^* = \begin{pmatrix} B_2 & B_4 \\ 0{,}675 & 0{,}325 \end{pmatrix}$$



21.5. Индивидуальное задание

Вариативность не предполагается.

Задача 1. Решить графически. Пусть дана игровая матрица, найти оптимальную смешанную стратегию игрока А.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	3	6	2,5

A_2	5	3	2	4

Задача 2. Решить игру аналитически и графически:

Цех-заготовитель (игрок *A*) поставляет в сборочный цех (игрок *B*) детали двух видов *a* и *b*. Определены два срока поставок этих деталей в течение рабочего дня. При поставке в первый срок деталей вида *a* сборочный цех платит заготовительному премию *50* ден. ед., при поставке этого же изделия во второй срок выплачивается премия *20* ден. ед. При поставке изделий вида *b* в первый срок премия составляет *30* ден. ед., а во второй – *40* ден. ед. Определить оптимальные стратегии поставок и получения деталей.

21.6. Требования к отчету и защите

Показать выполненную в тетради работу. Знать ответы на сформулированные выше вопросы. Защита работы проводится во время занятий. После защиты работа помещается в ЭИОС.

22. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 21. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ИГР ПРИ M>2, N>2

22.1. Общие сведения

Цель: познакомиться с методами решения конечных игр $m \times n$ при $m>2$, $n>2$.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: тетрадь, калькулятор.

Условия допуска к выполнению: показать конспект по теоретической подготовке.

Критерии положительной оценки: показать выполненную работу, четко ответить на вопросы, увязать последовательность изученных разделов дисциплины.

22.2. Теоретическое введение

Решение игры $m \times n$ – трудная задача, сложность ее возрастает с увеличением m и n. Геометрическая интерпретация применима и для решения игр $3 \times n$, но мало чем помогает (значительно менее наглядна, чем $2 \times n$); если $m \geq 4$, $n \geq 4$, то она вообще неприменима. Но часто удается уменьшить число стратегий, объединяя некоторые из них в смешанные, например, из соображений симметрии.

Если решается игра $m \times m$, (с одинаковым числом стратегий с той и другой стороны), всегда имеет смысл проверить, не является ли она полностью усредненной. Для этого надо, предполагая все стратегии обеих сторон активными, попытаться решить систему $(m+1)$ уравнений с $(m+1)$ неизвестными для m вероятностей $(p_1+p_2+\ldots+p_m=1)$ и цены игры v. Если эта система имеет осмысленное решение (вероятности не отрицательны и не превышают 1), то решение игры найдено.

Литература:

Воробейкина, И.В. Исследование операций и теория игр: учеб. пособие / И.В. Воробейкина. – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2019. – 150 с.

Глава 2. Предмет теории игр. 2.6. Методы решения конечных игр при $m>2$, $n>2$.

22.3. Задание к практической работе.

Вопросы, на которые необходимо дать ответ:

1. Можно ли применить геометрическую интерпретацию для решения игр $m\times n$

если $m\geq 4$, $n\geq 4$?

2. Что такое полностью усредненная игра?

22.4. Методические указания и порядок выполнения работы

Пример. Решить игру

Решение. Матрица игры 3×4

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	0	1	1	p_2	0
A_2	1	0	p_2	1	0
A_3	1	1	p_1	p_1	p_1
β_j	1	1	1	1	

Здесь $\alpha=p_1$, $\beta=1$. Игра имеет решение в области смешанных стратегий. Из соображений симметрии задачи видно, что в оптимальную смешанную стратегию стороны A, какова бы она ни была, стратегии A_1 и A_2 должны входить с одинаковыми частотами $p_1= p_2$.

Объединим стратегии A_1 и A_2 в одну (обозначим A_{12}). Стратегия A_{12} будет состоять в том, что с вероятностью $1/2$ будет применяться A_1, а с вероятностью $1/2$ – A_2. Выигрыш при этой стратегии – среднее арифметическое из соответствующих строк матрицы. Новая матрица:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_{12}	$0,5$	$0,5$	$1/2(1+p_2)$	$1/2(1+p_2)$
A_3	1	1	p_1	p_1

Аналогично – со стратегиями стороны *B:* объединим (смешивая с вероятностями *1/2*) стратегии B_1 и B_2, B_3 и B_4:

	B_{12}	B_{34}
A_{12}	*0,5*	$1/2(1+p_2)$
A_3	*1*	p_1

Эта игра *2×2* может быть решена при любых конкретных значениях p_1 и p_2. Пусть $p_1=0{,}5$, $p_1=0{,}75$. Тогда матрица примет вид

	B_{12}	B_{34}
A_{12}	*0,5*	*0,875*
A_3	*1*	*0,5*

Решением игры будет

$$p_{12} = \frac{0{,}5 - 1}{0{,}5 + 0{,}5 - 1 - 0{,}875} \approx 0{,}572,$$

$$p_3 = 1 - p_{12} \approx 0{,}428,$$

$$\nu = 0{,}5 \cdot 0{,}572 + 1 \cdot 0{,}428 \approx 0{,}714.$$

Оптимальная стратегия – $S_A^* = \begin{pmatrix} A_{12} & A_3 \\ 0{,}57 & 0{,}43 \end{pmatrix}$, т.е. примерно в *57%* случаев нужно посылать батальоны по одной и той же дороге, выбирая ее случайно, с вероятностью *1/2*; в остальных *43%* случаев посылать батальоны порознь.

Аналогично найдем оптимальную стратегию стороны *B:*

$$q_{12} = \frac{0{,}714 - 0{,}875}{0{,}5 - 0{,}875} \approx 0{,}43, \ \ q_{34} \approx 1 - 0{,}43 = 0{,}57,$$

$S_B^* \approx \begin{pmatrix} B_{12} & B_{34} \\ 0{,}43 & 0{,}57 \end{pmatrix}$, т. е. сторона *B* должна в *43* % случаев посылать все три батальона на защиту одной из дорог, выбирая ее случайно, с вероятностью *1/2*; в остальных *57%* случаев – посылать на одну из дорог (опять-таки выбирая ее случайно) два батальона, а на другую – один. Очевидно, при других значениях p_1 и p_2 решение будет другим. Например, если $1/2(1+p_2) < p_1$, то игра будет иметь седловую точку (стратегии A_3 и B_{34}).

22.5. Индивидуальное задание

Вариативность не предполагается.

Задача. Игроки *A* и *B* одновременно и независимо друг от друга записывают одно из трех чисел: *1, 2* и *3.* Если сумма написанных чисел четная, то *B* платит *A* эту сумму, если нечетная, то *A* платит *B.* Найти решение игры.

22.6. Требования к отчету и защите

Показать выполненную в тетради работу. Знать ответы на сформулированные выше вопросы. Защита работы проводится во время занятий. После защиты работа помещается в ЭИОС.

23. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 22. БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ РАЗМЕРА 2×2. СОСТОЯНИЕ РАВНОВЕСИЯ В БИМАТРИЧНЫХ ИГРАХ

23.1. Общие сведения

Цель: научиться решать биматричные игры.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: тетрадь, калькулятор.

Условия допуска к выполнению: показать конспект по теоретической подготовке.

Критерии положительной оценки: показать выполненную работу, четко ответить на вопросы, увязать последовательность изученных разделов дисциплины.

23.2. Теоретическое введение

Биматричная игра – это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока задаются матрицами отдельно для соответствующего игрока (в каждой матрице строка соответствует стратегии игрока *1*, столбец – стратегии игрока *2*, на пересечении строки и столбца в первой матрице находится выигрыш игрока *1*, во второй матрице – выигрыш игрока *2*).

Рассмотрим, например, конфликтную ситуацию, в которой каждый из двух участников имеет следующие возможности для выбора своей линии поведения – игрок *A* может выбрать любую из стратегий $A_1, \ldots, A_m$, игрок *B* может выбрать любую из стратегий $B_1, \ldots, B_n$.

При этом всякий раз их совместный выбор оценивается вполне определенно: если игрок *A* выбрал *i*-ю стратегию A_1, а игрок В – *k*-ю стратегию B_k, то выигрыш игрока *A* равен некоторому числу a_{ik}, а выигрыш игрока *B* – некоторому, вообще говоря, другому числу b_{ik}.

Выигрыши записывают в виде матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{ik} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mk} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

A – платежная матрица игрока *A*, *B* – платежная матрица игрока *B*.

Таким образом, в случае, когда интересы игроков различны (но не обязательно противоположны), получаются две платежные матрицы: одна – матрица выплат игроку *A*, другая – матрица выплат игроку *B*. Название подобной игры – биматричная. В общем случае биматричная игра – это игра с ненулевой суммой.

Равновесие по Нэшу. В теории игр равновесием Нэша называется тип решений игры двух и более игроков, в котором ни один участник не может увеличить выигрыш, изменив свое решение в одностороннем порядке, когда другие участники не меняют решения.

Если два игрока *A* и *B* выбрали смешанные стратегии

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_m), \text{где } x_i \geq 0,\ \ i = \overline{1,m},\ \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

и $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, где $y_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,n},\ \ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$

соответственно, то математические ожидания выигрышей игроков равны:

$E_1(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j, \qquad E_2(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j,$

Максиминные смешанные стратегии первого и второго игроков обеспечивают им гарантированные выигрыши

$\alpha = max_x min_y E_1(X,Y) \quad \beta = max_y min_x E_2(X,Y)$

соответственно вне зависимости от поведения противника.

Особое внимание уделим случаю, когда у каждого из игроков имеется ровно две стратегии, т. е. $m=n=2$.

В биматричной игре размера 2×2 платежные матрицы игроков имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

x_1, x_2 – вероятности выбора первым игроком *A* стратегий A_1, A_2,

y_1, y_2 – вероятности выбора вторым игроком *B* стратегий B_1, B_2,

причем

$x_1 + x_2 = 1 \Longrightarrow x_2 = 1 - x_1,$

$y_1 + y_2 = 1 \Longrightarrow y_2 = 1 - y_1,$

а средние выигрыши вычисляются по формулам:

$E_A(X, Y) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1(1 - y_1) + a_{21}(1 - x_1)y_1 + a_{22}(1 - x_1)(1 - y_1),$

$E_B(X, Y) = b_{11}x_1y_1 + b_{12}x_1(1 - y_1) + b_{21}(1 - x_1)y_1 + b_{22}(1 - x_1)(1 - y_1)$,

или в более удобной форме

$E_A(X, Y) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})x_1y_1 + (a_{12} - a_{22})x_1 + (a_{21} - a_{22})y_1 + a_{22}$,

$E_B(X, Y) = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})x_1y_1 + (b_{12} - b_{22})x_1 + (b_{21} - b_{22})y_1 + b_{22}$,

где $x_1 \in [0,1]$, $y_1 \in [0,1]$.

Определение: Будем говорить, что пара чисел (X^*,Y^*) определяет равновесную ситуацию, если для любых x и y таких, что $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$, выполняются одновременно следующие неравенства:

$E_A(X,Y^*) \le E_A(X^*,Y^*)$,

$E_B(X^*,Y) \le E_B(X^*,Y^*)$.

Эти неравенства означают следующее: ситуация, определяемая смешанной стратегией (X^*,Y^*), является равновесной, если отклонение от нее одного из игроков при условии, что другой сохраняет свой выбор, приводит к уменьшению выигрыша первого. Тем самым получается, что если равновесная ситуация существует, то отклонение от нее невыгодно самому игроку.

Теорема 1 (точка равновесия по Нэшу): *Всякая биматричная игра имеет хотя бы одну равновесную ситуацию в смешанных стратегиях.*

Теорема 2: *Выполнение неравенств*

$E_A(X,Y^*) \le E_A(X^*,Y^*)$,

$E_B(X^*,Y) \le E_B(X^*,Y^*)$

равносильно выполнению следующих неравенств:

$E_A(0,Y^*) \le E_A(X^*,Y^*)$, $E_A(1,Y^*) \le E_A(X^*,Y^*)$,

$E_B(X^*,0) \le E_B(X^*,Y^*)$, $E_B(X^*,1) \le E_B(X^*,Y^*)$

Другими словами, для того чтобы убедиться, что пара (X^*,Y^*) определяет равновесную ситуацию, достаточно проверить справедливость неравенства $E_A(X,Y^*) \le E_A(X^*,Y^*)$ только для двух чистых стратегий первого игрока A ($x=0$ и $x=1$) и неравенства $E_B(X^*,Y) \le E_B(X^*,Y^*)$ только для двух чистых стратегий второго игрока B ($y=0$ и $y=1$).

Теорема 3: *Для того чтобы в биматричной игре*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

пара (X,Y) определяла равновесную ситуацию, необходимо и достаточно одновременное выполнение неравенств:

$$\begin{cases} (x-1)(Cy-\alpha) \ge 0 \\ x(Cy-\alpha) \ge 0 \\ (y-1)(Dx-\beta) \ge 0 \\ y(Dx-\beta) \ge 0 \end{cases}$$

где $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$, $C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$, $\alpha = a_{22} - a_{12}$, $D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}$, $\beta = b_{22} - b_{21}$.

Литература:

Воробейкина, И.В. Исследование операций и теория игр: учеб. пособие / И.В. Воробейкина. – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2019. – 150 с.

Глава 2. Предмет теории игр. 2.8. Понятие о биматричных играх. Состояние равновесия в биматричных играх. 2.9. Биматричные игры размера 2×2. Ситуация равновесия**.**

23.3. Задание к практической работе.

Вопросы, на которые необходимо дать ответ:

1. Является ли биматричная игра игрой с нулевой суммой?
2. Что означает равновесие по Нэшу?
3. Сформулируйте три теоремы о биматричных играх.

23.4. Методические указания и порядок выполнения работы

Пример 1. «Студент – преподаватель». Студент (игрок A) готовится к зачету, который принимает преподаватель (игрок B). Определите равновесную ситуацию.

Решение. Можно считать, что у студента две стратегии: A_1 – подготовиться к сдаче зачета и A_2 – не подготовиться. У преподавателя также две стратегии: B_1 – поставить зачет и B_2 – не поставить зачет.

Таблица № 1. Выигрыш студента.

	B_1	B_2
A_1	*Оценка заслужена*	*Очень обидно*
A_2	*Удалось обмануть*	*Оценка заслужена*

Таблица № 2. Выигрыш преподавателя.

	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$
A_1	*Все нормально*	*Был неправ*
A_2	*Дал себя обмануть*	*Опять придет*

Количественно это можно выразить, например, так:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Проведя необходимые вычисления:

$C=2+1-1+0=2$, $\alpha=0+1=1$,

$D=1+3+2-1=5$, $\beta=-1+2=1$,

получаем:

$$\begin{cases} (x-1)(2y-1) \geq 0 \\ x(2y-1) \geq 0 \\ (y-1)(5x-1) \geq 0 \\ y(5x-3) \geq 0 \end{cases}$$

Отсюда следует, что

1. a) $x=1$, $y\geq 1/2$, b) $x=0$, $y\leq 1/2$, c) $x\in[0,1]$, $y=1/2$.

2. a) $y=1$, $x\geq 1/5$, b) $y=0$, $x\leq 1/5$, c) $y\in[0,1]$, $x=1/5$.

Данная игра имеет три точки равновесия, две из которых отвечают чистым стратегиям игроков:

1. $x=1$, $y=1$, $X^*=(1,0)$, $Y^*=(1,0)$, $E_A(1,1)=2$, $E_B(1,1)=1$,

2. $x=0$, $y=0$, $X^*=(0,1)$, $Y^*=(0,1)$, $E_A(0,0)=0$, $E_B(0,0)=-1$,

и одна – смешанной:

$x=1/5$, $y=1/2$, $X^*=(1/5,4/5)$, $Y^*=(1/2,1/2)$,

$E_A(1/5,1/2)=2\cdot(1/5)\cdot(1/2)-1/5+1/2+0=1/2$,

$E_B(1/5,1/2)=5\cdot(1/5)\cdot(1/2)-2\cdot(1/5)-1/2-1=-7/5$.

В данной задаче наилучшим является выбор каждым из игроков первой чистой стратегии – хорошо подготовиться к зачету и поставить зачет. В этой задаче реализуется весьма редкая возможность, когда функции выигрыша каждого из игроков достигают своих максимумов одновременно. Любое отклонение от ситуации *(1, 1)* одного из игроков или обоих игроков может привести только к уменьшению их выигрышей.

Пример 2. Пусть существуют платежная матрица игрока *A* и платежная матрица игрока *B:*

$$A=\begin{pmatrix} \mathbf{6} & 2 \\ 2 & \mathbf{4} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & \mathbf{6} \\ \mathbf{8} & 2 \end{pmatrix}$$

Определить равновесную ситуацию.

Решение. В каждом столбце матрицы *A* найдем максимальный элемент. Их положение соответствует приемлемым ситуациям первого игрока, когда второй игрок выбрал стратегию *j*. Затем в каждой строке матрицы *B* выберем наибольший элемент. Их положение будет определять приемлемые ситуации второго игрока, когда первый игрок выбрал стратегию *i*.

Проведя необходимые вычисления:

$C=6-2-2+4=6$

$\alpha=4-2=2$

$D=2-6-8+2=-10$

$\beta = 2 - 8 = -6$

получаем:

$$\begin{cases} (x-1)(6y-2) \geq 0 \\ x(6y-2) \geq 0 \\ (y-1)(-10x+6) \geq 0 \\ y(-10x+6) \geq 0 \end{cases}$$

Отсюда следует, что

1. a) $x=1,\ y\geq 1/3$, b) $x=0,\ y\leq 1/3$, c) $x\in[0,1],\ y=1/3$.

2. a) $y=1,\ x\leq 3/5$, b) $y=0,\ x\geq 3/5$, c) $y\in[0,1],\ x=3/5$.

Данная игра имеет три точки равновесия, две из которых отвечают чистым стратегиям игроков:

1. $x=1,\ y=1,\ X^*=(1,0),\ Y^*=(1,0),\ E_A(1,1)=6,\ E_B(1,1)=2,$

2. $x=0,\ y=0,\ X^*=(0,1),\ Y^*=(0,1),\ E_A(0,0)=4,\ E_B(0,0)=2,$

и одна – смешанной:

$x=3/5,\ y=1/3,\ X^*=(3/5,2/5),\ Y^*=(1/3,2/3),$

Выигрыш игроков в равновесной ситуации (цена игры):

$E_A(3/5,1/3)=(6-2-2+4)\times 3/5\times 1/3+(2-4)\times 3/5+(2-4)\times 1/3+4=10/3,$

$E_B(3/5,1/3)=(2-6-8+2)\times 3/5\times 1/3+(6-2)\times 3/5+(8-2)\times 1/3+2=22/5.$

23.5. Индивидуальное задание

Вариативность не предполагается.

Задача 1. Пусть существуют платежная матрица игрока А и платежная матрица игрока В:

$$A = \begin{pmatrix} -10 & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & -2 \\ -1 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Определить равновесную ситуацию.

Задача «Дилемма узников». Игроками являются два узника, находящиеся в предварительном заключении по подозрению в совершении преступления. При отсутствии прямых улик возможности их осуждения в большой степени зависят от того, заговорят они или будут молчать.

Если оба будут молчать, то наказанием будет лишь срок предварительного заключения, и потери каждого из узников составят *(-1)*. Если сознаются, то получат срок, учитывающий признание как смягчающее обстоятельство и потери каждого из узников составят в этом случае *(-6)*. Если же заговорит только один из узников, а другой будет молчать, то в этом случае заговоривший будет выпущен на свободу, и его потери равны 0, а сохраняющий молчание получит максимально возможное наказание, и его потери составят *(-9)*.

То есть матрицы выигрышей игроков A и B описываются следующим образом: $A = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$

23.6. Требования к отчету и защите

Показать выполненную в тетради работу. Знать ответы на сформулированные выше вопросы. Защита работы проводится во время занятий. После защиты работа помещается в ЭИОС.

24. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 23. КЛАССИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ (ПРИНЦИПЫ ВАЛЬДА, ГУРВИЦА, СЭВИДЖА)

24.1. Общие сведения

Цель: научиться принимать решения в условиях **риска** и **неопределенности, пользуясь критериями** Вальда, Гурвица, Сэвиджа.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: тетрадь, калькулятор.

Условия допуска к выполнению: показать конспект по теоретической подготовке.

Критерии положительной оценки: показать выполненную работу, четко ответить на вопросы, увязать последовательность изученных разделов дисциплины.

24.2. Теоретическое введение

Возможен случай, когда неопределенность в игре вызвана не сознательным противодействием противника, а незнанием условий, в которых будет приниматься решение, случайных обстоятельств. Такие игры называются *играми с природой*.

Действия природы могут, как наносить ущерб, так и приносить прибыль. Поведение природы можно оценить статистическими методами, определить присущие ей закономерности.

Максиминный критерий Вальда. Согласно этому критерию игра с природой ведется как игра с разумным, причем агрессивным противником, делающим все для того, чтобы помешать нам достигнуть успеха. Оптимальной считается стратегия, при которой гарантируется выигрыш не меньший, чем нижняя цена игры с природой:

$$\alpha = Z_{MM} = max_i(min_j a_{ij})$$

Правило выбора решения в соответствии с критерием Вальда (максиминным критерием): *матрица решений (платежная матрица) дополняется еще одним столбцом из наименьших результатов* a_{ir} *каждой строки. Выбрать* *надлежит те варианты, в строках которых стоят наибольшие значения a_{ir} этого столбца.*

Выбранные таким образом варианты полностью исключают риск. Это означает, что принимающий решение не может столкнуться с худшим результатом, чем тот, на который он ориентируется. Какие бы условия ни встретились, соответствующий результат не может оказаться ниже Z_{MM}.

Продемонстрируем критерий Вальда на примере (см. таблицу 1 *пример вариантов решения без учета риска*).

Таблица 1

	B_1	B_2	B_3	a_{ir}	$max\ a_{ir}$
X_1	*1*	*10*	*1*	*1*	
X_2	*1,1*	*1,1*	*1,2*	*1,1*	*1,1*

Выбирая вариант X_2, предписываемый критерием Вальда, мы избегаем неудачного значения *1*, реализующего в варианте X_1 при внешнем состоянии B_1, получая вместо него при этом состоянии немного лучший результат *1,1;* зато в состоянии B_2 теряем выигрыш *10*, получая всего только *1,1*. Это пример показывает, что в многочисленных практических ситуациях пессимизм минимаксного критерия может оказаться невыгодным. Применение критерия Вальда бывает оправдано, если ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

- о возможности появления внешних состояний B_j ничего не известно;
- приходится считаться с появлением различных внешних состояний B_j;
- решение реализуется лишь один раз;
- необходимо исключить какой бы то ни было риск, т.е. ни при каких условиях B_j не допускается получать результат, меньший, чем Z_{MM}.

Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица. Представляется логичным, что при выборе решения вместо двух крайностей в оценке ситуации придерживаться некоторой промежуточной позиции, учитывающей возможность как наихудшего, так и наилучшего, благоприятного поведения природы. Такой компромиссный вариант и был предложен Гурвицем. Согласно этому подходу для каждого решения необходимо определить линейную комбинацию min и max выигрыша и взять ту стратегию, для которой эта величина окажется наибольшей, т.е. стараясь занять уравновешенную позицию, Гурвиц предложил критерий (HW), оценочная функция которого находится где-то между точками предельного оптимизма и крайнего пессимизма. Оценочная функция имеет две формы записи:

$$Z_{HW} = max_i \gamma min_j a_{ij} + (1-\gamma) max_j a_{ij},$$

где γ – ***степень пессимизма*** (коэффициент пессимизма, весовой множитель), $0 \le \gamma \le 1$.

Правило выбора согласно критерию Гурвица (HW-критерия) формулируется следующим образом: *матрица решений дополняется столбцом, содержащим средние взвешенные наименьшего и наибольшего результатов каждой строки. Выбираются те варианты Xi, в строках которых стоят наибольшие элементы a_{ir} этого столбца.*

При $\gamma=1$ критерий Гурвица тождественен критерию Вальда, а при $\gamma=0$ – критерию крайнего оптимизма (критерий азартного игрока, рекомендующий выбрать ту стратегию, при которой самый большой выигрыш в строке максимален). В технических приложениях правильно выбрать этот множитель бывает трудно. Поэтому чаще всего весовой множитель $\gamma=0,5$ принимается в качестве некоторой средней точки зрения. На выбор значения степени пессимизма оказывает влияние мера ответственности: чем серьезнее последствия ошибочных решений, тем больше желание принимающего решение застраховаться, то есть степень пессимизма γ ближе к единице.

Рассмотрим применение критерия Гурвица для данных таблицы 1 и степени пессимизма $\gamma=0,6$. Для стратегии X_1 минимальное значение равно *1*, а максимальное – *10*. Вычислим $a_{1r}=0,6\cdot1+0,4\cdot10=4,6$. Аналогично для второй стратегии. Находим максимальное значение столбца a_{ir}. В результате получим таблицу 2.

Таблица 2

	B_1	B_2	B_3	a_{ir}	$max_i\ a_{ir}$
X_1	*1*	*10*	*1*	*4,6*	*4,6*
X_2	*1,1*	*1,1*	*1,2*	*1,14*	

Следовательно, по критерию Гурвица при $\gamma=0,6$ следует выбирать стратегию X_1.

При $\gamma=0$ критерий Гурвица тождественен критерию Вальда, а при $\gamma=1$ совпадает с максиминным решением.

Критерий Гурвица предъявляет к ситуации, в которой принимается решение, следующие требования:

- о вероятностях появления B_j ничего не известно;
- с появлением состояний B_j необходимо считаться;
- реализуется лишь малое количество решений;
- допускается некоторый риск.

Критерий Сэвиджа (критерий минимакса риска). На практике, выбирая одно из возможных решений, часто останавливаются на том, осуществление которого приведет к наименее тяжелым последствиям, если выбор окажется ошибочным.

Принцип Сэвиджа особенно удобен для экономических задач и часто применяется для выбора решений в играх человека с природой. По принципу Сэвиджа каждое решение характеризуется величиной дополнительных потерь, которые возникают при реализации этого решения, по сравнению с реализацией решения, правильного при данном состоянии природы. Естественно, что правильное решение не влечет за собой никаких дополнительных потерь, и их величина равна нулю.

При выборе решения, наилучшим образом соответствующего различным состояниям природы, следует принимать во внимание только эти дополнительные потери, которые по существу, будут являться следствием ошибок выбора.

Для решения задачи строится так называемая **матрица рисков**, элементы которой показывают, какой убыток понесет игрок (ЛПР) в результате выбора неоптимального варианта решения.

Риском игрока r_{ij} при выборе стратегии $\boldsymbol{i}$ в условиях (состояниях) природы $\boldsymbol{j}$ называется разность между максимальным выигрышем, который можно получить в этих условиях и выигрышем, который получит игрок в тех же условиях, применяя стратегию i.

Если бы игрок знал заранее будущее состояние природы j, он выбрал бы стратегию, которой соответствует максимальный элемент в данном столбце: $max_j a_{ij}$, и тогда риск: $r_{ij}=max_j a_{ij} - a_{ij}$.

Критерий Сэвиджа рекомендует в условиях неопределенности выбирать решение, обеспечивающее минимальное значение максимального риска:

$Z_s=min_i max_j r_{ij}=min_i max_j(max_i a_{ij} - a_{ij})$

Рассмотрим применение критерия Сэвиджа для данных таблицы 1. Строим *матрицу рисков;* для этого находим максимальные значения для каждого столбца. Они равны *1,1; 10 и 1,2* соответственно и находим значения рисков по формуле $r_{ij}=max_j a_{ij} - a_{ij}$. Дополняем эту матрицу столбцом наибольших разностей. Выбираем те варианты, в строках которых стоит наименьшее для этого столбца значение. В результате получим таблицу 3 (матрица рисков).

Таблица 3

	B_1	B_2	B_3	a_{ir}	$max_i\ a_{ir}$
X_1	*0,1*	*0*	*0,2*	*0,2*	***0,2***
X_2	*0*	*8,9*	*0*	*8,9*	

Критерий Сэвиджа рекомендует выбрать стратегию X_1.

Литература:

Воробейкина, И.В. Исследование операций и теория игр: учеб. пособие / И.В. Воробейкина. – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2019. – 150 с.

Глава 3. Задачи теории статистических решений в условиях неопределенности и риска. 3.2. Классические критерии принятия решений (принципы Вальда, Гурвица, Сэвиджа).

24.3. Задание к практической работе.

Вопросы, на которые необходимо дать ответ:

1. Что такое игры с природой?
2. Охарактеризуйте критерии Вальда, Гурвица, Сэвиджа.

24.4. Методические указания и порядок выполнения работы

Пример. Количество учащихся в школе выражается числами *1000* (1 смена), *2000* (*2* смены) и *3000* (*3* смены). Государственное финансирование одного учащегося составляет *10* ден. ед. Потери, вызванные отказом в приеме в школу ввиду недостатка мест, – *5* ден. ед. Убытки от неполной занятости педагогов – *4* ден. ед. за каждого учащегося. Дать информацию о наиболее выгодном режиме работы школы, используя критерии Вальда, Гурвица, Сэвиджа.

Решение. В качестве игрока *А* здесь выступает орган, принимающий решение о режиме работы школы. Его чистыми стратегиями являются:

A_1 – *1* смена (*1000* учащихся);

A_2 – *2* смены (*2000* учащихся);

A_3 – *3* смены (*3000* учащихся).

Второй игрок – совокупность обстоятельств, в которых формируется поток заявлений на обучение в этой школе, т.е. природа *П*. Природа может реализовать любое из четырех состояний:

$П_1$ – поток *1000* заявлений;

$П_2$ – поток *2000* заявлений;

$П_3$ – поток *3000* заявлений;

Вычислим выигрыши a_{ij} игрока *А* при любых сочетаниях обстоятельств $(A_i,П_j)$. Наиболее благоприятными будут ситуации, когда количество поступивших заявлений совпадает с возможностями школы.

Для комбинации $(A_1,П_1)$: $a_{11}=1000\times10=18000$ ден. ед., для комбинации $(A_2,П_2)$: $a_{22}=2000\times10=20000$ ден. ед., для комбинации $(A_3,П_3)$: $a_{33}=3000\times10=20000$ ден. ед. Для случая $(A_1,П_2)$ в школу можно принять *1000* учащихся, а заявлений поступило *2000*. Потери при этом составят $(2000-1000)\times5=5000$ ден. ед., а общая прибыль $a_{12}=1000\times10-(2000-1000)\times5=5000$ ден. ед. Для случая $(A_2,П_1)$ в школу можно принять *2000* учащихся, а заявлений поступило *1000*. Потери при этом составят $1000\times4=4000$ ден. ед., а общая прибыль $a_{21}=1000\times10-(2000-1000)\times4=6000$ ден. ед. Аналогично находятся другие элементы платежной матрицы.

$a_{11}=1000\times10=10000,\ a_{22}=2000\times10=20000,\ a_{33}=3000\times10=30000,$

$a_{12}=1000\times10-(2000-1000)\times5=5000,\ a_{13}=1000\times10-(3000-1000)\times5=0,$

$a_{21}=1000\times10-(2000-1000)\times4=6000$, $a_{23}=2000\times10-(3000-2000)\times5=15000$,
$a_{31}=1000\times10-(3000-1000)\times4=2000$, $a_{32}=2000\times10-(3000-2000)\times4=16000$.

	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	*10000*	*5000*	*0*
A_2	*6000*	*20000*	*15000*
A_3	*2000*	*16000*	*30000*

Нижняя цена игры $\alpha=6000$, а верхняя цена игры $\beta=10000$. Так как $\alpha\neq\beta$, то игра не содержит седловой точки. Доминирующих стратегий у статистика нет.

Критерий Вальда. Вальд предлагает стратегию А2:

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	α_i	max α_i
A_1	*10000*	*5000*	*0*	*0*	
A_2	*6000*	*20000*	*15000*	*6000*	***6000***
A_3	*2000*	*16000*	*30000*	*2000*	

Сэвидж предлагает стратегию A_3. Матрица рисков:

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	max	min
A_1	*0*	*15000*	*30000*	*30000*	
A_2	*4000*	*0*	*15000*	*15000*	
A_3	*8000*	*4000*	*0*	*8000*	***8000***
max	10000	20000	30000		

При $\gamma=0{,}3$ Гурвиц предлагает стратегию A_3:

$\alpha_1=0{,}3\times0+0{,}7\times10000=7000;$

$\alpha_2=0{,}3\times6000+0{,}7\times20000=15800;$

$\alpha_3=0{,}3\times2000+0{,}7\times30000=21600;$

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	α_i	max
A_1	*10000*	*5000*	*0*	*7000*	
A_2	*6000*	*20000*	*15000*	*15800*	
A_3	*2000*	*16000*	*30000*	*21600*	***21600***

При $\gamma=0{,}4$ Гурвиц предлагает стратегию A_3:

$\alpha_1=0{,}4\times0+0{,}6\times10000=6000;$

$\alpha_2=0{,}4\times6000+0{,}6\times20000=14400;$

$\alpha_3=0{,}4\times2000+0{,}6\times30000=18800;$

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	α_i	max
A_1	*10000*	*5000*	*0*	*6000*	
A_2	*6000*	*20000*	*15000*	*14400*	
A_3	*2000*	*16000*	*30000*	*18800*	***18800***

24.5. Индивидуальное задание

Вариативность не предполагается.

Задача. Создается телеателье. Поток заявок на ремонт выражается числами *2000, 4000, 6000* и *8000* заявок в год. Известно, что прибыль от ремонта одного телевизора составляет *9* ден. ед. в год. Потери, вызванные отказом в ремонте ввиду недостатка мощностей, – *5* ден. ед. Убытки от простоя специалистов и оборудования при отсутствии заявок – *6* ден. ед. за каждую заявку. Дать информацию о мощности создаваемого ателье, используя критерии Вальда, Гурвица при $\gamma=0,8$, Сэвиджа.

24.6. Требования к отчету и защите

Показать выполненную в тетради работу. Знать ответы на сформулированные выше вопросы. Защита работы проводится во время занятий. После защиты работа помещается в ЭИОС.

25. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 24. ПРАВИЛО МАКСИМИЗАЦИИ СРЕДНЕГО ОЖИДАЕМОГО ДОХОДА. ПРАВИЛО МИНИМИЗАЦИИ СРЕДНЕГО ОЖИДАЕМОГО РИСКА

25.1. Общие сведения

Цель: изучить критерии максимизации среднего ожидаемого дохода и минимизации среднего ожидаемого риска

Материалы, оборудование, программное обеспечение: тетрадь, калькулятор.

Условия допуска к выполнению: показать конспект по теоретической подготовке.

Критерии положительной оценки: показать выполненную работу, четко ответить на вопросы, увязать последовательность изученных разделов дисциплины.

25.2. Теоретическое введение

Критерий (правило) максимизации среднего ожидаемого дохода. Этот критерий называется также **критерием максимума среднего выигрыша.** Если известны вероятности p_j вариантов развития реальной ситуации, то доход, получаемый при i-ом решении, является случайной величиной Q_i с рядом распределения

q_{i1}	q_{i2}	…	q_{in}
p_1	p_2	…	p_n

Здесь $Q=\|q_{ij}\|$ – исходная матрица (или матрица последствий). Математическое ожидание $M[Q_i]$ случайной величины Q_i и есть средний ожидаемый доход, обозначаемый также $\overline{Q_i}$:

$\overline{Q_i} = M[Q_i] = \sum_{j=1}^{n} p_j q_{ij}$.

Для каждого i-го варианта решения рассчитываются величины $\overline{Q_i}$, и в соответствии с рассматриваемым критерием выбирается вариант, для которого достигается $max\,\overline{Q_i} = max \sum_{j=1}^{n} p_j q_{ij}$.

Правило минимизации среднего ожидаемого риска (другое название – **критерий минимума среднего проигрыша).** В тех же условиях, что и в предыдущем случае, риск ЛПР при выборе i-го решения является случайной величиной R_i с рядом распределения

r_{i1}	r_{i2}	…	r_{in}
p_1	p_2	…	p_n

Здесь $R=\|r_{ij}\|$ – матрица рисков. Математическое ожидание $M[R_i]$ и есть средний ожидаемый риск, обозначаемый также $\overline{R_i}$:

$\overline{R_i} = M[R_i] = \sum_{j=1}^{n} p_j r_{ij}$.

Правило рекомендует принять решение, влекущее минимальный средний ожидаемый риск: $min\,\overline{R_i} = min \sum_{j=1}^{n} p_j r_{ij}$.

Литература:

Воробейкина, И.В. Исследование операций и теория игр: учеб. пособие / И.В. Воробейкина. – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2019. – 150 с.

Глава 3. Задачи теории статистических решений в условиях неопределенности и риска. 3.3. Частичная неопределенность. Правило максимизации среднего ожидаемого дохода. Правило минимизации среднего ожидаемого риска.

25.3. Задание к практической работе.

Вопросы, на которые необходимо дать ответ:

1. Что такое математическое ожидание?
2. Как найти максимальный средний ожидаемый доход?
3. Как найти минимальный средний ожидаемый риск?

25.4. Методические указания и порядок выполнения работы

Пример. Пусть для исходной матрицы последствий известны вероятности развития реальной ситуации по каждому из четырех вариантов, образующих полную группу событий: $p_1=1/2$, $p_2=1/6$, $p_3=1/6$, $p_4=1/6$. Определить: при каком варианте решения достигается наибольший средний доход и какова величина этого дохода; при каком варианте решения достигается наименьший средний ожидаемый риск и найти величину минимального среднего ожидаемого риска (проигрыша).

5	*2*	*8*	*4*
2	*3*	*4*	*12*
8	*5*	*3*	*10*
1	*4*	*2*	*8*
$p_1=1/2$	$p_2=1/6$	$p_3=1/6$	$p_4=1/6$

Решение. $\overline{Q_i} = M[Q_i] = \sum_{j=1}^{n} p_j q_{ij}$ – средний ожидаемый доход. Для каждого i-го варианта решения рассчитываются величины $\overline{Q_i}$, и в соответствии с рассматриваемым критерием выбирается вариант, для которого достигается $max\,\overline{Q_i} = max \sum_{j=1}^{n} p_j q_{ij}$

$\overline{R_i} = M[R_i] = \sum_{j=1}^{n} p_j r_{ij}$ – средний ожидаемый риск; принимается решение, влекущее минимальный средний ожидаемый риск: $min\,\overline{R_i} = min \sum_{j=1}^{n} p_j r_{ij}$.

Найдем для каждого i-го варианта решения средний ожидаемый доход:

$$\overline{Q_1} = \frac{1}{2}\times 5 + \frac{1}{6}\times 2 + \frac{1}{6}\times 8 + \frac{1}{6}\times 4 = \frac{29}{6},$$

$$\overline{Q_2} = \frac{1}{2}\times 2 + \frac{1}{6}\times 3 + \frac{1}{6}\times 4 + \frac{1}{6}\times 12 = \frac{25}{6},$$

$$\overline{Q_3} = \frac{1}{2}\times 8 + \frac{1}{6}\times 5 + \frac{1}{6}\times 3 + \frac{1}{6}\times 10 = 7,$$

$$\overline{Q_4} = \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{6}\times 4 + \frac{1}{6}\times 2 + \frac{1}{6}\times 8 = \frac{17}{6}.$$

Максимальный средний ожидаемый доход равен *7* и соответствует третьему решению.

Находим матрицу рисков.

1. Рассчитываем 1-й столбец матрицы рисков:

$r_{11} = 8 - 5 = 3;\ r_{21} = 8 - 2 = 6;\ r_{31} = 8 - 8 = 0;\ r_{41} = 8 - 1 = 7;$

2. Рассчитываем 2-й столбец матрицы рисков:

$r_{12} = 5 - 2 = 3;\ r_{22} = 5 - 3 = 2;\ r_{32} = 5 - 5 = 0;\ r_{42} = 5 - 4 = 1;$

3. Рассчитываем 3-й столбец матрицы рисков:

$r_{13} = 8 - 8 = 0;\ r_{23} = 8 - 4 = 4;\ r_{33} = 8 - 3 = 5;\ r_{43} = 8 - 2 = 6;$

4. Рассчитываем 4-й столбец матрицы рисков:

$r_{14} = 12 - 4 = 8;\ r_{24} = 12 - 12 = 0;\ r_{34} = 12 - 10 = 2;\ r_{44} = 12 - 8 = 4.$

Результаты вычислений оформим в виде таблицы.

3	*3*	*0*	*8*
6	*2*	*4*	*0*
0	*0*	*5*	*2*
7	*1*	*6*	*4*

Для каждого i-го варианта решения найдем величину среднего ожидаемого риска. На основе заданной матрицы риска R найдем:

$$\overline{R_1} = \frac{1}{2} \times 3 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times 8 = \frac{20}{6},$$

$$\overline{R_2} = \frac{1}{2} \times 6 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 4 + \frac{1}{6} \times 0 = 4,$$

$$\overline{R_3} = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{6} \times 2 = \frac{7}{6},$$

$$\overline{R_4} = \frac{1}{2} \times 7 + \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 6 + \frac{1}{6} \times 4 = \frac{32}{6}.$$

Следовательно, минимальный средний ожидаемый риск равен *7/6* и соответствует третьему решению.

25.5. Индивидуальное задание

Вариативность не предполагается.

Задача 1. Матрица последствий дополнена вероятностями возможных ситуаций pj. Найти: максимальный средний ожидаемый выигрыш; минимальный средний ожидаемый риск.

	4	*1*	*7*	*3*
	1	*2*	*3*	*11*
	7	*4*	*2*	*9*
	1	*3*	*1*	*7*
p_j	*0,3*	*0,1*	*0,2*	*0,4*

Задача 2. Предприятие осваивает рынок сбыта для своей продукции – творожков с фруктовой начинкой. В качестве начинки предлагается черника, вишня и брусника. Потребительский спрос на эту продукцию имеет следующие вероятностные параметры: потребители предпочтут творожки: с черничной начинкой с вероятностью 0,4; с вишневой начинкой с вероятностью 0,25, с брусничной начинкой с вероятностью 0,35. Прибыль (тыс. руб.) от продажи творожков при условии разного предпочтения потребителей приведена в таблице:

	Предпочитают с черникой	Предпочитают с вишней	Предпочитают с брусникой
Творог с черникой	800	400	500

Творог с вишней	200	850	300
Творог с брусникой	250	350	900

Для уменьшения неопределенности предприятие предполагает провести маркетинговое исследование, стоимость которого равна 200 тыс. руб. Определить целесообразность этого исследования.

25.6. Требования к отчету и защите

Показать выполненную в тетради работу. Знать ответы на сформулированные выше вопросы. Защита работы проводится во время занятий. После защиты работа помещается в ЭИОС.

26. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 25. СТАНДАРТНАЯ И КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМЫ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

26.1. Общие сведения

Цель: Познакомиться с задачами линейного программирования, получить представление об их геометрической интерпретации.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: тетрадь, калькулятор.

Условия допуска к выполнению: показать конспект по теоретической подготовке.

Критерии положительной оценки: показать выполненную работу, четко ответить на вопросы, увязать последовательность изученных разделов дисциплины.

26.2. Теоретическое введение

Первая стандартная форма задачи линейного программирования имеет вид

$c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\to max$

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\le b_1,$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\le b_2,$

…………………………………..

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\le b_m$

$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ \ldots\ x_n\ge 0.$

Вторая стандартная форма задачи линейного программирования имеет вид

$c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\to min$

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\geq b_1,$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\geq b_2,$

………………………………..

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\geq b_m$

$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ \ldots\ x_n\geq 0.$

Канонической формой задачи линейного программирования называется задача вида

$c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\to max(min)$

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,$

………………………………..

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m$

$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ \ldots\ x_n\geq 0.$

Функцию $c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$ называют **целевой функцией**. Вектор $\vec{c}=(c_1, c_2, \ldots , c_n)$ называют **вектором коэффициентов** линейной формы, вектор $\vec{b}=(b_1, b_2, \ldots , b_n)$ – **вектором ограничений**. Матрицу $A=[a_{ij}]$ называют матрицей коэффициентов. Любой набор чисел $\vec{x}=(x_1, x_2, \ldots , x_n)$, удовлетворяющий ограничениям задачи, называют **планом**, а множество всех планов – **допустимой областью**. Тот план, который доставляет экстремум (минимум или максимум) целевой функции, называют **оптимальным планом** или просто **решением задачи линейного программирования.**

Правила приведения задач линейного программирования к стандартной и канонической формам

1. Превращение *max* в *min* и наоборот. Если целевая функция в задаче линейного программирования задана в виде

$$c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\to min$$

то, умножая ее на (-1), приведем ее к виду

$$(-c_1)x_1+(-c_2)x_2+\ldots+(-c_n)x_n\to max$$

Аналогично можно заменить с *max* на *min.*

2. Смена знака неравенства. Если ограничение задано в виде

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n\leq b_i$$

то, умножая на (-1), получим:

$$(-a_{i1})x_1+(-a_{i2})x_2+\ldots+(-a_{in})x_n\geq -b_i$$

Аналогично, неравенство вида *больше либо равно* можно превратить в неравенство вида *меньше либо равно*.

3. Превращение равенства в систему неравенств. Если ограничение задано в виде

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n=b_i$$

то его можно заменить эквивалентной системой двух неравенств

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n\le b_i,$$

$$(-a_{i1})x_1+(-a_{i2})x_2+\ldots+(-a_{in})x_n\le -b_i$$

или такой же системой неравенств со знаками *больше либо равно*.

Указанные выше приемы позволяют приводить задачи линейного программирования к стандартной форме.

4. Превращение неравенств в равенства. Пусть исходная форма задачи линейного программирования имеет вид

$c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\to min$

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \le b_1,$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \le b_2,$

………………………………..

$a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rn}x_n \le b_r$

$a_{r+11}x_1+a_{r+12}x_2+\ldots+a_{r+1n}x_n \ge b_{r+1}$

………………………………..

$a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\ldots+a_{pn}x_n \ge b_p$

$a_{p+11}x_1+a_{p+12}x_2+\ldots+a_{p+1n}x_n=b_{p+1}$

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m$

$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ \ldots\ x_n\ge 0.$

Здесь первые r ограничений имеют вид неравенств со знаком *меньше либо равно (≤),* затем идет группа неравенств со знаком *больше либо равно (≥)* и, наконец, группа ограничений со знаком *равно (=)*.

Для приведения задачи к канонической форме, где все ограничения имеют вид равенств, вводят **дополнительные переменные** x_{n+1}, x_{n+2}, … , x_{n+p}, которые тоже считаются неотрицательными, и записывают исходную задачу в виде

$c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n+0\cdot x_{n+1}+\ldots+0\cdot x_{n+p}\to min$

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n+ x_{n+1}=b_1,$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n+ x_{n+2}=b_2,$

………………………………..

$a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rn}x_n+x_{n+r}=b_r$

$a_{r+11}x_1+a_{r+12}x_2+\ldots+a_{r+1n}x_n- x_{n+r+1}=b_{r+1}$

………………………………..

$a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\ldots+a_{pn}x_n-x_{n+p}=b_p$

$a_{p+11}x_1+a_{p+12}x_2+\ldots+a_{p+1n}x_n=b_{p+1}$

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m$

$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ \ldots\ x_n\geq 0.$

т. е. в неравенство со знаком *меньше либо равно* **добавляют** дополнительную неотрицательную переменную, а из неравенства со знаком *больше либо равно* **вычитают** дополнительную переменную. В целевую функцию эти дополнительные переменные включают с коэффициентом 0, т. е. фактически они в целевой функции отсутствуют. Сколько дополнительных переменных необходимо ввести? От x_{n+1} до x_{n+p}, где n – количество переменных в системе, p – количество неравенств в системе.

Геометрическая интерпретация задач линейного программирования

Наиболее наглядна эта интерпретация для случая $n=2$, т.е. для случая двух переменных x_1 и x_2. Пусть нам задана задача линейного программирования в стандартной форме

$c_1x_1+c_2x_2\rightarrow max$

$a_{11}x_1+a_{12}x_2\leq b_1,$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2\leq b_2,$

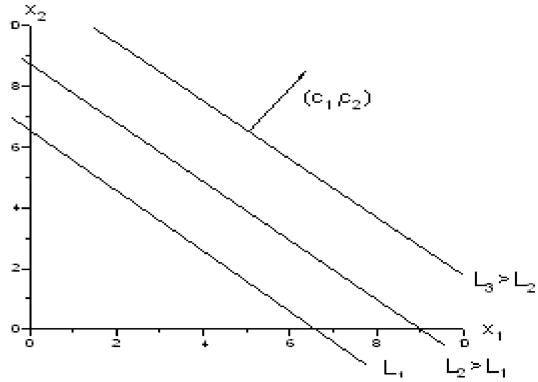
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2\leq b_m$

$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$

Возьмем на плоскости декартову систему координат и каждой паре чисел (x_1, x_2) поставим в соответствие точку на этой плоскости. Обратим, прежде всего, внимание на ограничения $x_1\geq 0,\ x_2\geq 0$. Они из всей плоскости вырезают лишь ее первую четверть. Рассмотрим теперь, какие области соответствуют неравенствам вида $a_1x_1+a_2x_2\leq b$. Сначала рассмотрим область, соответствующую равенству $a_1x_1+a_2x_2=b$. Это прямая, разбивает всю плоскость на две полуплоскости. В одной ее части $a_1x_1+a_2x_2<b$, а в другой наоборот $a_1x_1+a_2x_2>b$. Узнать, в какой полуплоскости какой знак имеет место, можно, посмотрев, какому неравенству удовлетворяет какая-то точка плоскости, например, точка (0,0).

В задаче линейного программирования, кроме системы неравенств, есть еще целевая функция $c_1x_1+c_2x_2\rightarrow max$.



Рассмотрим прямую $c_1x_1+c_2x_2=L$. Будем увеличивать L. Прямая будет двигаться параллельно самой себе в том направлении, которое дается вектором (c_1,c_2), так как это **вектор нормали** к нашей прямой и одновременно вектор градиента функции $f(x_1,x_2)=c_1x_1+c_2x_2$.

А теперь сведем все вместе.

$c_1x_1+c_2x_2\to max$

$a_{11}x_1+a_{12}x_2 \le b_1$,

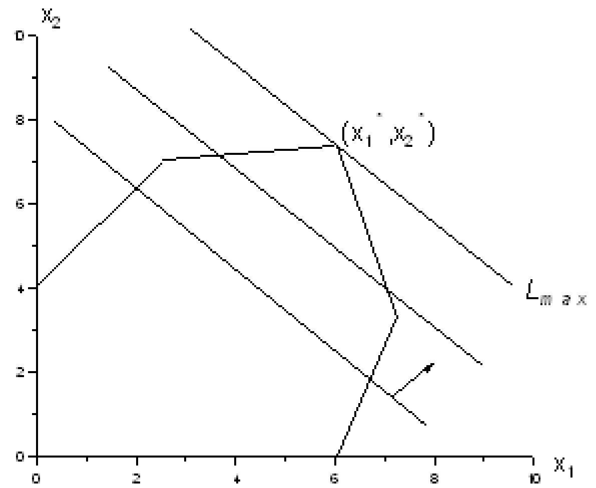
$a_{21}x_1+a_{22}x_2 \le b_2$,

…………………..

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2 \le b_m$

$x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$.

Ограничения задачи вырезают на плоскости некоторый многоугольник. Пусть при некотором L прямая $c_1x_1+c_2x_2=L$ пересекает допустимую область. Это пересечение дает какие-то значения переменных (x_1,x_2), которые являются **планами**. Увеличивая L, мы начнем двигать нашу прямую, и ее пересечение с допустимой областью будет изменяться. В конце концов, эта прямая выйдет на границу допустимой области, – как правило, это будет одна из вершин многоугольника. Дальнейшее увеличение L приведет к тому, что пересечение прямой $c_1x_1+c_2x_2=L$ с допустимой областью будет пустым. Поэтому то положение прямой $c_1x_1+c_2x_2=L$, при котором она вышла на граничную точку допустимой области, и даст решение задачи, а соответствующее значение L и будет оптимальным значением целевой функции.



Литература:

Воробейкина, И.В. Исследование операций и теория игр: учеб. пособие / И.В. Воробейкина. – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2019. – 150 с.

Глава 4. Линейное программирование. 4.2. Стандартная и каноническая формы задачи линейного программирования. 4.3. Геометрическая интерпретация задач линейного программирования.

26.3. Задание к практической работе.

Вопросы, на которые необходимо дать ответ:

1. Запишите стандартные формы задач линейного программирования.
2. Как привести к каноническому виду задачу линейного программирования?
3. Какую роль в геометрическом решении задач линейного программирования играет вектор-градиент? Как его построить?

26.4. Методические указания и порядок выполнения работы

Пример 1. Привести к каноническому виду задачу

$x_1+2x_2 \to max$

$x_1 - x_2 \geq 1$

$x_1 - 2x_2 \leq 1$

$x_1+x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Введем дополнительные переменные x_3, x_4, x_5. Переводя *max* в *min*, запишем задачу в виде

$-x_1-2x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4+0\cdot x_5 \rightarrow min$

$x_1-x_2-x_3=1$

$x_1-2x_2+x_4=1$

$x_1+x_2+x_5=3$

$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0,\ x_4\geq 0,\ x_5\geq 0,$

что и дает эквивалентную задачу в канонической форме.

Пример 2. Решить следующую задачу графическим методом.

$f(x)=2x_1+3x_2 \rightarrow max$

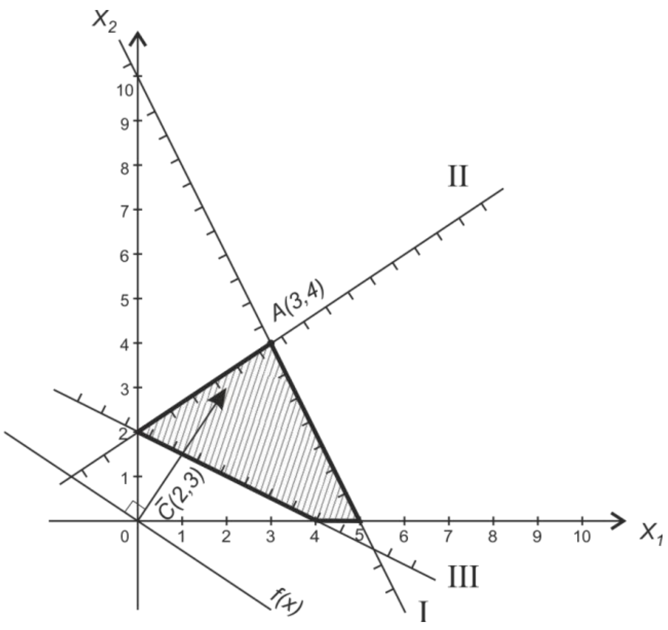
$$\begin{cases} 2x_1+x_2\leq 10 \\ -2x_1+3x_2\leq 6 \\ 2x_1+4x_2\geq 8 \\ x_i\geq 0,\ \ i=\overline{1,2} \end{cases}$$

В декартовой системе координат строим графики прямых $2x_1+x_2=10\ (I), -2x_1+3x_2=6\ (II), 2x_1+4x_2=8\ (III)$ и график целевой функции $2x_1+3x_2=L$, где L – любое число. Далее определим полуплоскости, соответствующие неравенствам в условии задачи. Обратим, прежде всего, внимание на ограничения $x_1\geq 0,\ x_2\geq 0$, из которых следует, что работать мы будем только в первом квадранте. Полуплоскость определяется следующим образом: выбирается какая-то точка первого квадранта, например, точка *(0,0)*, и подставляется в неравенство. Если в выбранной точке неравенство истинно, то решение будем искать в этой полуплоскости.

Область, определяемая неравенствами, называется *областью допустимых значений (ОДЗ)*. Геометрически ОДЗ изображается пересечением всех полуплоскостей, определяемых отдельными ограничениями (к ним, естественно, надо добавить ограничения $x_1\geq 0,\ x_2\geq 0$).

Далее строим *вектор-градиент* $\vec{c}$, который указывает, в каком направлении нужно двигать график целевой функции. Координаты вектора-градиента определяются коэффициентами при x_1 и x_2 в уравнении целевой функции. В нашем примере $\vec{c}(2,3)$.

Начнем двигать прямую целевой функции в направлении $\vec{c}$, и ее пересечение с ОДЗ будет изменяться. В конце концов, эта прямая выйдет на границу ОДЗ, – как правило, это будет одна из **вершин многоугольника**, которая и даст решение задачи.



Здесь решением является вершина *A(3,4),* которая лежит на пересечении прямых *(I)* и *(II)* (можно решить систему этих уравнений, чтобы проверить результат, полученный графически). Координаты $x_1=3$, $x_2=4$ и есть решение (**оптимальный план**) нашей задачи. При этом максимальное значение целевой функции $f=2\times3+3\times4=18$.

26.5. Индивидуальное задание

Вариативность не предполагается.

Решить следующую задачу линейного программирования графическим методом

Задача

$f(x)=x_1 +2 x_2 \rightarrow max$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \leq 12 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 16 \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,2} \end{cases}$$

26.6. Требования к отчету и защите

Показать выполненную в тетради работу. Знать ответы на сформулированные выше вопросы. Защита работы проводится во время занятий. После защиты работа помещается в ЭИОС.

27. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 26. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

27.1. Общие сведения

Цель: освоить решение задач линейного программирования симплекс-методом.

Материалы, оборудование, программное обеспечение: тетрадь, калькулятор.

Условия допуска к выполнению: показать конспект по теоретической подготовке.

Критерии положительной оценки: Показать выполненную работу, четко ответить на вопросы, увязать последовательность изученных разделов дисциплины.

27.2. Теоретическое введение

Базисным решением системы уравнений называется частное решение, в котором неосновные (небазисные) переменные имеют нулевые значения. Если все компоненты базисного решения неотрицательны, то такое решение называется ***опорным.***

При решении задач линейного программирования необходимо анализировать следующие четыре признака:

1) Признак 1: несовместимость системы ограничений задачи линейного программирования: ограничения несовместны, если в любой строке (кроме строки целевой функции), имеющей отрицательное свободное число b_i, нет ни одного отрицательного элемента.

2) Признак 2: ограниченность целевой функции: целевая функция ограниченна в области допустимых решений, т.е. существует конечное максимальное (минимальное) значение целевой функции, если на каждой итерации в каждом столбце, в строке целевой функции которого находится отрицательный (положительный) элемент, есть хотя бы один положительный элемент (**данный признак не распространяется на колонку свободных членов b_i).**

3) **Признак 3:** базисное решение будет допустимым, если в симплекс-таблице все свободные члены b_i (кроме строки целевой функции) неотрицательные.

4) Признак оптимальности решения (признак 4): найденное допустимое базисное решение будет **максимизировать (минимизировать)** целевую функцию, т.е. будет оптимальным, если в строке целевой функции все элементы (кроме элемента, расположенного в колонке свободных чисел) **положительные (отрицательные)**.

Итак, опорным решением системы линейных уравнений называется базисное решение, не содержащее отрицательных компонент. В базисном решении системы значения базисных неизвестных равны свободным членам системы, приведенной к единичному базису, и для того, чтобы базисное решение оказалось опорным, необходимо и достаточно, чтобы эти свободные члены были неотрицательными. Поэтому задачу отыскания опорных решений системы естественно начать с того, чтобы сделать все ее свободные члены неотрицательными; для этого каждое уравнение с отрицательным свободным членом достаточно умножить на *(-1)*.

Симплекс-метод – это итеративный процесс направленного решения системы уравнений по шагам, который начинается с опорного решения и в поисках лучшего варианта движется по угловым точкам области допустимого решения, улучшающих значение целевой функции до тех пор, пока целевая функция не достигнет оптимального значения.

Для симплексных преобразований справедлива следующая **теорема:**

Если все свободные члены уравнений системы неотрицательны, то после симплексных преобразований системы они останутся неотрицательными.

Сформулированная теорема подтверждает правило отыскания опорного решения методом Жордана-Гаусса, состоящее в соблюдении следующих условий:

1) все свободные члены уравнений системы должны быть неотрицательными; если есть хотя бы один отрицательный свободный член, то соответствующее ему уравнение нужно умножить на (-1);

2) в базис можно ввести только то неизвестное, у которого есть хотя бы один положительный коэффициент;

3) если при неизвестной, вводимой в базис, имеются положительные коэффициенты в нескольких уравнениях, то неизвестная вводится в базис в том уравнении, которому соответствует наименьшее отношение свободных членов к этим положительным коэффициентам.

Литература:

Воробейкина, И.В. Исследование операций и теория игр: учеб. пособие / И.В. Воробейкина. – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2019. – 150 с.

27.3. Задание к практической работе.

Вопросы, на которые необходимо дать ответ:

1. Перечислите признаки, которые должны выполняться в процессе решения задачи симплекс-методом.

2. Как определить базисные и свободные переменные?

3. Как записывается опорное решение?

27.4. Методические указания и порядок выполнения работы

Пример. Решить следующую задачу линейного программирования симплекс-методом:

$f(x)=2x_1+3x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1+3x_2 \le 18 \\ 2x_1+x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ 3x_1 \le 21 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

Решение: Исходная задача линейного программирования задана в стандартной форме. Приведем ее к каноническому виду путем введения в каждое из ограничений-неравенств дополнительной неотрицательной переменной, т. е.

$f(x)=2x_1+3x_2+0 \cdot x_3+0 \cdot x_4+0 \cdot x_5+0 \cdot x_6 \to max$

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=18 \\ 2x_1+x_2+x_4=16 \\ x_2+x_5=5 \\ 3x_1+x_6=21 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j=1 \dots 6.$

Составим расширенную матрицу:

b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
18	*1*	*3*	***1***	***0***	***0***	***0***
16	*2*	*1*	***0***	***1***	***0***	***0***
5	*0*	*1*	***0***	***0***	***1***	***0***
21	*3*	*0*	***0***	***0***	***0***	***1***

Коэффициенты при базисных переменных должны составлять единичную матрицу, следовательно, в качестве базисных выбираем переменные x_3, x_4, x_5, x_6. Свободные (небазисные) переменные – x_1 и x_2.

Сформируем исходную симплекс-таблицу. Здесь строка, где содержится целевая функция *f*, формируется следующим образом:

- выписываем коэффициенты при всех переменных в функции *f* (в таблице они выделены жирным курсивом);

-каждая из оценок в строке с f получается путем скалярного произведения левого вектора (коэффициентов при базисных переменных) на вектор-столбец свободных переменных минус коэффициент при свободных переменных в целевой функции. Например, вычислим оценку строки f в столбце x_1:

$0{\cdot}1+0{\cdot}(2)+0{\cdot}0+0{\cdot}3–2=-2;$

теперь вычислим оценку строки f в столбце x_2:

$0{\cdot}3+0{\cdot}1+0{\cdot}1+0{\cdot}0–3=-3.$

Опорное решение: $X=(x_1,x_2, x_3,x_4,x_5,x_6)$. Запишем исходную симплекс-таблицу (I итерация):

Таблица 1

			2	**3**
		b_i	x_1	x_2
0	x_3	18	1	3
0	x_4	16	2	1
0	x_5	5	0	1
0	x_6	21	3	0
	f_{max}	0	-2	-3

Выпишем опорное решение: $X=(0,0,18,16,5,21)$.

Проверка совместности системы ограничений ЗЛП. На данной итерации (в таблице 4.1) признак несовместности системы ограничений (признак 1) не выявлен.

Проверка ограниченности целевой функции. На данной итерации (в таблице 4.1) признак неограниченности целевой функции (признак 2) не выявлен.

Проверка допустимости найденного базисного решения. Так как найденное базисное решение не содержит отрицательных компонентов, то оно является допустимым.

Проверка оптимальности. Найденное базисное решение не является оптимальным, так как согласно признаку оптимальности (признак 4) в строке целевой функции не должно быть отрицательных элементов (свободное число данной строки при рассмотрении данного признака не учитывается). Следовательно, согласно алгоритму симплекс-метода, продолжаем преобразования.

Определяем **разрешающий столбец:** выбираем столбцы с отрицательными элементами в строке целевой функции (кроме столбца свободных членов). В нашей таблице два таких столбца: x_1 и x_2. Из таких столбцов выбирается тот, который содержит наименьший элемент в строке целевой функции. Этот столбец и будет разрешающим. Столбец x_2 содержит наименьший элемент *(–3)* в сравнении со столбцом x_1. Следовательно, его принимаем в качестве разрешающего. Для определения разрешающей строки находим положительные оценочные отношения свободных чисел к элементам разрешающего столбца. Строка, которой соответствует наименьшее положительное оценочное отношение, принимается в качестве разрешающей. В таблице наименьшее положительное оценочное отношение соответствует строке x_5, следовательно, она будет разрешающей. Элемент, расположенный на пересечение разрешающего столбца и разрешающей строки, принимается в качестве разрешающего. В нашем примере – это элемент $\alpha_{33}=1$, который расположен на пересечении строки x_5 и столбца x_2.

Таблица 2

	b_i	x_1	x_2	Оценочные отношения
x_3	*18*	*1*	*3*	*18/3=6*
x_4	*16*	*2*	*1*	*16/1=16*
x_5	*5*	*0*	***1***	*5/1=5 – min*
x_6	*21*	*3*	*0*	–
f_{max}	*0*	*-2*	*-3*	–

Строим симплекс-таблицу *II* итерации. Сначала заполним ячейку разрешающего элемента, потом – разрешающую строку и разрешающий столбец, а затем – по «правилу прямоугольника» – остальные элементы таблицы.

Разрешающий элемент показывает одну базисную и одну свободную переменные, которые необходимо поменять местами в симплекс-таблице, для перехода к новому «улучшенному» базисному решению. В данном случае это переменные x_5 и x_2, в новой симплекс-таблице их меняем местами.

Преобразование разрешающего элемента. Разрешающий элемент преобразовывается следующим образом: $(a_{33})^{-1}=1^{-1}=1$. Полученный результат вписываем в клетку таблицы на пересечении x_2 и x_5.

Преобразование разрешающей строки. Элементы разрешающей строки таблицы делим на разрешающий элемент данной симплекс-таблицы, результаты вписываются в аналогичные ячейки новой симплекс-таблицы.

Преобразование разрешающего столбца. Элементы разрешающего столбца делим на разрешающий элемент данной симплекс-таблицы, а результат берется с обратным знаком. Полученные результаты вписываются в аналогичные ячейки новой симплекс-таблицы.

Преобразование остальных элементов симплекс-таблицы. Преобразование остальных элементов симплекс-таблицы (т. е. элементов, не расположенных в разрешающей строке и разрешающем столбце) осуществляется по правилу «прямоугольника».

Например, рассмотрим преобразование элемента, расположенного на пересечении x_3 и b_i. В таблице мысленно вычерчиваем прямоугольник, одна вершина которого располагается в ячейке, значение которой преобразуем (т. е. в ячейке x_3b_i), а другая (диагональная вершина) – в ячейке с разрешающим элементом. Две другие вершины (второй диагонали) определяются однозначно. Тогда преобразованное значение ячейки x_3b_i будет равно прежнему значению данной клетки минус дробь, в знаменателе которой разрешающий элемент, а в числителе – произведение двух других неиспользованных вершин, т. е.:

$x_3b_i=18 – (5·3)/1=3;$

Аналогично преобразуются значения других ячеек:

$x_3x_1=1– (0·3)/1=1;$

$x_4b_i=16 – (5·1)/1=11;$

$x_4x_1=2 – (0·1)/1=2;$

$x_6b_i=21 – (5·0)/1=21;$

$x_6x_1=3 – (0·0)/1=3;$

$f_{max}b_i=0 – (5·(-3))/1=15;$

$f_{max}x_1=-2 – (0·(-3))/1=-2;$

II итерация.

В результате данных преобразований составляем новую симплекс-таблицу.

Таблица 3

	b_i	x_1	x_5	Оценочные отношения
x_3	3	1	-(3/1)=-3	
x_4	11	2	-(1/1)=-1	
x_2	5	0	1^{-1}=1	
x_6	21	3	-(0/1)=0	
f_{max}	15	-2	-(-3/1)=3	

В результате проведенных симплекс-преобразований получили новое базисное решение: $X=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=(0,5,3,11,0,21)$. Подставим полученные значения в целевую функцию: $f(x)=2x_1+3x_2=2·0+3·5=15$. Как видно, при данном базисном решении значение целевой функции $f(x)=15$, что больше чем при предыдущем базисном решении.

Проверка совместности системы ограничений. Не совместность системы ограничений в соответствии с признаком 1 в таблице 3 не выявлена.

Проверка ограниченности целевой функции. Неограниченность целевой функции в соответствии с признаком 2 в таблице 3 не выявлена.

Проверка допустимости найденного базисного решения. Найденное базисное решение в соответствии с признаком 3 допустимое, так как не содержит отрицательных компонентов.

Проверка оптимальности найденного базисного решения. Найденное базисное решение в соответствии с признаком 4 не оптимальное, так как в строке целевой функции симплекс-таблицы (таблица 3) содержится отрицательный элемент: -2 (свободное число данной строки при рассмотрении данного признака не учитывается). Следовательно, продолжаем преобразования.

Определение разрешающего столбца. Найденное базисное решение допустимое, определяем столбцы с отрицательными элементами в строке целевой функции (кроме столбца свободных членов). Согласно таблице 3, таким столбцом является только x_1. Следовательно, его принимаем в качестве разрешенного.

Определение разрешающей строки. Согласно полученным значениям положительных оценочных отношений в таблице 4, минимальным является отношение, соответствующее строке x_3. Следовательно, ее принимаем в качестве разрешенной.

Таблица 4

	b_i	x_1	x_5	Оценочные отношения
x_3	3	1	-3	$3/1=3$ – min
x_4	11	2	-1	$11/2=5{,}5$
x_2	5	0	1	–
x_6	21	3	0	$21/3=7$
f_{max}	15	-2	3	–

Преобразования симплекс-таблицы (таблицы 4) выполняются аналогично, как и в предыдущей итерации. Результаты преобразований элементов симплекс-таблицы приведены в таблице 5.

III итерация

По результатам симплекс-преобразований предыдущей итерации составляем новую симплекс-таблицу:

Таблица 5

	b_i	x_3	x_5	Оценочные отношения
x_1	$3/1=3$	$1^{-1}=1$	$-3/1=-3$	
x_4	$11–(3\cdot 2)/1=5$	$-(2/1)=-2$	$-1–(2\cdot(-3))/1=5$	
x_2	$5–(3\cdot 0)/1=5$	$-(0/1)=0$	$1–(0\cdot(-3))/1=1$	
x_6	$21–(3\cdot 3)/1=12$	$-(3/1)=-3$	$0–(3\cdot(-3))/1=9$	
f_{max}	$15–(3\cdot(-2))/1=21$	$-(-2/1)=2$	$3–((-2)\cdot(-3))/1=-3$	

Определение базисного решения. В результате проведенных симплекс-преобразований получили новое базисное решение (таблица 5): $X=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=(3,5,0,5,0,12)$. Подставим полученные значения в целевую функцию: $f(x)=2x_1+3x_2=2\cdot 3+3\cdot 5=21$. Как видно, при данном базисном решении значение целевой функции $f(x)=21$, что больше чем при предыдущем базисном решении.

Проверка совместности системы ограничений. Несовместимость системы ограничений в соответствии с признаком 1 в таблице 5 не выявлена.

Проверка ограниченности целевой функции. Неограниченность целевой функции в соответствии с признаком 2 в таблице 5 не выявлена.

Проверка допустимости найденного базисного решения. Найденное базисное решение в соответствии с признаком 3 допустимое, так как не содержит отрицательных компонент.

Проверка оптимальности найденного базисного решения. Найденное базисное решение в соответствии с признаком 4 не оптимальное, так как в строке целевой функции симплекс-таблицы (таблица 5) содержится отрицательный элемент: $–3$ (свободное число данной строки при рассмотрении данного признака не учитывается). Следовательно, продолжаем преобразования.

Определение разрешающего столбца. Найденное базисное решение допустимое, определяем столбцы с отрицательными элементами в строке целевой функции (кроме столбца свободных членов). Согласно таблице 5, таким столбцом является только один: x_5. Следовательно, его принимаем в качестве разрешенного.

Определение разрешающей строки. Согласно полученным значениям положительных оценочных отношений в таблице 6, минимальным является отношение, соответствующее строке x_4. Следовательно, ее принимаем в качестве разрешенной.

Таблица 6

	b_i	x_3	x_5	Оценочные отношения
x_1	*3*	*1*	*-3*	–
x_4	*5*	*-2*	*5*	*5/5=1 – min*
x_2	*5*	*0*	*1*	*5/1=5*
x_6	*12*	*-3*	*9*	*12/9=1*
f_{max}	*21*	*2*	*-3*	–

Преобразования симплекс-таблицы (таблицы 6) выполняются аналогично, как и в предыдущей итерации. Результаты преобразований элементов симплекс-таблицы приведены в таблице 7.

IV итерация

По результатам симплекс-преобразований предыдущей итерации составляем новую симплекс-таблицу:

Таблица 7

	b_i	x_3	x_4	Оценочные отношения
x_1	$3–(5\cdot(-3))/5=6$	$1–(-2\cdot(-3))/5=-1/5$	$-(-3/5)=3/5$	
x_5	$5/5=1$	$-2/5$	$5^{-1}=1/5$	
x_2	$5–(5\cdot1)/5=4$	$0–(-2\cdot1)/5=2/5$	$-(1/5)=-1/5$	
x_6	$12–(5\cdot9)/5=3$	$-3–(-2\cdot9)/5=3/5$	$-(9/5)=-9/5$	
f_{max}	$21–(5\cdot(-3))/5=24$	$2–(-2\cdot(-3))/5=4/5$	$-(-3/5)=3/5$	

Определение базисного решения. В результате проведенных симплекс-преобразований получили новое базисное решение, согласно таблице 7 решение следующее: $X=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=(6,4,0,0,1,3)$. Подставим полученные значения в целевую функцию: $f(x)=2x_1+3x_2=2\cdot6+3\cdot4=24$. Как видно, при данном базисном решении значение целевой функции $f(x)=24$, что больше чем при предыдущем базисном решении.

Проверка совместности системы ограничений. Несовместимость системы ограничений в соответствии с признаком 1 в таблице 7 не выявлена.

Проверка ограниченности целевой функции. Неограниченность целевой функции в соответствии с признаком 2 в таблице 7 не выявлена.

Проверка допустимости найденного базисного решения. Найденное базисное решение в соответствии с признаком 3 допустимое, так как не содержит отрицательных компонент.

Проверка оптимальности найденного базисного решения. Найденное базисное решение в соответствии с признаком 4 оптимальное, так как в строке целевой функции симплекс-таблицы (таблица 7) нет отрицательных элементов (свободное число данной строки при рассмотрении данного признака не учитывается).

Проверка альтернативности решения. Найденное решение является единственным, так как в строке целевой функции (таблица 7) нет нулевых элементов (свободное число данной строки при рассмотрении данного признака не учитывается).

Ответ: оптимальное значение целевой функции рассматриваемой задачи $f_{max}=24$, которое достигается при $X=(6,4,0,0,1,3)$.

27.5. Индивидуальное задание

Вариативность не предполагается.

Задача

Решить следующие задачу линейного программирования симплекс-методом

$f(x)=-2x_1-x_2 \rightarrow max$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ -4x_2 - 2x_5 \geq -10 \\ -2x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_i \geq 0, \;\; i = \overline{1,5} \end{cases}$$

Указание: помним, что правая часть неравенств должна быть неотрицательной.

27.6. Требования к отчету и защите

Показать выполненную в тетради работу. Знать ответы на сформулированные выше вопросы. Защита работы проводится во время занятий. После защиты работа помещается в ЭИОС.

28. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном пособии на примерах рассматриваются различные математические модели, применяемые в информационной безопасности. Каждое занятие состоит из теоретических положений, упражнений. Пособие рассчитано как для начинающих, так и для тех, кто хочет усовершенствовать свои знания.

Предполагается, что студенты пользуются лекционным материалом и рекомендованной литературой, поэтому теоретический материал в полном объеме не приводится.

В основу пособия положены практические занятия, проводимые автором по дисциплине «Математические модели в информационной безопасности» для студентов специальности 10.05.03 «ИБАС».

29. ЛИТЕРАТУРА

1. Белов, В. В. Теория графов: учеб. пособие. / В. В. Белов. – Москва: Высш. шк., 1976. – 392 с.

2. Емеличев, В. А. Лекции по теории графов: учеб. пособие для студ. вузов. / В. А. Емеличев. – Москва: Наука, 1990. – 383 с.

3. Дорогов, В. Г. Введение в методы и алгоритмы принятия решений: учебное пособие / В. Г. Дорогов. – Москва: ИД Форум: Инфра-М, 2012. -240 с.

4. Шапкин, А. С. Математические методы и модели исследования операций: учебник / А. С. Шапкин. – Москва: Дашков и К, 2016. - 400 с.

5. Воробейкина, И. В. Математические модели в информационной безопасности: учебное пособие для студентов специальности 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» очной формы обучения / И. В. Воробейкина; БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ». – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2021.

6. Воробейкина, И. В. Исследование операций и теория игр: учеб. пособие / И. В. Воробейкина. – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2019. – 150 с.

7. Воробейкина, И. В. Исследование операций и теория игр. Практикум / И. В. Воробейкина. – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2020. – **6**7 с.

Локальный электронный методический материал

Ирина Владимировна Воробейкина

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
В ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Редактор Г. А. Смирнова

Уч.-изд. л. 8,5. Печ. л. 8,5

Издательство федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Калининградский государственный технический университет».
236022, Калининград, Советский проспект, 1