Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

М. Б. Лещинский

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПРОЧНОСТНЫХ РАСЧЕТОВ ИЗДЕЛИЙ МАШИНОСТРОЕНИЯ

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины для студентов,
обучающихся в магистратуре по направлению подготовки
15.04.01 Машиностроение

Калининград
Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ»
2023

УДК 519.6(075.8)

Рецензент
кандидат технических наук, доцент кафедры инжиниринга технологического оборудования ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» И. А. Соколова

Лещинский, М. Б.

Численные методы прочностных расчетов изделий машиностроения: учебно-методическое пособие по изучению дисциплины для студентов, обучающихся в магистратуре по направлению подготовки 15.04.01 Машиностроение / М. Б. Лещинский. – Калининград: Изд-во ФГБОУ ВО «КГТУ», 2023. – 33 с.

В учебно-методическом пособии по изучению дисциплины «Численные методы прочностных расчетов изделий машиностроения» представлены учебно-методические материалы по освоению тем лекционного курса, материалы по подготовке к лабораторным работам, практическим занятиям для студентов направления подготовки 15.04.01 Машиностроение

Табл. 3, список лит. 7 – наименований

Учебное пособие рассмотрено и рекомендовано к опубликованию кафедрой инжиниринга технологического оборудования 18 января 2023 г., протокол № 4

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины рекомендовано к изданию в качестве локального электронного методического материала для использования в учебном процессе методической комиссией института агроинженерии и пищевых систем ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» 31 марта 2023 г., протокол № 3

УДК 519.6(075.8)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Вопросы надежности, прочности, долговечности и ресурса являются важнейшими в современной технике.

Вследствие непрерывно возрастающих требований к быстроходности, экономичности, надежности и к снижению массы машин расчеты на прочность становятся все более сложными. Они должны учитывать различные режимы работы, реальные свойства материалов, условия нагружения, технологические, эксплуатационные и другие факторы.

Поэтому в настоящее время достаточно широко применяются методы определения напряжений в стержнях, пластинах и оболочках, необходимые для расчетов на прочность, жесткость, устойчивость и колебания. Для решения такого рода задач в инженерных расчетах применяются компьютеры и используются численные методы расчета конструкций сложной геометрической формы с учетом упругости, пластичности и ползучести конструкционных материалов.

Целью освоения дисциплины «Численные методы прочностных расчетов изделий машиностроения» является формирование у обучающихся основных понятий и навыков применения числовых методов прочностных расчетов изделий машиностроения.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

знать:

- численные методы прочностных расчетов;
- методологические основы выявления брака;

уметь:

- применять численные методы при решении профессиональных задач;

владеть:

- инструментарием для решения математических задач в процессе выявления брака при изготовлении машиностроительных изделий.

При реализации дисциплины «Численные методы прочностных расчетов изделий машиностроения» организуется практическая подготовка путем проведения практических занятий и лабораторных работ, предусматривающих участие обучающихся в выполнении отдельных элементов работ, связанных с будущей профессиональной деятельностью.

Для успешного освоения дисциплины «Численные методы прочностных расчетов изделий машиностроения», студент должен активно работать на лекционных и практических занятиях, качественно выполнять лабораторные работы, организовывать самостоятельную внеаудиторную деятельность.

Процедура оценивания знаний, умений и навыков средством «практическое занятие» и «лабораторная работа» предусматривает двухбалльную шкалу – «зачтено» и «не зачтено», как при выполнении занятия в группе, так и индивидуально. При выполнении практических занятий и лабораторных работ группой обучающихся при оценивании учитывается степень участия каждого. При отсутствии у обучающегося доказательств участия в коллективной работе, последний не аттестуется. Оценка «не зачтено» выставляется, если студент не выполнил и не «защитил» предусмотренные рабочей программой дисциплины лабораторные работы и практические занятия.

При оценивании результатов изучения дисциплины применяют оценочные средства текущего контроля. К оценочным средствам текущего контроля относятся:

- тестовые задания по темам дисциплины;
- контрольные вопросы по лабораторным работам;
- контрольные вопросы по практическим занятиям.

Промежуточная аттестация проводится в виде:

- курсового проекта;
- экзамена.

Универсальная система оценивания результатов обучения включает в себя системы оценок: 1) «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно»; 2) «зачтено», «не зачтено»; 3) 100-балльную (процентную) систему и правило перевода оценок в пятибалльную систему (таблица 1).

Таблица 1 – Система оценок и критерии выставления оценки

Система оценок / Критерий	2	3	4	5
	0–40 %	**41–60 %**	**61–80 %**	**81–100 %**
	«неудовлетво-рительно»	**«удовлетво-рительно»**	**«хорошо»**	**«отлично»**
	«не зачтено»	**«зачтено»**		
1. Системность и полнота знаний в отношении изучаемых объектов	Обладает частичными и разрозненными знаниями, которые не может научно-корректно связывать между собой (только некоторые из	Обладает минимальным набором знаний, необходимым для системного взгляда на изучаемый объект	Обладает набором знаний, достаточным для системного взгляда на изучаемый объект	Обладает полнотой знаний и системным взглядом на изучаемый объект

Система оценок / Критерий	2	3	4	5
	0–40 %	**41–60 %**	**61–80 %**	**81–100 %**
	«неудовлетво-рительно»	**«удовлетво-рительно»**	**«хорошо»**	**«отлично»**
	«не зачтено»	**«зачтено»**		
	которых может связывать между собой)			
2. Работа с информацией	Не в состоянии находить необходимую информацию, либо в состоянии находить отдельные фрагменты информации в рамках поставленной задачи	Может найти необходимую информацию в рамках поставленной задачи	Может найти, интерпрети-ровать и систематизиро-вать необходимую информацию в рамках поставленной задачи	Может найти, систематизировать необходимую информацию, а также выявить новые, дополнительные источники информации в рамках поставленной задачи
3. Научное осмысление изучаемого явления, процесса, объекта	Не может делать научно корректных выводов из имеющихся у него сведений, в состоянии проанализировать только некоторые из имеющихся у него сведений	В состоянии осуществлять научно корректный анализ предоставлен-ной информации	В состоянии осуществлять систематичес-кий и научно корректный анализ предоставлен-ной информации, вовлекает в исследование новые релевантные задаче данные	В состоянии осуществлять систематический и научно-корректный анализ предоставленной информации, вовлекает в исследование новые релевантные поставленной задаче данные, предлагает новые ракурсы поставленной задачи
4. Освоение стандартных алгоритмов решения профессиональных задач	В состоянии решать только фрагменты поставленной задачи в соответствии с	В состоянии решать поставленные задачи в соответствии	В состоянии решать поставленные задачи в соответствии с заданным	Не только владеет алгоритмом и понимает его основы, но и предлагает

Система оценок / Критерий	2	3	4	5
	0–40 %	41–60 %	61–80 %	81–100 %
	«неудовлетво-рительно»	«удовлетво-рительно»	«хорошо»	«отлично»
	«не зачтено»	«зачтено»		
	заданным алгоритмом, не освоил предложенный алгоритм, допускает ошибки	с заданным алгоритмом	алгоритмом, понимает основы предложенного алгоритма	новые решения в рамках поставленной задачи

При необходимости для обучающихся-инвалидов или обучающихся с ОВЗ предоставляется дополнительное время для подготовки ответа с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

Для успешного освоения дисциплины «Численные методы прочностных расчетов изделий машиностроения» в учебно-методическом пособии по изучению дисциплины приводится краткое содержание каждой лекционной и практической темы занятия.

1 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Осваивая курс «Численные методы прочностных расчетов изделий машиностроения», студент должен научиться работать на лекциях, практических занятиях и организовывать самостоятельную внеаудиторную деятельность. В начале лекции необходимо уяснить цель, которую лектор ставит перед собой и студентами. Важно внимательно слушать, отмечать наиболее существенную информацию и кратко ее конспектировать; сравнивать то, что услышано на лекции с прочитанным и усвоенным ранее материалом в области применения различных материалов, укладывать новую информацию в собственную, уже имеющуюся, систему знаний. По ходу лекции необходимо подчеркивать новые термины, определения, устанавливать их взаимосвязь с изученными ранее понятиями.

Основными видами учебной деятельности в ходе изучения курса являются лекции, практические занятия и лабораторные работы.

При разработке образовательной технологии организации учебного процесса основной упор сделан на соединение активной и интерактивной форм обучения. Интерактивная форма позволяет студентам проявить самостоятельность в освоении теоретического материала и овладении практическими навыками, формирует интерес и позитивную мотивацию к учебе.

При чтении лекций преподаватель имеет право самостоятельно выбирать формы и методы изложения материала, которые будут способствовать качественному его усвоению. При этом преподаватель в установленном порядке может использовать технические средства обучения, имеющиеся на кафедре и в университете.

Вместе с тем всякий лекционный курс является в определенной мере авторским, представляет собой творческую переработку материала и неизбежно отражает личную точку зрения лектора на предмет и методы его преподавания. В этой связи представляется целесообразным привести некоторые общие методические рекомендации по построению лекционного курса и формам его преподавания.

Лекции составляют основу теоретической подготовки и посвящены наиболее важным моментам при изучении курса «Численные методы прочностных расчетов изделий машиностроения». При проведении лекций необходимо использовать технические средства обучения, ЭИОС, применять методы, способствующие активизации познавательной деятельности слушателей. На лекциях целесообразно теоретический материал иллюстрировать рассмотрением различных примеров и конкретных задач. Имеет смысл привлекать студентов к обсуждению как рассматриваемого вопроса в целом, так и отдельных моментов рассуждений и доказательств. Необходимо также использовать возможности проблемного изложения, дискуссии с целью активизации деятельности студентов.

Важным звеном во всей системе обучения является самостоятельная работа обучающихся. В широком смысле под ней следует понимать совокупность всей самостоятельной деятельности студентов как в отсутствии преподавателя, так и в контакте с ним. Она является одним из основных методов поиска и приобретения новых знаний, работы с литературой, а также выполнения предложенных заданий. Преподаватель призван оказывать в этом методическую помощь студентам и осуществлять руководство их самостоятельной работой.

Необходимо контролировать степень усвоения студентами текущего материала, а также уровень остаточных знаний по уже изученным темам.

С целью формирования мотивации и повышения интереса к предмету особое внимание при чтении курса необходимо обратить на темы, которые можно проиллюстрировать примерами из практической сферы, связывая теоретические положения с будущей профессиональной деятельностью студентов. Тематический план лекционных занятий представлен в таблице 2.

Таблица 2 – Объем (трудоемкость освоения) и структура ЛЗ

Номер темы	Содержание лекционного занятия
1	Обработка результатов измерений и погрешности вычислений
2	Интерполяция и численное дифференцирование
3	Численное интегрирование
4	Приближение функций
5	Многомерные задачи
6	Численные методы алгебры
7	Решение систем нелинейных уравнений и задач оптимизации
8	Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Если на лекции студент не получил ответа на возникшие у него вопросы, он может в конце лекции задать эти вопросы лектору курса дисциплины.

Тема № 1 **Введение. Обработка результатов измерений и погрешности вычислений**

Ключевые вопросы темы

1. Источники и классификация погрешности.
2. Запись чисел в ЭВМ.
3. Абсолютная и относительная погрешности.
4. Формы записи данных.
5. О вычислительной погрешности.
6. Погрешности функций.

Ключевые понятия: следует различать погрешности измерений и погрешности решения задач. Первые изучаются в физике, а вторые обуславливаются несколькими причинами: неточностью модели, описывающей то или иное явление, неточностью метода решения и неточностью данных на этапе ввода их для решения, или вывода результатов округления. Поэтому говорят о *неустранимых погрешностях, погрешностях метода* и *вычислительных погрешностях.*

Литература: [1, с. 17–32].

Методические рекомендации

Первая тема курса дисциплины «Численные методы прочностных расчетов изделий машиностроения» направлена на получение у обучающихся представления о базовых понятиях дисциплины, определении места дисциплины в структуре образовательной программы, планируемых результаты освоения дисциплины, возможных рисках освоения дисциплины, знакомит обучающихся с формами текущего и промежуточного контроля.

Существенную часть теории численных методов составляет построение устойчивых алгоритмов, использование которых ведёт к искажению результатов вычислений с погрешностью, находящейся в заданных пределах. В этом случае говорят о вычислительной погрешности. Например, потеря значащих цифр происходит при вычитании близких больших чисел. Если такие числа округлить с большой абсолютной погрешностью, то результат вычитания их также даст большую абсолютную погрешность. Во избежание этого такие расчёты следует проводить с двойной точностью.

Следует помнить, что *предельная абсолютная погрешность суммы или разности равна сумме предельных погрешностей,* а *предельная относительная погрешность произведения или частного равна сумме предельных относительных погрешностей.*

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое абсолютная и относительная погрешности?
2. Можно ли выражать погрешность в процентах? Какую погрешность?
3. В какой форме записывают абсолютную и относительную погрешности?
4. Чему равны погрешности суммы и разности, а также произведения и частного? О каких погрешностях в данных случаях идёт речь?

Тема № 2 **Интерполяция и численное дифференцирование**

Ключевые вопросы темы

1. Постановка задачи приближения функции.
2. Обратная интерполяция.
3. Ортогональные системы.
4. Численное дифференцирование.

Ключевые понятия: интерполяционный многочлен Лагранжа. Оценка остаточного члена. Разделенные разности. Интерполяционная формула Ньютона.

Уравнения в конечных разностях. Многочлены Чебышева. Обратная интерполяция. Ортогональные системы. Численное дифференцирование. Погрешности формул численного дифференцирования.

Литература: [1, с. 35–84].

Методические рекомендации

Одной из наиболее важных проблем численного анализа является проблема приближенного описания неизвестной функциональной зависимости по известным ее значениям в некоторых точках, называемых узловыми.

Задача ставится следующим образом.

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей, в которой для $n+1$ значений аргумента $x_0, x_1, ..., x_n$ известны $n+1$ значений функции $y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ ...,\ y_n = f(x_n)$.

Таблица

x_i	x_0	x_1	...	x_n
y_i	$y_0 = f(x_0)$	$y_1 = f(x_1)$	...	$y_n = f(x_n)$

Требуется вычислить значения функции для значений аргумента, не совпадающих с заданными в таблице. Для этого неизвестную функцию $f(x)$ заменяют функцией $F(x)$, аналитическое выражение которой известно. Эта функция $F(x)$ называется *интерполирующей функцией*, а задача её нахождения – *задачей интерполяции.* Точки $x_0, x_1, ..., x_n$ при этом называются *узлами интерполяции.*

Таким образом, при интерполяции строится функция

$$F(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + ... + c_m\varphi_m(x),$$

где $c_1, c_2, ..., c_m$ – числовые коэффициенты, которые следует определить, а $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_m(x)$ – известные функции. В качестве последних обычно используют алгебраические или тригонометрические многочлены и другие классы функций.

В общем случае интерполяционный многочлен, записанный в форме

$$\begin{aligned} L_n(x) = {} & A_0(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) + A_1(x - x_0)(x - x_2)...(x - x_n) + ... + \\ & + A_k(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})...(x - x_n) + ... + \\ & + A_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

называют многочленом *Лагранжа*.

Простейшие формулы численного дифференцирования получают в результате дифференцирования интерполяционных формул.

Допустим, известны значения функции $f(x)$ в узлах $x_0, x_1, ..., x_n$. Требуется вычислить производную $f^{(k)}\left(x_0\right)$. Строим интерполяционный многочлен $L_n(x)$ и полагаем, что $f^{(k)}(x_0) \approx L_n^{(k)}(x)$. То есть значения производных функции принимаются приближённо равными производным соответствующего порядка от многочлена интерполяции.

При аппроксимации функции интерполяционным многочленом Ньютона

$$f(x) \approx P_n(x) = y_0 + u\Delta y + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + ... + \frac{u(u-1)...(u-n+1)}{n!}\Delta^n y_0.$$

Эти формулы позволяют вычислить приближённые значения производной при любом количестве узлов. В частности, при двух узлах интерполирования (линейная интерполяция)

$$f'(x) = \frac{1}{h}\Delta y_0.$$

При трёх узлах интерполирования (квадратичная интерполяция)

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2u-1}{2}\Delta^2 y_0\right], \quad f''(x) = \frac{1}{h^2}\Delta^2 y_0.$$

Ошибка при вычислении производных существенно увеличивается при увеличении порядка производной, поэтому обычно для вычисления производных порядка выше третьего этот метод не используется.

Вопросы для самоконтроля

1. В чём состоит задача интерполяции функции?
2. Какие критерии согласия обеспечивают совпадение неизвестной функции с интерполирующей?
3. Как называется интерполяция многочленами первой и второй степени?
4. Напишите общие формулы конечных разностей 1-го, 2-го и 3-го порядков.
5. Напишите формулу интерполяционного многочлена Ньютона для пяти узлов.
6. Чему равна третья производная $f'''(x)$ при трёх узлах интерполирования?

Тема № 3 **Численное интегрирование**

Ключевые вопросы темы

1. Задачи оптимизации
2. Стандартные программы численного интегрирования.
3. Построение программ с автоматическим выбором шага интегрирования.

Ключевые понятия: квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Квадратурные формулы Гаусса. Задачи оптимизации. Формулы Эйлера и Грегори. Формулы Ромберга. Стандартные программы численного интегрирования. Построение программ с автоматическим выбором шага интегрирования.

Литература: [1, с. 86–157].

Методические рекомендации

Простейшие формулы для приближённого вычисления определённого интеграла называются *квадратурными.* В многомерном случае их называют также *кубатурными.* К простейшим квадратурным формулам относятся формулы прямоугольников, трапеций и формула Симпсона, объединённые общим названием – квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Все эти формулы основаны на *свойстве аддитивности определённого интеграла*, а именно: интеграл по сумме отрезков равен сумме интегралов по этим отрезкам. Поэтому, если нужно вычислить определённый интеграл от некоторой функции $f(x)$ вдоль отрезка $[a,b]: I=\int\limits_a^b f(x)dx$, то его можно представить в виде суммы интегралов по частичным отрезкам разбиения интервала $[a,b]$: $\sum\limits_{i=1}^{n} I_i$, где $I_i=\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$.

Задача состоит в выборе достаточного числа разбиений отрезка $[a,b]$ (отрезки $[x_i,x_{i+1}]$, как правило, выбираются одинаковыми), и удачной замене подынтегральной функции $f(x)$. Обычно она заменяется интерполяционным многочленом степени m:

$$f(x)=P_m(x)+R(x), \tag{1}$$

где $R(x)$ – остаточный член интерполяции.

Т. о., на каждом частичном промежутке

$$I_i=\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} P_m(x)dx+\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} R(x)dx=\overline{I}_i+S_i,$$

где $\overline{I}_i$ – приближённое значение интеграла на частичном промежутке,
а S_i – величина ошибки на том же промежутке.

Вопросы для самоконтроля

1. Напишите формулы прямоугольников, трапеции и Симпсона.
2. Сформулируйте обобщённую теорему о среднем.

Тема № 4 **Приближение функций**

Ключевые вопросы темы

1. Метод наименьших квадратов.

Ключевые понятия: приближение функций изучается лишь метод наименьших квадратов.

Литература: [1, с. 164–191].

Методические рекомендации

Пусть известно, что величины x и y связаны некоей функциональной зависимостью. Требуется приближенно определить эту функциональную зависимость $y=\varphi(x)$ по экспериментальным данными. Предположим, что в результате n измерений получен ряд экспериментальных точек (x_i, y_i). Мы уже знаем, что через n точек всегда можно провести кривую, аналитически выражаемую многочленом $(n-1)$- ой степени. Этот многочлен называют *интерполяционным*. Вообще, замену функции $\varphi(x)$ на функцию $\psi(x)$ так, что их значения совпадают в заданных точках

$$\varphi(x_i)=\psi(x_i),\ i=1,2,...,n, \tag{1}$$

называют *интерполяцией*.

Однако такое решение проблемы не всегда является удовлетворительным, поскольку $y_i \neq \varphi(x_i)$ из-за случайных ошибок измерения и, возможно, случайной природы самих величин *x* и *y*. Т.о., можно записать, что

$$y_i=\varphi(x_i)+\delta_i, \tag{2}$$

где δ_i – некоторая случайная ошибка. Поэтому требуется провести кривую так, чтобы она в наименьшей степени зависела от случайных ошибок. Эта задача называется *сглаживанием* (*аппроксимацией*) экспериментальной зависимости и часто решается методом *наименьших квадратов*. Сглаживающую кривую называют *аппроксимирующей*.

Задача аппроксимации решается следующим образом. В декартовой прямоугольной системе координат наносят точки (x_i, y_i). По виду расположения этих точек делается предположение о принадлежности искомой функции к определенному классу. Например, линейная $\varphi(x)=a_0+a_1x$, квадратичная $\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ и т.п. В общем случае $\varphi(x)=\varphi(x,a_0,a_1,...,a_r)$. Неизвестные параметры функции $a_0,a_1,...,a_r$ определяются из требования минимума суммы квадратов случайных ошибок, т.е. минимума величины

$$\delta=\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\varphi\left(x_i,a_0,a_1,...,a_r\right)\right)^2 . \tag{3}$$

Величина δ называется также суммарной *невязкой*. Необходимым условием минимума функции нескольких переменных является обращение в нуль частных производных невязки:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\varphi\left(x_i,a_0,a_1,...,a_r\right)\right)\frac{\partial\varphi}{\partial a_j}=0,\ \ j=0,1,...,r . \tag{4}$$

Решая систему уравнений (4), находят неизвестные параметры a_j и тем самым полностью определяют функцию, которая наилучшим образом (в смысле наименьших квадратов отклонений от исходных точек или наименьшей суммарной невязки) аппроксимирует искомую функцию $\varphi(x)$.

Рассмотрим подробнее линейную зависимость $\varphi(x)=a_0+a_1x$.

Дифференцируя (3), получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-a_0-a_1x_i\right)=0,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-a_0-a_1x_i\right)x_i=0.\end{cases} \tag{5}$$

Из первого уравнения находим $a_0=My-a_1Mx$, где

$$Mx=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\ \ My=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i . \tag{6}$$

Подставляя выражение для a_0 во второе уравнение, найдем

$$a_1=\frac{Kxy}{S^2}, \tag{7}$$

где

$$Kxy=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-Mx\right)\left(y_i-My\right),\ \ S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-Mx\right)^2 . \tag{8}$$

Таким образом,

$$\varphi(x)=\left(My-\frac{Kxy}{S^2}Mx\right)+\frac{Kxy}{S^2}x \tag{9}$$

есть искомая линейная функция.

Ввиду простоты расчетов аппроксимация линейной зависимости используется довольно часто. Кроме того, многие функции, зависящие от двух параметров, можно *линеаризовать* путем *замены переменных*.

Для этого необходимо подобрать такое преобразование исходной зависимости $y(x)=\varphi(x,a_0,a_1)$, в результате которого она приобретает линейный вид $v=b_0+b_1\cdot u$. Далее решается задача линейной аппроксимации для новой зависимости и вычисленные коэффициенты b_0 и b_1 пересчитываются в коэффициенты a_0 и a_1.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется суммарной невязкой?
2. В чём состоит условие минимума функции нескольких переменных?

Тема № 5 **Многомерные задачи**

Ключевые вопросы темы

1. Приближение функции нескольких переменных.
2. Метод Монте-Карло.

Ключевые понятия: приближение функции нескольких переменных. В этом случае часто используют метод наименьших квадратов. Другим способом получения приближения функции является т.н. метод Монте-Карло.

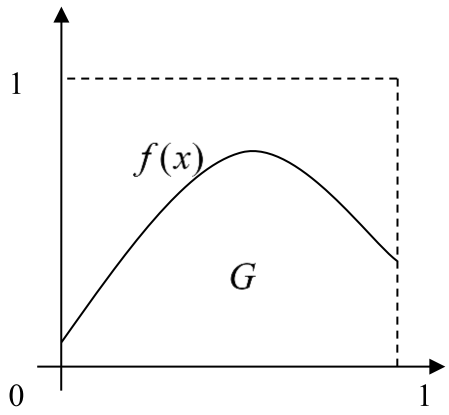
Литература: [1, с. 201–243].

Методические рекомендации

Одной из многомерных задач является приближение функции нескольких переменных. В этом случае часто используют метод наименьших квадратов, который для одномерного случая рассматривался нами в предыдущей теме. Построив аппроксимирующую функцию, мы естественным образом можем её дифференцировать и интегрировать.

Другим способом получения приближения функции является т.н. метод Монте-Карло.

Методами Монте-Карло называют обычно численные методы решения задач при помощи моделирования случайных величин. Эти методы используются для решения задач физики, радиотехники, химии, биологии, экономики.



Например, нужно вычислить определённый интеграл: $\int_0^1 f(x)dx$: $0 \le f(x) \le 1$ *при* $x \in [0,1]$. Его значение равно площади G на рисунке.

Если бросать в единичный квадрат точку, то отношение числа бросаний m, попавших в G к общему числу бросаний n даст оценку вероятности $p \approx m/n$ попадания в область G:

$p = \frac{S_G}{S_1} = \int_0^1 f(x)dx \approx \frac{m}{n}$. А это и есть искомое значение интеграла.

Тема № 6 **Численные методы алгебры**

Ключевые вопросы темы

1. Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.
2. Обращения матриц.
3. Вычисления определителей.
4. Нахождения собственных значений и собственных векторов матриц и нулей многочленов.

Ключевые понятия: при формальном подходе решение этих задач не встречает затруднений: решение системы можно найти, раскрыв определители в формуле Крамера; для нахождения собственных значений матрицы достаточно выписать характеристическое уравнение и найти его корни. Однако эти рекомендации встречают возражения со многих сторон. Методы решения алгебраических задач разделяются на точные, итерационные и вероятностные. Классы задач, для решения которые обычно применяют методы этих групп, можно условно назвать соответственно классами задач с малым, средним и большим числом неизвестных.

Литература: [1, с. 250–320].

Методические рекомендации

В общем случае задача отыскания точных значений корней уравнения $f(x)=0$ неразрешима. Даже для алгебраических уравнений выше третьей степени нет решений в виде формул с конечным числом арифметических действий.

Сформулируем задачу следующим образом:

Дано уравнение

$$f(x)=0,$$

где $f(x)$ – непрерывная функция в области D. Корни этого уравнения x^* – это те значения аргумента x, которые обращают уравнение (1) в тождество. Найти приближённое значение корня x^* с точностью ε означает указать интервал длиной не более 2ε, содержащий точное значение корня x^*.

Решение этой задачи состоит из двух этапов:

1. Отделение корня, т.е. выделение отрезка $[a,b]$ из области непрерывности функции $f(x)$, содержащего только один корень уравнения.
2. Уточнение корня, т. е. построение итерационного процесса, позволяющего сколь угодно сузить границы выделенного интервала до значения заданной точности. Первоначальные границы его можно рассматривать как нулевое приближение искомого корня (a – с недостатком, b – с избытком).

Для отделения корней уравнения нужно знать те условия, которые позволяют утверждать, что, во-первых, на промежутке $[a,b]$ есть корень уравнения, а во-вторых, что он единственный на этом промежутке.

Вопросы для самоконтроля

1. Можно ли в общем случае найти корни уравнения $f(x)=0$?
2. Какие этапы следует пройти при вычислении корней уравнения $f(x)=0$?
3. Каково условие единственности корня на отрезке $[a,b]$?

Тема № 7 **Решение систем нелинейных уравнений и задач оптимизации**

Ключевые вопросы темы

1. Решение задачи Коши с помощью формулы Тейлора.
2. Методы Рунге-Кутта.
3. Методы с контролем погрешности на шаге.
4. Оценки погрешности одношаговых методов.

5. Конечно-разностные методы.
6. Метод неопределенных коэффициентов.

Ключевые понятия: метод простой итерации и смежные вопросы. Метод Ньютона решения нелинейных уравнений. Методы спуска. Решение стационарных задач путем установления. Как оптимизировать?

Литература: [1, с. 324–352].

Методические рекомендации

Если алгебраическое или трансцендентное уравнение достаточно сложно, то его корни сравнительно редко удается найти точно. Кроме того, в некоторых случаях уравнение содержит коэффициенты, известные лишь приблизительно, и, следовательно, сама задача о точном определении корней уравнения теряет смысл. Поэтому важное значение приобретают способы приближенного нахождения корней уравнения и оценки степени их точности.

Пусть дано уравнение

$$f(x) = 0,$$

где функция $f(x)$ определена и непрерывна в некотором конечном или бесконечном интервале $a<x<b$. Всякое значение x_0, обращающее функцию $f(x$ в нуль, т. е. такое, что $f(x = 0,$ называется корнем уравнения или нулем функции $f(x)$. Мы будем предполагать, что уравнение имеет лишь изолированные корни, т. е. для каждого корня уравнения существует окрестность, не содержащая других корней этого уравнения.

Решение задачи отыскания корней нелинейного уравнения осуществляется в два этапа. Первый этап называется этапом локализации (или отделения корней), второй – этапом итерационного уточнения корней.

Вопросы для самоконтроля

1. В чём состоит задача Коши?
2. Напишите расчётную формулу метода Эйлера при решении дифференциального уравнения 1-го порядка и формулу оценки погрешности на каждом шаге.

Тема № 8 **Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений**

Ключевые вопросы темы

1. Аналитические, позволяющие получить приближенное решение в виде выражения.
2. Графические, дающие возможность приближенного построения интегральной кривой.

3. Численные, в результате применения которых, получается приближенное решение в виде таблицы значений искомой функции.

Ключевые понятия: метод Эйлера. Этот метод применяется в основном при проведении ориентировочных расчетов. Однако идеи, положенные в его основу, являются исходными при разработке многих других методов. Усовершенствованный метод Эйлера.

Литература: [1, с. 417–488].

Методические рекомендации

Метод Эйлера является наиболее простым численным методом решения обыкновенных дифференциальных уравнений и, как следствие, это достаточно грубый метод, однако его идеи легли в основу широкого класса численных методов.

Допустим, необходимо найти приближенное решение дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' = f(x, y)$$

с начальным условием:

$$y(x_0) = y_0$$

иначе говоря, необходимо решить задачу Коши.

Разложим функцию $y(x)$ в окрестности точки x_0 в ряд Тейлора:

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)\, y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} y''(x_0) + \dots,$$

который применяется для приближенного определения значения искомой функции $y(x)$. В точке $x_0 + h$ при малых значениях h достаточно использовать только два слагаемых ряда, получим

$$y(x) = y(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)\,\Delta x + O(h^2),$$

где $O(h^2)$ – бесконечно малая величина порядка h^2. В формуле сделаем следующие замены: производную функции $y'(x_0)$ заменим на правую часть уравнения

$$\Delta x = h;\ y(x_0) = y_0:$$

$$y(x_0 + h) \approx y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Теперь приближенное решение в точке $x_1 = x_0 + h$ может быть вновь рассмотрено как начальное условие, следовательно, используя соответствующую формулу, можно найти значение искомой функции в следующей точке $x_2 = x_1 + h$. Таким образом, был получен простой алгоритм решения задачи Коши, называемый методом Эйлера или методом ломаных.

Вопросы для самоконтроля

1. По каким формулам производятся вычисления в методе Эйлера?
2. В какой форме получается приближенное решение дифференциального уравнения по методу Эйлера?
3. Что можно сказать о динамике погрешности в пошаговом методе Эйлера?
4. Что представляют собой уточненные формулы Эйлера?

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Практические занятия. Посещаемость занятий и отмечается в учетной карточке, которую ведет преподаватель. Отчет о проработке каждой темы оформляется студентом индивидуально, включает в себя краткий конспект изучаемой проблемы и предъявляется преподавателю в конце занятия. Преподаватель, по завершению занятия, подводит итоги по изучаемой теме.

Самостоятельная работа студентов. В период обучения студенты должны самостоятельно контролировать усвоение материала лекций, разделов программы, выносимых на самостоятельную проработку, а также предполагает подготовку к зачету.

В ходе самостоятельной подготовки студентов к занятию необходимо не только воспользоваться литературой, рекомендованной преподавателем, но и проявить самостоятельность в отыскании новых источников, интересных фактов, статистических данных, связанных с изучаемой проблематикой семинарского занятия.

Тематический план практических (ПЗ) занятий представлен в таблице 3.

Таблица 3 – Объем (трудоёмкость освоения) и структура ПЗ

Номер темы	Содержание практического занятия
1	Исследование методов решений нелинейных уравнений
2	Методы интерполяции и экстраполяции
3	Алгебра и формирование матриц
4	Исследование решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом гаусса
5	Исследование методов решения СЛАУ и операций с матрицами
6	Аппроксимация функции по критерию наименьших квадратов
7	Исследование методов вычисления определенных интегралов
8	Исследование методов интегрирования ОДУ и систем ОДУ

Практическое занятие № 1

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель практического занятия: приобрести навыки по исследованию методов решений нелинейных уравнений

Задание

1. В *Mathcad'*е по заданному варианту уравнения $f\left(x\right)=0$ построить график $f\left(x\right)$ в диапазоне значений аргумента $-10 \le x \le 10$ и найти значение корня $x1$ (корней, если их несколько). Затем построить график $f\left(x\right)$ в диапазоне значений аргумента $x1-0.5 \le x \le x1+0.5$ и нанести на график линии сетки так, чтобы одна из горизонтальных линий проходила через нуль по оси ординат.

   Примечание:

   1 – метод деления пополам,

   2 – метод хорд,

   3 – метод касательных,

   4 – метод секущих,

   5 – метод итераций.

2. Составить алгоритм и написать код для отделения корня (корней) уравнения в диапазоне значений аргумента $-10 \le x \le 10$ с шагом $\ge 0{,}1$.

3. Составить алгоритм и написать код для уточнения значения корня (или одного из корней, если их несколько) заданным методом (методами). Получить таблицу и графики зависимостей временных затрат на уточнение корня от задаваемой погрешности ε (диапазон изменения $0{,}00001 \le \varepsilon \le 0{,}01$).

Вопросы для самоконтроля

1. Какие виды нелинейных уравнений можно решать численными методами?
2. Расскажите об отделении корней, приведя иллюстрацию для своего задания. Как выбирается величина Δx?
3. Сравните методы деления пополам и хорд.
4. Сравните методы касательных и секущих.
5. Как перейти от уравнения $f(x)=0$ к равносильному ему уравнению $x=\varphi(x)$? Объясните алгоритм метода итераций.
6. Расскажите об условиях применения методов уточнения корней.
7. Как зависит в численных методах значение функции в корне от величины задаваемой ошибки?

8. Приведите примеры комбинации методов. Поясните их целесообразность.
9. Приведите алгоритмы для получения зависимостей затрат машинного времени от ошибки для методов в задании.
10. Объясните полученные результаты.
11. Как построить класс для выполнения задания? В каких файлах и как можно разместить объявление класса и его реализацию?

Практическое занятие № 2

МЕТОДЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И ЭКСТРАПОЛЯЦИИ

Цель практического занятия: приобрести навыки практического применения методов интерполяции и экстраполяции

Интерполяция – это нахождение по ряду данных значений функции промежуточных её значений. Экстраполяция позволяет найти значения функции вне интервала интерполяции. Исходными данными для решения задач интерполяции и экстраполяции являются значения таблично заданной функции.

Задание

1. В *Mathcad'*е по заданному из таблицы варианту выполнить кусочно-линейную и сплайн-интерполяции для функции, заданной таблицей значений в точках $x_i = 2\pi i/(2n+1),$ где $i = 0, 1, ..., 2n$.

2. По заданному варианту составить алгоритм и написать код для определения параметров и построения графика интерполяционного тригонометрического многочлена. Нанести на график значения функции из таблицы.

Вопросы для самоконтроля

1. Что означают понятия интерполяции и экстраполяции?
2. Как решают задачу интерполяции и экстраполяции?
3. Каков результат решения задачи интерполяции и экстраполяции?
4. Какие методы интерполяции и почему применяют при небольшом числе узлов интерполяции?
5. Какие методы интерполяции и почему применяют при большом числе узлов интерполяции?
6. Сравните интерполяции по Лагранжу и сплайнами.
7. Какие недостатки имеют кусочно-линейная интерполяция и экстраполяция?

8. Расскажите о достоинствах и недостатках тригонометрической интерполяции.
9. Что нужно сделать с исходными данными, чтобы получить на графике существенное отличие сплайновой интерполяции от кусочно-линейной?
10. Как изменяется качество интерполяции для перечисленных методов при увеличении числа узлов интерполяции?
11. Сравните методы интерполяции по объему вычислений, т.е. по затратам машинного времени.

Практическое занятие № 3

АЛГЕБРА И ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦ

Цель практического занятия: приобрести навыки по формированию матриц и алгебраических их расчетов

Задание

1. По предложенному варианту задания (например, сформировать целочисленную матрицу и матрицу из вещественных чисел и найти их произведение) выполнить в *Mathcad'*е.

2. Разработать блок-схему алгоритма и код для выполнения задания.

Представить:

a) Формулы с пояснениями.
b) Результат выполнения задания в *Mathcad'*е.
c) Блок-схему алгоритма с таблицей идентификаторов.
d) Исходный код.
e) Входные и выходные данные программы.

Вопросы для самоконтроля

1. Как сформировать нижнюю и верхнюю треугольные матрицы?
2. Как сформировать неособенную и особенную квадратные матрицы?
3. Как сформировать неособенную квадратную матрицу с диагональным преобладанием для случаев:
4. 1) $|a_{ii}| > |a_{i1}| + |a_{i2}| + ... + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + ... + |a_{in}|$ *для всех* i,
5. 2) $|a_{ii}| > |a_{i1}| + |a_{i2}| + ... + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + ... + |a_{in}|$ *хотя бы для одного* i.
6. Приведите алгоритмы для вычисления $m-, l-, k-$ норм матрицы.
7. Как определить ранг матрицы?

8. Приведите алгоритмы формирования вектора-строки и вектора-столбца.
9. Каким свойством обладает обратная матрица? Ответ подтвердите примером.
10. Как оцениваются точность и временные затраты обращения матрицы?
11. Как получить обратную матрицу?
12. Приведите алгоритм разбиения матрицы на клетки.
13. Как сформировать квазидиагональную матрицу?
14. Приведите алгоритм окаймления матрицы.
15. Приведите алгоритм формирования ленточной матрицы.
16. Как сформировать положительно определенную матрицу?
17. Как сформировать разреженную матрицу?
18. Как сформировать ортогональную матрицу?
19. Приведите алгоритм формирования вектора транспозиции.
20. Приведите примеры алгоритмов получения эквивалентных матриц.
21. Как разложить неособенную квадратную матрицу в произведение двух матриц? Каких матриц? Когда разложение будет единственно возможным?
22. Как можно разложить в произведение матриц положительно определенную матрицу?
23. Как можно разложить в произведение матриц ленточную положительно определенную матрицу?
24. Объясните обращение матриц методом окаймления.
25. Объясните обращение матриц методом Ершова.
26. Объясните обращение матриц методом Фаддеева.

Практическое занятие № 4

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ) МЕТОДОМ ГАУССА

Цель практического занятия: приобрести навыки по исследованию решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом Гаусса

Задание

1. Решить СЛАУ в *Mathcad’*е по заданному варианту.

2. Составить алгоритм и написать код для решения СЛАУ методом Гаусса с частичным выбором ведущего коэффициента по столбцу. Заданный вариант использовать для тестирования.

3. Получить зависимости временных затрат от размера системы и усредненной точности решения от размера системы и типа представления (*float*, *double*, *long double*) коэффициентов.

Вопросы для самоконтроля

1. Когда целесообразно применять метод Гаусса?
2. Какова цель прямого хода в методе Гаусса?
3. Как выполняется обратный ход метода Гаусса?
4. На каком ходе, прямом или обратном, необходимо учитывать условия применения метода Гаусса?
5. Объясните алгоритм схемы единственного деления.
6. Объясните алгоритм схемы с частичным выбором ведущего коэффициента по столбцу.
7. Расскажите о достоинствах и недостатках схемы с полным выбором ведущего коэффициента.
8. Расскажите о методе Жордана-Гаусса.
9. Объясните зависимость временных затрат от размера системы.
10. Объясните зависимость ошибок от размера системы.
11. Представьте алгоритм получения зависимости усредненных ошибок от размера системы.
12. Объясните изменение хода зависимости усредненных ошибок от размера системы при увеличении количества усредняемых систем.

Практическое занятие № 5
ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СЛАУ И ОПЕРАЦИЙ С МАТРИЦАМИ

Цель практического занятия: приобрести навыки по исследованию методов решения СЛАУ и операций с матрицами.

Задание

1. По заданному варианту разработать алгоритм, написать и отладить код.
2. Составить тест для проверки алгоритма, получить результаты в виде таблиц и графиков.

Представить:

1) Обращение матриц методом окаймления. Исследовать точность и время обращения от размера матрицы.
2) Обращение матриц методом Ершова. Исследовать точность и время обращения от размера матрицы.

3) Обращение матриц методом Фаддеева. Исследовать точность и время обращения от размера матрицы.
4) Обращение матриц через единичную матрицу (по определению). Исследовать точность и время обращения от размера матрицы.
5) Обращение матриц через присоединенную матрицу. Исследовать точность и время обращения от размера матрицы.
6) Разложение неособенной квадратной матрицы в произведение двух треугольных матриц. Исследовать точность и время разложения от размера матрицы.
7) Разложение неособенной квадратной матрицы в произведение нижней треугольной матрицы с единичной диагональю и матрицы с ортогональными строками. Исследовать точность и время разложения от размера матрицы.
8) Разложение неособенной симметрической матрицы в произведение двух треугольных, транспонированных между собой матриц. Исследовать точность и время разложения от размера матрицы.
9) Решение СЛАУ методом Гаусса с приведением матрицы коэффициентов к обратной матрице. Сравнить по эффективности с методом Гаусса с частичным выбором ведущего коэффициента.
10) Решение СЛАУ методом ортогонализации строк матрицы коэффициентов. Сравнить по эффективности с методом Гаусса с частичным выбором ведущего коэффициента.
11) Вычислить матричное выражение двумя методами: непосредственно по записи; методом, обеспечивающим минимальные временные затраты. Сравнить методы по зависимостям временных затрат от размера матриц. $(ABC)^{-1} + E - C^{-1}B^{-1}A^{-1}$, где A, B, C – матрицы размера $n \times n$.
12) Вычислить матричное выражение двумя методами: непосредственно по записи; методом, обеспечивающим минимальные временные затраты. Сравнить методы по зависимостям временных затрат от размера матриц. $PL^T C^{-1} LP$, где $C = LL^T$, P- симметрическая матрица размера $k \times k$, L- матрица общего вида размера $n \times k$.
13) Вычислить матричное выражение двумя методами: непосредственно по записи; методом, обеспечивающим минимальные временные затраты. Сравнить методы по зависимостям временных затрат от размера матриц. $(AB - BA)^{-1}$, где A, B- квадратные матрицы с элементами:

$a_{ij} = 1$ при $j = i + 1$, $a_{ij} = 0$ при $j \neq i + 1$; $b_{ij} = d(i + 1)$ при $i = j + 1$, $b_{ij} = 0$ при $i \neq j + 1$.

14) Вычислить определитель матрицы путем ее разложения на нижнюю и верхнюю треугольные матрицы. Получить зависимости затрат машинного времени от размера матрицы.
15) Решение СЛАУ методом простой итерации (метод Якоби). Сравнить по эффективности с методом Гаусса с частичным выбором ведущего коэффициента.
16) Решение СЛАУ итерационным методом Гаусса-Зейделя. Сравнить по эффективности с методом Гаусса с частичным выбором ведущего коэффициента.

Вопросы для самоконтроля

1. Расскажите о методе решения задачи.
2. Объясните алгоритм и докажите правильность выбранного способа тестирования.
3. Объясните полученные результаты.

Практическое занятие № 6

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ ПО КРИТЕРИЮ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Цель практического занятия: приобрести навыки по аппроксимации функций по критерию наименьших квадратов

Задание

1. Выполнить в *Mathcad*’е аппроксимацию (регрессию) двух вариантов – линейную и линейную общего вида – функции, заданной таблично ($y_i=y(x_i)$; $x_i = i*0.1, i=1, 2, ..., 20$).

2. Составить алгоритм и написать код для аппроксимации заданной функции многочленом m-й степени (m вводится с клавиатуры) по методу наименьших квадратов. Вывести на экран параметры аппроксимирующего многочлена, график многочлена и нанести на график исходные данные.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем состоит цель задачи аппроксимации?

2. Расскажите о теоретических и практических достоинствах критерия наименьших квадратов.
3. Какие методы аппроксимации рассматриваются в лабораторной работе?
4. Когда используется линейная аппроксимация?
5. Когда используется аппроксимация степенным полиномом?
6. Когда используется линейная аппроксимация общего вида?
7. Как определяются параметры аппроксимирующей прямой?
8. Как определяются параметры аппроксимирующего полинома?
9. Как задаются и определяются параметры аппроксимирующей функции при линейной аппроксимации общего вида?
10. Объясните алгоритм аппроксимации степенным полиномом.
11. Объясните полученные результаты при $m=0$ и при $m=1$.

Практическое занятие № 7

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Цель практического занятия: приобрести навыки по исследованию методов вычисления определенных интегралов

Задание

1. В *Mathcad*’е найти значение интеграла и первообразную по записи подынтегральной функции.
2. Разработать алгоритм и код, позволяющий:
   a) По формуле Ньютона-Лейбница вычислить точное значение интеграла.
   b) Для нечетных вариантов получить зависимости фактической ошибки вычисления интеграла (равна разности между точным и приближенным значениями интеграла) от шага интегрирования. Диапазон изменения числа шагов интегрирования 1…20.
   c) Для четных вариантов, используя автоматический выбор шага интегрирования, получить зависимости временных затрат и фактической ошибки вычисления интеграла от задаваемой ошибки интегрирования (диапазон изменения ошибки 0.01…0.0001).

Вопросы для самоконтроля

1. С какой целью и как интерполируют подынтегральные функции?

2. Как вычисляются и какими свойствами обладают коэффициенты Котеса?
3. Как используются коэффициенты Котеса?
4. Как используются коэффициенты и абсциссы Гаусса?
5. Расскажите о частных случаях формулы Ньютона-Котеса.
6. Приведите иллюстрации вычисления интегралов по частным случаям формулы Ньютона-Котеса.
7. Приведете иллюстрации использования формулы прямоугольников (срединных, левых, правых).
8. Объясните алгоритм вычисления приближенного значения интеграла в вашем задании.
9. Как получить составные формулы в частных случаях методов Ньютона-Котеса и Гаусса?
10. Как сократить затраты машинного времени в алгоритмах на рис. 7.1, 7.3, 7.4, 7.5?
11. Как сократить затраты машинного времени в алгоритмах на рис. 7.7, 7.9?
12. Сравните по затратам машинного времени частные случаи формулы Ньютона-Котеса.
13. Сравните по ошибке интегрирования частные случаи формулы Ньютона-Котеса.
14. Сравните по ошибке интегрирования формулы прямоугольников (срединных, левых, правых).
15. Где, зачем и как используется правило Рунге?
16. Объясните адаптивный алгоритм по методу Ньютона-Котеса.
17. Объясните адаптивный алгоритм по методу Гаусса.

Практическое занятие № 8

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОДУ И СИСТЕМ ОДУ

Цель практического занятия: приобрести навыки по исследованию методов интегрирования ОДУ и систем ОДУ

Задание

1. Получить исходные данные. Обозначения в таблицах: t_0, x_0 – начало интервала интегрирования; t_k, x_k – конец интервала интегрирования; $\Delta t, \Delta x$ – шаг выдачи результатов.

2. Выполнить задание в *Mathcad*'е.
3. Составить алгоритм и написать код для численного интегрирования указанным методом ОДУ или системы ОДУ. Шаг интегрирования h выбирается самостоятельно. Результаты интегрирования сводятся в таблицу решений и представляются также в виде графиков функций.

Вопросы для самоконтроля

1. Как сравниваются методы интегрирования ДУ?
2. Приведите иллюстрации метода Эйлера и модифицированных методов Эйлера.
3. Приведите пример алгоритма метода РК3.
4. Приведите пример алгоритма метода РК4.
5. Приведите иллюстрацию метода прогноза и коррекции.
6. Как получить оценку ошибки ограничения в методе прогноза и коррекции?
7. Как скорректировать решение ДУ?
8. Приведите пример алгоритма метода прогноза и коррекции.
9. Сравните одношаговые и многошаговые методы интегрирования ДУ.
10. Объясните адаптивный алгоритм интегрирования ДУ методом прогноза и коррекции.
11. Как практически сравнить методы интегрирования ДУ? Что для этого нужно иметь?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы в задачах и упражнениях: учеб. пособие / Н. С. Бахвалов, А. В. Лапин, Е. В. Чижонков. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: БИНОМ, 2010. – 240 с.
2. Бахвалов, Н. С. Численные методы: учеб. пособие / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – 7-е изд. – Москва: БИНОМ, 2011. – 636 с.
3. Егодуров, Г. С. Применение численных методов расчета на прочность элементов конструкций: учеб. пособие / Г. С. Егодуров, Е. Б. Бочектуева, Л. А. Бохоева; под ред. В. Е. Рогова. – Улан-Удэ: ВСГУТУ, 2017. – 56 с. – Режим доступа: для авториз. пользователей. – Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/236438 (дата обращения: 17.03.2023). – Текст: электронный.
4. Ермакова, Т. В. Численные методы : учеб. пособие / Т. В. Ермакова, В. В. Серебряков ; ФГБОУ ВПО "КГТУ". – Калининград: КГТУ, 2012. – 143 с.
5. Кротов, С. В. Расчеты на прочность и жесткость элементов конструкций и сооружений с применением ANSYS: учеб. пособие / С. В. Кротов. – Ростов-на-Дону: РГУПС, 2022. – 96 с. – Режим доступа: для авториз. пользователей. – Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/261953 (дата обращения: 17.03.2023). – Текст: электронный.
6. Пахнутов, И. А. Основы численных методов и обработки данных: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся в бакалавриате в области техники и технологий / И. А. Пахмутов; Калинингр. гос. техн. ун-т. – Калининград: КГТУ, 2014. – 153 с.
7. Язев, В. А. Численные методы в Mathcad: учеб. пособие для вузов / В. А. Язев, И. Лукьяненко. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 116 с. – Режим доступа: для авториз. пользователей. – Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/200381 (дата обращения: 17.03.2023). – Текст: электронный.

Локальный электронный методический материал

Марк Борисович Лещинский

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПРОЧНОСТНЫХ РАСЧЕТОВ ИЗДЕЛИЙ МАШИНОСТРОЕНИЯ

Редактор Е. Билко

Уч.-изд. л. 2,2. Печ. л. 2,1.

Федеральное государственное
бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Калининградский государственный технический университет»,
236022, Калининград, Советский проспект, 1