Федеральное агентство по рыболовству
БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»
Калининградский морской рыбопромышленный колледж

Утверждаю
Заместитель начальника колледжа
по учебно-методической работе
М.С. Агеева

ЕН.01 МАТЕМАТИКА

Методическое пособие для выполнения практических занятий по специальности

26.02.06 ЭКСПЛУАТАЦИЯ СУДОВОГО ЭЛЕКТРООБОРУДОВАНИЯ И СРЕДСТВ АВТОМАТИКИ

МО–26 02 06-ЕН.01.ПЗ

РАЗРАБОТЧИК	Судомеханическое отделение
ЗАВЕДУЮЩИЙ ОТДЕЛЕНИЕМ	М.Ю.Никишин
ГОД РАЗРАБОТКИ	2023

Содержание

Введение

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой «Математика».

Рабочей программой дисциплины предусмотрено проведение 15 практических занятий.

Целью проведения занятий является закрепление теоретических знаний и приобретение необходимых навыков и умений по отдельным темам курса. Наряду с формированием умений и навыков в процессе практических занятий вырабатывается способность и умение использовать теоретические знания на практике, развиваются интеллектуальные умения.

Перед проведением практических занятий курсанты обязаны проработать соответствующие разделы теоретического курса, уяснить цель занятия, ознакомиться с содержанием и последовательностью его проведения, а преподаватель - проверить их знание и готовность к проведению к выполнению задания.

Текст заданий, решённых на практическом занятии, схемы, эскизы, таблицы должны быть выполнены в соответствие с требованиями, предъявляемыми к оформлению письменных работ.

После каждого практического занятия проводится зачёт, на котором курсант должен:

- Пояснить, как проводится расчёт.
- Уметь анализировать полученные результаты в соответствии с основными требованиями к знаниям и умениям по данной теме.
- Ответить на вопросы для самопроверки.

Раздел 1. Математический анализ

Тема 1.1 Производная функции.

Практическое занятие № 1

Тема: Нахождение производных.

Понятие производной находит широкое приложение в различных областях науки и техники. Производная применяется при поиске углового коэффициента касательной к графику кривой, заданной уравнением; при вычислении скорости и ускорения точки, закон движения которой известен; при определении плотности неоднородного стержня или тока, если известно количество электричества, протекающего через проводник. Процессы, с которыми сталкивается человек во всех областях научной и практической деятельности, чаще всего аналитически могут быть представлены сложной функцией, т.е. функцией от функции.

Цель занятия: Научиться находить производные функций.
Формируемые общие компетенции: ОК 01, ОК 03.
Содержание и порядок выполнения работы:
1. Повторить определение производной, её физический и геометрический смысл, правила и формулы дифференцирования.
2. Внимательно изучить примеры определения производных функций. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.
Найти производные функций: а) $f(x) = x^2 + x – 7$; б) $x^3 (x - 1)$; в) $y=(3x^3-2x+1)\cdot\sin x$; г) $y = \operatorname{tg} x + \frac{e^x}{1+x}$.
Решить задачу, используя дифференциальное исчисление. Найти производные сложной функций.

Решение.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1. Найти производную функции $f(x) = x^2 + x – 7$	$f'(x) = (x^2 + x – 7)' = (x^2)' + x' – 7' = 2x + 1 – 0 = –2x + 1$
2. Найти производную функции $f(x) = x^3 (x - 1)$.	$f'(x) = (x^3(x – 1))' = (x^3)'(x – 1) + x^3(x – 1)' =$ $= 3x^2 (x – 1) + x^3 (1 – 0) = 3x^3 - 3x^2 + x^3 = 4x^3 – 3x^2$.
3. Найти производную функции $y=(3x^3-2x+1)\cdot\sin x$.	$y'=(3x^3-2x+1)'\cdot\sin x + (3x^3-2x+1)\cdot(\sin x)' = (9x^2-2)\sin x + (3x^3-2x+1)\cos x$.
4. Найти производную функции $y = \operatorname{tg} x + \frac{e^x}{1+x}$.	$y'=(\operatorname{tg}x + \frac{e^x}{1+x})' = (\operatorname{tg}x)' + (\frac{e^x}{1+x})' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{(e^x)'(1+x)-(1+x)'e^x}{(1+x)^2} =$ $= \frac{1}{\cos^2 x}+\frac{(1+x)e^x-e^x}{(1+x)^2}=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{xe^x}{(1+x)^2}$.
5. Известно, что для любой точки С неоднородного стержня АВ длиной 20 см,	$m(n) = 3n^2 + 5n$ (г), $l_{AB} = 20$ см, $\rho_{сер}= ?$ Решение:

отстоящей от точки А на расстоянии n см, масса куска стержня АС в граммах определяется по формуле m (n) = 3 n^2 + 5 n . Найдите линейную плотность стержня в середине отрезка АВ.	Т.к. $\rho(n) = m'(n)$, то $\rho(n) = 6n + 5$. n = 10 см, $\rho(10)$ = 60 + 5 = 65 (г/см) Ответ: 65 г/см.

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1.	1. Найти производную функции: а) $h(x) = 5x^2 + 3x + 8$ б) $y = x^4 - 8x^3 + 16x^2$ в) $g(x) = 2\log_2 x + \ln x$ г) $y = 2x + e^x - \sin x$ д) $f(x) = 2x^4 - \frac{6}{x} - 3\sqrt{x}$; е) $f(x) = 2\sqrt{x} + 3\ln x$; ж) $f(x) = 3x\,e^x$; з) $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$; и) $y = \frac{1-x^5}{1-x^3}$ 2. Дана функция $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x} + 8$. Напишите уравнение касательной к графику этой функции в точке с абсциссой $x_0 = 1$; 3.Координата материальной точки изменяется с течением времени по закону $S(t) = \frac{1}{3}t^3 - 7t + 6$. Найдите скорость точки в момент времени t = 6с.	Вариант 3.	1. Найти производную функции: а) $f(x) = 4x^2 - 3x - 1$ б) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 5$ в) $y(x) = 2\sin x + \cos x - 3$ г) $y = 2x + e^x - \text{tg}\, x$ д) $f(x) = x^4 - e^x - \cos x$; е) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \ln x$; ж) $f(x) = 4x \cdot e^x$ з) $f(x) = \frac{2+3x}{5x-4}$; и) $y = 3(\frac{x^4}{2} - x^2)$ 2. Дана функция $f(x) = 2\sqrt{x} - 4x + 5$. Напишите уравнение касательной к графику этой функции в точке с абсциссой $x_0 = 4$ 3. При движении тела по прямой его скорость V (м/с) меняется по закону $V(t) = \frac{t^5}{5} - t^3 + t + l$, где t - время движения в секундах. Найдите ускорение (м/с ^{2}) через 2 секунды после начала движения.

Вариант 2	1. Найти производную функции: а) $f(x) = 4x^2 + 7x+1$ б) $y=x^3-9x^2+24x-15$ в) $f(x) = \frac{x^2-7}{cosx}$ г) $y = 2x + e^x - \sin x$ д) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-5\ln x$; е) $f(x)=x^3 +e^x -\cos x$; ж) $f(x)= 2x\, e^x$; з) $f(x)=\frac{2x+3}{5-4x}$; и) $y=1+\frac{4x+1}{x^2}$ 2.Дана функция $f(x)=\ln x+4x+3$. Напишите уравнение касательной к графику этой функции в точке с абсциссой $x_0=1$; 3.Координата материальной точки изменяется с течением времени по закону $S(t)\ (t) = 2t^3 - t^2 +4$. Найдите скорость точки в момент времени t = 2с.	Вариант 4.	1. Найти производную функции: а) $f(x) = 5x^2 + 6x-1$ б) $y=x^4-8x^3+16x^2$ в) $g(x) = 2\ln x - 3\log_7 x + 5$ г) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ $+2e^x +\cos x$; д) $f(x)=\sqrt{x}-2\ln x$; е) $f(x)= x e^x$; ж) $f(x)=3x^7\cdot\log_3 x$ з) $f(x)=\frac{1}{3x-1}$; и) $y=\frac{1}{x^2(x-1)}$ 2.Дана функция $f(x)=e^x+4x+3$. Напишите уравнение касательной к графику этой функции в точке с абсциссой $x_0=0$; 3.При движении тела по прямой его скорость V (м/с) меняется по закону $V(t)=\sqrt{t}+t^2+4$ Найдите ускорение (м/с^2) через 1 секунду после начала движения.

Содержание отчета:

1. Наименование практического занятия
2. Цель занятия
3. Вариант задания
4. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
5. Список используемых источников
6. Выводы и предложения
7. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы:

1. Что называется производной функции?
2. Как вычислить производную второго порядка? В чём состоит физический смысл второй производной?
3. Какая связь существует между непрерывностью функции и её производной?
4. Какие прикладные задачи решаются с помощью производной?
5. Какая функция является сложной?
6. Каким образом можно найти производную сложной функции?
7. Как найти частное значение производной?

Практическое занятие №2

Нахождение производных сложной функции.

Понятие производной сложной функций находит широкое приложение в различных областях науки и техники. Функция, аргументом которой служит функция, называется
сложной. Если $y = f(u)$, где $u = u(x)$ то есть y-сложная функция,
то производная сложной функции находится по следующему правилу:

$$y' = f'(u) \cdot u'(x) \quad (1)$$

то есть производную внешней функции f надо умножить на производную внутренней функции u.
На первых порах поможет разобраться, как находится производная сложной функции для каждой конкретной функции, следующая таблица:

$1. (C)' = 0$	$10. (\sin u)' = \cos u \cdot u'$
$2. (u)' = 1 \cdot u'$	$11. (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$3. (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	$12. (\mathrm{tg}\, u)' = \frac{1}{cos^2 u} \cdot u'$
$4. \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$	$13. (ctgu)' = -\frac{1}{sin^2 u} \cdot u'$
$5. (u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	$14. (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$6. (e^u)' = e^u \cdot u'$	$15. (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$7. (a^u)' = a^u \cdot lna \cdot u'$	$16. (\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$8. (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	$17. (\mathrm{arcctg}\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$9. (\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot lna} \cdot u'$	

<u>Цель занятия:</u> Научиться находить производные сложной функций.
Формируемые общие компетенции: ОК 01, ОК 03.<u>Содержание и порядок выполнения работы:</u>
1. Повторить определение производной сложной функций, её физический и геометрический смысл, правило нахождения производной.

2. Внимательно изучить примеры определения производных функций. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.
Найти производные сложной функций.

1. Найти производную сложной функции $y=\sqrt{3x^2-4}$	$\left(\sqrt{3x^3-4}\right)' = \frac{\left(3x^3-4\right)'}{2\sqrt{3x^3-4}} = \frac{9x^2}{2\sqrt{3x^3-4}}$
2. Найти производную сложной функции y= $\ln\sin e^x$	Представим функцию y= $\ln\sin e^x$ в виде суперпозиции трёх функций: y=lnu, u=sin t, t=e^x, тогда по формуле производной сложной функции получим: $(\ln\sin e^x)' = \frac{1}{\sin e^x}\cdot(\sin e^x)' = \frac{1}{\sin e^x}\cdot\cos e^x\cdot(e^x)' = e^x\cdot ctg\, e^x$
3.Найти производную сложной функции $y = arcsin\sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x\cdot(1-x)}}$

Задания для самостоятельной работы:
Найти производные сложных функций:

1 вариант	2 вариант	3 вариант	4 вариант
1. f(x)=$(3x+2)^{50}$	1. f(x)=$(5-7x)^{10}$	1. f(x)=$(x^2+3)^4$	1. f(x)=$(7-8x^3)^{11}$
2. $y=\sqrt{x^2-6x+12}$	2. $y=\sqrt{5x^2-3x+4}$	2. $y=\sqrt{x^3+3x^2-2x+1}$	2. $y=\sqrt{(2x-1)(x+5)}$
3. $y=e^{4x-2}$	3. $y=5^{2x+1}$	3. $y=10^{-3x-1}$	3. $y=3^{5x+6}$
4. f(x)=sin(5x-4).	4. f(x)=cos(5x-4).	4. f(x)=tg(5x-4).	4. f(x)=ctg(5x-4).

Тема 1.2. Приложение производной

Практическое занятие № 3

Тема: Наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке. Уравнение касательной к графику функции.
На практике часто приходится рассматривать задачи, связанные с нахождением наибольшего или наименьшего значения из всех тех значений, которые функция принимает на некотором промежутке.
<u>Цель занятия:</u> Научиться находить наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке, записывать уравнение касательной к графику функции в точке с данной абсциссой.
Формируемые общие компетенции: ОК 01, ОК 03.
Используемые источники: [стр. 126-128].
Исходные материалы и данные:
учебные пособия, схема выполнения задания, таблица производных элементарных функций

<u>Содержание и порядок выполнения работы:</u>
1. Повторить формулы и правила дифференцирования, понятие стационарной точки, геометрический смысл производной, уравнение касательной к кривой.
2. Внимательно изучить примеры нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке и составления уравнения касательной к кривой.

Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y=x^4-2x^2+5$ на [-2;2].
2. Решить задачу на нахождение наибольшего или наименьшего значения величины.
3. Записать уравнение касательной к графику функции $y=x^2+6x+3$ в точке с абсциссой $x_0= -1$.

Решение.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y=x^4-2x^2+5$ на [-2;2].	
1. Найти производную данной функции.	$y'=4x^3- 4x$
2. Найти стационарные точки и точки, где y' не существует..	$4x^3- 4x=0$, $4x(x^2-1)=0$, $x_1=0$, $x_2= -1$, $x_3=1$
3.Выписать стационарные точки, принадлежащие отрезку [-2;2].	Все стационарные точки принадлежат отрезку [-2;2].
4. Вычислить значения функции y в этих точках.	$y(0)= 5$, $y(-1)=4$, $y(1)=4$
5. Вычислить значения y(-2) и y(2)	$y(-2)=13$, $y(2)=13$
6. Из найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.	Наибольшее значение 13 достигается в точках -2, 2. $\underset{[-2;2]}{y_{\max}} = y(-2) = y(2) = 13$ Наименьшее значение 4 достигается в точках -1, 1. $\underset{[-2;2]}{y_{\min}} = y(-1) = y(1) = 4$
2. Решить задачу на нахождение наибольшего или наименьшего значения величины.	
Тело массой m_0 кг падает с высоты H м и теряет массу (сгорает) пропорционально времени падения. Коэффициент пропорциональности k. Считая, что начальная скорость $v_0=0$, ускорение $g=10$ м/с^2, и пренебрегая сопротивлением воздуха найти наибольшую кинетическую энергию тела.	H=720 $m_0=3000$ кг $k=100$ кг/с^2
	Кинетическая энергия: $E=\frac{mv^2}{2}$; $m=m_0-k\cdot t$; $v = gt$. Составляем функцию: $E(t)=0,5(3000 -100t)100t^2$. $E(t)=150000t^2-5000t^3$; $E'(t)=300000t-15000t^2$; $E'(t)=0$, $t_1=0$, $t_2=20$ Так как в точке $t_2=20$ производная $E'(t)$ меняет знак с «плюса» на «минус», то кинетическая энергия будет наибольшей при $t_2=20$: $E_{наиб}=0,5(3000-100\cdot 20)\cdot 100\cdot 20^2$ (Дж)= 20000000 (Дж)= =20(МДж)
3. Записать уравнение касательной к графику функции $y=x^2+6x+3$ в точке с абсциссой $x_0= -1$.	
1. Вычислить значение y' в точке $x_0= -1$.	$y'=2x+6$,

	$y'(-1)=2\cdot(-1)+6=4$
2. Вычислить значение функции при $x_0=-1$.	$y(-1)=(-1)^2+6\cdot(-1)+3=-2$
3. Написать уравнение касательной $y=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)$	$y=-2+4(x-(-1))$, $y=4x-6$

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1.	1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: а) $y = x^4 - 8x + 3$ [-2; 2] б) $y = \sqrt{4-x^2}$ [-2; 2] 2. Составить уравнение касательной к графику функции в точке x_0: $y=\frac{3}{x}$ $x_0=-1$
Вариант 2	1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: а) $y = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 1$ [-2; 0] б) $y = x + \sqrt{x}$ [0; 4] 2. Составить уравнение касательной к графику функции в точке x_0: $y=3x^2 - 4x - 2$ $x_0=-1$
Вариант 3.	1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: а) $y = 2x^2 + 3x + 4$ [-2; 4] б) $y = \sqrt{4-x^2}$ [-2; 2] 2. Составить уравнение касательной к графику функции в точке x_0: $y = 2x^2 + 1$ $x_0 = 0$
Вариант 4.	1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: а) $y = x^3 + 4x$ [-1; 4] б) $y = x + \sqrt{x}$ [0; 4] 2. Составить уравнение касательной к графику функции в точке x_0: $y = x^2 + 2x$ $x_0 = -1$

Содержание отчета:

1. Наименование практического занятия
2. Цель занятия
3. Вариант задания
4. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
5. Список используемых источников
6. Выводы и предложения
7. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы:

1. В чём состоит геометрический смысл производной?
2. Сформулируйте алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке?
3. Что называется касательной к графику функции y(x) в точке x_0?
4. Что называется нормалью к графику функции y(x) в точке x_0?

Практическое занятие № 4

Тема: Применение производной к исследованию функции и построению графиков.

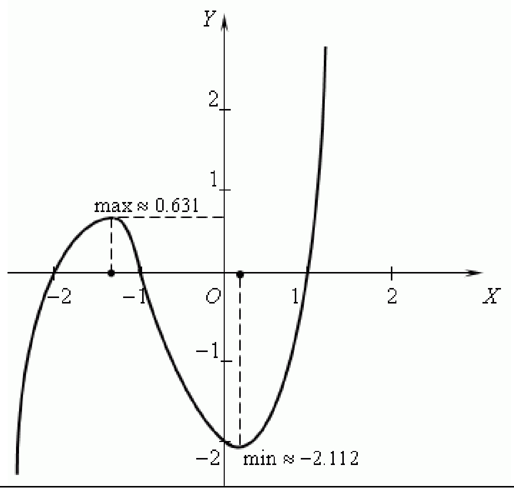
Производная используется для исследования функций, т.е. для её изучения различных свойств. Результаты такого исследования удобно представлять в виде графика.

Цель занятия: Научиться строить график функций, используя производную.
Формируемые общие компетенции: ОК 01, ОК 03.
Содержание и порядок выполнения работы:
1. Повторить алгоритм исследования функции с помощью производной и построения её графика.
2. Внимательно изучить пример исследования функции. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Исследовать функцию и построить её график: $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Решение.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1. Найти область определения и область значений функции.	Область определения $x \in R$ (x – любое действительное число); область значений $y \in R$, так как $f(x)$ – многочлен нечётной степени;
2. Проверить функцию на чётность.	функция $f(x)$ не является ни чётной, ни нечётной
3. проверить функцию на периодичность.	$f(x)$ – непериодическая функция
4. Найти производную функции и критические точки функции.	$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$; Найти корни уравнения $3x^2 + 4x - 1 = 0$. Эти корни: $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$. Функция имеет две критические точки и три интервала монотонности: $\left(-\infty, \frac{-2-\sqrt{7}}{3}\right)$, $\left(\frac{-2-\sqrt{7}}{3}, \frac{-2+\sqrt{7}}{3}\right)$ и $\left(\frac{-2+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$.

<table>
<tr><td>5. Свести полученные данные в таблицу.</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$(-\infty, \frac{-2-\sqrt{7}}{3})$</td><td>$\frac{-2-\sqrt{7}}{3}$</td><td>$(\frac{-2-\sqrt{7}}{3}, \frac{-2+\sqrt{7}}{3})$</td><td>$\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$</td><td>$(\frac{-2+\sqrt{7}}{3}, +\infty)$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>–</td><td>0</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>↗</td><td>~0.631</td><td>↘</td><td>~ –2.112</td><td>↗</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>max</td><td></td><td>min</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>6. Определить координаты точки пересечения графика с осью ОУ.</td><td>График функции пересекается с осью Y в точке (0, – 2), так как f (0) = □2</td></tr>
<tr><td>7. Найти нули функции.</td><td>Чтобы найти нули функции нужно решить уравнение: $x^3 + 2x^2$ □ x □ 2 = 0, нулями функции являются: □2, □1 и 1.</td></tr>
<tr><td>8. По полученным данным построить график функции.</td><td>
</td></tr>
</table>

Задания для самостоятельной работы:
Исследовать функцию и построить её график:

<table>
<tr><td>Вариант</td><td>1. y = -x^3 + 3x^2 – 2
2. y = - 2x – 1/(2x)
3. y = 1/(x^2 – 4)</td><td>Вариант 3</td><td>1. y = -x^3 - 3x^2 + 3
2. y = x + 2/x
3. y = 1/(x^2 – 4)</td></tr>
<tr><td>Вариант 2</td><td>1. y = -x^4 + 2x^2 +3
2. y = 3x + 1/(3x)
3. y = 1/(x^2 – 4)</td><td>Вариант 4.</td><td>1. y = x^4-8x^2 +8
2. y = x + 4/x
3. y = 1/(x^2 – 4)</td></tr>
</table>

Содержание отчета:

8. Наименование практического занятия
9. Цель занятия

10. Вариант задания
11. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
12. Список используемых источников
13. Выводы и предложения
14. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы:
1. Каким образом можно проверить функцию на чётность?
2. Каким образом можно проверить функцию на периодичность?
3. Как можно найти нули функции?
4. По какому алгоритму проводится исследование функции?

Тема 1.3. Дифференциал функции.

Практическое занятие № 5

Тема: Нахождение дифференциала и приложение дифференциала к приближенным вычислениям.

Дифференциал функции применяется при вычислении приближённого значения величин, что часто используется при решении задач прикладного характера.

Цель занятия: Научиться вычислять дифференциалы функций, применять дифференциал к приближённым вычислениям.
Формируемые общие компетенции: ОК 01, ОК 03.
Содержание и порядок выполнения работы:
1. Повторить определение дифференциала функции, понятие дифференциала аргумента, геометрический смысл дифференциала, формулу для вычисления приближённого числового значения функции.
2. Внимательно изучить примеры вычисления дифференциалов функций. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Вычислить дифференциалы функций и вычислить приближённое значение функций:

Решение.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
Найти дифференциал функции y = 2x + sin x, при $x_0 = \frac{\pi}{3}$, dx=0,02	
1. Найти производную функции.	y' = 2+cos x
2. Используя формулу дифференциала, найти дифференциал функции.	dy = y' dx = (2+cos x) dx
3. Подставить значения x_0 и dx в полученную формулу.	(2+cos x) dx = (2+0,5)·0,02 = 0,05
Определить приближённое значение $\sqrt{2}$.	
1.Рассмотреть функцию y = $\sqrt{x}$ и применить формулу $f(x+\Delta x) = f(x) + y' \cdot \Delta x$.	Пусть x=2,25; Δx=-0,25, тогда $y(x)=\sqrt{2,25}=1,5$ $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{2,25}}=\frac{1}{3}$; $f(x)+y'\cdot\Delta x=1,5+\frac{1}{3}\cdot(-0,25)\approx1,5-0,083\approx1,417$ Таким образом, $f(x+\Delta x) = \sqrt{2,25-0,25} = \sqrt{2} \approx 1,417$

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1.	1. Найти дифференциал функции: а) $y = (3x+2)^{50}$ б) $y = \sqrt{5-2x}$ в) $y = \cos^2 x$ при: $x = \pi/4$ $dx = 0{,}03$ 2. Вычислить приближённое значение функции: а) $f(x) = 2x^3 - 3x - 1$ при $x = 2{,}01$ б) $(1{,}013)^4$ в) $\sqrt[3]{1{,}06}$ г) $\frac{1}{0{,}997}$
Вариант 2	1. Найти дифференциал функции: а) $y = (5-7x)^{10}$ б) $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ в) $y = \ln\cos^2 2x$ при: $x = \pi/8$ $dx = 0{,}01$ 2. Вычислить приближённое значение функции: а) $f(x) = (1/3)x^3 + (1/2)x - 2x + 4$ при $x = 1{,}1$ б) $(1{,}005)^{10}$ в) $\sqrt[10]{1{,}03}$ г) $\frac{1}{9{,}97}$
Вариант 3.	1. Найти дифференциал функции: а) $y = (x^2+3)^4$ б) $y = \sqrt{x^2+6x+12}$ в) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ 2. Вычислить приближённое значение функции: а) $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ при $x = 2{,}001$ б) $(3{,}025)^4$ в) $\sqrt{99{,}5}$ г) $\frac{1}{1{,}03}$
Вариант 4.	1. Найти дифференциал функции: а) $y = (7-8x^2)^{11}$ б) $y = \frac{2x}{x^2+x}$ в) $y = \sin^2 x$ при: $x = \pi/4$ $dx = 0{,}03$ 2. Вычислить приближённое значение функции: а) $f(x) = x^3 - 3x - 1$ при $x = 1{,}001$ б) $(1{,}012)^5$

	в) $\sqrt{24{,}96}$ г) $\frac{1}{1{,}99}$

Содержание отчета:

1. Наименование практического занятия
2. Цель занятия
3. Вариант задания
4. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
5. Список используемых источников
6. Выводы и предложения
7. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы:
1. Чему равен дифференциал аргумента?
2. В чём состоит геометрический смысл дифференциала?
3. Что называется дифференциалом второго порядка?

Тема 1.4. Неопределённый интеграл.

Практическое занятие № 6

Тема: Интегрирование функций различными способами.

Метод интегрирования, при котором интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется непосредственным интегрированием.

<u>Цель занятия:</u>

Научиться интегрировать функции различными способами.

Формируемые общие компетенции: ОК 01, ОК 03.

<u>Содержание и порядок выполнения работы:</u>

1. Повторить таблицу неопределённых интегралов, алгоритмы интегрирования способом подстановки и по частям.
2. Внимательно изучить примеры интегрирования простейших функций. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Непосредственное интегрирование.

Алгоритм:

1) преобразовать подынтегральное выражение так, чтобы получилась сумма выражений, похожих на подынтегральные выражения табличных интегралов;
2) из одного исходного интеграла получить сумму нескольких интегралов (используя 3-е и 4-е свойства неопределенного интеграла);
3) по таблице интегралов найти каждый из отдельных интегралов;
4) как только исчез последний знак интеграла, появляется постоянная интегрирования С;
5) при необходимости преобразовать полученный результат: привести подобные, сократить дроби, избавиться от иррациональности в знаменателе и т.п.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.

1. $\int (5x^2-6x+\frac{8}{x\sqrt[4]{x}})dx$.	$\int (5x^2-6x+\frac{8}{x\sqrt[4]{x}})dx = 5\int x^2dx - 6\int xdx + 8\int x^{-\frac{5}{4}}dx = \frac{5}{3}x^3 - \frac{6}{2}x^2 + \frac{8}{-0,25}x^{-0,25} + C =$ $= \frac{5}{3}x^3 - 3x^2 - \frac{32}{\sqrt[4]{x}} + C$
2. $\int (2-3^x)dx$	$\int (2-3^x)dx = \int (4-4\cdot 3^x+3^{2x})dx = 4\int dx - 4\int 3^x dx + \int 9^x dx = 4x - 4\cdot\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{9^x}{\ln 9} + C$

<u>Интегрирование способом подстановки.</u>

Алгоритм интегрирования функций способом подстановки:
1) ввести вспомогательную переменную, связанную с исходной переменной некой функциональной зависимостью;
2) выразить исходную переменную через вспомогательную;
3) выразить дифференциал исходной переменной через дифференциал вспомогательной;
4) подставить вспомогательную переменную и ее дифференциал в интеграл;
5) свести полученный интеграл к табличному и взять его;
6) вернуться к исходной переменной.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1. $\int x\sqrt{x-3}dx$	Чтобы избавиться от квадратного корня, положим $\sqrt{x-3}=u$, тогда $x = u^2 + 3$ и, следовательно, $dx = 2u\,du$. Делая подстановку, имеем: $\int x\sqrt{x-3}dx = \int (u^2+3)u2udu = \int (2u^4+6u^2)du = \frac{2u^5}{5} + 2u^3 + C = \frac{2(x-3)^{\frac{5}{2}}}{5} + 2(x-3)^{\frac{3}{2}} + C$
2. $\int xe^{x^2}dx$.	$x^2 = t, 2xdx = dt, xdx = \frac{dt}{2},$ $\int xe^{x^2}dx = \int e^t\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$
3. $\int x\sqrt{x-2}dx$.	*пусть* $\sqrt{x-2} = r, x = r^2+2, dx = 2rdr$ $\int x\sqrt{x-2}dx = \int (r^2+2)r\cdot 2rdr = \int (2r^4+4r)dr = 2\int r^4dr + 4\int r^2dr = \frac{2r^5}{5} + \frac{4r^3}{3}n + C =$ $= \frac{2\sqrt{(x-2)^5}}{5} + \frac{4\sqrt{(x-2)^3}}{3} + C$
4. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+4\sin x}}dx$.	$\sqrt{1+4\sin x} = t, 1+4\sin x = t^2, 4\cos xdx = 2tdt, \cos xdx = \frac{1}{2}tdt$ $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+4\sin x}}dx = \int \frac{\frac{1}{2}tdt}{t} = \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{2}t + C = \frac{1}{2}\sqrt{1+4\sin x} + C$

<u>Интегрирование по частям.</u>

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Эта формула называется формулой интегрирования по частям. В качестве *u* обычно выбирается функция, которая упрощается дифференцированием, в качестве *dv* - оставшаяся часть подынтегрального выражения, содержащая dx, из которой можно определить *v* путем интегрирования.

Алгоритм интегрирования функций по частям:

1) выбрать функцию u (от исходной переменной) такую, что дифференциал от нее du проще, чем u;
2) разделить подынтегральное выражение на u - получим dv (можно устно);
3) из dv найти интегрированием v (обычно ее находят устно и сразу вносят под знак дифференциала, но можно и отдельным интегрированием);
4) из u найти его дифференциал du;
5) подставить полученные величины u, v, du, dv в формулу интегрирования по частям;
6) попытаться взять интеграл от vdu. При этом возможны варианты:
а) если интеграл от vdu легкий, то взять его;
б) если интеграл от vdu все еще не легкий но проще исходного, применить интегрирование по частям уже для него;
в) если в правой части получился такой же интеграл, как и исходный, в этом уравнении можно привести подобные и результат получится сам собой;
г) если интеграл от vdu сложно взять, повторить шаги 1-6 для другого u;

Что же обозначить u, а что v? Точного ответа нет, но есть условие: одну из них берем произвольно, а другую - так, чтобы их произведение было равно подынтегральной функции. Есть и здравый смысл: вводя сложную функцию, мы вряд ли сделаем интеграл проще. Вот некоторые рекомендации по применимости интегрирования по частям:

1. Для выражений вида x^n умноженное на подынтегральное выражение табличных и простых интегралов (например, xsinx, x^2cos2x, x^2e^x) выбирают $u=x^n$
2. Для выражений вида e^x умноженное на подынтегральное выражение табличных и простых интегралов (например, e^xsinx, e^xcos2x) выбирают $u=e^x$.
3. Для выражений вида x^n умноженное выражение вида arcsin ax, arcos ax, arctg ax, ln|x| выбирают $x^n dx$ за dv, а остальные сомножители – за u.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1. $\int x\sin x\,dx$.	$u = x;\quad dv = \sin x\,dx;\quad du = dx;\quad v = \int \sin x dx = -\cos x$ $\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + C$
2. $\int \ln x dx$.	$u = \ln x;\quad dv = dx;\quad du = \frac{dx}{x};\quad v = x$ $\int \ln x dx = x\ln x - \int\frac{x dx}{x} = x\ln x - x + C$
3. $\int x\ln x dx$.	$u = \ln x;\quad du = \frac{dx}{x};\quad dv = xdx;\quad v = \int xdx = \frac{x^2}{2}$ $\int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$

4. $\int e^x \sin x dx$	$u=e^x$; $du=e^x dx$; $dv=\sin x dx$; $v=-\cos x$ $\int e^x \sin s dx = -e^x \cos x - \int(-\cos x)e^x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$; *Чтобы найти* $\int e^x \cos x dx$ *применим формулу интегрирования по частям ещё раз* $\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$ *получился исходный интеграл; запишем результат в виде уравнения и приведём подобные члены.* $\int e^x \sin s dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x d$ $2\int e^x \sin s dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$; $\int e^x \sin s dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$

Задания для самостоятельной работы:

Вариант № 1	**Вариант № 2**	**Вариант № 3**	**Вариант № 4**
. 1.$\int \left(3x^2 - 5x^3 + x\right)dx$	1.$\int \left(2x^4 - 5x^3 + 3\right)dx$	1.$\int \left(x^3 + 2x^2 - 5x\right)dx$	1.$\int \left(7x^3 - 5x^4 + 2\right)dx$
. 2.$\int\left(\frac{3}{x} - \cos x\right)dx$	2.$\int\left(\frac{3}{x^2} + 5\cos x\right)dx$	2.$\int\left(\frac{5}{x^2} - 4\sin x\right)dx$	2.$\int\left(\frac{4}{x^2} - 6\cos x\right)dx$
3.$\int\left(\sqrt{x} + \frac{5}{x}\right)dx$	3.$\int(\sqrt[5]{x^2} - e^x)dx$	3.$\int\left(\sqrt{x} + \frac{5}{x}\right)dx$	3.$\int(\sqrt[3]{x} - 2^x)dx$
4.$\int \frac{3dx}{\sin^2 x}$	4.$\int \frac{\sin 2x}{\cos x}dx$	4.$\int \frac{dx}{1 - \sin^2 x}$	4.$\int \frac{dx}{\sin^2(2x - \frac{\pi}{4})}$
5.$\int \frac{x^2 - 1}{x + 1}dx$	5.$\int \frac{x^2 - 9}{x + 3}dx$	5.$\int \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1}dx$	5.$\int \frac{x^3 - 8}{x - 2}dx$
6.$\int (3 - 5x)^{10} dx$	6.$\int (3x + 1)^8 dx$	6.$\int (7x + 5)^8 dx$	6.$\int (5x - 1)^{12} dx$
7. $\int \frac{3x^2 dx}{\sin^2(x^3 - 2)}$	7. $\int \frac{\cos x dx}{2\sin x + 1}$	7. $\int \frac{\sin x dx}{2 + \cos x}$	7. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2\sin x + 1}}$
8 $\int x e^x dx$	8. $\int e^{2x} \cos x dx$	8. $\int x \cos x dx$	8. $\int e^{2x} \cos x dx$

Содержание отчета:

1. Наименование практического занятия
2. Цель занятия
3. Вариант задания
4. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
5. Список используемых источников
6. Выводы и предложения
7. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы:

1. В чём заключается геометрический смысл первообразных данной функции?
2. Как проверить, правильно ли найдена первообразная данной функции?

3. В чём заключается метод непосредственного интегрирования?

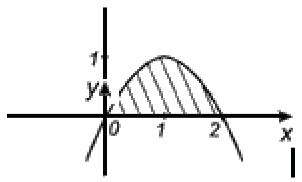
Тема 1.5. Определённый интеграл
Практическое занятие № 7

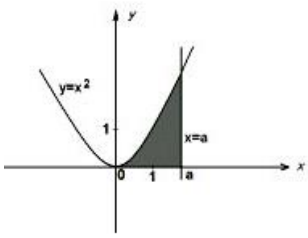
Тема: Применение определенного интеграла к решению геометрических и физических задач

С геометрической точки зрения, определённый интеграл представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$ и сохраняющей на этом отрезке свой знак, отрезком $[a, b]$ и прямыми $x = a$ и $x = b$. С помощью определённого интеграла можно вычислить площади различных плоских фигур и объёмы тел.

Цель занятия: Научиться вычислять площади плоских фигур и объёмы тел вращения.
Формируемые общие компетенции: ОК 01, ОК 03.
Содержание и порядок выполнения работы:
1. Повторить геометрический смысл определённого интеграла, способы вычисления площадей плоских фигур и объёмов тел вращения, алгоритмы интегрирования.
2. Внимательно изучить примеры вычисления площадей плоских фигур и объёмов тел вращения. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Вычисление площадей плоских фигур.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $f(x) = 2x - x^2$ и осью абсцисс	График функции $f(x) = 2x - x^2$ парабола. Вершина: (1; 1).  $S = \int_0^2 (2x - x^2)dx = (x^2 - \frac{x^3}{3}) \Big\vert_0^2 = (4 - \frac{8}{3}) - 0 = 1\frac{1}{3}$(кв. ед.) **Ответ:** $1\frac{1}{3}$ кв. ед.
2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = \frac{1}{2}x$.	График функции $y = \frac{1}{2}x$ – прямая. Функция $y = \sqrt{x}$ является обратной функции $y = x^2$ на промежутке $[0; +\infty)$.  $S = S_{OmAB} - S_{\Delta OAB}$ Пределы интегрирования указаны в таблицах значений функций.

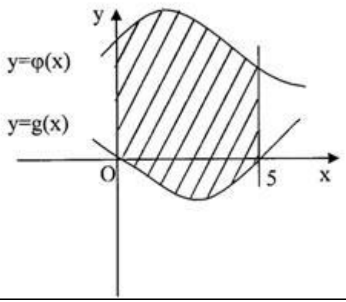
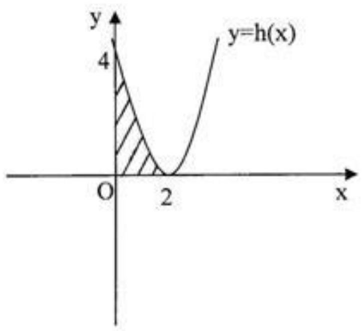
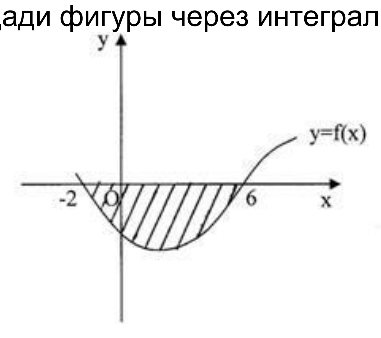
	$S_{OmAB} = \int_0^4 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big\|_0^4 = \frac{2}{3}(4^{\frac{3}{2}} - 0) = 5\frac{1}{3}$(кв. ед.) $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}OB\cdot AB$, $OB = 4$, $AB = 2$, $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2 = 4$ (кв. ед.) $S = 5\frac{1}{3} - 4 = 1\frac{1}{3}$(кв. ед.). **Ответ:** $1\frac{1}{3}$(кв . ед .).
3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 6 \; и \; y = -x^2 + 5x - 6.$	Найдем абсциссы точек пересечения графиков данных функций. Для этого решаем систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 - 6, \\ y = -x^2 = 5x - 6. \end{cases}$ Отсюда находим $x_1=0$, $x_2=2{,}5$. $S = \int_0^{2,5}(-x^2 + 5x - 6 - x^2 + 6)dx = \int_0^{2,5}(-2x^2 + 5x)dx = 5\frac{5}{24}.$
4.При каких значениях **а** площадь фигуры, ограниченной линиями **y = x^2, y = 0, x = a,** равна **9**?	а) Выполним схематический чертеж  б) Вычислим площадь фигуры, ограниченной параболой y = x^2, осью ох и прямой x = a: $S = \int_0^a x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big\|_0^a = \frac{a^3}{3}.$ в) Так как площадь по условию равна 9, то $a^3/3=9$, $a^3= 27$, a = 3. Ответ: a = 3.

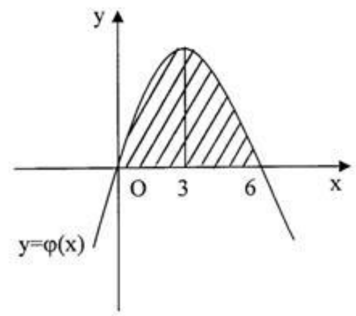
Вычисление объёмов тел вращения.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* линий $y = \sin x$ и y=0.	Воспользуемся формулой для вычисления объема тела вращения, получаем $V_x = \pi\int_0^{\pi}\sin^2 xdx$ далее вычисляется данный интеграл: $\pi\int_0^{\pi}\sin^2 xdx = \pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{\pi}{2}(\int_0^{\pi}dx - \int_0^{\pi}\cos 2xdx) = \frac{\pi}{2}(x - \frac{\sin 2x}{2})\Big\|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} куб.\,ед.$
2. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси ОХ линий $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$.	Искомый объем можно найти как разность объемов, полученных вращением вокруг оси *Ox* криволинейных трапеций, ограниченных линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$.

	$V_x = \pi\int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx - \pi\int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi\int_0^1 x dx - \pi\int_0^1 x^4 dx = \pi(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5})\Big\vert_0^1 = \pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) = \frac{3\pi}{10}$ *куб.ед*

Задания для самостоятельной работы:

I вариант	1.По рисунку записать формулу для вычисления площади фигуры через интеграл. 	2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: а) $y=(x+1)^2$ *и* $y=-1-x$ б) $y=-x^2$ *и* $y=-2$ в) $y=x+4$ *и* $y=6x-x^2$
	3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой x = 0, графиком функции $y = -x^2 + 3$ и касательной к этому графику в точке с абсциссой $x_o = 1$.	
II вариант	1.По рисунку записать формулу для вычисления площади фигуры через интеграл. 	2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: а) $y=x^3,\ y=2x-x^2$ *и* $y=0$ б) $y=x^2+3x$ *и* $y=0$ в) $y=x-2$ *и* $y=x^2$
	3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 0{,}5x^2 + 2x + 2$ и графиком ее производной.	
III вариант	1.По рисунку записать формулу для вычисления площади фигуры через интеграл. 	2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: а) $y=x,\ x=2$ *и* $y=\frac{1}{x}$ б) $y=x^2-4x-3$ *и* $y=0$ в) $y=x+5$ *и* $y=(x-1)^2$
	3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой x = 0, графиком функции $y = x^2 - 4x + 5$ и касательной к этому графику в точке с абсциссой $x_o = 2$.	
IV вариант	1.По рисунку записать формулу для вычисления площади фигуры через интеграл.	2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: а) $y=x,\ x=2$ *и* $y=\frac{1}{x}$ б) $y=x^2-4x-3$ *и* $y=0$ в) $y=x+5$ *и* $y=(x-1)^2$

		
	3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $x = 0$, графиком функции $y= -4x - x^2$ и касательной к этому графику в точке с абсциссой $x_o = -3$.	

Содержание отчета:

1. Наименование практического занятия
2. Цель занятия
3. Вариант задания
4. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
5. Выводы и предложения
6. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы:

1. В чём заключается геометрический смысл определённого интеграла?
2. Какая фигура называется криволинейной трапецией?
3. По какой формуле можно найти объём тела вращения?

Тема 1.6. Комплексные числа

Практическое занятие № 8

Тема: Решение задач профессиональной направленности с использованием комплексных чисел.

Комплексные числа используются при математическом описании многих процессов в физике и технике (в гидродинамике, аэромеханике, электротехнике, теории упругости и т.д.).

В промышленных масштабах электрическая энергия производится, передается и расходуется потребителями в виде синусоидальных токов, напряжений и ЭДС. При расчете и анализе электрических цепей применяют несколько способов представления синусоидальных электрических величин (аналитический способ, временная диаграмма, графоаналитический способ, аналитический метод с использованием комплексных чисел).
В электротехнике мнимая единица i обозначается буквой j, так как буквой i традиционно обозначается сила тока в цепи. Графически синусоидальные величины изображаются в виде вращающегося вектора. Совокупность векторов, изображающих синусоидальные величины (ток, напряжение, ЭДС) одной и той же частоты называют векторной диаграммой.

Цель занятия: Научиться выполнять действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме, строить комплексные числа на плоскости, решать задачи по электро-
технике с применением комплексных чисел.
Формируемые общие компетенции: ОК 01, ОК 03.
Содержание и порядок выполнения работы:

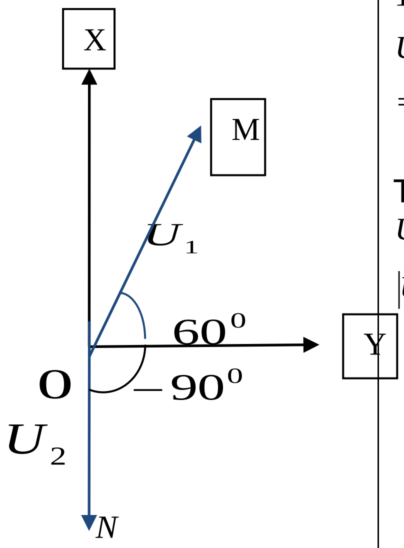
1. Повторить определение комплексного числа, формулы, по которым выполняются действия над комплексными числами.
2. Внимательно изучить пример выполнения действий над комплексными числами в алгебраической форме. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.
3. По изображению векторной диаграммы записать формулы для силы тока, напряжения или ЭДС;
4. Найти силу тока, напряжения или ЭДС при заданных условиях.

Выполнить арифметические действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.
$\frac{(1-2i)^4+3-20i}{(2+i)^2\cdot(3-i)}$. Изобразить все найденные комплексные числа на координатной плоскости.

Решение.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1. Определить порядок действий по обычным правилам.	1. Возведение в степень. 2. Умножение в знаменателе 3. Сложение в числителе. 4. Деление числителя на знаменатель. 5. Изображение полученных чисел на комплексной плоскости.
2. Возведение чисел в степень.	а) $(1-2i)^4=((1-2i)^2)^2=(1-4i+(2i)^2)^2=(1-4i-4)^2=(-3-4i)^2=9+24i-16=-7+24i$ б) $(2+i)^2=4+4i-1=3+4i$
3.Умножение в знаменателе.	$(3+4i)\cdot(3-i)=9-3i+12i+4=13+9i$
4. Сложение в числителе.	$-7+24i+3-20i=-4+4i$
5.Деление числителя на знаменатель.	$\frac{-4+4i}{13+9i}=\frac{(-4+4i)(13-9i)}{(13+9i)(13-9i)}=\frac{-52+36i+52i+36}{169+81}=\frac{-16+88i}{250}=$ $=\frac{-16}{250}+\frac{88}{250}i=-\frac{8}{125}+\frac{44}{125}i$
6. Изобразить на комплексной плоскости полученные числа.	Комплексное число a+bi однозначно определяется парой действительных чисел (a,b), где a – абсцисса, а b – ордината точки, которая является геометрической интерпретацией комплексного числа.
Дана векторная диаграмма	Решение

неразветвлённой цепи переменного тока:



Вектор $\vec{OM}$ представляет вектор напряжения U_1, модуль которого равен $|U_1| = 220B$, вектор $\vec{ON}$ представляет вектор напряжения U_2, модуль которого равен $|U_2| = 127B$ Электрическая цепь составлена из двух последовательно включённых участков с напряжениями U_1 и U_2. Найти напряжение данного участка электрической цепи на зажимах.

$U_1 = |U_1|\left(\cos 60^0 + j\sin 60^0\right) = 220\left(\cos 60^0 + j\sin 60^0\right) =$

$110 + 190{,}5j$

$U_2 = |U_2|\left(\cos\left(-90^0\right) + j\sin\left(-90^0\right)\right) = 127\left(\cos\left(-90^0\right) + j\sin\left(-90^0\right)\right)$

$= -127j$

Так как соединение последовательное, то:

$U = U_1 + U_2 = 110 + 190{,}5j - 127j = 110 + 63{,}5j$

$|U| = \sqrt{110^2 + 63{,}5^2} \approx 127B$

Задания для самостоятельной работы:

При данных условиях предыдущей задачи найти напряжение участка электрической цепи при параллельном соединении.

Вариант№1	Вариант№2	Вариант№3	Вариант№4
1.Изобразить	1.Изобразить	1.Изобразить	1.Изобразить

комплексные числа: $z_1 = 5+3i;$ $z_2 = -3-4i;$ $z_3 = -4$ $z_4 = 7i$	комплексные числа: $z_1 = -1-i;$ $z_2 = 5-4i;$ $z_3 = -5$ $z_4 = -3i$	комплексные числа: $z_1 = -2-6i;$ $z_2 = 4+i;$ $z_3 = 5$ $z_4 = -6i$	комплексные числа: $z_1 = 7+3i;$ $z_2 = -1+2i;$ $z_3 = -6i$ $z_4 = -3$
2.Дано: $z_1 = -2+3i$ $z_2 = 5-2i$ *Найти* $z_1+z_2; z_1-z_2;$ $z_1 * z_2; \frac{z_1}{z_2}$	2.Дано: $z_1 = 2-3i$ $z_2 = -4+3i$ *Найти* $z_1+z_2; z_1-z_2;$ $z_1 * z_2; \frac{z_1}{z_2}$	2.Дано: $z_1 = 1-4i$ $z_2 = 6-2i$ *Найти* $z_1+z_2; z_1-z_2;$ $z_1 * z_2; \frac{z_1}{z_2}$	2.Дано: $z_1 = -4-3i$ $z_2 = 1-2i$ *Найти* $z_1+z_2; z_1-z_2;$ $z_1 * z_2; \frac{z_1}{z_2}$
Решить уравнение: $x^2-2x+5=0$	Решить уравнение: $x^2-4x+20=0$	Решить уравнение: $x^2-6x+13=0$	Решить уравнение: $x^2+2x+10=0$
При данных условиях предыдущей задачи найти напряжение участка электрической цепи при параллельном соединении. Сделать рисунок.			

Содержание отчета:

1. Наименование практического занятия
2. Цель занятия
3. Вариант задания
4. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
5. Список используемых источников
6. Выводы и предложения
7. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы:
1. Где применяют комплексного числа?
2. Как изображаются комплексного числа?
3. Какие действия можно осуществлять над комплексными числами в алгебраической форме?
4. Что называют векторной диаграммой?

Практическое занятие № 9

Тема: Решение задач профессиональной направленности с использованием комплексных чисел.

При выполнении умножения, деления, возведения в степень и извлечении корня комплексное число удобнее представлять в тригонометрической форме.

Цель занятия: Научиться выполнять действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме. Применять при решении упражнений по электротехнике.
Формируемые общие компетенции: ОК 01, ОК 03.
Содержание и порядок выполнения работы:

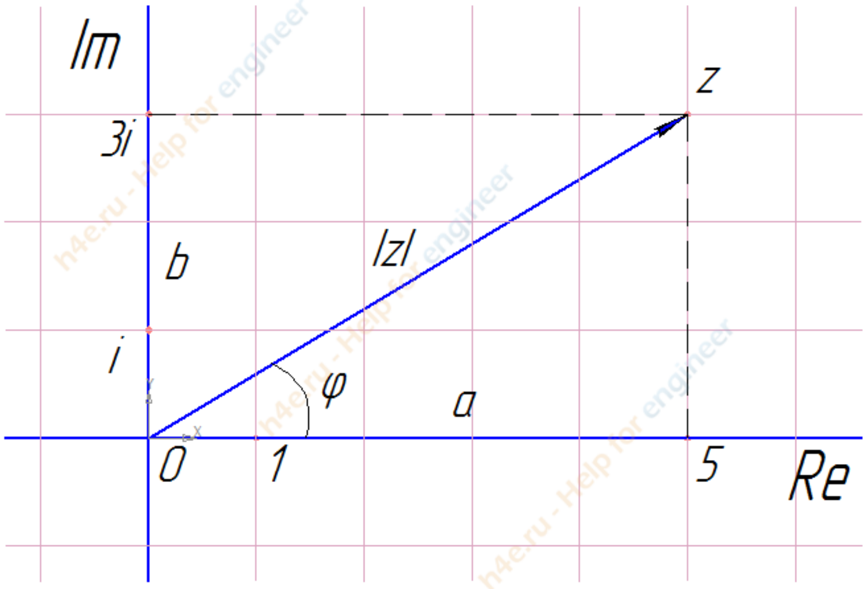
Комплексные числа – один из наиболее подходящих разделов курса математического анализа для реализации профессиональной направленности бакалавров по направлению подготовки Информатика и вычислительная техника. При изучении комплексных чисел необходимо учитывать применение математических знаний в общетехнических и специальных дисциплинах, в частности электротехнике. Применение комплексных чисел дает возможность использовать законы, формулы и методы расчетов, применяющиеся в цепях постоянного тока, для расчета цепей переменного тока, упростить некоторые расчеты, заменив графическое решение с использованием векторов алгебраическим решением, рассчитывать сложные цепи, которые другим путем решить нельзя, упростить расчеты цепей постоянного и переменного токов. При расчетах цепей приходится проводить математические операции с комплексными числами, поэтому студенты должны уметь выполнять следующие операции: 1) находить модуль и аргумент комплексного числа и комплексное число по модулю и аргументу; 2) переводить комплексное число из одной формы в другую; 3) производить сложение и вычитание, умножение и деление комплексных чисел.

Пример:

а) Представить число z = -5+5i в тригонометрической форме.
б) Вычислить $z^6, \sqrt{z}, \sqrt[3]{z}$.
в) Записать в тригонометрической форме число: $\dfrac{2(\cos\frac{7\pi}{3} - i\sin\frac{7\pi}{3})}{\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}}$.

Решение.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1. Найти модуль и аргумент числа z= -5+5i и представить его в тригонометрической форме.	r=$\lvert z\rvert = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$ $\cos\varphi = \frac{a}{r} == \frac{-5}{5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $cos\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; φ- угол 2-ой четверти, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, $z = 5\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$
2. Вычислить z^6.	$z^6 = (5\sqrt{2})^6(\cos\frac{6\cdot 3\pi}{4} + i\sin\frac{6\cdot 3\pi}{4}) = 5^6\cdot 2^3(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 5^6\cdot 2^3 i$
3.Найти $\sqrt{z}$.	$\sqrt{z} = \sqrt{5\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})} = \sqrt{5\sqrt{2}}(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{2} + \sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k}{2})$, где k = 0, 1. k = 0: z = $\sqrt{5\sqrt{2}}(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8})$ k = 1: z = $\sqrt{5\sqrt{2}}(\cos\frac{11\pi}{8} + i\sin\frac{11\pi}{8})$

4. Найти $\sqrt[3]{z}$.	k = 0: z = $\sqrt[3]{5\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ k =1: $\sqrt[3]{5\sqrt{2}}(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12})$ k = 2: $\sqrt[3]{5\sqrt{2}}(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12})$
5.Записать в тригонометрической форме число $\dfrac{2(\cos\frac{7\pi}{3}-i\sin\frac{7\pi}{3})}{\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}}$.	1. Запись комплексного числа в числителе не является тригонометрической формой, легко к ней приводится: $2(\cos\frac{7\pi}{3}-i\sin\frac{7\pi}{3})=2(\cos(-\frac{7\pi}{3})+i\sin(-\frac{7\pi}{3}))$ 2. Выполним деление: $\dfrac{2(\cos(-\frac{7\pi}{3})+i\sin(-\frac{7\pi}{3}))}{\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}}=$ $=2(\cos(-\frac{7\pi}{3}-\frac{5\pi}{6})+i\sin(-\frac{7\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}))=$ $=2(\cos(-\frac{7\pi}{2})+i\sin(-\frac{7\pi}{2}))=2(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2})=$ $=-2i$
6.На приведенном рисунке изображена комплексная плоскость, которую создают оси: - действительная ось Re (real); - мнимая ось Im (imaginarius).	
Перевести заданный во временной форме ток i(t)=141 sin(ωt+90°) в комплексную форму: показательную и алгебраическую.	Решение: амплитудное значение тока Im= 141 А +90° – начальная фаза тока. Запишем комплексный ток в показательной форме: Комплексный ток амплитуды $\dot{I}_m = 141 e^{j90}$ А

	комплекс действующего значения тока $\dot{I} = 100\,e^{j90}$ A В алгебраическую форму переводим используя формулу Эйлера $\dot{I} = 100(\cos 90 + j\sin 90) = j100$ A

Задания для самостоятельной работы:

Вариант№1	Вариант№2
1.Перевести в тригонометрическую и показательную форму: $z = -\sqrt{3} + i$ 2.Перевести в алгебраическую форму: $z = 6\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ 3.Выполнить действия: $z_1 \circ z_2, \frac{z_1}{z_2}, z_1^3, z_2^2$ $z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ $z_2 = 6\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ 4.Задано напряжение в алгебраической форме $U = -20 - j20B$ Перевести во временную форму.	1.Перевести в тригонометрическую и показательную форму: $z = -2 - 2i$ 2.Перевести в алгебраическую форму: $z = 3*\left(cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ 3.Выполнить действия: $z_1 \circ z_2, \frac{z_1}{z_2}, z_1^3, z_2^2$ $z_1 = 8\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ 4.Перевести заданный во временной форме ток i(t)=123 sin(ωt+60°) в комплексную форму: показательную и алгебраическую
Вариант№3	Вариант№4
1.Перевести в тригонометрическую и показательную форму: $z = 4 - 4\sqrt{3}i$ 2.Перевести в алгебраическую форму: $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ 3.Выполнить действия: $z_1 \circ z_2, \frac{z_1}{z_2}, z_1^3, z_2^2$ $z_1 = 3\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ $z_2 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ 4. Задано напряжение в алгебраической	1.Перевести в тригонометрическую и показательную форму: $z = -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}i$ 2.Перевести в алгебраическую форму: $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ 3.Выполнить действия: $z_1 \circ z_2, \frac{z_1}{z_2}, z_1^3, z_2^2$ $z_1 = 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ $z_2 = 6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

форме $U = -10 - j10B$ Перевести во временную форму	4.Перевести заданный во временной форме ток i(t)=102 sin(ωt+30°) в комплексную форму: показательную и алгебраическую

Содержание отчета:

1. Наименование практического занятия
2. Цель занятия
3. Вариант задания
4. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
5. Список используемых источников
6. Выводы и предложения
7. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы:
1. Как найти модуль комплексного числа?
2. Как найти аргумент комплексного числа?
3. Как перейти от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической?
4. Как можно геометрически представить комплексные числа?
5. Как перейти от тригонометрической формы записи комплексного числа к алгебраической?
6. По каким правилам выполняются действия над комплексными числами в тригонометрической форме?

Тема 1.7. Дифференциальные уравнения.

Практическое занятие №10

Тема:Решение дифференциальных уравнений 1- го порядка

Многие явления природы и техники описываются дифференциальными уравнениями, связывающими неизвестные величины и их производные.
Цель занятия:
Научиться решать некоторые виды дифференциальных уравнений первого порядка.
Формируемые общие компетенции: ОК 01, ОК 03.
Используемые источники: [стр. 160-170].
Исходные материалы и данные:
учебные пособия, схема выполнения задания

Содержание и порядок выполнения работы:
1. Повторить определение дифференциального уравнения, понятие его общего и частного решения, способы решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными и линейных однородных уравнений 1-го порядка.
2. Внимательно изучить примеры решений дифференциальных уравнений. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Алгоритм	**Конкретное соответствие задания**

	предложенному алгоритму
1. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $\frac{dy}{x^2}=\frac{dx}{3y^2}$.	Общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными ищется с помощью: 1)разделить переменные $3y^2dy = x^2dx$ 2) проинтегрировать левую и правую части уравнения $\int 3y^2dy = \int x^2\,dx$ $y^3 = \frac{x^3}{3}+C$ - это общее решение исходного дифференциального уравнения.
2. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $\frac{dy}{x}=\frac{dx}{y}$ y=4 при x=-2.	$\frac{dy}{x}=\frac{dx}{y}$ 1) $ydy = xdx$ 2) $\int ydy = \int xdx$ $\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+C$ $y^2 = x^2 + C$ -общее решение 3)Подставим начальные условия $4^2 = (-2)^2 + C;$ $16 = 4 + C \Rightarrow C = 12$ 4)Таким образом, частное решение имеет вид: $y^2 = x^2 + 12$
3. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка: $xy' - y = x^3$.	Запишем данное уравнение в виде $y' - \frac{y}{x} = x^2$ (1) Положим y=uv,откуда $y' = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$ Подставим значения y и y' в уравнение (1) $v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} - \frac{uv}{x} = x^2$ Сгруппируем члены, содержащие v ,и вынесем v за скобки: $u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{x}\right) = x^2(2)$ Найдём функцию u такую, что $\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0.(3)$ Тогда уравнение (2) примет вид $u\frac{dv}{dx} = x^2(4)$ Решим уравнение (3) как уравнение с разделяющимися переменными

	$\frac{du}{dx}=\frac{u}{x}$, т.е $\frac{du}{u}=\frac{dx}{x}$ откуда, после интегрирования, получим $\ln\lvert u\rvert=\ln\lvert x\rvert$, т.е $u=x$, подставив значение функции u в уравнение (4), найдём $x\frac{dv}{dx}=x^2$ или $dv=xdx$ Отсюда $v=\frac{x^2}{2}+C$ Итак, общим решением данного уравнения является функция $y=x\left(\frac{x^2}{2}+C\right)=\frac{x^3}{2}+Cx$ (5)
4. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка: $xy'-y=x^3$ если y=1/2 при x=1	В общее решение уравнения (5) подставим начальные данные $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+C$, т.е $C=0$ Следовательно частным решением является функция $y=\frac{1}{2}x^3$

Задания для самостоятельной работы:

Вариант №1	Вариант №3
1.Найти частное решение уравнения с разделяющимися переменными: $xdy=ydx$, если $y=6$ при $x=2$ 2. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка: $y'+2y+4=0$, *если* $y=5$ *при* $x=0$ 3. Составить уравнение кривой, проходящей через точку *M(2;1)* и имеющей угловой коэффициент $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$.	1.Найти частное решение уравнения с разделяющимися переменными: $\frac{dy}{x^2}=\frac{dx}{y^2}$, если $y=2$ при $x=0$ 2.Найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка: $y'-y-1=0$, *если* $y=2$ *при* $x=0$ 3.Составить уравнение кривой, проходящей через точку *M(1;1)* и имеющей угловой коэффициент $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{8x}$.
Вариант №2	Вариант №4
1.Найти частное решение уравнения с разделяющимися переменными: $\frac{dy}{3x^2-2x}=dx$, если $y=4$ при $x=2$ 2.Найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка: $y'-2y-3=0$, *если* $y=2$ *при* $x=1$ 3. Составить уравнение кривой,	1.Найти частное решение уравнения с разделяющимися переменными: $\frac{dy}{x^2}=-\frac{dx}{y}$, если $y=1$ при $x=0$ 2.Найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка: $y'-y+4=0$, *если* $y=5$ *при* $x=0$ 3. Составить уравнение кривой,

проходящей через точку *M(1;2)* и имеющей угловой коэффициент $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2x}$.	проходящей через точку *M(2;2)* и имеющей угловой коэффициент $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4y}$.

Содержание отчета:
1. Наименование практического занятия
2. Цель занятия
3. Вариант задания
4. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
5. Список используемых источников
6. Выводы и предложения
7. Дата и подпись курсанта и преподавателя.

Контрольные вопросы:
1. Как определить порядок дифференциального уравнения?
2. Какие уравнения называются дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными?
3. Какие уравнения называются линейными дифференциальными уравнениями первого порядка?
4. Можно ли проверить правильность решения дифференциального уравнения? Как это сделать?

Практическое занятие № 11

Решение дифференциальных уравнений 2-го порядка

Многие явления природы и техники описываются дифференциальными уравнениями, связывающими неизвестные величины и их производные.

Цель занятия:

Научиться решать некоторые виды дифференциальных уравнений 2-го порядка.

Формируемые общие компетенции: ОК 01, ОК 03.
Используемые источники: [стр. 172-180].
Исходные материалы и данные:
учебные пособия, схема выполнения задания
Содержание и порядок выполнения работы:

1. Повторить определение дифференциального уравнения, понятие его общего и частного решения, способы решения дифференциальных уравнений 2-го порядка.

2. Внимательно изучить примеры решений дифференциальных уравнений.

Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Алгоритм	**Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму**

1. Найти общее решение неполного дифференциального уравнения второго порядка: $\frac{d^2y}{dx^2}=\sin x$.	Общее решение неполного дифференциального уравнения второго порядка ищется с помощью подстановки: Пусть $\frac{dy}{dx}=z$, тогда $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dz}{dx}$ уравнение принимает вид: $\frac{dz}{dx}=\sin x$, откуда $dz=\sin x dx$. Интегрируя последнее равенство, получим $\int dz=\int \sin x dx$, т.е $z=-\cos x+C_1$ Следовательно, $\frac{dy}{dx}=-\cos x+C_1$, т.е. $dy=(-\cos x+C_1)dx$ Снова интегрируя, находим $\int dy=\int(-\cos x+C_1)dx$, или $y=-\sin x+C_1x+C_2$ - общее решение
2.Найти частое решение неполного дифференциального уравнения второго порядка : $\frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dy}{dx}$, если $y=\frac{3}{2}$ и $y'=1$ при $x=0$	Найдём общее решение Пусть $\frac{dy}{dx}=z$, тогда $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dz}{dx}$ уравнение принимает вид: $\frac{dz}{dx}=2z$, откуда $\frac{dz}{z}=2dx$. Интегрируя последнее равенство, получим $\int\frac{dz}{z}=\int 2dx$, т.е $\ln z=2x+C_1$; $z=e^{2x+C_1}$ Следовательно, $\frac{dy}{dx}=e^{2x+C_1}$ (1), т.е. $dy=e^{2x+C_1}dx$ Снова интегрируя, находим $\int dy=\int e^{2x+C_1}dx$, или $y=\frac{1}{2}e^{2x+C_1}+C_2$ (2) - общее решение Для нахождения частного решения подставим начальные данные в (1)и(2) $\begin{cases}1=e^{2\bullet0+C_1}\\ \frac{3}{2}=\frac{1}{2}e^{2\bullet0+C_1}+C_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1=e^{C_1}\\ \frac{3}{2}=\frac{1}{2}e^{C_1}+C_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=0\\ C_2=1\end{cases}$ Следовательно, частное решение имеет вид: $y=\frac{1}{2}e^{2x}+1$
3. Решить уравнение $y''-y'-2y=0$.	Характеристическое уравнение: $k^2-k-2=0$; $k_1=-1$; $k_2=2$; Общее решение: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$.
4. Решить уравнение $4y''+4y'+y=0$.	Характеристическое уравнение: $4k^2+4k+1=0$; $k_1=k_2=\frac{1}{2}$; Общее решение: $y=e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1+xC_2\right)$.
5. Решить уравнение	Характеристическое уравнение:

$y''+2y'+5y=0.$	$k^2+2k+5=0;\quad D=-16;\quad k_1=-1+2i;\quad k_2=-1-2i.$ Общее решение: $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$
6. Найти частное решение уравнения *y' -2y +3 = 0,* если *y =1* при *x = 0*	Решим его с помощью подстановки *y=uv, y' = u'v + uv'* 1. Подставляя *y* и *y'* в данное уравнение, получим $u'v+uv'-2uv=-3$. Сгруппировав второе и третье слагаемое левой части уравнения, вынесем общий множитель *u* за скобки $u'v+(uv'-2uv)=-3,\; uv+u(v'-2uv)=0$ 2. Выражение в скобках приравниваем к нулю и, решив полученное уравнение, найдем функцию *v = v(x):* $v'-2v=0,\quad \frac{dv}{dx}-2v,\quad dv=2vdx,\quad \frac{dv}{v}=2dx$ Получили уравнение с разделенными переменными. Проинтегрируем обе части этого уравнения: $\int\frac{dv}{v}=\int 2dx$ Найдем функцию *v*: $\ln\|v\|=2x,\quad v=e^{2x}$ 3. Подставим полученное значение *v* в уравнение $u'v=-3$ Получим: $u'e^{2x}=-3,\quad \frac{du}{dx}e^{2x}=-3,\quad du=-3e^{-2x}dx$. Это уравнение с разделенными переменными. Проинтегрируем обе части уравнения: $\int du=-\int 3e^{-2x}dx$. Найдем функцию *u = u(x,c):* $u=-3\cdot(-\frac{1}{2})e^{-2x}+C,\quad u=\frac{3}{2}e^{-2x}+C$ 4. Найдем общее решение: $y=e^{2x}\cdot(\frac{3}{2}e^{-2x}+C),\quad y=\frac{3}{2}+Ce^{2x}$ 5. Найдем частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям *y = 1* при *x = 0*: $1=\frac{3}{2}+Ce^0,\quad 1=\frac{3}{2}+C\cdot 1,\quad C=1-\frac{3}{2},\quad C=-\frac{1}{2}$ $y=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{2x},\quad y=\frac{3-e^{2x}}{2}$ Ответ: $y=\frac{3-e^{2x}}{2}$.
7. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''=\cos x$	Общее решение найдем двукратным интегрированием $y'=\int\cos x dx=\sin x+C_1$ $y(x)=\int(\sin x+C_1)dx=-\cos x+C_1x+C_2$ $\textit{таким образом},\; y(x)=-\cos x+C_1x+C_2$

Задания для самостоятельной работы:

Вариант №1	Вариант №2
Решить дифференциальные уравнения 1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 8x - 2,$ если $y = \dfrac{1}{3}, y' = 2, x = 1;$ 2) $y'' - 3y' + 2y = 0,$ если $y = 2, y' = 3, x = 0$ 3) $y'' - 2y' + 2y = 0,$ если $y = 1, y' = 2, x = 0$	Решить дифференциальные уравнения 1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 10x + 4,$ если $y = 1, y' = 3, x = 1;$ 2) $y'' - 8y' + 15y = 0,$ если $y = 4, y' = 2, x = 0$ 3) $y'' - 4y' + 13y = 0,$ если $y = 1, y' = 5, x = 0$
Вариант №3	Вариант №4
Решить дифференциальные уравнения 1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4x + 2,$ если $y = 4, y' = 1, x = 0;$ 2) $y'' - 6y' + 5y = 0,$ если $y = 2, y' = 6, x = 0$ 3) $y'' - 4y' + 5y = 0,$ если $y = 1, y' = -1, x = 0$	Решить дифференциальные уравнения 1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 8x + 6,$ если $y = 1, y' = 1, x = 1;$ 2) $y'' - 2y' - 8y = 0,$ если $y = 4, y' = 10, x = 0$ 3) $y'' - 2y' + 5y = 0,$ если $y = 1, y' = 3, x = 0$

Содержание отчета:

1. Наименование практического занятия
2. Цель занятия
3. Вариант задания
4. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
5. Список используемых источников
6. Выводы и предложения
7. Дата и подпись курсанта и преподавателя.

Контрольные вопросы:

1. Как определить порядок дифференциального уравнения?
2. Какие уравнения называются неполными дифференциальными уравнениями второго порядка?
3. Какие уравнения называются линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами?
4. Можно ли проверить правильность решения дифференциального уравнения? Как это сделать?

Тема 1.8. Ряды

Практическое занятие № 12

Тема: Сходимость рядов. Разложение функции в степенной ряд.

Решение задачи, представленной в математических терминах, например, в виде комбинации различных функций, их производных и интегралов, нужно уметь “довести до числа”, которое чаще всего и служит окончательным ответом. Для этого в различных разделах математики выработаны различные методы.
Раздел математики, позволяющий решить любую корректно поставленную задачу с достаточной для практического использования точностью, называется теорией рядов.
Понятие числового ряда широко применяется в таких дисциплинах, как электроника, радиотехника и других дисциплинах.
Для приложений важно уметь данную функцию $f(x)$ разлагать в степенной ряд, т.е. функцию $f(x)$ представлять в виде суммы степенного ряда.

Цель занятия: Научиться работать с функциональными и степенными рядами.
Формируемые общие компетенции: ОК 01, ОК 03.
Содержание и порядок выполнения работы:

1. Повторить понятие числового, функционального, сходящегося, расходящегося, знакочередующегося ряда.
2. Внимательно изучить предложенные примеры решений. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1. Выписать первые три членов ряда по заданному общему члену $a_n = \frac{3n-1}{2^n}$	$При\ n=1,\ a_1 = \frac{3\cdot 1-1}{2^1} = \frac{2}{2} = 1,\quad при\ n=1,\ a_2 = \frac{3\cdot 2-1}{2^2} = \frac{5}{4},$ $при\ n=1,\ a_3 = \frac{3\cdot 3-1}{2^3} = \frac{8}{8} = 1.$
2. Найти формулу общего члена ряда $\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}+\frac{1}{108}+\dots$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}+\frac{1}{108}+\dots = \frac{1}{4}+\frac{1}{4\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 9}+\frac{1}{4\cdot 27}+\dots = \frac{1}{4}+\frac{1}{4\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 3^2}+\frac{1}{4\cdot 3^3}+\dots$ $= \frac{1}{4\cdot 3^{n-1}}$
3.Разложить функцию $y = e^{3x-2}$ в степенной ряд по степеням $(x-a)$ при $a = 1$.	Ряд Тейлора для функции имеет вид: $y = y(a) + \frac{y'(a)}{1!}(x-a) + \frac{y''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{y'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{y^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots =$ $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$ В нашем случае: $y(1) = e;\quad y'(x) = 3e^{3x-2};\quad y'(1) = 3e;$ $y''(x) = 9e^{3x-2};\quad y''(1) = 9e;$ $y'''(x) = 27e^{3x-2};\quad y'''(1) = 27e;$ …………………………………….. $y^{(n)}(x) = 3^n e^{3x-2};\quad y^{(n)}(1) = 3^n e;$ Получаем разложение в ряд: $y = e + \frac{3e}{1!}(x-1) + \frac{9e}{2!}(x-1)^2 + \frac{27e}{3!}(x-1)^3 + \dots + \frac{3^n e}{n!}(x-1)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n e}{n!}(x-1)^n.$

	Для определения области сходимости полученного ряда воспользуемся признаком Даламбера. $$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{3^{n+1}\cdot e\cdot(x-1)^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 3^n\cdot e\cdot(x-1)^n}\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{3\cdot(x-1)}{n+1}\right\| = 0<1$$ Следовательно, ряд сходится при любом конечном значении *x*.
1. Исследовать сходимость числовых рядов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\sqrt[3]{n}}{n!}$	Воспользуемся признаком Даламбера: $$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\sqrt[3]{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 3^n\sqrt[3]{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}}{(n+1)} = 0$$ - ряд сходится
2. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n}}{5^n}$	Для определения радиуса сходимости применим признак Даламбера: $$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{(x+2)^{2n+2}5^n}{5^{n+1}(x+2)^{2n}}\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{(x+2)^2}{5}\right\| < 1$$ $$x^2+4x-1<0$$ $$D=16+4=20$$ $$x_{1,2}=\frac{-4\pm 2\sqrt{5}}{2}=-2\pm\sqrt{5}$$ Таким образом, интервал сходимости $(-2-\sqrt{5}\,;-2+\sqrt{5})$
Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=3^x$.	Так как $f(x)=3^x=e^{\ln 3^x}=e^{x\ln 3}$, то, заменяя х на $x\ln 3$ в разложении $f(x)=e^x$, получим: $$f(x)=3^x=1+\frac{\ln 3}{1!}x+\frac{\ln^2 3}{2!}x^2+\frac{\ln^3 3}{3!}x^3+\ldots+\frac{\ln^n 3}{n!}x^n+\ldots$$

Задания для самостоятельной работы:

I вариант	1. Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену $a_n=\frac{1}{4n^2+1}$. 2. Найти формулу общего члена ряда 2+4+8+16+… 3. Разложить функцию $f(x)=\sqrt{x+1},\ a=1$ в ряд Тейлора по степеням $x-a$ (до пятого члена разложения включительно). 4. Исследовать ряды на сходимость: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$, б) $\sum_{n=}^{\infty}(-1)^n n\cdot 0{,}9^n$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$. 5. Разложить в ряд Тейлора – Маклорена функцию cos($\frac{x}{2}$).
II вариант	1. Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену $a_n=\frac{2^n}{n!}$. 2. Найти формулу общего члена ряда $\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots$ 3. Разложить функцию $f(x)=\ln(x+2),\ a=1,$ в ряд Тейлора по степеням $x-a$ (до пятого члена разложения включительно).

	4. Исследовать ряды на сходимость: а) $\frac{1}{n\cdot 3^n}$, б) $\sum_{n=}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{4n-1}\right)^n$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$. 5. Разложить в ряд Тейлора – Маклорена функцию sin7x.
III вариант	1. Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену $a_n=\frac{2n+1}{n^2}$. 2. Найти формулу общего члена ряда $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\dots$ 3. Разложить функцию $f(x)=e^{2x}, a=2,$ в ряд Тейлора по степеням $x-a$ (до пятого члена разложения включительно). 4. Исследовать ряды на сходимость: а) $\frac{n!}{3^n}$, б) $\sum_{n=}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$. 5. Разложить в ряд Тейлора – Маклорена функцию cos5x.
IV вариант	1. Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену $a_n=\frac{2n+1}{3^n}$. 2. Найти формулу общего члена ряда $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\dots$ 3. Разложить функцию $f(x)=\sin 2x, a=-\frac{\pi}{4},$ в ряд Тейлора по степеням $x-a$ (до пятого члена разложения включительно) 4. . Исследовать ряды на сходимость: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n^3}$, б) $\sum_{n=}^{\infty}(-1)^n n^2\cdot 0{,}7^n$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$. 5. Разложить в ряд Тейлора – Маклорена функцию $e^{\frac{x}{2}}$.

Содержание отчета:

1. Наименование практического занятия
2. Цель занятия
3. Вариант задания
4. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
5. Список используемых источников
6. Выводы и предложения
7. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы:

1. Какой ряд называется степенным?
2. Какой ряд называется функциональным?
3. Какие ряды называются сходящимися?
4. Какие ряды называются расходящимися?
5. Какой ряд называется знакочередующимся?
6. Каким образом можно разложить функцию в ряд Тейлора?

Раздел 2. Основы теории вероятности и математической статистики.

Практическое занятие №13

Тема: Закон распределения случайной величины. Нахождение математического ожидания, дисперсии и среднего квадратичного отклонения случайной дискретной величины заданной законом распределения

Теория вероятностей возникла и развивалась в процессе решения ряда отдельных задач игрового и прикладного характера.

Первые дошедшие до нас сведения относятся к XVI–XVII векам и связаны с решением задач, возникающих в азартных играх. Первые работы принадлежали Д. Кардано, Б. Паскалю, П. Ферма, Х. Гюйгенсу, и др., и представляли попытки создания теории азартных игр с целью дать рекомендации игрокам.

Затем стали возникать и развиваться прикладные задачи – в первую очередь вопросы страховки от несчастных случаев и стихийных бедствий. Постепенно выделился круг задач со специфической – вероятностной– постановкой вопроса и методикой их решения, оформились первые определения и теоремы.

Цель занятия: Научиться находить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины.

Содержание и порядок выполнения работы:
1. Повторить основные понятия и формулы комбинаторики, правило суммы и произведения.
2. Внимательно изучить предложенные примеры решения комбинаторных задач.
Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

<table>
<tr><th>Алгоритм</th><th>Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.</th></tr>
<tr><td>1. Найти математическое ожидание случайной величины X, имеющей закон распределения, представленный в таблице.</td><td>Закон распределения случайной величины X.
<table><tr><td>Xi</td><td>–2</td><td>–1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>Pi</td><td>0,3</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,1</td><td>0,3</td></tr></table>
$M(x) = -2 \cdot 0,3 + (-1) \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,2 + 2 , 0.1 + 3 , 0.3 = -0,6 - 0,1 + 0,2 + 0,2 + 0,9 = 0,6$</td></tr>
<tr><td>2. Найти дисперсию случайной величины X</td><td>Случайная величина (X – M(X)) имеет распределение, представленное в таблице
<table><tr><td>Xi – M(x)</td><td>–2,6</td><td>–1,6</td><td>0,4</td><td>1,4</td><td>2,4</td></tr><tr><td>Pi</td><td>0,3</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,1</td><td>0,3</td></tr></table>
Тогда:
$D(X) = M(x - M(x))^2 = (-2,6)^2 \cdot 0,3 + (-1,6)^2 \cdot 0,1 + 0,4^2 \cdot 0,2 + 1,4^2 \cdot 0,1 + 2,4^2 \cdot 0,3 = 2,028 + 0,256 + 0,032 + 0,196 + 1,728 = 4,24$
Второй способ:
случайная величина x^2 имеет распределение, представленное в таблице
<table><tr><td>Xi</td><td>1</td><td>4</td><td>9</td></tr><tr><td>Pi</td><td>0,3</td><td>0,4</td><td>0,3</td></tr></table></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>Тогда M(x^2) = 1 . 0,3 + 4 . 0,4 + 9 . 0,3 = 0.3 + 1,6 + 2,7 = 4,6
D(x) = M(x^2) – (M(x))^2 = 4,6 – 0,6^2 = 4,6 – 0,36 = 4,24</td></tr>
<tr><td>3. Найти среднее квадратичное ожидание случайной величины X</td><td>$\delta(x)=\sqrt{D(x)}=\sqrt{4,24}\approx 2,059$</td></tr>
<tr><td>4. Найти значение параметра a для закона распределения.</td><td>Так как
<table>
<tr><td>x_i</td><td>0</td><td>3</td><td>5</td><td>8</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>$40a^2 - 11a$</td><td>$25a^2 - 2$</td><td>$10a^2 - 2a$</td><td>$25a^2 - 7a$</td></tr>
</table>
$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1,$ то $40a^2 - 11a + 25a^2 - 2 + 10a^2 - 2a + 25a^2 - 7a = 1$
$100a^2 - 20a - 3 = 0$
$a_1 = -0,1$
$a_2 = 0,3$
$a_1 = -0,1$ – посторонний корень, так как $0 \le P(x_i) \le 1$. Подставив значение 0,3 вместо a, получим закон распределения
<table>
<tr><td>x_i</td><td>0</td><td>3</td><td>5</td><td>8</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>0.3</td><td>0.25</td><td>0.3</td><td>0.15</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Задания для самостоятельной работы:

При составлении законов распределений помните, что:

- значения случайной величины, записанные в первой строке таблицы, должны быть в порядке возрастания;
- сумма соответствующих им вероятностей должна равняться 1;

значение вероятности должно находиться в пределах $0 \le P(x_i) \le 1$.

1. Составить закон распределения случайной величины X. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины, если n – порядковый номер фамилии курсанта в списке группы:

x_i	п – 10	п – 6	п – 2	п	п + 1	п + 3	п + 5	п + 8
p_i	0,17	0,03	0,16	0,07	0,12	0,4	0,04	0,01

2. Найти числовые характеристики величины X.

1	x_i	-3	4	5	7
	P_i	$10a^2$-3a	$15a^2$-5a	$8a^2$-3a	$17a^2$-4a-1
2	x_i	-2	3	5	9
	P_i	$5a^2$-3?5a	$5a^2$-2a-1,5	$15a^2$-9a-2	1,5a^2-3,5a
3	x_i	2	3	8	11
	P_i	$41a^2$-20a	$23a^2$-16a	$30a^2$-12a-6	$6a^2$-32a+20
4	x_i	5	7	11	18

	P_i	$10a^2$-4a-1	$6a^2$-2	$5a^2$-a-1	$4a^2$-1

Содержание отчета:

1. Наименование практического занятия
2. Цель занятия
3. Вариант задания
4. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
5. Список используемых источников
6. Выводы и предложения
7. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы:

1. Дать определение дискретной случайной величины.
2. Что называется математическим ожиданием?
3. Что такое дисперсия?
4. Что такое среднее квадратичное отклонение?
5. Дать определение закона распределения дискретной случайной величины.

Раздел 3. Основные численные методы.

Практическое занятие №14

Тема: Вычисление интегралов по формулам прямоугольников, трапеций.

Решение многих технических задач сводится к вычислению определённых интегралов, точное выражение которых сложно, требует длительных вычислений и не всегда оправдано практически. Здесь бывает вполне достаточно их приближённого значения. Пусть, например, необходимо вычислить площадь, ограниченную линией, уравнение которой неизвестно. В этом случае можно заменить данную линию более простой, уравнение которой известно. Площадь полученной таким образом криволинейной трапеции принимается за приближённое значение искомого интеграла.

Простейшим приближённым методом является метод прямоугольников. Метод трапеций обычно даёт более точное значение интеграла, чем метод прямоугольников.

Цель занятия: Научиться работать с функциональными и степенными рядами.

Формируемые общие компетенции: ОК 01, ОК 03.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Повторить основные формулы интегрирования, сущность изученных методов интегрирования, геометрический смысл определённого интеграла.

2. Внимательно изучить предложенные примеры приближённого вычисления интеграла. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1. Вычислить по формуле прямоугольников $\int_2^5 x^2dx$. Найти абсолютную и относительную погрешности вычислений.	Разобьём отрезок [*a*, *b*] на несколько (например, на 6) равных частей. $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{5-2}{6} = \frac{1}{2}$ Тогда *a* = 0, *b* = 3 , $x_k = a + k \cdot \Delta x$ $x_0 = 2 + 0 \cdot \frac{1}{2} = 2$ | $f(x_0) = 2^2 = 4$

$x_1 = 2 + 1 \cdot \frac{1}{2} = 2,5$	$f(x_1) = 2,5^2 = 6,25$
$x_2 = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$	$f(x_2) = 3^2 = 9$
$x_3 = 2 + 3 \cdot \frac{1}{2} = 3$	$f(x_3) = 3,5^2 = 12,25$
$x_4 = 2 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 4$	$f(x_4) = 4^2 = 16$
$x_5 = 2 + 5 \cdot \frac{1}{2} = 4,5$	$f(x_5) = 4,5^2 = 20,25$
$x_6 = 2 + 6 \cdot \frac{1}{2} = 5$	$f(x_6) = 5^2 = 25$

$$\int_2^3 x^2dx \approx \frac{1}{2} \cdot (4 + 6,25 + 9 + 12,25 + 16 + 20,25) = \frac{1}{2} \cdot 67,75 = 33,875$$

(Значение интеграла вычислено с недостатком)

$$\int_2^3 x^2dx \approx \frac{1}{2} \cdot (6,25+9+12,25+16+20,25+25) = \frac{1}{2} \cdot 88,75 = 44,375$$

(Значение интеграла вычислено с избытком)

$$\frac{33,875+44,375}{2} = 39,125$$

Для того, чтобы вычислить относительную погрешность вычислений, надо найти точное значение интеграла:

$$\int_2^5 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_2^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{125}{3} - \frac{8}{3} = 39$$

$$\Delta = |39 - 39,125| = 0,125$$

$$\delta = \frac{0,125}{39} \cdot 100\% \approx 0,32\%$$

2. Вычислить по формуле трапеций $\int_2^5 x^2dx$.

Используя таблицу задания 1, имеем:

$$\int_2^3 x^2dx \approx \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{2} + 6,25 + 9 + 12,25 + 16 + 20,25 + \frac{25}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 78,25 = 39,125$$

Задания для самостоятельной работы:

Вычислить интеграл методом прямоугольников и трапеций, приняв n=10.

Вариант 1	Вариант 2
$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}, n = 10$	$\int_1^2 \frac{dx}{2+x}, n = 10$
Вариант 3	Вариант 4

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, n=10$	$\int_3^4 \frac{dx}{x^2-4}, n=10$
Вариант 5	Вариант 6
$\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1}, n=10$	$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}, n=10$

Содержание отчета:

1. Наименование практического занятия
2. Цель занятия
3. Вариант задания
4. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
5. Список используемых источников
6. Выводы и предложения
7. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы:

7. Всегда ли можно вычислить точное значение интеграла?
8. В каких случаях применяются приближённые методы интегрирования?
9. Какой метод даёт более точный результат?

Практическое занятие № 15

Тема: Численные методы при решении задач профессиональной направленности.

Расчётная индикаторная диаграмма представляет собой графическое изображение в PV – координатах рабочего цикла двигателя внутреннего сгорания со смешанным подводом тепла, т.е. совокупность всех процессов, происходящих в цилиндре двигателя. Полезная работа цикла представляет собой площадь индикаторной диаграммы в принятом масштабе. Площадь индикаторной диаграммы можно найти, вычисляя соответствующие интегралы методом прямоугольников или трапеций.

Цель занятия: Научиться вычислять площадь индикаторной диаграммы двигателя внутреннего сгорания.
Формируемые общие компетенции: ОК 01, ОК 03.
Содержание и порядок выполнения работы:
1. Изучить порядок построения индикаторной диаграммы.
2. Повторить порядок вычисления определённых интегралов методом прямоугольников и трапеций.

1 ый такт	линия 1-а – процесс наполнения цилиндра свежим зарядом воздуха
2 ой такт	линия а-с – политропный процесс сжатия воздуха линия с-z’- z – изохорный и изобарный подвод тепла (сгорание топлива)

3 ий такт	линия z' – z – b – процесс расширения z' – z – предварительное расширение z- b – последовательное расширение
4 ый такт	b – 1 - процесс удаления продуктов сгорания (выпуск)

На диаграмме:

$\varepsilon = \frac{V_a}{V_c}$ - степень сжатия (1)

$\lambda = \frac{P_z}{P_c}$ - степень повышения давления (3)

$\rho = \frac{V_z}{V_c}$ - степень предварительного расширения (2)

$\delta = \frac{\varepsilon}{\rho}$ - степень последующего расширения (4)

Работа цикла L состоит из:
$L = L_{z'z} + L_{zb} - L_{ac}$, где

$L_{z'z}$ – работа предварительного расширения
L_{zb} – работа последующего расширения
L_{ac} - - работа сжатия

Таким образом, полезная работа цикла представляет собой площадь индикаторной диаграммы в принятом масштабе. Посчитав площадь диаграммы и заменив её на такую же площадь прямоугольника с основанием V_s, можно найти высоту прямоугольника P_i. P_i называется средним индикаторным давлением.
Среднее индикаторное давление можно рассчитать теоретическим путем по формуле:

$$P_{i_t} = \frac{P_c}{\varepsilon - 1}\left[\lambda(\rho - 1) + \frac{\lambda\rho}{n_2 - 1}\left(1 - \frac{1}{\delta^{n_2 - 1}}\right) - \frac{1}{n_1 - 1}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{n_1 - 1}}\right)\right]$$

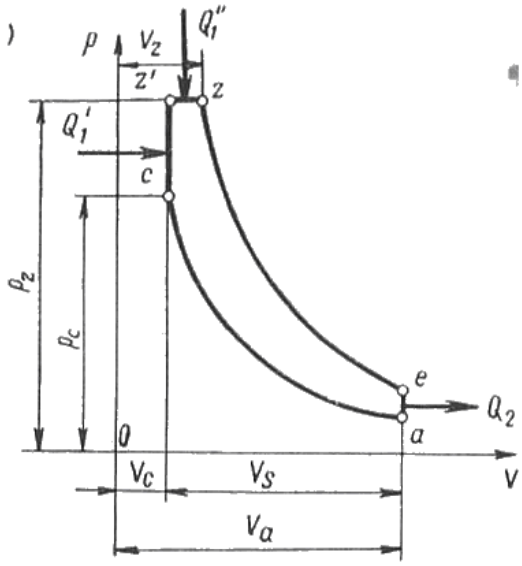
Сравнив P_i, полученное по диаграмме и P_{it} рассчитанное теоретическим путём можно оценить погрешность расчётов.
Площадь индикаторной диаграммы можно определить следующим образом:

$$F_{д} = \int_{V_c}^{V_z} P_z m dv + \int_{V_z}^{V_b} P_b m V^{n_2} dv - \int_{V_c}^{V_a} P_a m V^{n_1} dv$$

, тогда

$$P_i = \frac{F_{д}}{mV_s}$$

Расчётная индикаторная диаграмма



Задания для самостоятельной работы:

Найти площадь индикаторной диаграммы двигателя внутреннего сгорания и значение среднего индикаторного давления по предложенным данным. Значения Vc, Vz, можно найти по формулам (1) и (2). Значение Vb= Va . Значение Pb можно найти по формуле

$P_b = \dfrac{P_z}{\delta^{n_2}}$. Вычисления проводить до второй значащей цифры.

	Pc, МПа	Pz, Мпа	Pa, Мпа	Va, мм	m, мм/МПа	ε	λ	ρ	δ	n_1	n_2
1вариант	5,92	10	0,15	200	16,67	11,5	1,7	1,17	9,9	1,37	1,3
2 вариант	3,6	6,5	0,14	200	25	12,0	1,8	1,27	9,45	1,374	1,29

Содержание отчета:

1. Наименование практического занятия
2. Цель занятия
3. Вариант задания
4. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
5. Список используемых источников
6. Выводы и предложения
7. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Учебно-методическое и информационное обеспечение учебной дисциплины

Виды источников	Наименование рекомендуемых учебных изданий
Основные	Богомолов, Н. В**.** Математика [Текст] : учебник для сред. проф. образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. - 5-е изд., испр. и доп. - Москва : Юрайт, 2019
Дополнительные, в т.ч. курс лекций по *учебной дисциплине, методические пособия и рекомендации для выполнения практических занятий и самостоятельных работ*	Методические рекомендации для выполнения практических занятий, методические рекомендации для выполнения самостоятельных работ.
	Козлов, В. В. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: 11 класс : учебник / В. В. Козлов, А. А. Никитин. - Москва : Русское слово, 2020. - 464 с. - (ФГОС Инновационная школа).
Интернет-источники	www://проф-обр.рф/dir/14-1-0-309; http://сайты-педагогов.рф/index.php/matematika.html
Электронные образовательные ресурсы	1. ЭБС «Book.ru», https://www.book.ru 2. ЭБС « ЮРАЙТ»https://www.biblio-online.ru 3. ЭБС «Академия», https://www.academia-moscow.ru 4. Издательство «Лань», https://e.lanbook.com 5.Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека онлайн»,https://www.biblioclub.ru