Федеральное агентство по рыболовству
БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»
Калининградский морской рыбопромышленный колледж

Утверждаю
Заместитель начальника
колледжа
по учебно-методической работе
М.С. Агеева

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»
СВЕДЕНИЯ О СЕРТИФИКАТЕ ЭП
Сертификат:
53959AC4CF57B77809EEC6B4AF69048DD86AFB41
Владелец: Агеева Марина Сергеевна
Действителен: с 2024.09.02 до 2025.11.26

ЕН.01 МАТЕМАТИКА

Методическое пособие для выполнения практических занятий по специальности

26.02.05 Эксплуатация судовых энергетических установок

МО-26 02 05-ЕН.01.ПЗ

РАЗРАБОТЧИК	Учебно-методический центр
ЗАВЕДУЮЩИЙ ОТДЕЛЕНИЕМ	М.Ю. Никишин
ГОД РАЗРАБОТКИ	2023

Содержание

Введение

Рабочей программой дисциплины предусмотрено проведение 14 практических занятий.

Целью проведения занятий является закрепление теоретических знаний и приобретение необходимых навыков и умений по отдельным темам курса. Наряду с формированием умений и навыков в процессе практических занятий вырабатывается способность и умение использовать теоретические знания на практике, развиваются интеллектуальные умения.

Выполнение практических занятий направлено на формирование у обучающихся следующих компетенций:

- профессиональные компетенции:

ПК 1.1. Обеспечивать техническую эксплуатацию главных энергетических установок судна, вспомогательных механизмов и связанных с ними систем управления;

ПК 1.3 Выполнять техническое обслуживание и ремонт судового оборудования;

ПК 3.1. Планировать работу структурного подразделения;

ПК 3.2. Руководить работой структурного подразделения;

ПК 3.3. Анализировать процесс и результаты деятельности структурного подразделения.

- общие компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде;

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных общечеловеческих ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

Перед проведением практических занятий курсанты обязаны проработать соответствующие разделы теоретического курса, уяснить цель занятия, ознакомиться с содержанием и последовательностью его проведения, а преподаватель - проверить их знание и готовность к проведению к выполнению задания.

Текст заданий, решённых на практическом занятии, схемы, эскизы, таблицы должны быть выполнены в соответствие с требованиями, предъявляемыми к оформлению письменных работ.

После каждого практического занятия проводится зачёт, на котором курсант должен:

- Пояснить, как проводится расчёт;
- Уметь анализировать полученные результаты в соответствии с основными требованиями к знаниям и умениям по данной теме;
- Ответить на вопросы для самопроверки.

Перечень практических занятий

№ п/п	Практическое занятие	Количество часов
1	Практическое занятие №1. Тема: Решение матричных уравнений.	2
2	Практическое занятие № 2 Тема: Нахождение производных.	2
3	Практическое занятие № 3 Тема: Применение производной к исследованию функции и построению графиков.	2
4	Практическое занятие № 4 Тема: Нахождение дифференциала и приложение дифференциала к приближенным вычислениям.	2
5	Практическое занятие № 5 Тема: Интегрирование функций различными способами.	2
6	Практическое занятие № 6 Тема: Вычисления определенных интегралов различными способами.	2
7	Практическое занятие № 7 Тема: Вычисление площадей плоских фигур и объемов тел вращения.	2
8	Практическое занятие №8 Решение дифференциальных уравнений 1-го порядка.	2
9	Практическое занятие № 9 Решение дифференциальных уравнений 2-го порядка	2
10	Практическое занятие №10 Тема: Решение дифференциальных уравнений различными способами.	2
11	Практическое занятие № 11 Тема: Сходимость рядов. Разложение функций в степенные ряды.	2
12	Практическое занятие № 12 Тема: Основные понятия комбинаторики, теории вероятностей, статистики.	2
13	Тема: Решение линейных систем уравнений различными способами.	2
14	Тема: Вычисление интегралов по формулам прямоугольников, трапеций.	2
ИТОГО		***28***

Практическое занятие №1
Тема: Решение матричных уравнений.

Существует несколько способов решения таких систем. Один из них - способ решение систем линейных уравнений с помощью матриц.

Цель занятия. Научиться выполнять действия с матрицами и решать системы линейных уравнений матричным способом.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Повторить понятие определителя второго и третьего порядка и способы их вычисления; понятие алгебраического дополнения элемента матрицы, обратной матрицы, действия с матрицами.
2. Внимательно изучить пример решения системы трёх линейных уравнений матричным способом. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Найти решение системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 1x+5y+4z=16 \\ 3x+y=8 \\ 3x+2y+z=11 \end{cases}$$

Решение:

Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1. Найти определитель матрицы системы уравнений det A и убедиться, что матрица A - невырожденная.	det A = $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ = - 2, -2≠0, матрица не вырожденная, обратная матрица A^{-1} – существует.
2. Найти матрицу A^{-1}, обратную к матрице A, например, способом алгебраических дополнений.	а) Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы: $A_{11}=1$; $A_{12}=-3$; $A_{13}=3$ $A_{21}=3$; $A_{22}=-11$; $A_{23}=13$ $A_{31}=-4$; $A_{32}=12$; $A_{33}=-14$ б) Составляем матрицу алгебраических дополнений: $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -11 & 13 \\ -4 & 12 & -14 \end{pmatrix}$ в) Транспонируем полученную матрицу: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -3 & -11 & 12 \\ 3 & 13 & -14 \end{pmatrix}$ в) Разделив каждый элемент матрицы на det A, получим: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -0,5 & -1,5 & 2 \\ 1,5 & 5,5 & -6 \\ -1,5 & -6,5 & 7 \end{pmatrix}$

3. Найти вектор – решение X по формуле: X= $A^{-1}\cdot$ B	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & -1,5 & 2 \\ 1,5 & 5,5 & -6 \\ -1,5 & -6,5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$ Значения x, y, z найдём по правилу умножения матриц: x= -0,5·16+(-1,5) ·8+2·11= -8-12+22=2 Аналогично находим y и z. y=2, z=1
4. Записать ответ системы уравнений.	(2;2;1)

Задания для самостоятельной работы:
Решить с помощью определителей систему уравнений.

1. $\begin{cases} x-2y-2z=3 \\ x+y-2z=0 \\ x-y-z=1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x+y-5z=-6 \\ 2x-3y+4z=-4 \\ 5x-y+3z=-4 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2x+3y+4z=7 \\ 3x+4y-z=-4 \\ 4x+5y-2z=7 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 7x+5y+2z=18 \\ x-y-z=3 \\ x+y+2z=-2 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 11x+3y-z=2 \\ 2x+5y-5z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ 7. $\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+3y-4z=16 \\ 3x-2y-5z=12 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x-y+3z=7 \\ x+3y-2z=0 \\ 2y-z=2 \end{cases}$

Содержание отчета:

1. Наименование практического занятия
2. Цель занятия
3. Вариант задания
4. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
5. Список используемых источников
6. Выводы и предложения
7. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы
1. Какая матрица называется невырожденной?
2. Любая ли матрица имеет матрицу, обратную ей?
3. Каков алгоритм решения систем линейных уравнений матричным способом?

Практическое занятие № 2
Тема: Нахождение производных.

Понятие производной находит широкое приложение в различных областях науки и техники. Производная применяется при поиске углового коэффициента касательной к графику кривой, заданной уравнением; при вычислении скорости и ускорения точки, закон движения которой известен; при определении плотности неоднородного стержня или тока, если известно количество электричества, протекающего через проводник. Процессы, с которыми сталкивается человек во всех областях научной и практической деятельности, чаще всего аналитически могут быть представлены сложной функцией, т.е. функцией от функции.

Цель занятия: Научиться находить производные функций.
Содержание и порядок выполнения работы:
1. Повторить определение производной, её физический и геометрический смысл, правила и формулы дифференцирования.
2. Внимательно изучить примеры определения производных функций. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.
Найти производные функций: а) $f(x) = x^2 + x – 7$; б) $x^3 (x - 1)$; в) $y=(3x^3-2x+1)\cdot\sin x$; г) $y = \operatorname{tg} x + \frac{e^x}{1+x}$.
Решить задачу, используя дифференциальное исчисление. Найти производные сложной функций.

Решение.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1. Найти производную функции $f(x) = x^2 + x – 7$	$f'(x) = (x^2 + x – 7)' = (x^2)' + x' – 7' = 2x + 1 – 0 = –2x + 1$
2. Найти производную функции $f(x) = x^3 (x - 1)$.	$f'(x) = (x^3(x – 1))' = (x^3)'(x – 1) + x^3(x – 1)' =$ $= 3x^2 (x – 1) + x^3 (1 – 0) = 3x^3 - 3x^2 + x^3 = 4x^3 – 3x^2$.
3. Найти производную функции $y=(3x^3-2x+1)\cdot\sin x$.	$y'=(3x^3-2x+1)'\cdot\sin x + (3x^3-2x+1)\cdot(\sin x)' = (9x^2-2)\sin x + (3x^3-2x+1)\cos x$.
4. Найти производную функции $y = \operatorname{tg} x + \frac{e^x}{1+x}$.	$y'=(\operatorname{tg}x + \frac{e^x}{1+x})' = (\operatorname{tg}x)' + (\frac{e^x}{1+x})' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{(e^x)'(1+x) - (1+x)'e^x}{(1+x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{(1+x)e^x - e^x}{(1+x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{xe^x}{(1+x)^2}$.
5. Известно, что для любой точки С неоднородного стержня АВ длиной 20 см, отстоящей от точки А на расстоянии n см, масса куска стержня АС в граммах определяется по формуле $m(n) = 3n^2 + 5n$. Найдите линейную плотность стержня в середине отрезка АВ.	$m(n) = 3n^2 + 5n$ (г), $l_{AB} = 20$ см, $\rho_{сер} = ?$ Решение: Т.к. $\rho(n) = m'(n)$, то $\rho(n) = 6n+ 5$. $n = 10$ см, $\rho(10) = 60 + 5 = 65$ (г/см) Ответ: 65 г/см.

6. Найти производную функции $y=\sqrt{3x^2-4}$	$\left(\sqrt{3x^3-4}\right)' = \dfrac{\left(3x^3-4\right)'}{2\sqrt{3x^3-4}} = \dfrac{9x^2}{2\sqrt{3x^3-4}}$
7. Найти производную функции y= $\ln\sin e^x$	Представим функцию y= $\ln\sin e^x$ в виде суперпозиции трёх функций: y=lnu, u=sin t, t=e^x, тогда по формуле производной сложной функции получим: $(\ln\sin e^x)' = \dfrac{1}{\sin e^x}\cdot(\sin e^x)' = \dfrac{1}{\sin e^x}\cdot\cos e^x\cdot(e^x)' = e^x\cdot ctg\, e^x$

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1.	1. Найти производную функции: а) h(x) = 5x^2 +3x +8 б) $y=x^4-8x^3+16x^2$ в) g (x)= 2 log $_2$ x + ln x г) y = 2 x + e ^{x} – sinx д) f(x)=2x^4-$\dfrac{6}{x}$ - 3$\sqrt{x}$; е) f(x)= $2\sqrt{x}+3\ln x$; ж) f(x)=3x e^x; з) f(x)= $\dfrac{x-1}{2x+1}$; и) $y=\dfrac{1-x^5}{1-x^3}$ 2. Координата материальной точки изменяется с течением времени по закону x(t) = 3t ^{2} - 7t + 6. Найдите скорость точки в момент времени t = 6.	Вариант 3.	1. Найти производную функции: а) f(x) = 4x^2 – 3x-1 б) $y=2x^3+3x^2-12x-5$ в) y(x) = 2sinx + cosx – 3 г) y = 2 x + e ^{x} – tgx д) f(x)=x^4 - e^x –cosx; е) f(x)= $\sqrt[3]{x}+\ln x$; ж) f(x)=x e^{-2x}; з) f(x)= $\dfrac{2+3x}{5x-4}$; и) $y=3(\dfrac{x^4}{2}-x^2)$ 2. При движении тела по прямой его скорость V (м/с) меняется по закону V (t) = $\dfrac{t^5}{5}$ - t ^{3} + t + I , где t - время движения в секундах. Найдите ускорение (м/с ^{2}) через 2 секунды после начала движения.

Вариант 2	1. Найти производную функции: а) $f(x) = 4x^2 + 7x+1$ б) $y=x^3-9x^2+24x-15$ в) $f(x) = \frac{x^2-7}{cosx}$ г) $y = 2x + e^x - \sin x$ д) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-5\ln x$; е) $f(x)=x^3 +e^x -\cos x$; ж) $f(x)=x e^{-x}$; з) $f(x)=\frac{2x+3}{5-4x}$; и) $y=1+\frac{4x+1}{x^2}$ 2. Найдите силу F , действующую на материальную точку с массой m , движущуюся по закону $x(t) = 2t^3 - t^2$ при t = 2.	Вариант 4.	1. Найти производную функции: а) $f(x) = 5x^2 + 6x-1$ б) $y=x^4-8x^3+16x^2$ в) $g(x) = 2\ln x - 3\log_7 x + 5$ г) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ $+2e^x +\cos x$; д) $f(x)=\sqrt{x}-2\ln x$; е) $f(x)=x e^x$; ж) $f(x) = 3x^7 \log_3 x$ з) $f(x)=\frac{1}{3x-1}$; и) $y=\frac{1}{x^2(x-1)}$ 2. В какие моменты времени ток в цепи равен нулю, если количество электричества, протекающего через проводник, задается формулой $q = t - \sqrt{t} + l$.

Найти производные сложных функций:

1 вариант	2 вариант	3 вариант	4 вариант
1. $f(x)=(3x+2)^{50}$	1. $f(x)=(5-7x)^{10}$	1. $f(x)=(x^2+3)^4$	1. $f(x)=(7-8x^3)^{11}$
2. $y=\sqrt{x^2-6x+12}$	2. $y=\sqrt{5x^2-3x+4}$	2. $y=\sqrt{x^3+3x^2-2x+1}$	2. $y=\sqrt{(2x-1)(x+5)}$
3. $y=e^{4x-2}$	3. $y=5^{2x+1}$	3. $y=10^{-3x-1}$	3. $y=3^{5x+6}$
4. f(x)=sin(5x-4).	4. f(x)=cos(5x-4).	4. f(x)=tg(5x-4).	4. f(x)=ctg(5x-4).

Содержание отчета:

8. Наименование практического занятия
9. Цель занятия
10. Вариант задания
11. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
12. Список используемых источников
13. Выводы и предложения
14. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы
1. Что называется производной функции?
2. Как вычислить производную второго порядка? В чём состоит физический смысл второй производной?
3. Какая связь существует между непрерывностью функции и её производной?

4. Какие прикладные задачи решаются с помощью производной?
5. Какая функция является сложной?
6. Каким образом можно найти производную сложной функции?
7. Как найти частное значение производной?

Практическое занятие № 3
Тема: Применение производной к исследованию функции и построению графиков.

Производная используется для исследования функций, т.е. для её изучения различных свойств. Результаты такого исследования удобно представлять в виде графика.

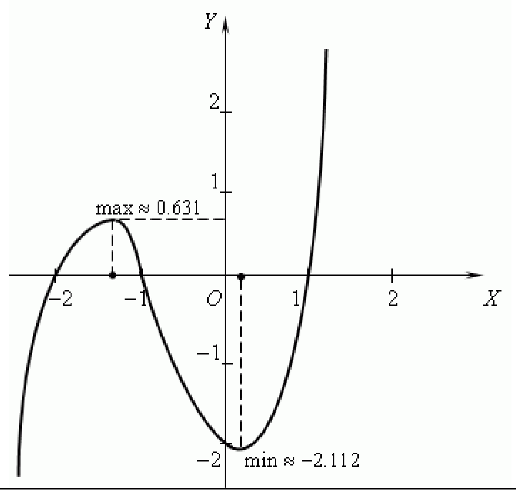
<u>Цель занятия:</u> Научиться строить график функций, используя производную.

<u>Содержание и порядок выполнения работы:</u>
1. Повторить алгоритм исследования функции с помощью производной и построения её графика.
2. Внимательно изучить пример исследования функции. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Исследовать функцию и построить её график: $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Решение.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1. Найти область определения и область значений функции.	Область определения $x \in R$ (x – любое действительное число); область значений $y \in R$, так как $f(x)$ – многочлен нечётной степени;
2. Проверить функцию на чётность.	функция $f(x)$ не является ни чётной, ни нечётной
3. проверить функцию на периодичность.	$f(x)$ – непериодическая функция
4. Найти производную функции и критические точки функции.	$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$; Найти корни уравнения $3x^2 + 4x - 1 = 0$. Эти корни: $x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{28}}{6} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$. Функция имеет две критические точки и три интервала монотонности: $\left(-\infty, \dfrac{-2-\sqrt{7}}{3}\right)$, $\left(\dfrac{-2-\sqrt{7}}{3}, \dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}\right)$ и $\left(\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$.

<table>
<tr><td>5. Свести полученные данные в таблицу.</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$(-\infty, \frac{-2-\sqrt{7}}{3})$</td><td>$\frac{-2-\sqrt{7}}{3}$</td><td>$(\frac{-2-\sqrt{7}}{3}, \frac{-2+\sqrt{7}}{3})$</td><td>$\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$</td><td>$(\frac{-2+\sqrt{7}}{3}, +\infty)$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>–</td><td>0</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>↗</td><td>~0.631</td><td>↘</td><td>~ –2.112</td><td>↗</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>max</td><td></td><td>min</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>6. Определить координаты точки пересечения графика с осью ОУ.</td><td>График функции пересекается с осью Y в точке (0, – 2), так как f (0) = □2</td></tr>
<tr><td>7. Найти нули функции.</td><td>Чтобы найти нули функции нужно решить уравнение: $x^3 + 2x^2$ □ x □ 2 = 0, нулями функции являются: □2, □1 и 1.</td></tr>
<tr><td>8. По полученным данным построить график функции.</td><td>
</td></tr>
</table>

Задания для самостоятельной работы:
Исследовать функцию и построить её график:

Вариант	1. $y = -x^3 + 3x^2 – 2$ 2. $y = - 2x – 1/(2x)$ 3. $y = 1/(x^2 – 4)$	Вариант	1. $y = -x^3 - 3x^2 + 3$ 2. $y = x + 2/x$ 3. $y = 1/(x^2 – 4)$
Вариант 2	1. $y = -x^4 + 2x^2 +3$ 2. $y = 3x + 1/(3x)$ 3. $y = 1/(x^2 – 4)$	Вариант 4.	1. $y = x^4-8x^2 +8$ 2. $y = x + 4/x$ 3. $y = 1/(x^2 – 4)$

Содержание отчета:

15. Наименование практического занятия
16. Цель занятия

17. Вариант задания
18. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
19. Список используемых источников
20. Выводы и предложения
21. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы
1. Каким образом можно проверить функцию на чётность?
2. Каким образом можно проверить функцию на периодичность?
3. Как можно найти нули функции?
4. По какому алгоритму проводится исследование функции?

Практическое занятие № 4
Тема: Нахождение дифференциала и приложение дифференциала к приближенным вычислениям.

Дифференциал функции применяется при вычислении приближённого значения величин, что часто используется при решении задач прикладного характера.

Цель занятия: Научиться вычислять дифференциалы функций, применять дифференциал к приближённым вычислениям.
Содержание и порядок выполнения работы:
1. Повторить определение дифференциала функции, понятие дифференциала аргумента, геометрический смысл дифференциала, формулу для вычисления приближённого числового значения функции.
2. Внимательно изучить примеры вычисления дифференциалов функций. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Вычислить дифференциалы функций и вычислить приближённое значение функций:

Решение.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
Найти дифференциал функции y = 2x + sin x, при $x_0 = \frac{\pi}{3}$, dx=0,02	
1. Найти производную функции.	y’ = 2+cos x
2. Используя формулу дифференциала, найти дифференциал функции.	dy = y’ dx = (2+cos x) dx
3. Подставить значения x_0 и dx в полученную формулу.	(2+cos x) dx = (2+0,5)·0,02 = 0,05
Определить приближённое значение $\sqrt{2}$.	
1.Рассмотреть функцию y = $\sqrt{x}$ и применить формулу $f(x+\Delta x) = f(x) + y' \cdot \Delta x$.	Пусть x=2,25; Δx=-0,25, тогда $y(x)=\sqrt{2,25}=1,5$ $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{2,25}}=\frac{1}{3}$; $f(x)+y'\cdot\Delta x=1,5+\frac{1}{3}\cdot(-0,25)\approx1,5-0,083\approx1,417$ Таким образом, $f(x+\Delta x)=\sqrt{2,25-0,25}=\sqrt{2}\approx1,417$

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1.	1. Найти дифференциал функции: а) $y=(3x+2)^{50}$ б) $y=\sqrt{5-2x}$ в) $y = \cos^2 x$ при: $x = \pi/4$ $dx = 0{,}03$ 2. Вычислить приближённое значение функции: а) $f(x) = 2x^3 - 3x - 1$ при $x = 2{,}01$ б) $(1{,}013)^4$ в) $\sqrt[3]{1{,}06}$ г) $\frac{1}{0{,}997}$
Вариант 2	1. Найти дифференциал функции: а) $y=(5-7x)^{10}$ б) $y=\frac{x^2}{x^2+1}$ в) $y = \ln\cos^2 2x$ при: $x = \pi/8$ $dx = 0{,}01$ 2. Вычислить приближённое значение функции: а) $f(x) = (1/3)x^3 + (1/2)x - 2x + 4$ при $x = 1{,}1$ б) $(1{,}005)^{10}$ в) $\sqrt[10]{1{,}03}$ г) $\frac{1}{9{,}97}$
Вариант 3.	1. Найти дифференциал функции: а) $y=(x^2+3)^4$ б) $y=\sqrt{x^2+6x+12}$ в) $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ 2. Вычислить приближённое значение функции: а) $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ при $x = 2{,}001$ б) $(3{,}025)^4$ в) $\sqrt{99{,}5}$ г) $\frac{1}{1{,}03}$
Вариант 4.	1. Найти дифференциал функции: а) $y=(7-8x^2)^{11}$ б) $y=\frac{2x}{x^2+x}$ в) $y = \sin^2 x$ при: $x = \pi/4$ $dx = 0{,}03$

	2. Вычислить приближённое значение функции: а) $f(x) = x^3 - 3x - 1$ при $x = 1{,}001$ б) $(1{,}012)^5$ в) $\sqrt{24{,}96}$ г) $\frac{1}{1{,}99}$

Содержание отчета:

22. Наименование практического занятия
23. Цель занятия
24. Вариант задания
25. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
26. Список используемых источников
27. Выводы и предложения
28. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы
1. Чему равен дифференциал аргумента?
2. В чём состоит геометрический смысл дифференциала?
3. Что называется дифференциалом второго порядка?

Практическое занятие № 5
Тема: Интегрирование функций различными способами.

Метод интегрирования, при котором интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется **непосредственным интегрированием**.
Во многих случаях упростить интеграл можно, используя замену переменой на некую функцию от другой переменной. Этот метод применяется очень широко, но выбрать, какую именно замену сделать, не всегда легко. Интегрирование по частям - приём, который применяется почти так же часто, как и замена переменной. Эта формула используется в случае, когда подынтегральная функция представляет произведение алгебраической и трансцендентной функции.

<u>Цель занятия:</u> Научиться интегрировать функции способом подстановки и по частям.

<u>Содержание и порядок выполнения работы:</u>
1. Повторить таблицу неопределённых интегралов, алгоритмы интегрирования способом подстановки и по частям.
2. Внимательно изучить примеры интегрирования простейших функций. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Непосредственное интегрирование.

Алгоритм:

1) преобразовать подынтегральное выражение так, чтобы получилась сумма выражений, похожих на подынтегральные выражения табличных интегралов;
2) из одного исходного интеграла получить сумму нескольких интегралов (используя 3-е и 4-е свойства неопределенного интеграла);
3) по таблице интегралов найти каждый из отдельных интегралов;
4) как только исчез последний знак интеграла, появляется постоянная интегрирования С;
5) при необходимости преобразовать полученный результат: привести подобные, сократить дроби, избавиться от иррациональности в знаменателе и т.п.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1. $\int (5x^2-6x+\frac{8}{x\sqrt[4]{x}})dx$.	$\int (5x^2-6x+\frac{8}{x\sqrt[4]{x}})dx = 5\int x^2dx - 6\int xdx + 8\int x^{-\frac{5}{4}}dx = \frac{5}{3}x^3 - \frac{6}{2}x^2 + \frac{8}{-0,25}x^{-0,25} + C =$ $= \frac{5}{3}x^3 - 3x^2 - \frac{32}{\sqrt[4]{x}} + C$
2. $\int (2-3^x)dx$	$\int(2-3^x)dx = \int(4-4\cdot 3^x + 3^{2x})dx = 4\int dx - 4\int 3^x dx + \int 9^x dx = 4x - 4\cdot\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{9^x}{\ln 9} + C$

Интегрирование способом подстановки.

Алгоритм интегрирования функций способом подстановки:

1) ввести вспомогательную переменную, связанную с исходной переменной некой функциональной зависимостью;
2) выразить исходную переменную через вспомогательную;
3) выразить дифференциал исходной переменной через дифференциал вспомогательной;
4) подставить вспомогательную переменную и ее дифференциал в интеграл;
5) свести полученный интеграл к табличному и взять его;
6) вернуться к исходной переменной.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1. $\int x\sqrt{x-3}dx$	Чтобы избавиться от квадратного корня, положим $\sqrt{x-3}=u$, тогда $x = u^2 + 3$ и, следовательно, $dx = 2u\,du$. Делая подстановку, имеем: $\int x\sqrt{x-3}dx = \int (u^2+3)u2udu = \int (2u^4+6u^2)du = \frac{2u^5}{5} + 2u^3 + C = \frac{2(x-3)^{\frac{5}{2}}}{5} + 2(x-3)^{\frac{3}{2}} + C$
2. $\int x e^{x^2} dx$.	$x^2 = t, 2xdx = dt, xdx = \frac{dt}{2},$ $\int x e^{x^2} dx = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$
3. $\int x\sqrt{x-2}dx$.	*пусть* $\sqrt{x-2} = r, x = r^2+2, dx = 2rdr$ $\int x\sqrt{x-2}dx = \int (r^2+2)r\cdot 2rdr = \int (2r^4+4r)dr = 2\int r^4dr + 4\int r^2dr = \frac{2r^5}{5} + \frac{4r^3}{3}n + C =$ $= \frac{2\sqrt{(x-2)^5}}{5} + \frac{4\sqrt{(x-2)^3}}{3} + C$

4. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+4\sin x}}dx$.	$\sqrt{1+4\sin x}=t, 1+4\sin x=t^2$, $4\cos xdx=2tdt$, $\cos xdx=\frac{1}{2}tdt$ $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+4\sin x}}dx=\int\frac{\frac{1}{2}tdt}{t}=\frac{1}{2}\int dt=\frac{1}{2}t+C=\frac{1}{2}\sqrt{1+4\sin x}+C$

Интегрирование по частям.

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Эта формула называется формулой интегрирования по частям. В качестве *u* обычно выбирается функция, которая упрощается дифференцированием, в качестве *dv* - оставшаяся часть подынтегрального выражения, содержащая dx, из которой можно определить *v* путем интегрирования.

Алгоритм интегрирования функций по частям:

1) выбрать функцию u (от исходной переменной) такую, что дифференциал от нее du проще, чем u;
2) разделить подынтегральное выражение на u - получим dv (можно устно);
3) из dv найти интегрированием v (обычно ее находят устно и сразу вносят под знак дифференциала, но можно и отдельным интегрированием);
4) из u найти его дифференциал du;
5) подставить полученные величины u, v, du, dv в формулу интегрирования по частям;
6) попытаться взять интеграл от vdu. При этом возможны варианты:
а) если интеграл от vdu легкий, то взять его;
б) если интеграл от vdu все еще не легкий но проще исходного, применить интегрирование по частям уже для него;
в) если в правой части получился такой же интеграл, как и исходный, в этом уравнении можно привести подобные и результат получится сам собой;
г) если интеграл от vdu сложно взять, повторить шаги 1-6 для другого u;

Что же обозначить u, а что v? Точного ответа нет, но есть условие: одну из них берем произвольно, а другую - так, чтобы их произведение было равно подынтегральной функции. Есть и здравый смысл: вводя сложную функцию, мы вряд ли сделаем интеграл проще.
Вот некоторые рекомендации по применимости интегрирования по частям:
1. Для выражений вида x^n умноженное на подынтегральное выражение табличных и простых интегралов (например, xsinx, x^2cos2x, x^2e^x) выбирают $u=x^n$
2. Для выражений вида e^x умноженное на подынтегральное выражение табличных и простых интегралов (например, e^xsinx, e^xcos2x) выбирают $u=e^x$.
3. Для выражений вида x^n умноженное выражение вида arcsin ax, arcos ax, arctg ax, ln|x| выбирают x^ndx за dv, а остальные сомножители – за u.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1. $\int x\sin x\,dx$.	$u = x$; $dv = \sin x\,dx$; $du = dx$; $v = \int \sin xdx = -\cos x$ $\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + C$

2. $\int \ln x dx$.	$u = \ln x; \quad dv = dx; \quad du = \frac{dx}{x}; \quad v = x$ $\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{x dx}{x} = x \ln x - x + C$
3. $\int x \ln x dx$.	$u = \ln x; \quad du = \frac{dx}{x}; \quad dv = x dx; \quad v = \int x dx = \frac{x^2}{2}$ $\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$
4. $\int e^x \sin x dx$	$u = e^x; \quad du = e^x dx; \quad dv = \sin x dx; \quad v = -\cos x$ $\int e^x \sin s dx = -e^x \cos x - \int (-\cos x) e^x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx;$ *Чтобы найти* $\int e^x \cos x dx$ *применим формулу интегрирования по частям ещё раз* $\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$ *получился исходный интеграл; запишем результат в виде уравнения и приведём подобные члены.* $\int e^x \sin s dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x d$ $2\int e^x \sin s dx = -e^x \cos x + e^x \sin x; \quad \int e^x \sin s dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$

Задания для самостоятельной работы:

Вариант №1.	Вариант №2	Вариант №3	Вариант №4.
1. $\int (3\text{-}5x)^2 dx$ 2. $\int x(\sin x^2) dx$ 3. $\int \frac{3x^2 dx}{\sin^2(x^3-2)}$ 4. $\int x e^x dx$ 5. $\int x \cos x dx$	1. $\int (3x+1)^2 dx$ 2. $\int \frac{\cos x dx}{2\sin x + 1}$ 3. $\int \sqrt{e^x+1}\, e^x dx$ 4. $\int (x-1) e^{2x} dx$ 5. $\int e^{2x} \cos x dx$	1. $\int (3x^4+2)^3 x^3 dx$ 2. $\int \frac{\sin x dx}{2 + \cos x}$ 3. $\int \frac{6x^2 dx}{(1-2x^3)^2}$ 4. $\int x^2 e^x dx$ 5. $\int x \cos x dx$	1. $\int (5x^3-8)^5 x^2 dx$ 2. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2\sin x + 1}}$ 3. $\int \sqrt[3]{(1-3x^2)^4}\, dx$ 4. $\int x e^{2x} dx$ 5. $\int e^{2x} \cos x dx$

Содержание отчета:

29. Наименование практического занятия
30. Цель занятия
31. Вариант задания
32. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
33. Список используемых источников
34. Выводы и предложения
35. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы

1. В каких случаях удобно применять способ замены переменного при вычислении интегралов?
2. Как проверить, правильно ли найдена первообразная данной функции?
3. В чём заключается метод интегрирования по частям?

4. В чём заключается геометрический смысл первообразных данной функции?
5. Как проверить, правильно ли найдена первообразная данной функции?
6. В чём заключается метод непосредственного интегрирования?

Практическое занятие № 6
Тема: Вычисления определенных интегралов различными способами.

Метод интегрирования, при котором интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется **непосредственным интегрированием**. При вычислении определённых интегралов применяется формула Ньютона – Лейбница,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

где F(x) – одна из первообразных функции *f*(x).

<u>Цель занятия:</u> Научиться интегрировать простейшие функции.

<u>Содержание и порядок выполнения работы:</u>
1. Повторить таблицу неопределённых интегралов, алгоритм выполнения непосредственного интегрирования.
2. Внимательно изучить примеры интегрирования простейших функций. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Решение.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$
2. $\int_0^2 (x^3 - x^2)dx$.	$\int_0^2 (x^3 - x^2)dx = (\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3})\Big\vert_0^2 = (\frac{16}{4} - \frac{8}{3}) - 0 = \frac{4}{3}$
3. $\int_0^1 (\sqrt[3]{t} - \sqrt{t})dt$.	$\int_0^1 (\sqrt[3]{t} - \sqrt{t})dt = \int_0^1 (t^{\frac{1}{3}} - t^{\frac{1}{2}})dt = (\frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1})\Big\vert_0^1 = (\frac{3t^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3})\Big\vert_0^1 =$ $= (\frac{3}{4} - \frac{2}{3}) - 0 = \frac{1}{12}$
4. $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x}$.	$\int_1^{e^2} \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert \Big\vert_1^{e^2} = \ln e^2 - \ln 1 = 2$

5. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+1}$.	$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+1}=arctgx\Big\vert_{-1}^{1}=arctg1-arctg(-1)=\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}$

Задания для самостоятельной работы:

Вариант №1.	Вариант №2	Вариант №3	Вариант №4.
1. $\int_{-1}^{1}(3x^2+2)dx$	1. $\int_{-1}^{1}(5x^2+1)dx$	1. $\int_{-1}^{1}(3x^2-6x)dx$	1. $\int_{-1}^{1}(4x^2-1)dx$
2. $\int_{1}^{4}(x^2+x-5)dx$	2. $\int_{-1}^{2}(x^2+2x+7)dx$	2. $\int_{-1}^{2}(x^2-10x+2)dx$	2. $\int_{2}^{4}(2x^2+3x-1)dx$
3. $\int_{0}^{1/4}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	3. $\int_{0}^{1/4}\frac{1}{\sqrt{1-16x^2}}dx$	3. $\int_{0}^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-16x^2}}dx$	3. $\int_{-1/2}^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
4. $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{4x^2-9}$	4. $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\frac{dx}{1+x^2}$	4. $\int_{0}^{2}\frac{dx}{4+x^2}$	4. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2-1}$

Интегрирование способом подстановки.

Пусть необходимо вычислить $\int_a^b f(x)dx$, где f(x) непрерывна на [a,b] и пусть x = φ(t) непрерывно-дифференцируемая функция, причём $\alpha \le t \le \beta$, когда $a \le \varphi(t) \le b$.

Тогда $$\int_a^b f(x)dx=\left\{\begin{matrix} a=\varphi(\alpha); dx=\varphi'(t)dt \\ b=\varphi(\beta)\end{matrix}\right\}=\int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi(t)dt.$$

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1. $\int_0^1\frac{xdx}{(3x^2-1)^4}$.	$\int_0^1\frac{xdx}{(3x^2-1)^4}=\left\{\begin{matrix}3x^2-1=t \\ dt=6xdx, dx=\frac{dt}{6x} \\ x=0,\ t=-1;\ x=1,\ t=2\end{matrix}\right\}=\int_{-1}^{2}\frac{x\cdot\frac{dt}{6x}}{t^4}=\int_{-1}^{2}\frac{\frac{dt}{6}}{t^4}=\frac{1}{6}\int_{-1}^{2}\frac{dt}{t^4}=\frac{1}{6}\cdot(-\frac{1}{3t^3})\Big\vert_{-1}^{2}=$ $=-\frac{1}{18}(\frac{1}{2^3}-\frac{1}{(-1)^3})=-\frac{1}{18}(\frac{1}{8}+1)=-\frac{1}{16}$

Интегрирование по частям.

$$\int_a^b udv=uv-\int_a^b vdu$$

Эта формула называется формулой интегрирования по частям. В качестве *u* обычно выбирается функция, которая упрощается дифференцированием, в качестве *dv* - оставшаяся часть подынтегрального выражения, содержащая dx, из которой можно определить *v* путем интегрирования.

Вот некоторые рекомендации по применимости интегрирования по частям:

4. Для выражений вида x^n умноженное на подынтегральное выражение табличных и простых интегралов (например, xsinx, x^2cos2x, x^2e^x) выбирают u=x^n

5. Для выражений вида e^x умноженное на подынтегральное выражение табличных и простых интегралов (например, $e^x\sin x$, $e^x\cos 2x$) выбирают $u=e^x$.
6. Для выражений вида x^n умноженное выражение вида arcsin ax, arcos ax, arctg ax, ln|x| выбирают $x^n dx$ за dv, а остальные сомножители – за u.
7.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1. $\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx$	Выберем в качестве *u=x*, тогда *dv=e⁻ˣdx,* тогда *du=dx, v= -e⁻ˣ.* Применим формулу интегрирования по частям: $\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx = x\cdot(-e^{-x})\Big\|_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2}(-e^{-x})dx = -(xe^{-x})\Big\|_0^{\ln 2} +$ $+\int_0^{\ln 2} e^{-x}dx = -(\ln 2\cdot e^{-\ln 2}-0)-(e^{-x})\Big\|_0^{\ln 2} = -\ln 2\cdot e^{-\ln 2}-(e^{-\ln 2}-e^0)=$ $=-\ln 2\cdot e^{-\ln 2}-e^{-\ln 2}+1=-e^{-\ln 2}(\ln 2+1)+1=-\frac{1}{2}(\ln 2+1)+1=$ $=-\frac{\ln 2}{2}-\frac{\ln e}{2}+\ln e=\frac{1}{2}(\ln e-\ln 2)=\frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}$

Задания для самостоятельной работы:

Вариант №1.	Вариант №2	Вариант №3	Вариант №4.
1. $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos(2x+\frac{\pi}{4})dx$	1. $\int_{-1}^{0}(2x^3-1)x^2dx$	1. $\int_0^1 (x^4+2)x^3dx$	1. $\int_1^{e-1}\ln(x+1)dx$
2. $\int_0^6 \frac{dx}{\sqrt{3x-2}}$	2. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 4xdx$	2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 4xdx$	2. $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2(2x-\frac{\pi}{4})}$
3. $\int_{-\pi}^{2\pi} \sin\frac{x}{3}dx$	3. $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$	3. $\int_4^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$	3. $\int_0^2 (1+2x)^3dx$
4. $\int_1^e (x^2-4)\ln xdx.$	4. $\int_0^1 (3x-1)e^{-x}dx.$	4. $\int_1^e (x+1)\ln xdx.$	4. $\int_0^1 (2x+1)e^x dx.$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2xdx$	5. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin 3xdx$	5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2xdx$	5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2xdx.$

Содержание отчета:

36. Наименование практического занятия
37. Цель занятия
38. Вариант задания
39. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
40. Список используемых источников
41. Выводы и предложения
42. Дата и подпись курсанта и преподавателя

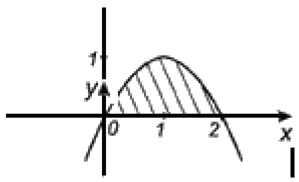
Контрольные вопросы
1. Что называется определённым интегралом?
2. В чём заключается разница между неопределённым и определённым интегралом?
3. В чём заключается формула замены переменной в определённого интеграла?
4. Объяснить, почему неверен результат: $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\ln|x|\Big|_{-1}^{1}=\ln 1-\ln 1=0$?
5. В чём заключается метод интегрирования по частям для определённого интеграла?

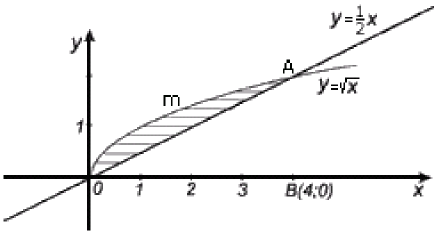
Практическое занятие № 7
Тема: Вычисление площадей плоских фигур и объемов тел вращения.

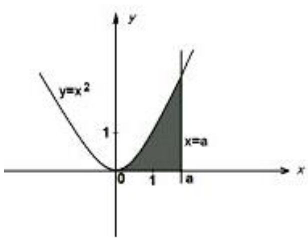
С геометрической точки зрения, определённый интеграл представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$ и сохраняющей на этом отрезке свой знак, отрезком $[a, b]$ и прямыми $x = a$ и $x = b$. С помощью определённого интеграла можно вычислить площади различных плоских фигур и объёмы тел.
Цель занятия: Научиться вычислять площади плоских фигур и объёмы тел вращения.

Содержание и порядок выполнения работы:
1. Повторить геометрический смысл определённого интеграла, способы вычисления площадей плоских фигур и объёмов тел вращения, алгоритмы интегрирования.
2. Внимательно изучить примеры вычисления площадей плоских фигур и объёмов тел вращения. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Вычисление площадей плоских фигур.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $f(x) = 2x - x^2$ и осью абсцисс	График функции $f(x) = 2x - x^2$ парабола. Вершина: (1; 1).  $S = \int_0^2 (2x - x^2)dx = (x^2 - \frac{x^3}{3})\Big|_0^2 = (4 - \frac{8}{3}) - 0 = 1\frac{1}{3}$(кв. ед.) Ответ: $1\frac{1}{3}$ кв. ед.
2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = \frac{1}{2}x$.	График функции $y = \frac{1}{2}x$ – прямая. Функция $y = \sqrt{x}$ является обратной функции $y = x^2$ на промежутке $[0; +\infty)$.

<table>
<tr><td></td><td>


$S = S_{OmAB} - S_{\Delta OAB}$
Пределы интегрирования указаны в таблицах значений функций.
$S_{OmAB} = \int_0^4 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{2}{3}(4^{\frac{3}{2}} - 0) = 5\frac{1}{3}$(кв. ед.)
$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OB \cdot AB$,
$OB = 4$, $AB = 2$, $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$ (кв. ед.)
$S = 5\frac{1}{3} - 4 = 1\frac{1}{3}$(кв. ед.).
Ответ: $1\frac{1}{3}$(кв . ед .).
</td></tr>
<tr><td>3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 6$ и $y = -x^2 + 5x - 6$.</td><td>
Найдем абсциссы точек пересечения графиков данных функций. Для этого решаем систему уравнений
$\begin{cases} y = x^2 - 6, \\ y = -x^2 = 5x - 6. \end{cases}$
Отсюда находим $x_1=0$, $x_2=2,5$.
$S = \int_0^{2,5}(-x^2 + 5x - 6 - x^2 + 6)dx = \int_0^{2,5}(-2x^2 + 5x)dx = 5\frac{5}{24}$.
</td></tr>
<tr><td>4.При каких значениях a площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x = a$, равна 9?</td><td>
а) Выполним схематический чертеж


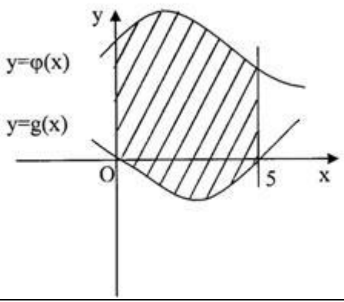
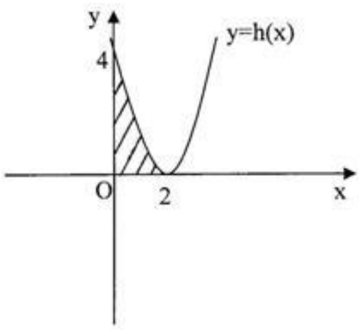
б) Вычислим площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, осью ох и прямой $x = a$:
$$S = \int_0^a x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{a^3}{3}.$$
в) Так как площадь по условию равна 9, то $a^3/3=9$, $a^3= 27$, $a = 3$.
Ответ: a = 3.
</td></tr>
</table>

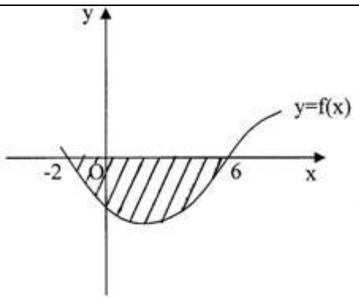
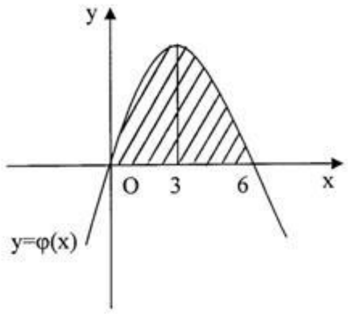
Вычисление объёмов тел вращения.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1. Вычислить объем тела,	Воспользуемся формулой для вычисления объема тела

образованного вращением вокруг оси *Ox* линий $y=\sin x$ и y=0.	вращения, получаем $V_x=\pi\int\limits_0^{\pi}\sin^2 xdx$ далее вычисляется данный интеграл: $\pi\int\limits_0^{\pi}\sin^2 xdx=\pi\int\limits_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi}{2}(\int\limits_0^{\pi}dx-\int\limits_0^{\pi}\cos 2xdx)=\frac{\pi}{2}(x-\frac{\sin 2x}{2})\Big\vert_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}\,куб.ед.$
2. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси OX линий $y=\sqrt{x}$ и $y=x^2$.	Искомый объем можно найти как разность объемов, полученных вращением вокруг оси *Ox* криволинейных трапеций, ограниченных линиями $y=\sqrt{x}$ и $y=x^2$. $V_x=\pi\int\limits_0^1(\sqrt{x})^2dx-\pi\int\limits_0^1(x^2)^2dx=\pi\int\limits_0^1 xdx-\pi\int\limits_0^1 x^4dx=\pi(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5})\Big\vert_0^1=\pi(\frac{1}{2}-\frac{1}{5})=\frac{3\pi}{10}\,куб.ед.$

Задания для самостоятельной работы:

<table>
<tr><td rowspan="2">I вариант</td><td>1.По рисунку записать формулу для вычисления площади фигуры через интеграл.
</td><td>2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $y=(x+1)^2$ и $y=-1-x$
б) $y=-x^2$ и $y=-2$
в) $y=x+4$ и $y=6x-x^2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой x = 0, графиком функции y = -x^2 + 3 и касательной к этому графику в точке с абсциссой x_o = 1.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">II вариант</td><td>1.По рисунку записать формулу для вычисления площади фигуры через интеграл.
</td><td>2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $y=x^3,\ y=2x-x^2$ и $y=0$
б) $y=x^2+3x$ и $y=0$
в) $y=x-2$ и $y=x^2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции y = 0,5x^2 + 2x + 2 и графиком ее производной.</td></tr>
<tr><td>III вариант</td><td>1.По рисунку записать формулу для вычисления площади фигуры через интеграл.</td><td>2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $y=x,\ x=2$ и $y=\frac{1}{x}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>
</td><td>б) $y=x^2-4x-3\ и\ y=0$
в) $y=x+5\ и\ y=(x-1)^2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой x = 0, графиком функции у = x^2 - 4x + 5 и касательной к этому графику в точке с абсциссой x_o = 2.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">IV вариант</td><td>1.По рисунку записать формулу для вычисления площади фигуры через интеграл.

</td><td>2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $y=x,\ x=2\ и\ y=\frac{1}{x}$
б) $y=x^2-4x-3\ и\ y=0$
в) $y=x+5\ и\ y=(x-1)^2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой x = 0, графиком функции у= -4x - x^2 и касательной к этому графику в точке с абсциссой x_o = -3.</td></tr>
</table>

Содержание отчета:

43. Наименование практического занятия
44. Цель занятия
45. Вариант задания
46. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
47. Список используемых источников
48. Выводы и предложения
49. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы
1. В чём заключается геометрический смысл определённого интеграла?
2. Какая фигура называется криволинейной трапецией?
3. По какой формуле можно найти объём тела вращения?

Практическое занятие № 8
Решение дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Многие явления природы и техники описываются дифференциальными уравнениями, связывающими неизвестные величины и их производные.

Цель занятия:
Научиться решать некоторые виды дифференциальных уравнений первого порядка.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Повторить определение дифференциального уравнения, понятие его общего и частного решения, способы решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными и линейных однородных уравнений 1-го порядка.
2. Внимательно изучить примеры решений дифференциальных уравнений. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Алгоритм	**Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму**
1. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $\frac{dy}{x^2}=\frac{dx}{3y^2}$.	Общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными ищется с помощью: 1)разделить переменные $3y^2dy = x^2dx$ 2) проинтегрировать левую и правую части уравнения $\int 3y^2dy = \int x^2\,dx$ $y^3 = \frac{x^3}{3} + C$ - это общее решение исходного дифференциального уравнения.
2. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $\frac{dy}{x}=\frac{dx}{y}$ y=4 при x=-2.	$\frac{dy}{x}=\frac{dx}{y}$ 1) $ydy = xdx$ 2) $\int ydy = \int xdx$ $\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+C$ $y^2 = x^2 + C$ -общее решение 3)Подставим начальные условия $4^2 = (-2)^2 + C;$ $16 = 4 + C \Rightarrow C = 12$ 4)Таким образом, частное решение имеет вид: $y^2 = x^2 + 12$
3. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка: $xy' - y = x^3$.	Запишем данное уравнение в виде $y' - \frac{y}{x} = x^2$ (1) Положим y=uv, откуда $y' = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$ Подставим значения y и y' в уравнение (1) $v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} - \frac{uv}{x} = x^2$ Сгруппируем члены, содержащие v ,и вынесем v за скобки: $u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{x}\right) = x^2 (2)$ Найдём функцию u такую, что

	$\frac{du}{dx}-\frac{u}{x}=0.(3)$ Тогда уравнение (2) примет вид $u\frac{dv}{dx}=x^2(4)$ Решим уравнение (3) как уравнение с разделяющимися переменными $\frac{du}{dx}=\frac{u}{x}$, т.е $\frac{du}{u}=\frac{dx}{x}$ откуда, после интегрирования, получим $\ln\lvert u\rvert=\ln\lvert x\rvert$, т.е $u=x$, подставив значение функции u в уравнение (4), найдём $x\frac{dv}{dx}=x^2$ или $dv=xdx$ Отсюда $v=\frac{x^2}{2}+C$ Итак, общим решением данного уравнения является функция $y=x\left(\frac{x^2}{2}+C\right)=\frac{x^3}{2}+Cx\ (5)$
4. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка: $xy'-y=x^3$ если y=1/2 при x=1	В общее решение уравнения (5) подставим начальные данные $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+C$, т.е $C=0$ Следовательно частным решением является функция $y=\frac{1}{2}x^3$

Задания для самостоятельной работы:

Вариант №1	Вариант №3
1.Найти частное решение уравнения с разделяющимися переменными: $xdy=ydx$, если $y=6$ при $x=2$ 2. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка: $y'+2y+4=0$, *если* $y=5$ *при* $x=0$ 3. Составить уравнение кривой, проходящей через точку *M(2;1)* и имеющей угловой коэффициент $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$.	1.Найти частное решение уравнения с разделяющимися переменными: $\frac{dy}{x^2}=\frac{dx}{y^2}$, если $y=2$ при $x=0$ 2.Найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка: $y'-y-1=0$, *если* $y=2$ *при* $x=0$ 3.Составить уравнение кривой, проходящей через точку *M(1;1)* и имеющей угловой коэффициент $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{8x}$.
Вариант №2	Вариант №4
1.Найти частное решение уравнения с	1.Найти частное решение уравнения с

разделяющимися переменными: $\frac{dy}{3x^2-2x}=dx,\text{если у}=4\text{ при х}=2$ 2.Найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка: $y'-2y-3=0,\ если\ y=2\ при\ x=1$ 3. Составить уравнение кривой, проходящей через точку *M(1;2)* и имеющей угловой коэффициент $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2x}$.	разделяющимися переменными: $\frac{dy}{x^2}=-\frac{dx}{y},\text{если у}=1\text{ при х}=0$ 2.Найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка: $y'-y+4=0,\ если\ y=5\ при\ x=0$ 3. Составить уравнение кривой, проходящей через точку *M(2;2)* и имеющей угловой коэффициент $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4y}$.

Содержание отчета:
1. Наименование практического занятия
2. Цель занятия
3. Вариант задания
4. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
5. Список используемых источников
6. Выводы и предложения
7. Дата и подпись курсанта и преподавателя.

Контрольные вопросы
1. Как определить порядок дифференциального уравнения?
2. Какие уравнения называются дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными?
3. Какие уравнения называются линейными дифференциальными уравнениями первого порядка?
4. Можно ли проверить правильность решения дифференциального уравнения? Как это сделать?

Практическое занятие № 9
Решение дифференциальных уравнений 2-го порядка

Многие явления природы и техники описываются дифференциальными уравнениями, связывающими неизвестные величины и их производные.

Цель занятия:

Научиться решать некоторые виды дифференциальных уравнений 2-го порядка.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Повторить определение дифференциального уравнения, понятие его общего и частного решения, способы решения дифференциальных уравнений 2-го порядка.

2. Внимательно изучить примеры решений дифференциальных уравнений. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Алгоритм	**Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму**
1. Найти общее решение неполного дифференциального уравнения второго порядка: $\frac{d^2y}{dx^2}=\sin x$.	Общее решение неполного дифференциального уравнения второго порядка ищется с помощью подстановки: Пусть $\frac{dy}{dx}=z$, тогда $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dz}{dx}$ уравнение принимает вид: $\frac{dz}{dx}=\sin x$, откуда $dz=\sin x dx$. Интегрируя последнее равенство, получим $\int dz=\int \sin x dx$, т.е $z=-\cos x+C_1$ Следовательно, $\frac{dy}{dx}=-\cos x+C_1$, т.е. $dy=(-\cos x+C_1)dx$ Снова интегрируя, находим $\int dy=\int(-\cos x+C_1)dx$, или $y=-\sin x+C_1x+C_2$ - общее решение
2.Найти частое решение неполного дифференциального уравнения второго порядка : $\frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dy}{dx}$, если $y=\frac{3}{2}$ и $y'=1$ при $x=0$	Найдём общее решение Пусть $\frac{dy}{dx}=z$, тогда $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dz}{dx}$ уравнение принимает вид: $\frac{dz}{dx}=2z$, откуда $\frac{dz}{z}=2dx$. Интегрируя последнее равенство, получим $\int\frac{dz}{z}=\int 2dx$, т.е $\ln z=2x+C_1$; $z=e^{2x+C_1}$ Следовательно, $\frac{dy}{dx}=e^{2x+C_1}$ (1), т.е. $dy=e^{2x+C_1}dx$ Снова интегрируя, находим $\int dy=\int e^{2x+C_1}dx$, или $y=\frac{1}{2}e^{2x+C_1}+C_2$ (2) - общее решение Для нахождения частного решения подставим начальные данные в (1) и (2) $\begin{cases}1=e^{2\bullet 0+C_1}\\ \frac{3}{2}=\frac{1}{2}e^{2\bullet 0+C_1}+C_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1=e^{C_1}\\ \frac{3}{2}=\frac{1}{2}e^{C_1}+C_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=0\\ C_2=1\end{cases}$ Следовательно, частное решение имеет вид: $y=\frac{1}{2}e^{2x}+1$
3. Решить уравнение	Характеристическое уравнение: $k^2-k-2=0;\quad k_1=-1;\quad k_2=2;$

$y'' - y' - 2y = 0.$	Общее решение: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$
4. Решить уравнение $4y''+4y'+y=0.$	Характеристическое уравнение: $4k^2+4k+1=0;\quad k_1=k_2=\frac{1}{2};$ Общее решение: $y = e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1+xC_2\right).$
5. Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0.$	Характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 5 = 0;\quad D = -16;\quad k_1 = -1 + 2i;\quad k_2 = -1 - 2i.$ Общее решение: $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$

Продолжение

Алгоритм	**Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму**
6. Найти частное решение уравнения *y' -2y +3 = 0,* если *y =1* при *x = 0*	Решим его с помощью подстановки *y=uv, y' = u'v + uv'* 1. Подставляя *y* и *y'* в данное уравнение, получим $u'v+uv'-2uv=-3$. Сгруппировав второе и третье слагаемое левой части уравнения, вынесем общий множитель *u* за скобки $u'v+(uv'-2uv)=-3,\ uv+u(v'-2uv)=0$ 2. Выражение в скобках приравниваем к нулю и, решив полученное уравнение, найдем функцию *v = v(x):* $v'-2v=0,\quad \frac{dv}{dx}-2v,\quad dv=2vdx,\quad \frac{dv}{v}=2dx$ Получили уравнение с разделенными переменными. Проинтегрируем обе части этого уравнения: $\int\frac{dv}{v}=\int 2dx$ Найдем функцию *v*: $\ln\|v\|=2x,\quad v=e^{2x}$ 3. Подставим полученное значение *v* в уравнение $u'v=-3$ Получим: $u'e^{2x}=-3,\quad \frac{du}{dx}e^{2x}=-3,\quad du=-3e^{-2x}dx$. Это уравнение с разделенными переменными. Проинтегрируем обе части уравнения: $\int du=-\int 3e^{-2x}dx$. Найдем функцию *u = u(x,c):* $u=-3\cdot(-\frac{1}{2})e^{-2x}+C,\quad u=\frac{3}{2}e^{-2x}+C$ 4. Найдем общее решение: $y=e^{2x}\cdot(\frac{3}{2}e^{-2x}+C),\quad y=\frac{3}{2}+Ce^{2x}$ 5. Найдем частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям *y = 1* при *x = 0*: $1=\frac{3}{2}+Ce^{0},\quad 1=\frac{3}{2}+C\cdot 1,\quad C=1-\frac{3}{2},\quad C=-\frac{1}{2}$ $y=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{2x},\quad y=\frac{3-e^{2x}}{2}$ Ответ: $y=\frac{3-e^{2x}}{2}$.
7. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''=\cos x$	Общее решение найдем двукратным интегрированием

	$y' = \int \cos x dx = \sin x + C_1$ $y(x) = \int (\sin x + C_1) dx = -\cos x + C_1 x + C_2$ *таким образом*, $y(x) = -\cos x + C_1 x + C_2$

Задания для самостоятельной работы:

Вариант №1	Вариант №2
Решить дифференциальные уравнения 1) $\frac{d^2y}{dx^2} = 8x - 2$, если $y = \frac{1}{3}, y' = 2, x = 1$; 2) $y'' - 3y' + 2y = 0$, если $y = 2, y' = 3, x = 0$ 3) $y'' - 2y' + 2y = 0$, если $y = 1, y' = 2, x = 0$	Решить дифференциальные уравнения 1) $\frac{d^2y}{dx^2} = 10x + 4$, если $y = 1, y' = 3, x = 1$; 2) $y'' - 8y' + 15y = 0$, если $y = 4, y' = 2, x = 0$ 3) $y'' - 4y' + 13y = 0$, если $y = 1, y' = 5, x = 0$
Вариант №3	**Вариант №4**
Решить дифференциальные уравнения 1) $\frac{d^2y}{dx^2} = 4x + 2$, если $y = 4, y' = 1, x = 0$; 2) $y'' - 6y' + 5y = 0$, если $y = 2, y' = 6, x = 0$ 3) $y'' - 4y' + 5y = 0$, если $y = 1, y' = -1, x = 0$	Решить дифференциальные уравнения 1) $\frac{d^2y}{dx^2} = 8x + 6$, если $y = 1, y' = 1, x = 1$; 2) $y'' - 2y' - 8y = 0$, если $y = 4, y' = 10, x = 0$ 3) $y'' - 2y' + 5y = 0$, если $y = 1, y' = 3, x = 0$

Содержание отчета:

1. Наименование практического занятия
2. Цель занятия
3. Вариант задания
4. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
5. Список используемых источников
6. Выводы и предложения
7. Дата и подпись курсанта и преподавателя.

Контрольные вопросы

1. Как определить порядок дифференциального уравнения?
2. Какие уравнения называются неполными дифференциальными уравнениями второго порядка?
3. Какие уравнения называются линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами?
4. Можно ли проверить правильность решения дифференциального уравнения? Как это сделать?

Практическое занятие № 10
Тема: Решение дифференциальных уравнений различными способами.

Многие явления природы и техники описываются дифференциальными уравнениями, связывающими неизвестные величины и их производные.

Цель занятия: Научиться решать некоторые виды дифференциальных уравнений.

Содержание и порядок выполнения работы:
1. Повторить определение дифференциального уравнения, понятие его общего и частного решения, способы решения дифференциальных уравнений I и II порядка.
2. Внимательно изучить примеры решений дифференциальных уравнений. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
Алгоритм решения дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными	1. Производную функции переписать через её дифференциалы $y' = \frac{dy}{dx}$ 2. Разделить переменные. 3. Проинтегрировать обе части равенства, найти общее решение. 4. Если заданы начальные условия, найти частное решение.
Алгоритм решения линейного дифференциального уравнения первого порядка	$y' = f(x)y + g(x)$ 1. Ввести подстановку *y=uv*. 2. Продифференцировать это равенство *y' = u'v + uv'* 3. Подставить *y* и *y'* в данное уравнение: *u'v + uv' = f(x)uv + g(x)* или *u'v + uv' + f(x)uv = g(x)*. 4. Сгруппировать члены уравнения так, чтобы *u* вынести за скобки: $u'v + uv' + f(x)uv = g(x);$ $u'v + u(v' + f(x)v) = g(x)$ 5. Из скобки, приравняв ее к нулю, найти функцию $v = v(x) : v' + f(x)v = 0$ Это уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{dv}{dx} + f(x) = 0, \frac{dv}{dx} = -f(x)$ Разделим переменные и получим: $\frac{dv}{v} = -f(x)dx$

	Откуда $\int \frac{dv}{v} = -\int f(x)dx; \ln\lvert v \rvert = -\int f(x)dx \Rightarrow v = e^{-\int f(x)dx}$ 6. Подставить полученное значение *v* в уравнение $u'v = g(x)$ (из п.4): $u'e^{-\int f(x)dx} = g(x)$ и найти функцию $u = u(x, C)$. Это уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{du}{dx} e^{-\int f(x)dx} = g(x); du = e^{\int f(x)dx} g(x)dx$ $u = \int e^{f(x)dx} g(x)dx$ 7. Записать общее решение в виде: $y = v(x) \cdot u(x, C)$, т.е. $y = e^{-\int f(x)dx} \cdot \int e^{\int f(x)dx} g(x)dx + C$.
Алгоритм решения однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами	1. Записать дифференциальное уравнение в виде: *y'' + py' +qy = 0*. 2. Составить его характеристическое уравнение, обозначив *y''* через r^2, *y'* через *r*, *y* через 1: $r^2 + pr + q = 0$ 3.Вычислить дискриминант $D = p^2 - 4q$ и найти корни характеристического уравнения; при этом если: а) *D > 0*; следовательно, характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня $r_1 \neq r_2$. Общее решение дифференциального уравнения выражается в виде $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, где C_1 и C_2 - произвольные постоянные. б) *D = 0;* следовательно, характеристическое уравнение имеет равные действительные корни $r_1 = r_2 = r$. Общее решение дифференциального уравнения выражается в виде $y = (C_1 + C_2 x)e^{rx}$ или $\mathrm{y} = \mathrm{C}_1 e^{rx} + C_2 e^{rx}$ в) *D < 0;* следовательно, характеристическое уравнение имеет комплексные корни, $r_1 = \alpha + \beta \cdot i; r_2 = \alpha - \beta \cdot i$ Общее решение дифференциального уравнения выражается, в виде $y = e^{\alpha \cdot x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
Алгоритм решения неполного дифференциального уравнения второго порядка.	Общее решение найдем путём подстановки $\frac{dy}{dx} = \mathrm{z}, \textit{тогда} \frac{\mathrm{d}^2 y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$ и двукратным интегрированием.

Задания для самостоятельной работы:

Вариант № 1	Вариант № 2
Определить тип дифференциального уравнения и найти его частное решение: $1. y' + 2y = 3e^x; y = 1, x = 0$ $2. y' = \sin 5x; y = 1; x = \frac{\pi}{2}$ $3. y'' + 4y' + 5y = 0; y' = 0, y = -3, x = 0$ $4. y'' = x + 6x^2, y' = 1, y = 0, x = 0$	Определить тип дифференциального уравнения и найти его частное решение: $1. xy' - 2y = x^3 e^x, y = 0, x = 1$ $2. y' \sin x - y \cos x = 0, y = 1, x = \frac{\pi}{2}$ $3. y'' - 7y' + 10y = 0, y' = 1, y = 0, x = 0$ $4. y'' = 8x + 4, y' = 2, y = 6, x = 1$
Вариант № 3	**Вариант № 4**
Определить тип дифференциального уравнения и найти его частное решение: $1. y' \sin x - y \cos x = 1; y = 1; x = \frac{\pi}{2}$ $2. y' = e^{-3x}, y = \frac{2}{3}, x = 0$ $3. y'' - 4y' + 3y = 0; y' = 10, y = 6, x = 0$ $4. y'' = e^x + \sin x, y' = 4, y = 8, x = 0$	Определить тип дифференциального уравнения и найти его частное решение: $1. xy' - 3y = x^4 e^x; y = e, x = 1$ $2. 2\sqrt{y}dx - dy = 0, y = 1, x = 0$ $3. y'' + y' - 2y = 0; y' = 1, y = 5, x = 0$ $4. y'' = 6x^2 - 10, y' = 2, y = 0, x = 0$

Содержание отчета:

50. Наименование практического занятия
51. Цель занятия
52. Вариант задания
53. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
54. Список используемых источников
55. Выводы и предложения
56. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы

1. Как определить порядок дифференциального уравнения?
2. Какие уравнения называются линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами?
3. Можно ли проверить правильность решения дифференциального уравнения? Как это сделать?

Практическое занятие № 11
Тема: Сходимость рядов. Разложение функций в степенные ряды.

Решение задачи, представленной в математических терминах, например, в виде комбинации различных функций, их производных и интегралов, нужно уметь “довести до числа”, которое чаще всего и служит окончательным ответом. Для этого в различных разделах математики выработаны различные методы.
Раздел математики, позволяющий решить любую корректно поставленную задачу с достаточной для практического использования точностью, называется теорией рядов.
Понятие числового ряда широко применяется в таких дисциплинах, как электроника, радиотехника и других дисциплинах.
Для приложений важно уметь данную функцию f(x) разлагать в степенной ряд, т.е. функцию f(x) представлять в виде суммы степенного ряда.

Цель занятия: Научиться работать с функциональными и степенными рядами.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Повторить понятие числового, функционального, сходящегося, расходящегося, знакочередующегося ряда.
2. Внимательно изучить предложенные примеры решений. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1. Выписать первые три членов ряда по заданному общему члену $a_n = \frac{3n-1}{2^n}$	$При\ n=1,\ a_1 = \frac{3\cdot 1-1}{2^1} = \frac{2}{2} = 1,\quad при\ n=1,\ a_2 = \frac{3\cdot 2-1}{2^2} = \frac{5}{4},$ $при\ n=1,\ a_3 = \frac{3\cdot 3-1}{2^3} = \frac{8}{8} = 1.$
2. Найти формулу общего члена ряда $\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}+\frac{1}{108}+\ldots$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}+\frac{1}{108}+\ldots = \frac{1}{4}+\frac{1}{4\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 9}+\frac{1}{4\cdot 27}+\cdots = \frac{1}{4}+\frac{1}{4\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 3^2}+\frac{1}{4\cdot 3^3}+\cdots$ $= \frac{1}{4\cdot 3^{n-1}}$
3.Разложить функцию $y = e^{3x-2}$ в степенной ряд по степеням (x – a) при a = 1.	Ряд Тейлора для функции имеет вид: $y = y(a) + \frac{y'(a)}{1!}(x-a) + \frac{y''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{y'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{y^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots =$ $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$ В нашем случае: $y(1) = e;\quad y'(x) = 3e^{3x-2};\quad y'(1) = 3e;$ $y''(x) = 9e^{3x-2};\quad y''(1) = 9e;$ $y'''(x) = 27e^{3x-2};\quad y'''(1) = 27e;$

	………………………………….. $y^{(n)}(x)=3^n e^{3x-2}; \qquad y^{(n)}(1)=3^n e;$ Получаем разложение в ряд: $y=e+\frac{3e}{1!}(x-1)+\frac{9e}{2!}(x-1)^2+\frac{27e}{3!}(x-1)^3+\ldots+\frac{3^n e}{n!}(x-1)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n e}{n!}(x-1)^n.$ Для определения области сходимости полученного ряда воспользуемся признаком Даламбера. $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\|=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{3^{n+1}\cdot e\cdot(x-1)^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 3^n\cdot e\cdot(x-1)^n}\right\|=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{3\cdot(x-1)}{n+1}\right\|=0<1$ Следовательно, ряд сходится при любом конечном значении *x*.
1. Исследовать сходимость числовых рядов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\sqrt[3]{n}}{n!}$	Воспользуемся признаком Даламбера: $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\sqrt[3]{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 3^n\sqrt[3]{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}}{(n+1)}=0$ - ряд сходится
2. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n}}{5^n}$	Для определения радиуса сходимости применим признак Даламбера: $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{(x+2)^{2n+2}5^n}{5^{n+1}(x+2)^{2n}}\right\|=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{(x+2)^2}{5}\right\|<1$ $x^2+4x-1<0$ $D=16+4=20$ $x_{1,2}=\frac{-4\pm2\sqrt{5}}{2}=-2\pm\sqrt{5}$ Таким образом, интервал сходимости $(-2-\sqrt{5}\,;-2+\sqrt{5})$
Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=3^x$.	Так как $f(x)=3^x=e^{\ln 3^x}=e^{x\ln 3}$, то, заменяя х на $x\ln 3$ в разложении $f(x)=e^x$, получим: $f(x)=3^x=1+\frac{\ln 3}{1!}x+\frac{\ln^2 3}{2!}x^2+\frac{\ln^3 3}{3!}x^3+\ldots+\frac{\ln^n 3}{n!}x^n+\ldots$

Задания для самостоятельной работы:

I вариант	1. Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену $a_n=\frac{1}{4n^2+1}$. 2. Найти формулу общего члена ряда 2+4+8+16+… 3. Разложить функцию $f(x)=\sqrt{x+1},\ a=1$ в ряд Тейлора по степеням $x-a$ (до пятого члена разложения включительно). 4. Исследовать ряды на сходимость: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$, б) $\sum_{n=}^{\infty}(-1)^n n\cdot 0{,}9^n$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$. 5. Разложить в ряд Тейлора – Маклорена функцию $\cos(\frac{x}{2})$.

II вариант	1. Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$. 2. Найти формулу общего члена ряда $\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{10}+\dots$ 3. Разложить функцию $f(x)=\ln(x+2),\ a=1,$ в ряд Тейлора по степеням $x-a$ (до пятого члена разложения включительно). 4. Исследовать ряды на сходимость: а) $\dfrac{1}{n\cdot 3^n}$, б) $\sum_{n=}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{n}{4n-1}\right)^n$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{3^n}$. 5. Разложить в ряд Тейлора – Маклорена функцию sin7x.
III вариант	1. Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену $a_n = \dfrac{2n+1}{n^2}$. 2. Найти формулу общего члена ряда $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{24}+\dots$ 3. Разложить функцию $f(x)=e^{2x},\ a=2,$ в ряд Тейлора по степеням $x-a$ (до пятого члена разложения включительно). 4. Исследовать ряды на сходимость: а) $\dfrac{n!}{3^n}$, б) $\sum_{n=}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n!}$. 5. Разложить в ряд Тейлора – Маклорена функцию cos5x.
IV вариант	1. Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену $a_n = \dfrac{2n+1}{3^n}$. 2. Найти формулу общего члена ряда $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\dots$ 3. Разложить функцию $f(x)=\sin 2x,\ a=-\dfrac{\pi}{4},$ в ряд Тейлора по степеням $x-a$ (до пятого члена разложения включительно) 4. . Исследовать ряды на сходимость: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{6^n}{n^3}$, б) $\sum_{n=}^{\infty}(-1)^n n^2\cdot 0{,}7^n$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{5^n}$. 5. Разложить в ряд Тейлора – Маклорена функцию $e^{\frac{x}{2}}$.

Содержание отчета:

57. Наименование практического занятия
58. Цель занятия
59. Вариант задания
60. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
61. Список используемых источников
62. Выводы и предложения
63. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы

1. Какой ряд называется степенным?
2. Какой ряд называется функциональным?
3. Какие ряды называются сходящимися?

4. Какие ряды называются расходящимися?
5. Какой ряд называется знакочередующимся?
6. Каким образом можно разложить функцию в ряд Тейлора?

Практическое занятие № 12

Тема: Основные понятия комбинаторики, теории вероятностей, статистики.
Комбинаторика - это раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов. Основы комбинаторики очень важны для оценки вероятностей случайных событий, т.к. именно они позволяют подсчитать принципиально возможное количество различных вариантов развития событий
Цель занятия: Научиться решать комбинаторные задачи и упражнения.

Содержание и порядок выполнения работы:
1. Повторить основные понятия и формулы комбинаторики, правило суммы и произведения.
2. Внимательно изучить предложенные примеры решения комбинаторных задач. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1. Сколько трехзначных четных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры могут повторяться?	n_1=6 (т.к. в качестве первой цифры можно взять любую цифру из 1, 2, 3, 4, 5, 6), n_2=7 (т.к. в качестве второй цифры можно взять любую цифру из 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6), n3=4 (т.к. в качестве третьей цифры можно взять любую цифру из 0, 2, 4, 6). Итак, $N=n_1*n_2*n_3=6*7*4=168$.
2. Сколько существует двузначных чисел, в которых цифра десятков и цифра единиц различные и нечетные?	Т.к. нечетных цифр пять, а именно 1, 3, 5, 7, 9, то эта задача сводится к выбору и размещению на две разные позиции двух из пяти различных цифр, т.е. указанных чисел будет: $A_5^2=\frac{5!}{(5-2)!}=\frac{5!}{3!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3}=4\cdot5=20$
3. Сколькими способами читатель может выбрать две книжки из шести имеющихся?	Число способов равно числу сочетаний из шести книжек по две, т.е. равно: $C_6^2=\frac{6!}{2!(6-2)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4}=\frac{5\cdot6}{1\cdot2}=15$
4. Сколькими способами семь книг разных авторов можно расставить на полке в один ряд?	Эта задача о числе перестановок семи разных книг. Имеется $P_7=7!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7=5040$ способов осуществить расстановку книг.

5. На родительском собрании группы присутствует 20 человек. Сколько существует различных вариантов состава родительского комитета, если в него должны войти 5 человек?	В этом примере нас не интересует порядок фамилий в списке комитета. Если в результате в его составе окажутся одни и те же люди, то по смыслу для нас это один и тот же вариант. Поэтому мы можем воспользоваться формулой для подсчета числа **сочетаний** из 20 элементов по 5. Иначе будут обстоять дела, если каждый член комитета изначально отвечает за определенное направление работы. Тогда при одном и том же списочном составе комитета, внутри него возможно 5! вариантов **перестановок**, которые имеют значение. Количество разных (и по составу, и по сфере ответственности) вариантов определяется в этом случае числом **размещений** из 20 элементов по 5.
6. Войсковое подразделение состоит из 5 офицеров, 8 сержантов и 70 рядовых. Сколькими способами можно выделить отряд из 2 офицеров, 4 сержантов и 15 рядовых?	Из 5 офицеров выбрать 2 можно с помощью числа сочетаний $C_5^2 = 10$ способами, из 8 сержантов 4 - $C_8^4 = 70$, из 70 рядовых 15 - C_{70}^{15} . По правилу умножения находим число выбора отряда: 10x70x C_{70}^{15} = 700x C_{70}^{15}

Задания для самостоятельной работы:

1 вариант	2 вариант	3 вариант	4 вариант
1. Сколько двухзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 6 и 9 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр?	1. Сколькими способами могут разместиться 5 человек вокруг круглого стола?	1. Из 10 кандидатов нужно выбрать 3 человека на конференцию. Сколькими различными способами это можно сделать?	1. Бригадир должен отправить на работу бригаду из 3 человек. Сколько таких бригад можно составить из 8 человек?
2. Сколькими способами можно расставить на полке 6 книг?	2. В группе десять предметов и пять уроков в день. Сколькими способами можно составить расписание на один день?	2. На выборах победили 9 человек. Из них нужно выбрать председателя, заместителя и профорга. Сколькими способами это можно сделать?	2. В районе построили новую школу. Из пришедших 25 человек нужно выбрать директора школы, завуча начальной школы, завуча среднего звена и завуча по воспитательной работе. Сколькими способами это можно сделать?
3. Из 6 открыток надо выбрать 3.	3. Сколькими способами можно	3. Сколько различных	3. На собрании должны выступить

Сколькими способами это можно сделать?	составить трехцветный флаг из полос разной ширины, если имеются материи из 8 тканей?	пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 3, 5 и 7 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр?	5 человек (А, Б, В, Г и Д). Сколькими способами их можно разместить в списке выступающих, если А должен выступать первым?
4. Решить уравнение $A_x^3 = \frac{1}{20} A_x^4$	4. Решить уравнение $30x = A_x^3$	4. Решить уравнение $30A_{x-2}^4 = A_x^5$	4. Решить уравнение $20A_{x-2}^3 = A_x^5$
5. Из трех математиков и десяти экономистов надо составить комиссию, состоящую из двух математиков и шести экономистов. Сколькими способами это можно сделать?			

Теория вероятностей возникла и развивалась в процессе решения ряда отдельных задач игрового и прикладного характера.

Первые дошедшие до нас сведения относятся к XVI–XVII векам и связаны с решением задач, возникающих в азартных играх. Первые работы принадлежали Д. Кардано, Б. Паскалю, П. Ферма, Х. Гюйгенсу, и др., и представляли попытки создания теории азартных игр с целью дать рекомендации игрокам.

Затем стали возникать и развиваться прикладные задачи – в первую очередь вопросы страховки от несчастных случаев и стихийных бедствий. Постепенно выделился круг задач со специфической – вероятностной– постановкой вопроса и методикой их решения, оформились первые определения и теоремы.

Цель занятия: Научиться находить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Повторить основные понятия и формулы комбинаторики, правило суммы и произведения.

2. Внимательно изучить предложенные примеры решения комбинаторных задач. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1. Найти математическое ожидание случайной величины X, имеющей закон распределения, представленный в таблице.	***Закон распределения случайной величины X.*** Xi: –2, –1, 1, 2, 3 Pi: 0,3; 0,1; 0,2; 0,1; 0,3 M(*x*) = –2 . 0,3 + (–1) . 0,1 + 1 . 0,2 + 2 , 0.1 + 3 , 0.3 = – 0,6 – 0,1 + 0,2 + 0,2 + 0,9 = 0,6

<table>
<tr>
<td>2. Найти дисперсию случайной величины X</td>
<td>Случайная величина (X – M(X)) имеет распределение, представленное в таблице
<table>
<tr><td>Xi – M(x)</td><td>–2,6</td><td>–1,6</td><td>0,4</td><td>1,4</td><td>2,4</td></tr>
<tr><td>Pi</td><td>0,3</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,1</td><td>0,3</td></tr>
</table>
Тогда:
$D(X) = M(x - M(x))^2 = (-2{,}6)^2 \cdot 0{,}3 + (-1{,}6)^2 \cdot 0{,}1 + 0{,}4^2 \cdot 0{,}2 + 1{,}4^2 \cdot 0{,}1 + 2{,}4^2 \cdot 0{,}3 = 2{,}028 + 0{,}256 + 0{,}032 + 0{,}196 + 1{,}728 = 4{,}24$
Второй способ:
случайная величина x^2 имеет распределение, представленное в таблице
<table>
<tr><td>Xi</td><td>1</td><td>4</td><td>9</td></tr>
<tr><td>Pi</td><td>0,3</td><td>0,4</td><td>0,3</td></tr>
</table>
Тогда $M(x^2) = 1 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}4 + 9 \cdot 0{,}3 = 0.3 + 1{,}6 + 2{,}7 = 4{,}6$
$D(x) = M(x^2) - (M(x))^2 = 4{,}6 - 0{,}6^2 = 4{,}6 - 0{,}36 = 4{,}24$</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Найти среднее квадратичное ожидание случайной величины X</td>
<td>$\delta(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{4{,}24} \approx 2{,}059$</td>
</tr>
<tr>
<td>4. Найти значение параметра a для закона распределения.</td>
<td>Так как
<table>
<tr><td>x_i</td><td>0</td><td>3</td><td>5</td><td>8</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>$40a^2 - 11a$</td><td>$25a^2 - 2$</td><td>$10a^2 - 2a$</td><td>$25a^2 - 7a$</td></tr>
</table>
$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1, \text{ то } 40a^2 - 11a + 25a^2 - 2 + 10a^2 - 2a + 25a^2 - 7a = 1$
$100a^2 - 20a - 3 = 0$
$a_1 = -0{,}1$
$a_2 = 0{,}3$
$a_1 = -0{,}1$ – посторонний корень, так как $0 \le P(x_i) \le 1$. Подставив значение 0,3 вместо a, получим закон распределения
<table>
<tr><td>x_i</td><td>0</td><td>3</td><td>5</td><td>8</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>0.3</td><td>0.25</td><td>0.3</td><td>0.15</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Задания для самостоятельной работы:

При составлении законов распределений помните, что:

- значения случайной величины, записанные в первой строке таблицы, должны быть в порядке возрастания;
- сумма соответствующих им вероятностей должна равняться 1;

значение вероятности должно находиться в пределах $0 \le P(x_i) \le 1$.

1. Составить закон распределения случайной величины X. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины, если n – порядковый номер фамилии курсанта в списке группы:

x_i	п – 10	п – 6	п – 2	п	п + 1	п + 3	п + 5	п + 8
p_i	0,17	0,03	0,16	0,07	0,12	0,4	0,04	0,01

2. Найти числовые характеристики величины X.

1	x_i	-3	4	5	7
	P_i	$10a^2$-3a	$15a^2$-5a	$8a^2$-3a	$17a^2$-4a-1
2	x_i	-2	3	5	9
	P_i	$5a^2$-3,5a	$5a^2$-2a-1,5	$15a^2$-9a-2	1,5a^2-3,5a
3	x_i	2	3	8	11
	P_i	$41a^2$-20a	$23a^2$-16a	$30a^2$-12a-6	$6a^2$-32a+20
4	x_i	5	7	11	18
	P_i	$10a^2$-4a-1	$6a^2$-2	$5a^2$-a-1	$4a^2$-1

Наука, которая занимается получением, обработкой и анализом количественных данных о разнообразных массовых явлениях, происходящих в природе и обществе. Слово “статистика” происходит от латинского слова status, которое означает “состояние, положение вещей”. Результаты статистических исследований широко используют для практических и научных выводов.
Цель занятия: Научиться находить статистические характеристики предложенных данных.

Содержание и порядок выполнения работы:
1. Повторить основные определения и формулы статистики.
2. Внимательно изучить предложенные примеры приближённого вычисления интеграла. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
1. Найти среднее арифметическое случайной величины X, имеющей закон распределения, представленный в таблице.	***Средним арифметическим нескольких чисел*** называется отношение суммы нескольких чисел к их количеству. Вычислите среднее арифметическое чисел 9; 5; 7; 1; 5; 3; Решение (9+5+7+1+5+3):6= 5 Ответ: 5.

Найти моду случайной величины X, имеющей закон распределения, представленный в таблице.	***Модой*** называется число, которое встречается в наборе чаще всего. Найдите моду набора чисел 9; 5; 7; 1; 5; 3 Решение: В данном наборе дважды встречается число 5. Ответ: 5
Найти медиану случайной величины X, имеющей закон распределения, представленный в таблице.	***Медианой*** упорядоченного ряда чисел с нечетным числом членов называется число, записанное посередине, а медианой с четным числом членов – среднее арифметическое двух чисел, записанных по посередине. Вычислите медиану набора: 9; 5; 7; 1; 5; 3 Упорядочим набор: 1; 3; 5; 5; 7; 9 Медиана данного набора : (5+5):2=5 Ответ: 5
Найти размах случайной величины X, имеющей закон распределения, представленный в таблице.	***Размахом*** называется разность между наибольшим и наименьшим числом набора чисел. Вычислите размах набора чисел 9; 5; 7; 1; 5; 3 Решение Наибольшее значение = 9; Наименьшее значение = 1; Размах = 9 − 1= 8. Ответ: 8.
Найти дисперсию случайной величины X, имеющей закон распределения, представленный в таблице.	***Дисперсией*** называется среднее арифметическое квадратов отклонений от среднего значения. Найдите дисперсию набора чисел 9; 5; 7; 1; 5; 3 Решение Упорядочим набор: 1; 3; 5; 5; 7; 9. Среднее арифметическое этого набора=5. Найдем отклонения: 1-5= -4; 3-5= -2; 5-5= 0; 5-5= 0; 7-5= 2; 9-5= 4. $S=\frac{(-4)^2+(-2)^2+0^2+0^2+2^2+4^2}{6}=6\frac{2}{3}$
Найти стандартное отклонение случайной величины X, имеющей закон распределения, представленный в таблице.	***Стандартное отклонение*** – квадратный корень из дисперсии. Стандартное отклонение, очевидно, также характеризует меру рассеяния данных, но теперь (в отличие от дисперсии) его можно сравнивать с исходными данными, так как единицы измерения у них одинаковые (это явствует из формулы расчета).

Задания для самостоятельной работы:

Найти статистические характеристики (среднее арифметическое, мода, медиана, размах, дисперсия, стандартное отклонение) предложенного массива экспериментальных данных. Исходные данные собраны в процессе работы судна типа проект 1348 в 1988-1990 годах.

1 вариант										
№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Среднесуточный вылов рыбы в тоннах	0,9	1,9	5,9	1,0	4,2	3,5	4,4	0,3	5,4	9,9
2 вариант										
№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Удельный расход топлива (в тоннах) на тонну рыбы	2,31	0,94	0,48	2,60	0,70	0,78	0,56	11,20	0,52	0,29
3 вариант										
№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Суточный расход топлива в тоннах	2,1	1,7	2,8	2,6	2,9	2,7	2,4	3,1	2,8	2,5

Содержание отчета:

64. Наименование практического занятия
65. Цель занятия
66. Вариант задания
67. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
68. Список используемых источников
69. Выводы и предложения
70. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы

1. Дать определение дискретной случайной величины.
2. Что называется математическим ожиданием?
3. Что такое дисперсия?
4. Что такое среднее квадратичное отклонение?
5. Дать определение закона распределения дискретной случайной величины.
6. Приведите пример ряда чисел, среднее арифметическое которых равно нулю. Могут ли быть в таком ряду не нулевые числа? Может ли мода такого ряда быть отличной от нуля?
7. Приведите пример ряда чисел, размах которого равен нулю. Как связаны в таком ряду мода и среднее арифметическое?
8. Приведите пример ряда чисел, мода которого равна нулю, а среднее арифметическое не равно.

9.Может ли среднее арифметическое ряда чисел совпадать с его наибольшим числом? Каким при этом будет размах ряда?

Практическое занятие № 13
Тема: Решение линейных систем уравнений различными способами.

К решению систем линейных уравнений сводится многие прикладные задачи. Существует несколько способов решения таких систем. Один из них - способ решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
Цель занятия: Научиться решать системы линейных уравнений методом Гаусса.

Содержание и порядок выполнения работы:
1. Повторить понятие системы линейных уравнений, действия с матрицами.
2. Внимательно изучить пример решения системы уравнений. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.
Решить систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} x+y-2z=2 \\ 3x-2y+z=-1 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases}$	Выпишем расширенную матрицу данной системы $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$ и произведем следующие элементарные преобразования над ее строками: а) из ее второй и третьей строк вычтем первую, умноженную соответственно на 3 и 2: $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -7 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \end{array}\right)$ б) третью строку умножим на (-5) и прибавим к ней вторую: $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -7 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & 13 \end{array}\right)$ В результате всех этих преобразований данная система приводится к треугольному виду: $\begin{cases} x+y-2z=2 \\ -5y+10z=-7 \\ -10z=13 \end{cases}$ Из последнего уравнения находим z = -1,3. Подставляя это значение во второе уравнение, имеем y = -1,2. Далее из первого уравнения получим x = - 0,7.

Задания для самостоятельной работы:

1. $\begin{cases} x-2y-2z=3 \\ x+y-2z=0 \\ x-y-z=1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x+y-5z=-6 \\ 2x-3y+4z=-4 \\ 5x-y+3z=-4 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2x+3y+4z=7 \\ 3x+4y-z=-4 \\ 4x+5y-2z=7 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 7x+5y+2z=18 \\ x-y-z=3 \\ x+y+2z=-2 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 11x+3y-z=2 \\ 2x+5y-5z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ 7. $\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+3y-4z=16 \\ 3x-2y-5z=12 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x-y+3z=7 \\ x+3y-2z=0 \\ 2y-z=2 \end{cases}$

Содержание отчета:

71. Наименование практического занятия
72. Цель занятия
73. Вариант задания
74. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
75. Список используемых источников
76. Выводы и предложения
77. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы
1. Сформулируйте алгоритм решения системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными с помощью метода Гаусса.
2. Каким образом матрицу можно привести к треугольному виду?
3. Перечислить способы решения систем линейных уравнений и дать им сравнительную характеристику.

Практическое занятие № 14
Тема: Вычисление интегралов по формулам прямоугольников, трапеций.

Решение многих технических задач сводится к вычислению определённых интегралов, точное выражение которых сложно, требует длительных вычислений и не всегда оправдано практически. Здесь бывает вполне достаточно их приближённого значения. Пусть, например, необходимо вычислить площадь, ограниченную линией, уравнение которой неизвестно. В этом случае можно заменить данную линию более простой, уравнение которой известно. Площадь полученной таким образом криволинейной трапеции принимается за приближённое значение искомого интеграла.
Простейшим приближённым методом является метод прямоугольников. Метод трапеций обычно даёт более точное значение интеграла, чем метод прямоугольников.

<u>Цель занятия:</u> Научиться вычислять определённый интеграл по формулам прямоугольников, трапеций.

<u>Содержание и порядок выполнения работы:</u>
1. Повторить основные формулы интегрирования, сущность изученных методов интегрирования, геометрический смысл определённого интеграла.
2. Внимательно изучить предложенные примеры приближённого вычисления интеграла. Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие действий из заданий для самостоятельной работы.

<table>
<tr><th>Алгоритм</th><th>Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму.</th></tr>
<tr><td>1. Вычислить по формуле прямоугольников $\int_2^5 x^2dx$.
Найти абсолютную и относительную погрешности вычислений.</td>
<td>Разобьём отрезок [a, b] на несколько (например, на 6) равных частей. Тогда a = 0, b = 3 , $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{5-2}{6} = \frac{1}{2}$
$x_k = a + k \cdot \Delta x$
<table>
<tr><td>$x_0 = 2 + 0 \cdot \frac{1}{2} = 2$</td><td>$f(x_0) = 2^2 = 4$</td></tr>
<tr><td>$x_1 = 2 + 1 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5$</td><td>$f(x_1) = 2{,}5^2 = 6{,}25$</td></tr>
<tr><td>$x_2 = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$</td><td>$f(x_2) = 3^2 = 9$</td></tr>
<tr><td>$x_3 = 2 + 3 \cdot \frac{1}{2} = 3$</td><td>$f(x_3) = 3{,}5^2 = 12{,}25$</td></tr>
<tr><td>$x_4 = 2 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 4$</td><td>$f(x_4) = 4^2 = 16$</td></tr>
<tr><td>$x_5 = 2 + 5 \cdot \frac{1}{2} = 4{,}5$</td><td>$f(x_5) = 4{,}5^2 = 20{,}25$</td></tr>
<tr><td>$x_6 = 2 + 6 \cdot \frac{1}{2} = 5$</td><td>$f(x_6) = 5^2 = 25$</td></tr>
</table>
$\int_2^3 x^2dx \approx \frac{1}{2} \cdot (4 + 6{,}25 + 9 + 12{,}25 + 16 + 20{,}25) = \frac{1}{2} \cdot 67{,}75 = 33{,}875$
(Значение интеграла вычислено с недостатком)
$\int_2^3 x^2dx \approx \frac{1}{2} \cdot (6{,}25+9+12{,}25+16+20{,}25+25) = \frac{1}{2} \cdot 88{,}75 = 44{,}375$
(Значение интеграла вычислено с избытком)
$\frac{33{,}875+44{,}375}{2} = 39{,}125$
Для того, чтобы вычислить относительную погрешность вычислений, надо найти точное значение интеграла:
$\int_2^5 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_2^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{125}{3} - \frac{8}{3} = 39$</td></tr>
</table>

	$\Delta = \lvert 39-39{,}125 \rvert = 0{,}125$ $\delta = \dfrac{0{,}125}{39} \cdot 100\% \approx 0{,}32\%$
2. Вычислить по формуле трапеций $\int_2^5 x^2 dx$.	Используя таблицу задания 1, имеем: $\int_2^3 x^2 dx \approx \frac{1}{2} \cdot (\frac{4}{2} + 6{,}25 + 9 + 12{,}25 + 16 + 20{,}25 + \frac{25}{2}) = \frac{1}{2} \cdot 78{,}25 = 39{,}125$

Задания для самостоятельной работы:

Вычислить интеграл методом прямоугольников и трапеций, приняв n=10.

1 вариант	2 вариант	3 вариант	4 вариант
$\int_1^4 \frac{dx}{x}$	$\int_0^2 xdx$	$\int_0^4 (x^2+3)dx$	$\int_1^9 3\sqrt{x}dx$

Содержание отчета:

78. Наименование практического занятия
79. Цель занятия
80. Вариант задания
81. Отчет о выполнении на каждый этап раздела «Содержание и порядок выполнения задания»
82. Список используемых источников
83. Выводы и предложения
84. Дата и подпись курсанта и преподавателя

Контрольные вопросы

1.Всегда ли можно вычислить точное значение интеграла?
2.В каких случаях применяются приближённые методы интегрирования?
3.Какой метод даёт более точный результат?

Используемые источники литературы

Виды источников	Наименование рекомендуемых учебных изданий
Основные	1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 401 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07878-7. — Режим доступа : urait.ru/book/matematika-489612 2. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 1 : учебное пособие для

	среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 326 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08799-4. — Режим доступа : urait.ru/book/prakticheskie-zanyatiya-po-matematike-v-2-ch-chast-1-490666 3. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 2 : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 251 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08803-8. — Режим доступа : urait.ru/book/prakticheskie-zanyatiya-po-matematike-v-2-ch-chast-2-490667 4. Высшая математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / М. Б. Хрипунова [и др.] ; под общей редакцией М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 472 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-01497-6. — Режим доступа : urait.ru/book/vysshaya-matematika-491581
Дополнительные, в т.ч. курс лекций по *учебной дисциплине, методические пособия и рекомендации для выполнения практических занятий и самостоятельных работ*	3.Богомолов Н.В. Сборник задач по математике [Текст]: учебное пособие для сред. проф. образования /Н.В. Богомолов.-10-е изд.-М.: Дрофа, 2014.-204с.(сред. проф. образование)
Интернет-источники	www geometry.ru «Геометрия » www karman form.ucoz.ru «Сайт по математике» www uroki.net «Математика» www arm-matr.rkc-74.ru « Алгебра и начало анализа» www. school.nd.ru «Электронная библиотека « Просвещение»
Электронные образовательные ресурсы	1. ЭБС «Book.ru», https://www.book.ru 2. ЭБС « ЮРАЙТ»https://www.biblio-online.ru 3. ЭБС «Академия», https://www.academia-moscow.ru 4. Издательство «Лань», https://e.lanbook.com 5.Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека онлайн»,https://www.biblioclub.ru