Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего образования
«КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Н. П. Зубарева

МАТЕМАТИКА:
РАЗДЕЛ АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебно-методическое пособие по практическим занятиям
для студентов направлений подготовки в специалитете
38.05.01 Экономическая безопасность

Калининград
Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ»
2025

УДК 51(07)

Рецензенты:
кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» И. Г. Булан
кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры теории механизмов и машин и деталей машин ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» О. С. Витренко

Зубарева, Н. П.
Математика: раздел аналитическая геометрия: учеб.-метод. пособие по практическим занятиям для студ. направлений подгот. в специалитете 38.05.01 Экономическая безопасность / Н. П. Зубарева. – Калининград: Изд-во ФГБОУ ВО «КГТУ», 2025. – 88 с.

В пособии кратко изложен основной теоретический материал, приведены методические рекомендации по изучению аналитической геометрии, рассмотрены типовые задачи с решениями и представлен сборник задач для самостоятельного выполнения. Представлены варианты индивидуального практического задания для самостоятельной учебной работы студентов, приведены примерные варианты контрольной работы; к каждому практическому занятию указаны главы и параграфы рекомендуемой учебной литературы. В пособии приведены примеры решения профессиональных задач.

Рис. 23, табл. 5, список лит. – 6 наименований

Учебно-методическое пособие рекомендовано к использованию в учебном процессе в качестве локального электронного методического материала методической комиссией ИЦТ 21 января 2025 г. протокол № 1

Учебно-методическое пособие рекомендовано к использованию в учебном процессе в качестве локального электронного методического материала методической комиссией института отраслевой экономики и управления 30 января 2025 г. протокол № 1

УДК 51(07)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Целью освоения дисциплины «Высшая математика» является формирование знаний, умений и навыков анализа, моделирования и решения теоретических и практических задач с широким использованием математического аппарата.

В результате освоения раздела «Аналитическая геометрия» дисциплины «Высшая математика» студент должен:

знать:

– основные понятия алгебры и геометрии;

– методы решения математических задач до числового или другого требуемого результата (графика, формулы и т. п.);

уметь:

– использовать в профессиональной деятельности базовые знания математики;

– ставить цели и формулировать математическую постановку задач, связанных с реализацией профессиональных функций;

– прогнозировать возможный результат предлагаемого математического решения, уметь оценивать его значения;

– переводить экономические задачи с описательного языка на язык математики;

– строить математические модели прикладных задач с оптимальным выбором их решения, анализа и оценки полученных результатов;

– оперировать с абстрактными объектами и быть корректными в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений;

владеть:

– методами анализа и навыками самостоятельного изучения учебной и научной математической литературы

– математическими, статистическими и количественными методами решения типовых организационно-управленческих задач;

– математической логикой, необходимой для формирования суждений по соответствующим профессиональным проблемам;

– способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения.

Важным звеном во всей системе обучения является самостоятельная работа студента, которая является одним из основных методов поиска и приобретения новых знаний, работы с литературой, а также выполнения предложенных заданий.

Практические занятия проводятся для закрепления основных теоретических положений курса и реализации их в практических расчетах, формирования и развития у студентов мышления в рамках будущей профессии.

Данное учебно-методическое пособие составлено на основе рабочей программы и представляет комплекс систематизированных материалов по практическим занятиям для изучения раздела «Аналитическая геометрия» дисциплины «Математика» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 38.05.01 «Экономическая безопасность» в специалитете.

Практические занятия направлены на овладение студентами умениями решения стандартных задач и приобретения навыков применения теории и практических действий в сфере профессиональной деятельности. Полученные знания могут быть использованы студентом в решении экономических задач с применением методов матричного анализа, систем линейных уравнений для построения модели многоотраслевой экономики, с помощью методов оптимизации, позволяющих решить задачу максимизации прибыли.

Решение практических задач студентами проводится на практических занятиях после изучения соответствующих тем на лекциях.

Преподаватель контролирует степень усвоения студентами текущего материала с целью определения степени достижения учебных целей по аналитической геометрии.

Предусмотрены следующие формы текущего контроля:

– вопросы по теоретическому материалу на практических занятиях;

– контроль на практических занятиях.

Для формирования мотивации и повышения интереса к изучению аналитической геометрии в главе «Применение методов аналитической геометрии к задачам оптимизации производства» приведены примеры решения профессиональных задач, которые проиллюстрированы примерами из практической сферы, связаны с будущей профессиональной деятельностью студентов. Для самостоятельного решения в главе «Сборник задач практического содержания» студенту предложены задачи под номерами С.33–С.46. Ответы на решения можно посмотреть в главе «Ответы».

Тематический план практических занятий представлен в таблице 1.

Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

Посещаемость занятий и выполнение индивидуального задания студентом отмечается в учетной карточке, которую ведет преподаватель. Преподаватель по завершении занятия подводит итоги по изучаемой теме.

В ходе самостоятельной подготовки студентов к занятию необходимо не только воспользоваться литературой, рекомендованной преподавателем, но и проявить самостоятельность в отыскании новых источников.

Для успешного освоения аналитической геометрии в данном учебно-методическом пособии в главе «Основной теоретический материал» приводятся основные определения, понятия и формулы, изучаемые на лекции и известные из школьного курса математики.

Подготовка к практическим занятиям предполагает:

1) предварительное изучение соответствующего теоретического материала, источником которого могут служить материалы лекций, учебники, учебные пособия, справочники и учебный материал, изложенный в сети интернета;

2) повторение материала предыдущего практического занятия, а также самостоятельное решение задач по теме предыдущего занятия (выполнение домашнего задания).

При изучении (повторении) теоретического материала, необходимого для решения задач на практическом занятии, целесообразно вести специальную тетрадь-справочник, содержащую основные определения, формулировки теорем, свойства и формулы.

Решение задач является лучшим способом закрепления теоретического материала. Общей схемы решения разнообразных задач не существует, но рекомендуем придерживаться следующих советов:

– начните решение задачи с выполнения наглядного рисунка или чертежа;

– внимательно изучите вопрос, поставленный в задаче, выясните, какие теоретические положения связаны с данной задачей в целом и с отдельными ее элементами;

– попытайтесь соотнести данную задачу с типовыми задачами, решение которых вам известно;

– попытайтесь разделить данную задачу на несколько вспомогательных, последовательное решение которых составит решение данной задачи;

– придумав план решения, выполните его; решив задачу, сверьтесь с готовыми ответами (если ответы есть);

– подумайте, нельзя ли было решить данную задачу другим способом, выберите наиболее рациональный способ решения.

Контрольные вопросы для самопроверки предложены студенту в конце каждого практического занятия и должны помочь студенту выяснить уровень его понимания изучаемого раздела аналитической геометрии.

На каждом практическом занятии студент разбирает решения нескольких типовых задач с преподавателем, а затем студенту предлагается ряд задач для самостоятельного решения в аудитории. Преподаватель контролирует самостоятельную работу и помогает каждому студенту самостоятельно справляться с решением. Для студентов, которые решают большее количество задач, чем основная масса студентов, выставляется оценка «отлично» за работу на практическом занятии.

Индивидуальные задания и контрольные работы

Студент должен выполнить индивидуальное задание по своему варианту вне аудитории и задания контрольной работы в аудитории.

В пособии представлены варианты индивидуального практического задания (ИДЗ). Студент выполняет вариант ИДЗ, соответствующий номеру студента в учебном журнале группы. Индивидуальные задания каждого из тридцати вариантов содержат два уровня сложности заданий: задания первого уровня сложности из таблиц 2 и 3 студент должен обязательно выполнить. Более сложные задания второго уровня из таблицы 4 по желанию выполняют студенты более подготовленные и мотивированные на получение отметки «хорошо» или «отлично» на промежуточной аттестации знаний за первый семестр. Студент должен выполнить ИДЗ до выполнения проверочной контрольной работы в аудитории.

Учебно-методическое пособие включает перечень основной и дополнительной литературы для более полного изучения раздела «Аналитическая геометрия». Помимо данного пособия, студентам следует использовать материалы, размещённые в соответствующем разделе ЭИОС.

Основная цель пособия – помочь будущим специалистам в области экономики приобрести основы знаний по разделу «Аналитическая геометрия» и грамотного применения этих знаний в профессиональной деятельности. Данное пособие будет полезно и студентам заочной, очно-заочной форм обучения при выполнении отдельных заданий контрольной работы. Пособие может помочь студентам любых направлений подготовки научиться решать задачи раздела Аналитическая геометрия.

Важность изучения аналитической геометрии

Наука, которая сейчас называется «Аналитическая геометрия», появилась в 17 в. в трудах двух крупнейших французских математиков того времени Пьера Ферма (1601−1664) и Рене Декарта (1596−1650). В 1637 г. вышла книга Р. Декарта «Геометрия» в трёх томах». В ней был сформулирован метод координат (сейчас эти координаты называются декартовыми) и приведены многочисленные примеры его применения.

Термин «аналитическая геометрия» появился в 18 в. Тогда им обозначали часть геометрии, в которой для выяснения свойств геометрических объектов применяли алгебраические методы. Метод координат позволяет сопоставить геометрическому объекту некоторое аналитическое выражение. Тем самым исследование геометрических свойств сводится к исследованию этих аналитических выражений средствами алгебры и математического анализа.

Знания геометрии используется в тяжёлом машиностроении, в сельском хозяйстве, в химии, в текстильной и обувной промышленности, в воздушно-космических силах, в кораблестроении, самолётостроении и т. д. Геометрия входит составной частью в медицину (рентгеновские аппараты, магнитно-резонансная томография, компьютерная томография, мини и микроразрезы в операциях с помощью визуализации на экранах мониторов). Все медицинские инструменты и аппараты также имеют определённые геометрические характеристики.

Знания геометрии используют в ветеринарии, зоотехнии, медицине, так как анатомические плоскости тела совпадают с основными проекционными плоскостями. Вертикальная плоскость разделяет тело на левую и правую части; фронтальная плоскость разделяет тело на дорсальную и вентральную части; горизонтальная плоскость разделяет тело на краниальную и каудальную части. Термины и понятия «угол, ось, симметрия» позволяют нам описать структуру и строение тела, геометрию суставов, формы мышц и нервной ткани.

География в очень значительной части представляет собой геометрию – недаром первые три буквы одинаковые: принцип составления географических карт – проекции с числовыми отметками; способ получения развёртки поверхности земли; способ определения координат точек земной поверхности, определение уклона земной поверхности: рек, гор и холмов и, наконец, определение объёма земляных работ при строительстве дорог и других объектов.

Трудно найти такую область исследований в науке и технике, в которой можно было бы обойтись без моделирования многофакторных процессов и явлений. А геометрическое моделирование на основе объектов многомерного пространства предлагает широчайшие возможности, не всегда доступные другим методам моделирования. Кроме того, перспективным направлением геометрического моделирования можно считать исследования в области фрактальной геометрии. Аналитическая геометрия это, в том числе, – вычислительный аппарат и геометрической оптики, и компьютерной графики.

1. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИКУМА

Таблица 1

№ практического занятия	Тема практического занятия	Кол-во час.
1	Уравнение прямой на плоскости. Расстояние между двумя точками, деление отрезка в данном отношении, линии на плоскости. Уравнения прямой на плоскости: с угловым коэффициентом, общее, в отрезках. Уравнение прямой, проходящей через две точки, через одну точку. Угол между двумя прямыми, расстояние от точки до прямой, взаимное расположение двух прямых на плоскости	2
2	Уравнения плоскости в пространстве: уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору; общее уравнение плоскости; уравнение плоскости, проходящей через три данные точки; уравнение плоскости в отрезках. Угол между двумя плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей, расстояние от точки до плоскости, взаимное расположение двух плоскостей в пространстве	2
3	Уравнение прямой в пространстве: каноническое, параметрическое. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых, взаимное расположение двух прямых в пространстве, угол между прямой и плоскостью, условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости	2
4	Линии второго порядка на плоскости: окружность, эллипс, гипербола, парабола: их канонические уравнения	2
5	Проверочная контрольная работа	2

1.1. Практическое занятие № 1. Уравнение прямой линии на плоскости

Цель занятия. Студенты должны научиться:

– строить точки, прямые линии в системе координат;

– вычислять расстояние между двумя точками;

– определять координаты точки, делящей отрезок в данном отношении, координаты середины отрезка;

– составлять уравнение прямой на плоскости по исходным данным;

– переходить от одного вида уравнения прямой к другому;

– определять расположение прямой на плоскости по виду ее уравнения;

– вычислять угол между прямыми на плоскости;

– проверять параллельность и перпендикулярность прямых на плоскости;

– вычислять расстояние от точки до прямой на плоскости.

Методические рекомендации. Подготовка к практическому занятию предполагает предварительное изучение следующих вопросов:

1. Формула расстояния между двумя точками на плоскости.

2. Деление отрезка в заданном отношении.

3. Основные виды уравнения прямой: общее уравнение, каноническое и параметрические уравнения, уравнение прямой по двум точкам, уравнение прямой «в отрезках», уравнения прямой с угловым коэффициентом, уравнение прямой по одной точке и угловому коэффициенту, нормальное уравнение прямой.

4. Угол между прямыми на плоскости.

5. Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.

6. Расстояние от точки до прямой.

Основной теоретический материал к практическому занятию № 1 изложен в гл. 2, п. 2.1.1–2.1.29.

Перед тем, как приступить к решению индивидуального практического задания в соответствии с общими рекомендациями, приведенными на с. 7 данного пособия, студенту рекомендуется рассмотреть примеры решения типовых задач 1–6, в которых приведены детальные комментарии и пояснения.

Примеры решения типовых задач.

Задача 1. Написать уравнение прямой, которая проходит через точку М(2; 3) и параллельна прямой $y = -2x + 3$.

Решение. По формуле $\mathbf{y - y_1 = k(x - x_1)}$ запишем уравнение пучка прямых, проходящих через точку М(2; 3). Известны координаты $x_1 = 2$, $y_1 = 3$, так как известна точка М(2; 3) на прямой.

$$y – 3 = k(x – 2).$$

По условию задачи прямые параллельны, следовательно, их угловые коэффициенты должны быть равны. Сравниваем уравнение $y = -2x +3$ с уравнением вида $y = kx + b$ и определяем, что угловой коэффициент известной прямой $y = -2x +3$ равен $k = -2$ и уравнение нужной нам прямой тоже $k = -2$.

Таким образом, уравнение искомой прямой можно записать в виде:

$$y – 3 = -2(x – 2)$$

Раскрываем скобки и приведём полученное уравнение $y – 3 = -2(x – 2)$ к виду $\mathbf{y = kx + b}$:

$$y = -2x + 7.$$

Ответ: Прямая $y = -2x + 7$ проходит через точку М(2; 3) и параллельна прямой $y = -2x +3$.

Задача 2. Написать равнение прямой, проходящей через точку М(5; -7) и перпендикулярную к прямой $y= 4x - 3$.

Решение. Если две прямые взаимно перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов равно минус единице: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Если известен один из угловых коэффициентов k_1 этих прямых, то второй угловой коэффициент равен $k_2 = \frac{-1}{k_1}$.

Угловой коэффициент прямой y= 4x – 3 равен $k_1 = 4$ (угловой коэффициент нужной прямой равен $k_2 = \frac{-1}{4}$).

Уравнение прямой, приходящей через заданную точку $M(x_0; y_0)$ перпендикулярно данной прямой $y = k_1x + b$, можно найти по формуле

$$y - y_0 = -\frac{1}{k_1}(x - x_0).$$

Подставляем в формулу координаты точки M(5; -7) и угловой коэффициент $k_1 = 4$, получаем

$$y - (-7) = -\frac{1}{4}(x - 5).$$

Приводим полученное уравнение к виду $y = kx + b$

$$y + 7 = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

и получаем:

$$y = -\frac{1}{4}x - \frac{23}{4}.$$

Ответ: прямая $y = -\frac{1}{4}x - \frac{23}{4}$ проходит через точку M(5; -7) и перпендикулярна к прямой y= 4x - 3.

Задача 3. Найти расстояние от т. A (2; 0) до прямой 3x -5y +4 =0.

Решение. Находим расстояние от точки до прямой по формуле

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Подставляем в формулу координаты точки $x_0 = 2$, $y_0 = 0$, а из уравнения прямой 3x -5y +4 =0 берем значения A =3, B = - 5 и C = 4.

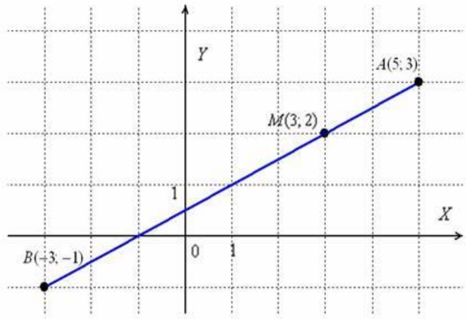
$$d = \left|\frac{3 \cdot 2 + (-5) \cdot 0 + 4}{\sqrt{3^2 + (-5)^2}}\right| = \frac{10}{\sqrt{34}} = \frac{10}{5{,}83} = 1{,}72$$

Ответ: расстояние от т. A (2; 0) до прямой 3x -5y +4 =0 равно 1,72 единиц длины.

Задача 4. Найти координаты точки M, делящей отрезок AB в отношении 1: 3, если известны точки начала A(5; 3) и конца B(-3; -1).

Решение**.** В данной задаче $\lambda = \frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$.

По формулам деления отрезка в данном отношении, найдём координаты точки $M(x_M\ ; y_M)$:



$$x_M = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1+\lambda} = \frac{5 + \frac{1}{3}(-3)}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{5-1}{\frac{4}{3}} = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$$

$$y_M = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1+\lambda} = \frac{3+\frac{1}{3}(-1)}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3-\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{4} = 2$$

Если требуется выполнить чертёж, то можно проверить измерениями, что координаты точки М найдены верно.

Ответ**:** М(3; 2).

Задача 5. Требуется найти координаты точек М и Р, которые делят отрезок АВ на три равные части. Известны координаты точек начала А(2; -6) и конца отрезка точка В (3; 1).

Решение. А М Р В

1) находим сначала координаты точки М.

А М В

Вычисляем для точки М значение λ:

$$\lambda = \frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$$

Так как точка М расположена ближе к точке А, чем к точке В, то длина отрезка АМ в два раза короче отрезка МВ.

По условию задачи известны координаты А(2; -6) и В (3; 1), следовательно, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $y_1 = -6$, $y_2 = 1$

Подставляем в формулы

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \quad \text{и} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$$

$$x_M = \frac{2 + \frac{1}{2} \cdot 3}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{3} \quad \text{и} \quad y_M = \frac{-6 + \frac{1}{2} \cdot 1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{-11}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{-11}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{-11}{3}$$

Координаты точки $M(\frac{7}{3}; \frac{-11}{3})$.

2) находим координаты точки Р.

А Р В

Находим значение λ для точки Р.

$$\lambda = \frac{AP}{PB} = \frac{2}{1} = 2$$

Точка Р расположена ближе к точке В, чем к точке А, следовательно, длина отрезка РВ в два раза короче отрезка АР.

По условию задачи известны координаты А (2; -6) и В (3; 1), запишем $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $y_1 = -6$, $y_2 = 1$.

Подставляем в формулы

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \quad \text{и} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$$

$$x_P = \frac{2 + 2 \cdot 3}{1 + 2} = \frac{8}{3} \quad \text{и} \quad y_P = \frac{-6 + 2 \cdot 1}{1 + 2} = \frac{-4}{3}$$

Координаты точки Р $(\frac{8}{3};\ -\frac{4}{3})$.

Ответ: координаты точек, которые делят заданный отрезок АВ на три равные части будут М $(\frac{7}{3};\ \frac{-11}{3})$ и Р $(\frac{8}{3};\ \frac{-4}{3})$.

Задача 6. Написать уравнение прямой, приходящей через заданную точку М (*5*; -3) перпендикулярно данной прямой $2x + 4y + 7 = 0$.

Решение. Уравнение прямой, приходящей через заданную точку $M(x_0;\ y_0)$ перпендикулярно к данной прямой $Ax + By + C = 0$, можно записать в виде:

$$A(y - y_0) - B(x - x_0) = 0.$$

Из уравнения прямой $2x + 4y + 7 = 0$ запишем А = 2, В = 4, из координат точки М (*5*; -3) запишем $y_0 = -3$, $x_0 = 5$

$$2(y - (-3)) - 4(x - 5) = 0$$

$$2y + 6 - 4x + 20 = 0$$

$$4x - 2y - 26 = 0$$

$$2x - y - 13 = 0$$

Ответ: прямая $2x - y - 13 = 0$ проходит через точку М (*5*; -3) и эта прямая перпендикулярна к прямой $2x + 4y + 7 = 0$.

Для самостоятельного решения

Для самостоятельного решения студентами задач на практическом занятии № 1 имеется набор заданий. Студенты выполняют последовательно по указанию преподавателя отдельные задачи под номерами С.1, С.3, С.6, С.8 и С.11.

Задачи № С.2, С.4, С.5, С.7, С.9, С.10 и С.12 выполняют студенты, которые быстрее других решили задачи под номерами С.1, С.3, С.6, С.8 и С.11. За активную работу на практическом занятии и решение дополнительных задач студент будет поощрен оценкой «отлично».

Задача С.1. Даны точки А(0; 0), В (3; -4), С(-3; 4) Д(-2; 2) и Е(10; -3). Определить расстояние между точками: 1) А и В; 2) В и С.

Задача С. 5. Под каким углом к положительному направлению оси Ох наклонен отрезок, соединяющий точки $A(-1; 3)$ и В(7; -3)?

Задача С. 8. Общее уравнение прямой $4x- 3y+ 12 = 0$ представить в виде:

1) с угловым коэффициентом;

2) в отрезках на осях;

3) Построить эту прямую.

Задача С. 9. Стороны треугольника заданы уравнениями:
(AB) $2x + 4y + 1 = 0$, (AC) $x- y + 2 = 0$ и (BC) $3x + 4y -12 = 0$. Найти координаты вершин треугольника.

Задача С. 12. Доказать, что три точки $A(1; 8)$, $B(-2; -7)$, $C(-4; -17)$ лежат на одной прямой.

Задача С. 13. Составить уравнение прямой, проходящей через точку А(2; 3):

а) параллельно оси ОХ;

б) параллельно оси ОУ;

в) составляющей с осью ОХ угол 45˚.

Задача С. 14. Составить уравнение прямой, проходящей через точки:
а) А(3; 1) и В(5; 4).

Задача С. 17. Найти длину и уравнение высоты ВД в треугольнике с вершинами А(-3; 0), В(2; 5) и С(3; 2).

Задача С. 18. Определить угол между прямыми:

1) $y =2x – 3$ и $y =\frac{1}{2}x + 1$.

Задача С. 19. В треугольнике с вершинами А(-2; 0), В(2; 6) и С(4; 2) проведены высота ВД и медиана ВЕ. Написать уравнение стороны АС, медианы ВЕ и высоты ВД.

Задача С. 20. Найти расстояния от точек А(4; 3) и В(2; 1 до прямой

$3x+4y-10= 0$.

Задача С. 21. Выяснить взаимное расположение прямых (параллельны, перпендикулярны, пересекаются, совпадают?):

1) $3x +4 y – 7 =0$ и $8x -6 y +4 = 0$;

2) $-4x +3y –7 = 0$ и $8x -6 y +4 = 0$;

3) $3x +4 y – 7 =0$ и $8x + 6y +4 = 0$.

Рекомендуемая учебная литература: [5, все главы]; [4, гл. 3, § 12–14]; [6, гл. 1, § 2]; [3, гл. 2]; [2, гл. 1–5]; [1, гл. 2, § 2, гл. 3, § 1].

Контрольные вопросы для самопроверки. Прямая на плоскости

1. Каким образом можно определить положение прямой на плоскости?

2. Напишите общее уравнение прямой.

3. Укажите различные случаи положения прямой относительно осей координат и соответствующие им уравнения.

4. Как проверить, лежит ли данная точка на данной прямой

5. Что называют углом наклона прямой?

6. Что называют угловым коэффициентом прямой, каков его геометрический смысл?

7. Чему равен угловой коэффициент прямой, параллельной оси Ох?

8. Напишите уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.

9. Напишите уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

10. Напишите формулу тангенса угла между двумя прямыми.

11. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

12. Как определить точку пересечения двух прямых?

13. Напишите уравнение прямой в отрезках. Как построить прямую линию, используя уравнение прямой в отрезках.

14. Как найти расстояние от точки до прямой?

1.2. Практическое занятие № 2. Плоскости

Цель занятия**.** Студенты должны научиться:

– составлять уравнение плоскости по исходным данным;

– определять расположение плоскости по ее уравнению;

– вычислять расстояние от точки до плоскости;

– вычислять угол между плоскостями;

– определять взаимное расположение плоскостей;

– решать основные задачи на плоскость.

Методические рекомендации. Подготовка к практическому занятию предполагает предварительное изучение следующих вопросов:

1. Уравнения плоскости в пространстве: уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору; общее уравнение плоскости; частные случаи общего уравнения плоскости; уравнение плоскости, проходящей через три данные точки; уравнение плоскости в отрезках.

2. Расстояние от точки до плоскости.

3. Угол между двумя плоскостями.

4. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

Основной теоретический материал к практическому занятию № 2 изложен в гл. 2, п. 2.2.1–2.2.9.

Перед тем, как приступить к решению индивидуального практического задания в соответствии с общими рекомендациями, приведенными на с. 7 данного пособия, студенту рекомендуется рассмотреть примеры решения типовых задач 7–10, в которых приведены детальные комментарии и пояснения.

Примеры решения типовых задач

Задача 7. Построить плоскость $3x - 2y + 4z - 12 = 0$. Определить отрезки, отсекаемые этой плоскостью на осях координат.

Решение. Приведём данное уравнение к виду уравнения плоскости в отрезках на координатных осях. Для этого перенесём в правую часть равенства свободный член и поделим на 12 обе части уравнения:

$$3x - 2y + 4z - 12 = 0$$
$$3x - 2y + 4z = 12$$
$$\frac{3x}{12} + \frac{-2y}{12} + \frac{4z}{12} = 1$$
$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-6} + \frac{z}{3} = 1$$

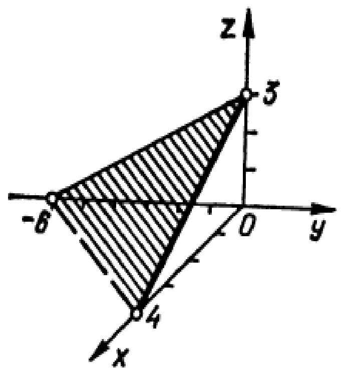


Рисунок 1

Следовательно, a= 4, b = –6, c= 3. Зная отрезки, которые отсекает плоскость на осях координат, строим часть плоскости. Построение плоскости $3x - 2y + 4z - 12 = 0$ показано на рисунке 1.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(1; 2; 3) перпендикулярно вектору $\vec{n}(-1; -3; 1)$.

Решение. Искомое уравнение находим по формуле уравнения плоскости, проходящей через известную точку $M(x_0; y_0; z_0)$ и перпендикулярную вектору $\vec{n}(A; B; C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Координаты точки M(1; 2; 3) известны, обозначим $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 3$, координаты вектора $\vec{n}(-1; -3; 1)$ обозначим A= –1, B = –3 и C = 1, и подставим в уравнение:

$$-1 \cdot (x-1) + (-3) \cdot (y-2) + 1 \cdot (z-3) = 0,$$

раскрываем скобки:

$$-x + 1 - 3y + 6 + z - 3 = 0$$
$$x + 3y - z - 4 = 0.$$

Ответ: $x+3y-z-4=0$.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-3;4;5)$ перпендикулярно к оси Оу.

Решение. Вектор $\vec{j}(0;1;0)$ лежит на оси ОУ и он перпендикулярен нужной нам плоскости, поэтому его можно рассматривать как нормальный вектор плоскости, уравнение которой находим. Решаем по формуле

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ - это уравнение плоскости, проходящей через известную точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и перпендикулярную вектору $\vec{n}(A;B;C)$.

Подставляем $x_0=-3$, $y_0=4$, $z_0=5$, $A=0$, $B=1$, $C=0$.

Искомое уравнение имеет вид

$$0\cdot(x+3)+1\cdot(y-4)+0\cdot(z-5)=0$$

$$y=4.$$

Ответ: $y=4$.

Задача 10. Написать общее уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;2;3)$, $M_2(-1;0;2)$ и $M_3(-2;1;0)$.

Решение. Подставим координаты точек в уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$, не лежащие на одной прямой:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1-1 & 0-2 & 2-3 \\ -2-1 & 1-2 & 0-3 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix}=0$$

Решаем определитель любым известным методом. Например, разложим определитель по элементам первой строки:

$$(x-1)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}=0$$

Вычисляя определители второго порядка, находим искомое уравнение:

$$5(x-1)-3(y-2)+(-4)(z-3)=0$$

$$5x-3y-4z+13=0.$$

Ответ: $5x-3y-4z+13=0$.

Для самостоятельного решения

Для самостоятельного решения студентами задач на практическом занятии № 2 имеется набор заданий. Студенты выполняют последовательно по указанию преподавателя отдельные задачи под номерами С.13–С.17.

Задачи № С.18, С.19 выполняют студенты, которые быстрее других решили задачи под номерами С.13–С.17. За активную работу на практическом занятии и решение дополнительных задач студент будет поощрен оценкой «отлично».

Задача С. 13. Найти общее уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки А(1; 2; -1), В(1; 3; 3) и С(-1; 4; 9).

Задача С. 14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $\mathrm{M}_0(-1; 3;\ -5)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{N}$ $(3; -2; 4)$.

Задача С. 15. Построить плоскость 4x +3y + 6z – 12 =0.

Задача С. 16. Найти расстояние от точки М(1; -1; 2) до плоскости $x - 5y + 3z - 15 = 0$.

Задача С. 17. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку М(1; -2; 3) и параллельную плоскости $x - 3y + 4z - 7 = 0$.

Задача С. 18. Найти угол между плоскостями $2x - 3y + 4 = 0$ и $3x + 4y - z + 5 = 0$.

Задача С.19. Дана пирамида с вершинами в точках $A_1(3; 1; 4)$, $A_2(-1; 6; 1)$, $A_3(-1; 1; 6)$, $A_4(0; 4; -1)$. Найти длину высоты, проведённой из вершины A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$.

Рекомендуемая учебная литература: [5]; [4, гл. 9, § 38–40]; [7, гл. 3, § 1–2]; [2, гл. 3, § 1]; [3, гл. 4].

Контрольные вопросы для самопроверки. Плоскости

1. Написать общее уравнение плоскости.
2. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки.
3. Написать уравнение плоскости по одной точке и вектору.
4. Написать уравнение плоскости в отрезках.
5. Написать формулу расстояния от точки до плоскости.
6. Написать формулу угла между двумя плоскостями.
7. Написать условие параллельности двух плоскостей.
8. Написать условие перпендикулярности двух плоскостей.

1.3. Практическое занятие № 3. Уравнение прямой в пространстве

Цель занятия**.** Студенты должны научиться:

– составлять уравнение прямой в пространстве по исходным данным;

– определять положение прямой в пространстве по ее уравнению;

– вычислять угол между прямыми в пространстве при помощи векторов;

– определять взаимное расположение прямых в пространстве (прямые перпендикулярны, параллельны, совпадают, лежат в одной плоскости, пересекаются, скрещиваются);

– вычислять расстояние от точки до прямой в пространстве.

Методические рекомендации. Подготовка к практическому занятию предполагает предварительное изучение следующих вопросов:

1. Основные виды уравнения прямой в пространстве: каноническое уравнение прямой; параметрические уравнения прямой; уравнения прямой, проходящей через две точки; общие уравнения прямой.

2. Угол между прямыми в пространстве.

3. Взаимное расположение прямых в пространстве (прямые перпендикулярны, параллельны).

Основной теоретический материал к практическому занятию № 3 изложен в гл. 2, п. 2.3.1–2.3.6.

Перед тем, как приступить к решению индивидуального практического задания в соответствии с общими рекомендациями, приведенными на с. 7 данного пособия, студенту рекомендуется рассмотреть примеры решения типовых задач 11–15, в которых приведены детальные комментарии и пояснения.

Примеры решения типовых задач

Задача 11. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(3; 1; -1)$, $A_2(2; 3; 5)$, $A_3(6; 2 ;3)$ и $A_4(3; 7; 2)$. Найти длину ребра A_1A_2 (длину отрезка A_1A_2).

Решение. Найдём координаты вектора $\overline{A_1A_2}$ и его модуль:

$\overline{A_1A_2}$= {2-3; 3-1; 5+1}; $\overline{A_1A_2}$= {-1; 2; 6},

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{41}$$

Ответ: длина ребра A_1A_2 равна $\sqrt{41}$.

Задача 12. При каких значениях l_1 и n_2 прямые

$$\frac{x}{l_1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{4} \text{ и } \frac{x+1}{-1} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{-2}$$

будут параллельными?

Решение. Каноническое уравнение прямой в пространстве это уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{s}(l; m; n)$ и точкой $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ на этой, прямой, оно задается уравнением

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

Условие параллельности двух прямых – это условие коллинеарности направляющих векторов этих прямых:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Из уравнения прямой $\frac{x}{l_1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{4}$ находим координаты ее направляющего вектора $\vec{s_1}(l_1; 2; 4)$.

Из уравнения второй прямой $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{-2}$ находим координаты ее направляющего вектора $\vec{s_2}(-1; n_2; -2)$.

Из условия параллельности двух прямых имеем

$$\frac{l_1}{-1} = \frac{2}{n_2} = \frac{4}{-2}$$

Соотношение известно и равно $\frac{4}{-2} = -2$, решаем два равенства для определения необходимых значений:

$$\frac{l_1}{-1} = \frac{4}{-2} \text{ и } \frac{2}{n_2} = \frac{4}{-2}.$$

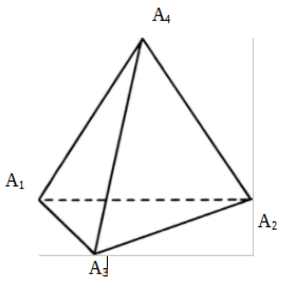
Находим из первого равенства $\frac{l_1}{-1}$= -2, что $l_1 = 2$;

из равенства $\frac{2}{n_2} = -2$ находим, что $n_2 = -1$.

Ответ: Прямые $\frac{x}{l_1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{4}$ и $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{-2}$ параллельны при $l_1 = 2$ и $n_2 = -1$.

Задача 13. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(3; 1; -1)$, $A_2(2; 3; 5)$, $A_3(6; 2; 3)$ и $A_4(3; 7; 2)$. Найти угол между рёбрами A_1A_2 и A_1A_4.

Решение. Угол между прямыми A_1A_2 и A_1A_4 найдём как угол между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$ по формуле $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{|\overrightarrow{A_1A_2}| \cdot |\overrightarrow{A_1A_4}|}$



Координаты вектора $\overrightarrow{A_1A_4}$ находим, зная координаты точек начала $A_1(3; 1; -1)$ и конца вектора $A_4(3; 7; 2)$.

$\overrightarrow{A_1A_4}$ ={3 -3; 7-1; 2 +1}; $\overrightarrow{A_1A_4}$= {0;6;3}.

Вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$= {2 -3; 3 -1; 5+1}; $\overrightarrow{A_1A_2}$= {-1; 2; 6}.

$$\operatorname{Cos}\varphi = \frac{-1 \cdot 0 + 2 \cdot 6 + 6 \cdot 3}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{45}} \approx 0{,}6977$$

$$\varphi \approx 45°$$

Ответ: $\varphi \approx 45°$.

Задача 14. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(3;1;-1)$, $A_2(2;3;5)$, $A_3(6;2;3)$ и $A_4(3;7;2)$. Найти уравнение прямой A_1A_2.

Решение. Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ и $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$, имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

Для уравнения прямой A_1A_2 берем точки $A_1(3;1;-1)$ и $A_2(2;3;5)$, следовательно, уравнение прямой A_1A_2 будет

$$\frac{x-3}{2-3}=\frac{y-1}{3-1}=\frac{z+1}{5+1}$$

$$\frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{6}$$

Ответ: $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{6}$.

Задача 15. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(3;1;-1)$, $A_2(2;3;5)$, $A_3(6;2;3)$ и $A_4(3;7;2)$. Найти уравнение высоты пирамиды, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Решение. Для нахождения уравнения высоты пирамиды, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$найдём сначала уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.

Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через три точки

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0$$

Известны вершины пирамиды $A_1(3;1;-1)$, $A_2(2;3;5)$ и $A_3(6;2;3)$, составим определитель

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-(-1) \\ 2-3 & 3-1 & 5-(-1) \\ 6-3 & 2-1 & 3-(-1) \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z+1) \\ -1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}=0$$

Вычислим этот определитель любым удобным методом, например, по элементам первой строки (теорема Лапласа), получим:

$$(x\ -3)\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}+(z+1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-3)\,(8-6)-(y-1)\,(-4-18)+(z+1)\,(-1-6)=0;$$

$$(x-3)\,2-(y-1)\,(-22)+(z+1)\,(-7)=0;$$
$$2x-6+22y-22-7z-7=0;$$
$$2x+22y-7y-35=0.$$

Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ будет $2x + 22y – 7y – 35 = 0$. Нормальный вектор $\vec{N}$ этой плоскости $2x + 22y – 7y – 35 = 0$ с координатами $\vec{N}$ (2; 22; -7).

Для нахождения уравнения высоты пирамиды, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$, запишем уравнение этой высоты как уравнение прямой с направляющим вектором (каноническое уравнение прямой):

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

Нормальный вектор $\vec{N}$ (2; 22; -7) плоскости $A_1A_2A_3$ является одновременно и направляющим вектором искомой высоты. Следовательно, для уравнения высоты l=2, m=22, n= -7.

Так как высота проходит через точку пирамиды $A_4(3;7;2)$, то уравнение искомой высоты имеет вид:

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-7}{22}=\frac{z-2}{-7}$$

Ответ: $\frac{x-3}{2}=\frac{y-7}{22}=\frac{z-2}{-7}$.

Для самостоятельного решения

Для самостоятельного решения студентами задач на практическом занятии № 3 имеется набор заданий. Студенты выполняют последовательно по указанию преподавателя отдельные задачи под номерами С.20–С.22.

Задачи № С.22–С.24 выполняют студенты, которые быстрее других решили задачи под номерами С.20–С.22. За активную работу на практическом занятии и решение дополнительных задач студент будет поощрен оценкой «отлично».

Задача С.20. Найти параметрическое и каноническое уравнение прямой, проходящей через точки А(1; 2; 2) и В(3; 4; 1). Определить, принадлежат ли точки С(3; 5; 2) и Д(-3; -2; 4) заданной прямой.

Задача С.21. Даны вершины треугольника А(1; -1; 2), В(5; -6; 2) и С(2; 3; -1). Вычислить длину его высоты, проведённой из вершины В на сторону АС.

Задача С.22. Дана пирамида с вершинами в точках A_1(3; 1; 4), A_2(-1; 6; 1), A_3(-1; 1; 6), A_4(0; 4; -1). Найти уравнение высоты, проведённой из вершины A_4 на грань A_1 A_2 A_3.

Задача С.23. Вершины треугольной пирамиды находятся в точках А(0; 0; 0), В(3; 4; -1), С(2; 3; 5) и Д(6; 0; -3). Найти длину высоты, проведённой из вершины С.

Задача С.24. Дана треугольная пирамида с вершинами А(0; 0; 1), В(2; 3; 4), С(6; 2; 3) и Д(3; 7; 2). Найти уравнение высоты пирамиды, проведённой на грань ВСД.

Рекомендуемая учебная литература: [4, гл. 9, § 41, 42]; [2]; [6, гл. 3, § 3. 3]; [2, гл. 3, § 1].

Контрольные вопросы для самопроверки. Прямая в пространстве

1. Напишите каноническое уравнение прямой.
2. Написать уравнение прямой, проходящей через две точки.
3. Написать параметрическое уравнение прямой. Как перевести каноническое уравнение прямой в параметрическое.
4. Угол между двумя прямыми в пространстве.
5. Условие параллельности двух прямых.
6. Условие перпендикулярности двух прямых.
7. Угол между прямой и плоскостью.
8. Угол между прямой и плоскостью.

1.4. Практическое занятие № 4. Линии второго порядка

Цель занятия**.** Студенты должны научиться:

– составлять уравнение линии второго порядка (окружности, эллипса, гиперболы, параболы) по исходным данным;

– определять по уравнению окружности, эллипса, гиперболы, параболы основные элементы и исследовать форму линии.

Методические рекомендации. Подготовка к практическому занятию предполагает предварительное изучение следующих вопросов темы «Линии второго порядка»:

1. Уравнение линии второго порядка в общем виде.
2. Окружность: определение, каноническое уравнение.
3. Эллипс: определение, каноническое уравнение. Вычисление по заданным условиям координат вершин, фокусов, осей эллипса, эксцентриситет.
4. Гипербола: каноническое уравнение. Нахождение асимптот, эксцентриситета, длин осей, координат вершин и фокусов.
5. Парабола. Исследование формы параболы по ее уравнению.

Основной теоретический материал к практическому занятию № 4 изложен в гл. 2, п. 2.4.1–2.4.9.

Перед тем, как приступить к решению индивидуального практического задания в соответствии с общими рекомендациями, приведенными на с. 7 данного пособия, студенту рекомендуется рассмотреть примеры решения типовых задач 16–19, в которых приведены детальные комментарии и пояснения.

Примеры решения типовых задач

Задача 16. Составить простейшее уравнение эллипса, зная, что:

а) его полуоси $a = 6$ и $b = 4$;

б) расстояние между фокусами равно $2c = 10$, а большая полуось $2a = 16$;

в) большая полуось $a = 12$, а эксцентриситет $\varepsilon = 0{,}5$;

а) Составить простейшее уравнение эллипса, зная, что его полуоси $a = 6$ и $b = 4$. Простейшее уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Подставляя в уравнение $a = 6$ и $b = 4$, получим

$$\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$$

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$$

б) Составить простейшее уравнение эллипса, зная, что расстояние между фокусами $2c = 10$, а большая полуось $2a = 16$.

Имеем $2c = 10$, значит $c = 5$; известно значение $2a = 16$, тогда $a = 8$.

Чтобы написать уравнение эллипса, следует найти малую полуось b. Между величинами a, b и c у эллипса существует зависимость $a^2 - b^2 = c^2$, если a>b. По условию задачи большая ось 2a. Вычислим $b^2 = a^2 - c^2$.

В нашем случае $b^2 = 64 - 25 = 39$, и уравнение эллипса в этом случае будет иметь вид

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1.$$

в) Составить простейшее уравнение эллипса, зная, что большая полуось $a = 12$, а эксцентриситет $\varepsilon = 0{,}5$.

Эксцентриситет эллипса находят по формуле $\varepsilon = \frac{c}{a}$, если большая ось 2a. Из этой формулы определим значение c.

Для определения значения c подставляем известные значения и получаем уравнение $0{,}5 = \frac{c}{12}$, отсюда $c = 6$.

Теперь, зная, что $a = 12$ и $c = 6$, пользуясь отношением $a^2 - c^2 = b^2$, находим значение второй оси эллипса

$$b^2 = 144 - 36 = 108$$

Уравнение эллипса будет

$$\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{108}=1$$

Задача 17. Найти длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $4x^2 + 9y^2 = 144$.

Решение. Преобразуем это уравнение к каноническому виду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Разделим обе части заданного уравнения $4x^2 + 9y^2 = 144$ на 144.

Получим $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$.

Отсюда заключаем, что $a^2 = 36$, $b^2 = 16$. Значит, $a = 6$ и $b = 4$.

Длины осей: $2a = 12$ и $2b = 8$.

Зная значения a и b, определяем, что 2 а – большая ось, так как 2а>2в.

По формуле $a^2 – c^2 = b^2$ находим значение c, для этого подставим $a = 6$ и $b = 4$:

$$36 – c^2 = 16,$$

$c^2 = 20$ и получим, что с $=2\sqrt{5}$.

Фокусы этого эллипса лежат на оси ОХ, так как 2а – большая ось.

Координаты фокусов будут $F_1\ (2\sqrt{5}\,; 0)$ $\mathrm{F}_2(-2\sqrt{5}; 0)$.

Эксцентриситет эллипса вычисляем по формуле $\varepsilon=\frac{c}{a}$, так как 2а большая ось:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Ответ: $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$

Задача 18. Составить простейшее уравнение гиперболы, если расстояние между ее вершинами равно 20, а расстояние между фокусами 30.

Решение**.** В условии не сказано, какая из осей гиперболы является действительной осью, на какой оси координат лежат фокусы.

Рассмотрим два случая решения задачи:

а) действительная ось $2a = 20$; $2c = 30$.

Значит, $a = 10$ и $c = 15$; $a^2 = 100$ и $c^2 = 225$.

Величины a, b, c у гиперболы связаны соотношением $a^2 + b^2 = c^2$.

Вычисляем $\mathrm{b}^2 = \mathrm{c}^2 – a^2 = 225 – 100$, значит, $\mathrm{b}^2 = 125$.

Вершины гиперболы лежат на ее действительной оси 2а, значит, уравнением гиперболы будет уравнение (в правой части канонического уравнения стоит +1):

$$\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{125}=1$$

б) пусть действительная ось 2в = 20 и $2c = 30$.

Значит, в = 10 и $c = 15$; $в^2 = 100$; $c^2 = 225$.

Величины a, b, c у гиперболы связаны соотношением $a^2 + b^2 = c^2$, получаем $a^2 = c^2 - в^2 = 225 - 100$; $a^2 = 125$.

Фокусы гиперболы лежат на оси ОУ, значит, в правой части канонического уравнения стоит -1 и уравнением гиперболы будет уравнение:

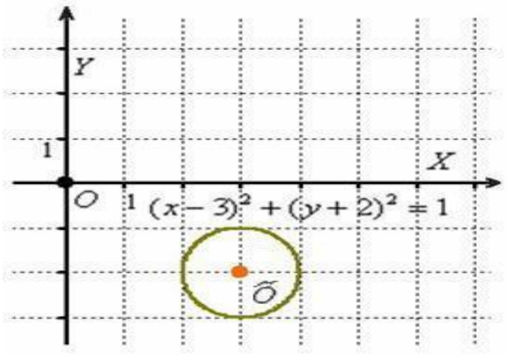
$$\frac{x^2}{125} + \frac{y^2}{100} = -1$$

Задача 19. Определить тип линии и построить линию
$x^2 - 6x + y^2 + 4y + 12 = 0$.

Решение. Преобразуем выражение $x^2 - 6x + y^2 + 4y + 12 = 0$, выделив полные квадраты:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 - 9 - 4 + 12 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 1$$



Уравнение окружности радиуса R с центром в произвольной точке O(x_0; y_0) находится по формуле:

$$(x - \mathbf{x_0})^2 + (y - \mathbf{y_0})^2 = \mathbf{R^2}$$

Следовательно, данная линия – окружность, радиус ее равен R =1, центр заданной окружности в точке (3; -2).

Для самостоятельного решения

Для самостоятельного решения студентами задач на практическом занятии № 4 имеется набор заданий. Студенты выполняют последовательно по указанию преподавателя отдельные задачи под номерами С.25–С.27.

Задачи № С.28–С.31выполняют студенты, которые быстрее других решили задачи под номерами С.25–С.27. За активную работу на практическом занятии и решение дополнительных задач студент будет поощрен оценкой «отлично».

Задача С. 25. Составить уравнение прямой, проходящей через центры окружностей $x^2 + y^2 = 5$ и $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 31 = 0$.

Задача С.26. Эллипс проходит через точки А(6; 3) и В(0; 5). Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса.

Задача С.27. Для гиперболы $3x^2 - 4y^2 = 12$ найти действительную и мнимую полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения асимптот. Построить гиперболу.

Задача С.28. Составить уравнение параболы, проходящей через точки (0; 0) и (-1; -3) и симметричной относительно оси ох.

Задача С.29. Составить уравнение параболы, проходящей через точки (0; 0) и 2; -4) и симметричной относительно оси оу.

Задача С.30. Построить эллипс $3x^2 + 16y^2 = 192$. Найти:

1) полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет.

Задача С.31. Составить каноническое уравнение гиперболы, действительная полуось которой равна 3, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$.

Контрольные вопросы самопроверки. Линии второго порядка

1. Эллис: каноническое уравнение, показать чертеж.
2. Оси эллипса: большая и малая. Как определяются.
3. Фокусы эллипса, где находятся и как вычисляют координаты точек фокусов.
4. Эксцентриситет эллипса.
5. Гипербола: каноническое уравнение, чертеж.
6. Оси гиперболы: названия, как определяются.
7. Фокусы гиперболы, где находятся и как вычисляют координаты точек фокусов;
8. Эксцентриситет гиперболы.
9. Асимптоты гиперболы.
10. Парабола: каноническое уравнение с вершиной в начале координат.
11. Ось параболы. Как определяется.
12. Фокус параболы, где находится и как вычисляют координаты точки фокуса.
13. Директриса параболы, параметр параболы.
14. Парабола: каноническое уравнение с вершиной в произвольной точке.

Рекомендуемая учебная литература: [5]; [4, гл. 4, §17–20]; [2]; [6, гл. 1, § 3]; [3, гл. 3].

1.5. Практическое занятие № 5. Контрольная работа на тему «Аналитическая геометрия»

Цель занятия. Студенты должны на примере решения задач показать уровень понимания вопроса к задаче, умение применить нужные формулы для решения задания, составить схематический чертеж, уметь проверить правильность решения задач.

На этом занятии студенты решают контрольную работу.

Примерный вариант контрольной работы.

Контрольная работа. Часть 1

1. В треугольнике ABC известны вершины A(-3; 3), B(5; 1) и C(6; -2). Требуется составить уравнения:

а) стороны *BC*;

б) высоты, опущенной из вершины *A* на сторону *BC*;

2. В треугольнике *ABC* известны вершины A(-3; 3), B(5; 1) и C(6; -2). Составить уравнение медианы, проведённой из вершины *C*.

3. Написать уравнения прямых, проходящих через точку M(-3; 4), одна из которых параллельна, а другая – перпендикулярна прямой $3x - 5y - 7 = 0$.

4. Написать уравнение прямой, проходящей через точку *P*(2; 4), и составляющей угол 45 градусов с прямой $2x - 5y + 1 = 0$.

Контрольная работа. Часть 2

1. Написать уравнение плоскости, которая проходит через ось *Ox* и точку M (0; 2; 3).

2. Найти угол между плоскостями: $x - 2y + 3z - 4 = 0$ и $2x - 3y + 2z + 6 = 0$.

3. Написать уравнения плоскостей, параллельных плоскости $2x + 6y - 3z + 56 = 0$ и отстоящих от неё на расстоянии $d = 4$.

4. В треугольнике *ABC* известны координаты вершин *A*(1; 0; 2), *B*(2; 3; -1) и *C*(3; - 2; 4). Составить каноническое и параметрическое уравнения медианы, проведённой из точки *B*.

5. Даны вершины тетраэдра A(2; 3; 1), B(4; 1; -2), C(6; 3; 7) и Д(-5; -4; 8). Найти длину его высоты, опущенной из вершины Д.

1.6. Практические задания, связанные с профессиональной деятельностью студента

Ознакомиться с примерами решения задач на оптимизацию студенту предлагается самостоятельно. Студент выполняет конспект этого п. 1.6 на дополнительную оценку «отлично». Если на одном из практических занятий появится возможность рассмотреть решения задач из этого п. 1.6, они будут решены в аудитории. Для самостоятельного решения задач, связанными с профессиональной деятельности, в сборнике задач представлены задачи под номерами С. 32–С.46.

Применение методов аналитической геометрии к задачам оптимизации производства

Проблема принятия наилучшего решения, когда результаты должны быть получены при минимальных затратах ресурсов определённого вида или, когда при заданных ограниченных возможностях, должно быть произведено максимальное количество некоторого продукта, – одна из важных проблем, стоящих перед человеком. В таких случаях говорят, что необходимо найти оптимальное решение (оптимум – наилучший). В различных условиях оптимальными могут быть разные решения.

Например, если требуется решить, сколько и какие виды удобрений необходимо приобрести, то можно формулировать условия так: при заданной стоимости удобрений количество действующего вещества должно быть наибольшим, или при заданной стоимости удобрений уровень повышения кислотности почвы после их внесения должен быть наименьшим.

Если требуется решить задачу, каким должен быть рацион кормления данной группы животных, то можно поставить задачу минимизации стоимости кормов при заданных ценах на корма или задачу получения максимальных удоев при ограниченных средствах на приобретение кормов.

Как видим, в практической деятельности понятие оптимальный выражается количественно: минимум затрат, максимум урожая, прибыли и т. д.

Задачи на оптимизацию

Задача 21. Предложение S и спрос D на муку в период 1920–1935 гг. выражены функциями $S = 0{,}8 \cdot p + 0{,}5$ и $D = -0{,}4 \cdot p + 1{,}5$, где – p цена муки, измеряется в долларах, а S и D – в центнерах. Найти рыночную цену муки. (*Рыночная цена товара – это цена товара, при которой его предложение на рынке и спрос совпадают).*

Решение. Рыночная цена товара определяется условием **S = D**, т. е. является решением уравнения

$$0{,}8 \cdot p + 0.5 = -0{,}4 \cdot p + 1.5.$$

Находим, что цена муки равна p = 0,83.

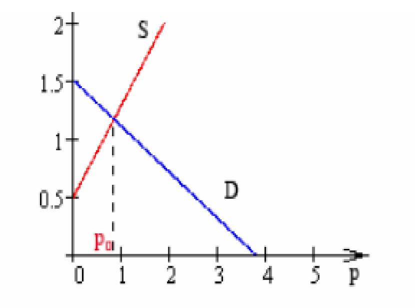


Рисунок 2

На рисунке 2 изображены графики функций S и D (по оси абсцисс откладывается цена товара p, по оси ординат – количество товара Q). Рыночная цена товара p является абсциссой точки пересечения этих графиков.

Задача 22. В прошлом году цена данного товара была 15 денежных единиц, а в настоящем году – 18 денежных единиц. Найти зависимость цены товара от номера года, при условии, что тенденция роста сохраняется, то есть цена будет увеличиваться на одно и то же число. Составить прогноз средней цены на три года вперёд.

Решение. Составим уравнение, связывающее номер года **x** и цену товара **y**, как уравнение прямой, проходящей через две данные точки A(1; 15) и B(2; 18) по формуле прямой, проходящей через две точки

$$\frac{y-15}{18-15}=\frac{x-1}{2-1}$$

$$y-15=3\,(x-1)$$
$$y=\ 3x\ +\ 12.$$

Так как номер прошлого года равен 1, а текущего года равен 2, то через три года, т. е. при x=5 (к двум известным годам добавляется еще три), цена товара составит y= 3·5 + 12 =27

Ответ: цена товара при заданных условиях составит 27 денежных единиц.

Задача 23. Хозяйству требуется приобрести два вида азотных удобрений: A – аммиачную селитру и B – сульфат аммония. Удобрения A необходимо иметь не более 15 т, а удобрения B – не более 10 т. Содержание действующего вещества для A и B равно 35 % и 20 % соответственно. Отпускная оптовая цена удобрения A и удобрения B – соответственно равна 53 и 35 руб. за тонну. Хозяйство может выделить на приобретение удобрений 600 руб.

Сколько тонн каждого вида удобрений следует приобрести, чтобы общая масса действующего вещества была максимальной?

Решение. Обозначим через x_1 – массу удобрения *A,*

x_2 – массу удобрения *B*.

Условие задачи можно записать так:

$$\begin{cases} x_1 \le 15 \\ x_2 \le 10 \\ 53x_1 + 35x_2 \le 600, \text{где } x_1 \ge 0 \text{ и } x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (1)$$

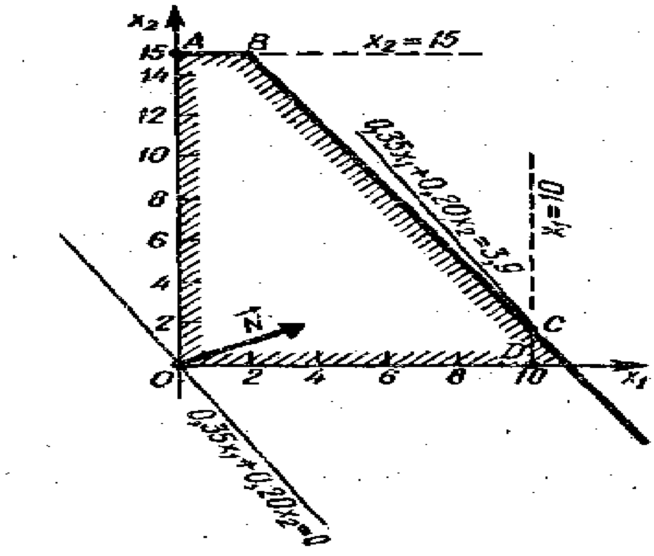
Обозначим количество действующего вещества через L. Тогда:

$$L = 0{,}35\cdot x_1 + 0{,}20\cdot x_2. \qquad (2)$$

Минимальное значение L соответствует значениям x_1=0 и $x_2 = 0$.

Функция L, определяемая равенством (2), *называется линейной формой от x_1 и x_2*.

Построим область решений системы неравенств (1) и линейную форму при $L=0$.



Областью решений системы является множество точек плоскости Ox_1x_2 внутри пятиугольника *OABCD* (рисунок 3). Пятиугольник получили параллельным переносом прямой $y=0,35x_1+0,20x_2$ до пересечения с прямой $x_1=10$. Оси координат x_1 и x_2.

Рисунок 3

Прямую $0,35 \cdot x_1+0,20 \cdot x_2 = 0$ стоим обычным способом, можно построить, например, по двум точкам (0; 0) и (2; -3,5). Эти точки получили, подставляя значение $x_1=0$ в уравнение $0,35 \cdot x_1+0,20 \cdot x_2= 0$, и вычисляем $x_2=0$; затем подставляем $x_1=2$, вычисляем $x_2 =-3,5$.

Если прямую $0,35x_1+0,20x_2=0$ перемещать вправо, оставляя ее параллельной самой себе, то значение $L = 0,35x_1+ 0,20x_2$ для всех точек в области решений системы (1) будет возрастать.

Крайним положением является прямая, проходящая через точку *C.* Здесь линейная форма принимает наибольшее значение, так как прямая максимально удалена от начала координат.

Найдём координаты точки С: в точке С значение $x_1 =10$.

Найдём значение x_2.

Для этого в уравнение $53\ x_1 + 35\ x_2 = 600$ подставим $x_1 =10$.

Вычисляем значение x_2:

$$530+ 35\ x_2 = 600$$

$$35\ x_2 = 600 — 530$$

$$35\ x_2 = 70$$

$$x_2 =2$$

Значение $L = 0,35 \cdot 10 + 0,20 \cdot 2 = 3,5 + 0,4=39$ (т.)

Ответ: хозяйству необходимо 10 т аммиачной селитры и 2 т сульфата аммония.

Задача 24. Хозяйство должно приобрести два вида кормов: *А* и *В,* причём корма *А* не более 100 т, корма *В* не более 200 т. Известно, что 1 т корма *А* содержит 700 кг кормовых единиц, его цена – 50 руб. за тонну; одна тонна корма В содержит 800 кг кормовых единиц, его цена 60 руб. за тонну.

Хозяйству отпущено на покупку кормов 7000 руб. Какое количество каждого корма необходимо приобрести, чтобы получить максимальное количество кормовых единиц?

Решение. Обозначим через x_1 – массу корма A(т), x_2 – массу корма B(т).

Тогда в соответствии с условием задачи составим систему:

$$\begin{cases} x_1 \le 100 \\ x_2 \le 200 \\ 50 \cdot x_1 + 60 \cdot x_2 \le 7000 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Преобразуем систему (1), разделив третье из неравенств на 10.

$$\begin{cases} x_1 \le 100 \\ x_2 \le 200 \\ 5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 700 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Общее количество кормовых единиц

$$L = 700\, x_1 + 800\, x_2. \qquad (2)$$

Найдём область решений системы неравенств (1), для чего построим граничные прямые:

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = 100$, $x_2 = 200$ и $5\, x_1 + 6\, x_2 = 700$.

Областью решений являются внутренние точки четырёхугольника $OBCD$, включая и его границы (рисунок 4).

Построим нормальный вектор $\vec{N}(7;\, 8)$ и прямую L

$$70 \cdot x_1 + 80 \cdot x_2 = 0.$$

При перемещении прямой L параллельно самой себе в направлении вектора N значение линейной формы L возрастает.

Наибольшее перемещение соответствует положению прямой, проходящей через точку С. Дальнейшее движение прямой невозможно, так как в этом случае ее положение будет вне области решения системы (1).

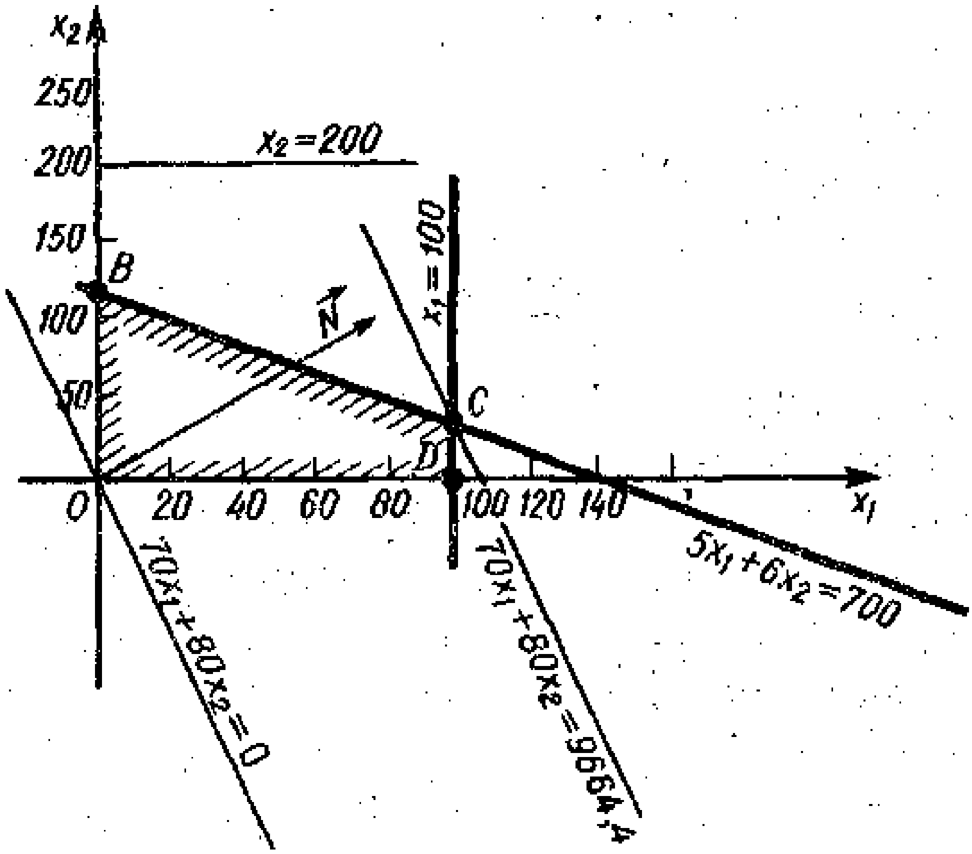


Рисунок 4

Следовательно, максимуму линейной формы (2) соответствует положение прямой L, проходящей через точку C, координаты которой найдём из решения системы

$$\begin{cases} x_1 = 100 \\ 5x_1 + 6x_2 = 700 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 100 \\ x_2 \approx 33{,}3 \end{cases}$$

Вывод: наибольшая питательная ценность приобретаемых кормов имеет место, если хозяйство приобретёт 100т корма А и 33,3т корма В. При этом L= 700·100 + 800·33,3 = 96640 кг кормовых единиц.

Задача 25. Зависимость урожайности *y* (ц/га) зерна кукурузы от количества азотного удобрения x (кг/га действующего вещества) выражается формулой $y = -0{,}0021x^2 + 0{,}936x + 49{,}84$. Определить значение, при котором увеличение количества азотных удобрений становится невыгодным.

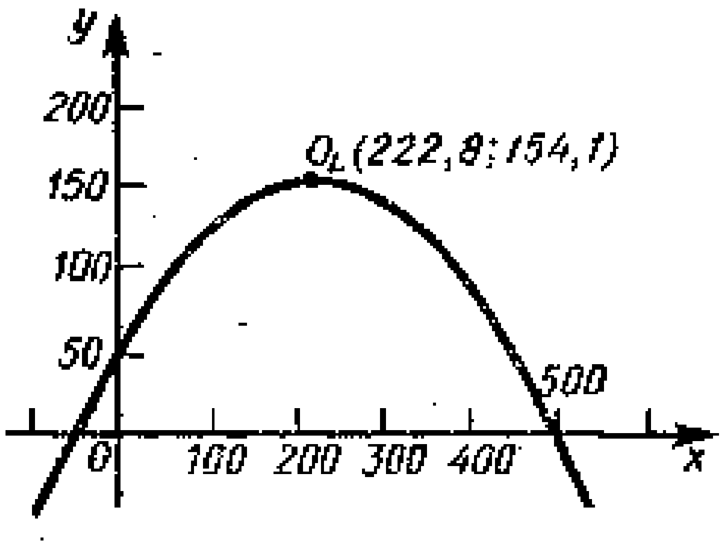


Рисунок 5

Решение. Строим график $y = -0{,}0021x^2 + 0{,}936x + 49{,}84$.

График уравнения изображен на рисунке 5. Вершина параболы лежит в точке O_1 (222,8; 154,1).

По графику можно проанализировать изменение урожайности. Так, вблизи точки $x = 222{,}8$ функция изменяется очень медленно.

Существует такое значение x<222,8, при котором увеличение количества азотных удобрений становится невыгодным. Это значение x зависит от соотношений цен на кукурузу и удобрение.

Ответ. x = 222,8 кг/га – значение, при котором увеличение количества азотных удобрений становится невыгодным.

Задача 26. Пусть y – стоимость произведенного продукта, x – затраты на его производство. Тогда y-x – прибыль *П.* Если прибыль разделить на затраты *x,* то получим следующее выражение для рентабельности:

$$R = \frac{\text{П}}{x}$$

Чем меньше издержки производства, тем выше рентабельность.

Графиком рентабельности является равносторонняя гипербола (рисунок 6).

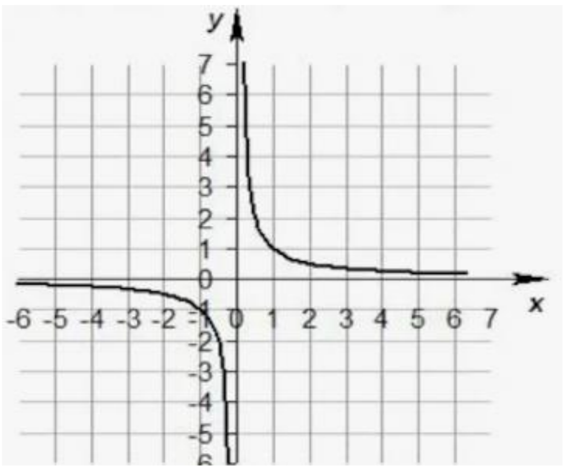


Рисунок 6

Задача 27. Через пункты A(3; 2) и B(11; 6) проходит прямолинейный участок шоссе. Размеры участков измеряют в десятках километров. В пункте C(7; 9) открыто месторождение, от которого нужно провести кратчайшую дорогу к шоссе. Вычислите координаты точки D, в которой дорога должна соединиться с шоссе. Какова длина этой дороги? Составьте уравнение шоссе и уравнение дороги.

Решение. На рисунке 7 приведены прямые AB (шоссе), CD (дорога).

Вектор $\overrightarrow{AB}$=(11-3; 6-2), $\overrightarrow{AB}$(8; 4) является направляющим вектором прямой AB (шоссе) и нормалью прямой CD (дорога).

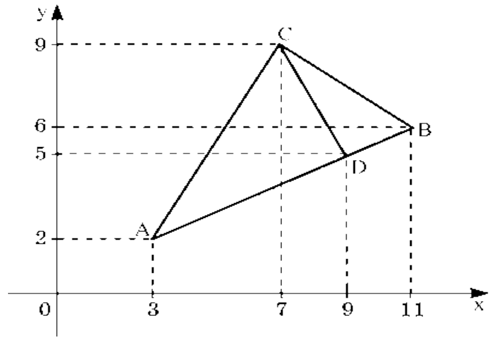


Рисунок 7

Уравнение шоссе AB находим по формуле уравнения прямой с направляющим вектором $\overrightarrow{AB}$(8; 4) и известной точкой A(3; 2): $\frac{x-3}{8} = \frac{y-2}{4}$

Уравнение дороги CD находим по формуле прямой с нормальным вектором $\overrightarrow{AB}$(8; 4) и известной точкой C(7; 9): 8(x – 7) + 4(y – 9) = 0.

Вычислим координаты точки D, в которой шоссе соединится с дорогой. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{8} = \dfrac{y-2}{4} \\ 8(x-7)+4(y-9)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} \\ 2(x-7)+y-9=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2y=-1 \\ 2x+y=23 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2y=-1 \\ 4x+2y=46 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=5 \end{cases}$$

D(9; 5) – пункт, в котором шоссе соединяется с дорогой.

Зная координаты точек C(7; 9) и D(9; 5), найдем вектор $\overrightarrow{CD}$=(9-7; 5-9), $\overrightarrow{CD}$=(2; -4), и его длину

$$\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{2^2+(-4)^2}=\sqrt{20}\approx 4{,}5$$

Поскольку все расстояния даны в десятках километров, то длина дороги CD приблизительно равна 45 км.

Задача 28. В условии задачи № 27 будем считать, что дорогу от пункта C до шоссе провели через пункт A. Какой угол она составляет с шоссе? На сколько километров кратчайшая дорога была бы короче? Напишите уравнение прямой, на которой лежит дорога AC.

Решение. Вектор $\overrightarrow{AC}$=(7-3;9-2)=(4; 7) является направляющим вектором прямой AC.

Известны координаты A(3; 2) и B(11; 6). Уравнение прямой AC

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{7}$$

Эта прямая (дорога AC, рис. 20) составляет с прямой AB (шоссе) угол α, равный углу между векторами $\overrightarrow{AB}$= (8; 4) и $\overrightarrow{AC}$= (4; 7)

$$\operatorname{Cos}\alpha = \frac{8\cdot4+4\cdot7}{\sqrt{8^2+4^2}\,\sqrt{4^2+7^2}} = \frac{60}{\sqrt{80}\sqrt{65}} = 0{,}832$$

$$\operatorname{Cos} 33^\circ 41' = 0{,}832$$

$\alpha = 33^\circ 41'$, α – угол между шоссе AB и дорогой AC.

Длина дороги от пункта A до пункта C равна $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2+7^2}=\sqrt{65}\approx 8{,}1$.

Длина дороги AC приближенно равна 81 км.

Она на 81 – 45 = 36 км длиннее кратчайшей дороги CD длиной 45 км.

Линии уровня линейной функции F(x; y) = a·x + b·y + g

Линией уровня с линейной функции двух переменных F(x; y) = ax + by + g, где a, b, g – постоянные числа, называется прямая L с уравнением ax + by + g = c, то есть уравнением F(x; y) = c.

Пример. Пусть F(x; y) = x + 2y.

В этом примере a = 1, b = 2, g = 0. Зададим уровни $c_1 = 4$, $c_2 = 7$, $c_3 = 10$.

Линия L_1 уровня $c_1 = 4$ имеет уравнение x + 2y = 4.

Линия L_2 уровня $c_2 = 7$ имеет уравнение x + 2y = 7.

Линия L_3 уровня $c_3 = 10$ имеет уравнение x + 2y = 10.

Для построения линий L_3, L_2 и L_1 подберем точки, удовлетворяющие уравнениям этих линий уровня.

Точки $A_1(2; 1)$ и $B_1(4; 0)$ лежат на прямой L_1, так как их координаты удовлетворяют уравнению x + 2y = 4.

Точки $A_2(3; 2)$ и $B_2(7; 0)$ лежат на прямой L_2, так как их координаты удовлетворяют уравнению x + 2y = 7.

Точки $A_3(0; 5)$ и $B_3(4; 3)$ лежат на прямой L_3, так как их координаты удовлетворяют уравнению x + 2y = 10.

Строим в системе координат линии L_3, L_2 и L_1. Прямые L_1, L_2, L_3 параллельны друг другу и имеют общую нормаль $\vec{n}$=(1; 2).

На рисунке 8 видно, что линия L_3 наибольшего уровня $c_3 = 10$ лежит выше L_2 и L_1. Линия L_1 наименьшего уровня $c_1 = 4$ лежит ниже L_2 и L_3.

Если двигать линейку перпендикулярно вектору $\vec{n}$ то, чем дальше в этом направлении мы будем ее двигать, то тем большего уровня **c** получим прямую L и тем большее значение будет принимать функция F(x; y) в точках этой прямой L.

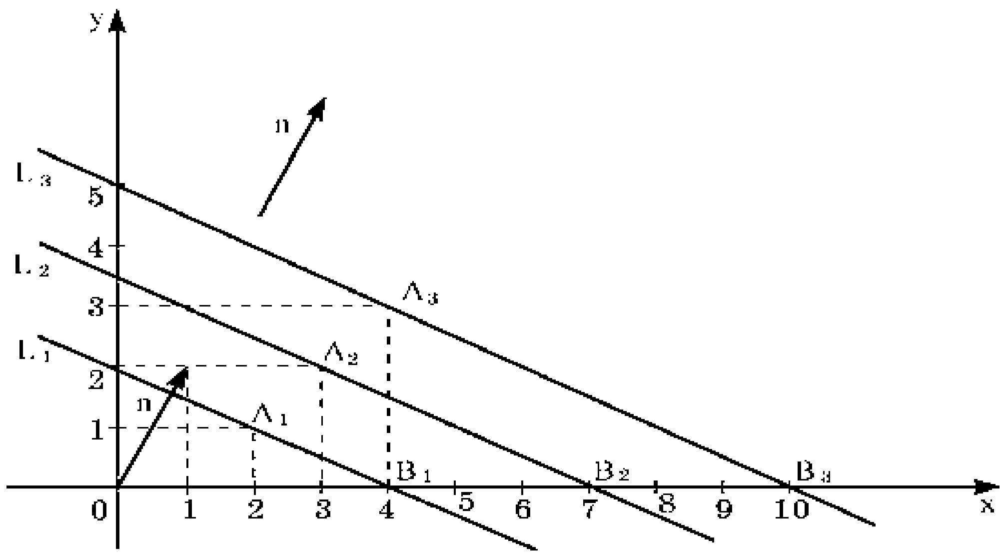


Рисунок 8

Задача 29. Производство продукции А и продукции В взаимосвязано. Завод производит оба вида продукции. Издержки на производство x единиц продукции А и y единиц продукции В задаются функцией $R(x,\ y) = a \cdot x + b \cdot y + g$. Имеющиеся ресурсы позволяют выпускать либо x_1 единиц продукции А и y_1 единиц продукции В, либо x_2 единиц продукции А и y_2 единиц продукции В, либо x_3 единиц продукции А и y_3 единиц продукции В. Вычислите $c_1 = R(x_1;\ y_1)$, $c_2 = R(x_2;\ y_2)$ и $c_3 = R(x_3;\ y_3)$. Постройте графики прямых $R(x;\ y) = c_1$, $R(x;\ y) = c_2$ и $R(x;\ y) = c_3$. Укажите, при каком плане $(x_i;\ y_i)$ $i = 1, 2, 3$ выпуска продукции расходы будут наименьшими и при каком наибольшими.

Задачу решить для варианта:

$R(x;\ y) = 20x + 30y + 60$; $x_1 = 15$, $y_1 = 15$; $x_2 = 24$, $y_2 = 6$; $x_3 = 6$, $y_3 = 24$.

Решение задачи. Вычислим c_1, c_2, c_3 и составим уравнения линий уровня L_1, L_2, L_3 с уравнениями: $L_1 : R(x;\ y) = c_1$; $L_2 : R(x;\ y) = c_2$; $L_3 : R(x;\ y) = c_3$.

$c_1 = R(15;\ 15) = 20 \cdot 15 + 30 \cdot 15 + 60 = 810$.

Прямая L_1 имеет уравнение $20x + 30y + 60 = 810$
или $20x + 30y = 750$.

$c_2 = R(24;\ 6) = 20 \cdot 24 + 30 \cdot 6 + 60 = 720$.

Прямая L_2 имеет уравнение $20x + 30y + 60 = 720$
или $20x + 30y = 660$.

$c_3 = R(6;\ 24) = 20 \cdot 6 + 30 \cdot 24 + 60 = 900$.

Прямая L_3 имеет уравнение $20x + 30y + 60 = 900$

или 20x + 30y = 840.

Вектор $\vec{n}$=(20; 30) и любой вектор ему коллинеарный будет нормалью для L_1, L_2 и L_3.

Сравнивая значения c_1, c_2 и c_3 – издержки на производство x единиц продукции А и y единиц продукции В, делаем выводы:

max R(x; y) = R(x_3; y_3) = c_3 = 900; max R(x; y) принадлежит точкам L_3.

min R(x; y) = R(x_2; y_2) = c_2 = 720; min R(x; y) принадлежит точкам L_2.

На рисунке 9 построены графики прямых L_1, L_2 и L_3.

Чем дальше в направлении вектора нормали передвигать линии уровня, тем больше уровень c.

Вектор $\vec{n}$=(20; 30) – нормаль прямых L_1, L_2, L_3.

Вектор $\vec{n}$=(5; 7,5) – тоже нормаль прямых L_1, L_2, L_3.

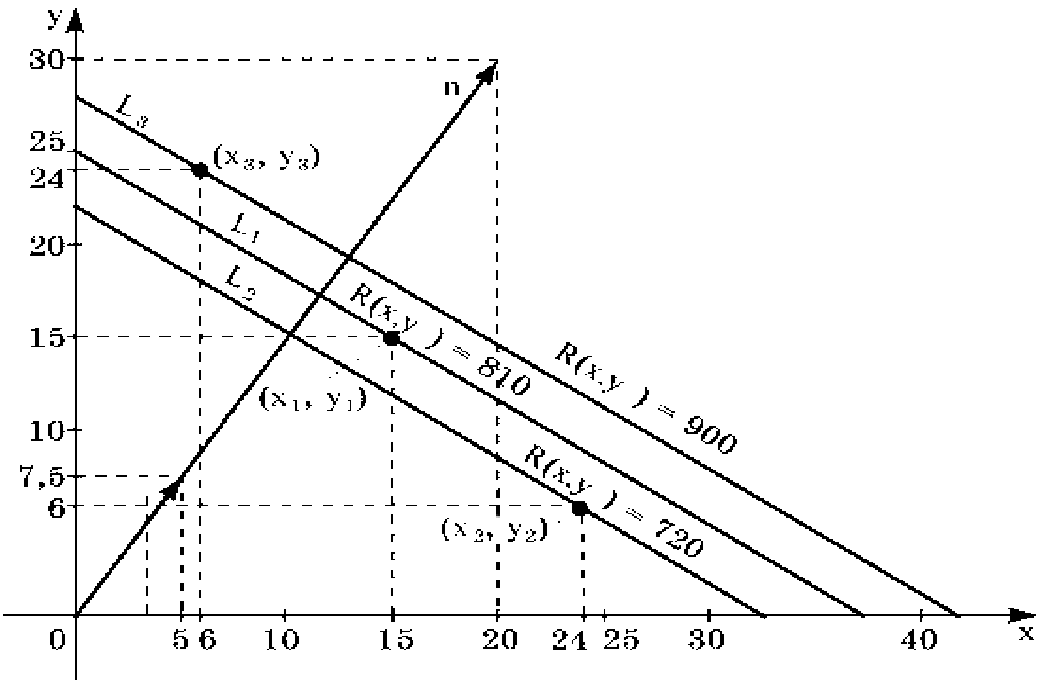


Рисунок 9

Самостоятельно решить задачу 29 для вариантов:

1. R(x; y) = 20x + 25y + 100; x_1 = 30, y_1 = 20; x_2 = 40, y_2 = 10; x_3 = 10, y_3 = 40.
2. R(x; y) = 10x + 20y + 50; x_1 = 20, y_1 = 10; x_2 = 15, y_2 = 15; x_3 = 25, y_3 = 5.
3. R(x; y) = 10x + 10y + 60; x_1 = 15, y_1 = 15; x_2 = 20, y_2 = 10; x_3 = 10, y_3 = 20.

Задача 30. Будем считать, что в условии задачи 29 доход от производства x единиц продукции А и y единиц продукции В равен

D(x; y) = d_1x + d_2y.

Вычислите $\widetilde{c_1}$= D(x_1; y_1), $\widetilde{c_2}$= D(x_2; y_2) и $\widetilde{c_3}$= D(x_3; y_3).

В каком случае доход максимальный, в каком минимальный? Построить графики линий уровня:

$\widetilde{L_1}$: $\widetilde{c_1}$= D(x_1; y_1), $\widetilde{L_2}$: $\widetilde{c_2}$= D(x_2; y_2) и $\widetilde{L_3}$: $\widetilde{c_3}$= D(x_3; y_3).

Решить задачу для варианта $d_1 = 30$; $d_2 = 40$.

Решение задачи этого варианта.

Вычислим $\widetilde{c_1}$, $\widetilde{c_2}$ и $\widetilde{c_3}$.

По условию доход от производства x единиц продукции А и y единиц продукции В равен $D(x; y) = 30x + 40y$. По условию задачи 39:

$$x_1 = 15,\ y_1 = 15;\ x_2 = 24,\ y_2 = 6;\ x_3 = 6,\ y_3 = 24.$$

$D(x_1; y_1) = 30\cdot15 + 40\cdot15 = 1050$, $\widetilde{c_1}=1050$.

Уравнение прямой $\widetilde{L_1}$: $30x + 40y = 1050$

$D(x_2; y_2) = 30\cdot24 + 40\cdot6 = 960$, $\widetilde{c_2} = 960$.

Уравнение прямой $\widetilde{L_2}$: $30x + 40y = 960$.

$D(x_3; y_3) = 30\cdot6 + 40\cdot24 = 1140$, $\widetilde{c_3} = 1140$

Уравнение прямой $\widetilde{L_3}$: $30x + 40y = 1140$.

На рисунке10 построены графики прямых $\widetilde{L_1}$, $\widetilde{L_2}$ и $\widetilde{L_3}$.

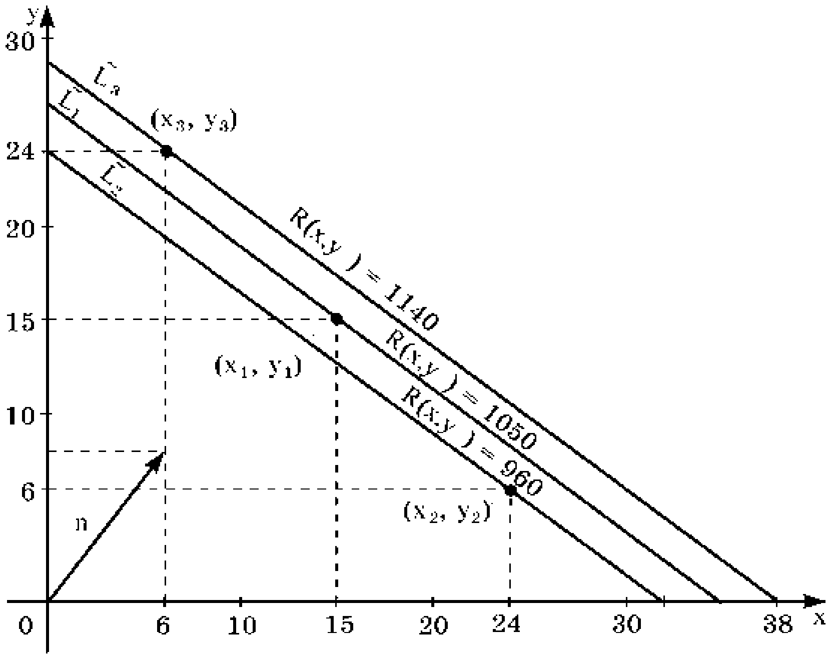


Рисунок 10

Вектор $\vec{n}$=(30; 40) – вектор нормали прямых L_1, L_2, L_3.

Доход от производства x единиц продукции А и y единиц продукции В равен

$$D(x; y) = 30x + 40y.$$

Вычислили $\widetilde{c_1}= D(x_1;\ y_1) = D(15; 15)=1050$;

$\widetilde{c_2}= D(x_2;\ y_2)= D(24; 6)=960$

и $\widetilde{c_3}= D(x_3;\ y_3)= D(6; 24)=1140$.

Сравниваем полученные значения для определения максимального и минимального доходов:

$\max D(x; y) = D(x_3; y_3) = D(6; 24)=1140$лежит на прямой $\widetilde{L_3}$.

$\min D(x; y) = D(x_2; y_2) = 960$ лежит на прямой $\widetilde{L_2}$.

Самостоятельно решить задачу 30 для вариантов:

1. $d_1 = 25$; $d_2 = 40$.
2. $d_1 = 20$; $d_2 = 40$.
3. $d_1 = 20$; $d_2 = 20$.

1.7. Текущий контроль

Индивидуальное практическое задание (ИДЗ) и контрольная работа, выполняемые студентами, предусматривают активную проработку теоретического и практического материала текущих тем, опираясь на факты из лекционных занятий, учебной литературы и практических аудиторных занятий.

Оценивание результатов ИДЗ

ИДЗ выполняется студентом вне аудитории и строго по варианту. Оценка результатов выполнения задания по ИДЗ производится при предоставлении студентом отчёта по работе, подробного объяснения методов и результатов решения и на основании ответов студента на вопросы по тематике работы. ИДЗ должно быть предоставлено студентом в отдельной тетради и в оговоренные сроки.

Оценка «отлично» выставляется в случае, если задания двух уровней сложности выполнены по правильным формулам и алгоритмам и без ошибок.

Оценка «хорошо» выставляется в случае, если задания двух уровней сложности выполнены по правильным формулам и алгоритмам, но с некоторыми ошибками.

Оценка «удовлетворительно» выставляется в случае, если задания первого уровня выполнены по правильным формулам и алгоритмам.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется в случае, если задания выполнены с использованием неправильных алгоритмов и формул или выполнены не в полном объёме задания первого уровня сложности.

Оценивание результатов контрольной работы

Примерный вариант контрольной работы представлен в материале практического занятия № 5.

Оценка результатов выполнения задания контрольной работы:

– оценка «отлично» выставляется в случае, если задания двух частей контрольной работы выполнены по правильным формулам и алгоритмам и без ошибок;

– оценка «хорошо» выставляется в случае, если задания двух частей контрольной работы выполнены по правильным формулам и алгоритмам, но с некоторыми ошибками (не менее 80 % задания);

– оценка «удовлетворительно» выставляется в случае, если задания контрольной работы выполнены по правильным формулам и алгоритмам и верно решено не менее трех задач из первой части и не менее трех задач из второй части контрольной работы.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется в случае, если задания выполнены с использованием неправильных алгоритмов и формул или выполнены не в полном объёме (менее 60 % заданий).

Для оценивания поэтапного формирования результатов освоения аналитической геометрии предусмотрено тестовое задание.

Тестовое задание

Тестовое задание предусматривает выбор правильного ответа на поставленный вопрос из предлагаемых вариантов ответа. Примерный вариант тестового задания предложен в приложении 5.

Перед проведением тестирования преподаватель знакомит студентов с вопросами теста, а после проведения тестирования проводит анализ их работы. Перечень примерных тестовых и практических заданий представлен в фонде оценочных средств (ФОС) по дисциплине Высшая математика.

Тестирование преподаватель проводит на консультации перед экзаменом по дисциплине «Высшая математика» за первый семестр.

2. ОСНОВНОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Для успешного освоения раздела «Аналитическая геометрия» дисциплины «Высшая математика» в данном учебно- методическом пособии приводится краткий перечень основных формул, понятий, определений, необходимых для успешного решения задач на практических занятиях и выполнения самостоятельных работ вне аудитории.

2.1. Прямая на плоскости

2.1.1. Системы координат

Системы координат являются краеугольным камнем современной науки. Они предоставляют универсальный язык для описания положений и движений объектов в пространстве и времени, что критически важно в таких областях, как астрономия, физика, геодезия и многие другие. В основе их применения лежит идея, что любое местоположение или событие может быть точно и однозначно описано с помощью числовых значений в пределах заданной системы координат. Происхождение и развитие систем координат тесно связано с историей науки от древних цивилизаций, использующих простые системы для навигации и астрономии, до современных ученых, применяющих сложные многомерные системы для изучения космического пространства и микромира. Системы координат не только помогают ориентироваться в пространстве, но и предоставляют инструмент для понимания фундаментальных физических законов, лежащих в основе нашего мира.

Совокупность чисел, определяющих положение конкретной точки, называется координатами этой точки.

В обычной жизни мы часто пользуемся различными системами координат в случае отыскания места в зрительном зале, расставляя шахматы на шахматной доске, находим координаты места на карте, изображая предмет на плоском или объёмном рисунке, геометрию используют разработчики компьютерных игр при разработке программ.

Существует много видов систем координат.

Географические системы координат – метод описания местоположений тел и точек на поверхности Земли с использованием сферических измерений широты и долготы. Это измерения углов (в градусах) из центра Земли до точки на земной поверхности, когда форма Земли принимается за сферу. Небесные системы координат, например, экваториальная или галактическая, используются для описания положения объектов в космосе.

Система геодезических координат используется при обработке обширных геодезических сетей, решении задач, связанных с передачей координат на значительные расстояния, изучении фигуры и размеров Земли, составлении топографических и географических карт. Эта система положена в основу разграфки листов топографических карт, рамками которых служат параллели и меридианы. Горизонтальная система координат в астрономии используется при астрономических наблюдениях для определения положения светил по отношению к горизонту. Первая экваториальная система координат применяется для измерения времени, а вторая экваториальная система нужна для составления звёздных карт, атласов и каталогов.

В физике системы координат служат не только для описания местоположений, но и для понимания фундаментальных законов природы. В классической механике системы координат используются для анализа движения объектов. Например, декартова система координат, применяется для описания траекторий движения в трехмерном пространстве. В области электромагнетизма системы координат помогают описывать распределение электрических и магнитных полей. Цилиндрические и сферические координаты часто используются для решения уравнений Максвелла в различных геометрических конфигурациях. В квантовой механике системы координат играют центральную роль в описании состояний частиц и волновых функций. Они позволяют ученым точно определять вероятностные распределения частиц в атомах и молекулах. В теории относительности Эйнштейна используется четырехмерное пространство-время для описания гравитационных эффектов. Эта теория радикально изменила наше понимание пространства и времени, показав, как масса и энергия влияют на геометрию Вселенной.

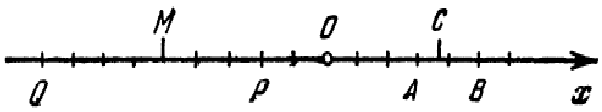
Наиболее часто применяемые системы координат в математике

Координаты точки на прямой.

Если на прямой задано направление, то такую прямую называют направленной, а выбранное направление – положительным. Положительное направление прямой будем указывать стрелкой.

На направленной прямой точку, которую называют началом отсчёта или началом координат, обычно обозначают буквой О. Выбирают отрезок, длину которого считают единицей длины. Этот отрезок называют единицей масштаба.

Например, на прямой обозначены точки:



точка О – начало отсчёта; точке А соответствует значение 3; точке С соответствует значение 3,8; точке В соответствует значение 5; точке Р соответствует значение -2; точке М соответствует значение -5; точке Q соответствует значение -9.

Декартова система координат.

Декартова система координат – прямолинейная система координат на плоскости или в пространстве, в которой положение точки может быть определено как её проекции на фиксированные прямые, пересекающиеся в одной точке, называемой началом координат.

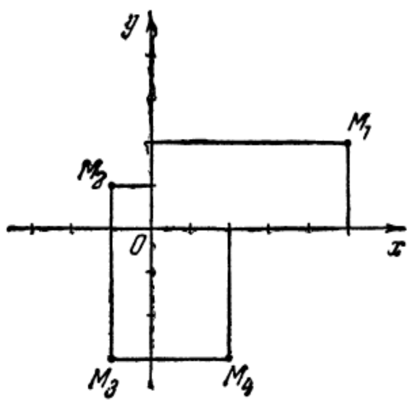
Декартова системы координат на плоскости

Декартова система координат на плоскости представляет собой два взаимно перпендикулярных луча с началом отсчёта в точке, где они пересекаются. Эти лучи называются координатными осями: ось абсцисс (ОХ) – горизонтально ось; ось ординат (ОУ) – вертикально ось.

Координатная плоскость – плоскость, в которой сформирована система координат. Проекции точки на оси координат называются координатами точки.

Принято в декартовой системе координат единичные отрезки по осям координат брать одинаковой длины.

Абсциссой точки называется координата ее проекции на ось Ох.



Ординатой точки называется координата ее проекции на ось Оу.

Абсциссу точки обычно обозначают буквой x, ординату – буквой y.

На представленном для примера рисунке точки обозначают координатами M_1 (5; 2), M_2 (-1; 1), M_3 (-1; -3) и M_4(2; -3).

Например, для точки M_1(5; 2) абсцисса равна x=5, ордината y=2.

Принято обозначать четверти координатной плоскости как на рисунке 11.

В декартовой системе координат оси координат могут быть взаимно перпендикулярными, а длины единичных отрезков по оси абсцисс и оси ординат могут быть разной длины. С такими системами координат встречались, например, на уроках физики в школе: на оси скорости тела и оси времени единичные отрезки обозначали различными длинами, как на рисунке 12.

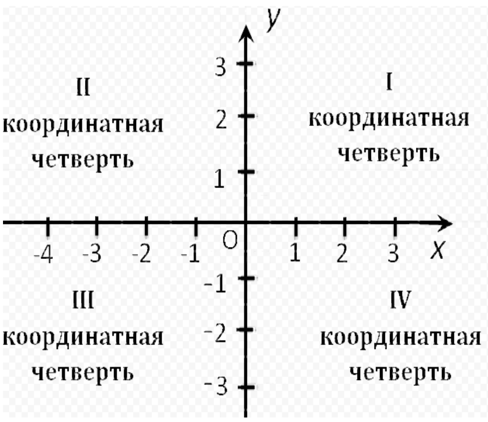


Рисунок 11

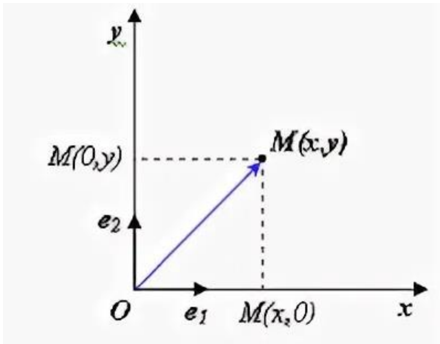


Рисунок 12

Могут быть системы координат, оси координат которых, расположены под произвольным углом (рисунок 13).

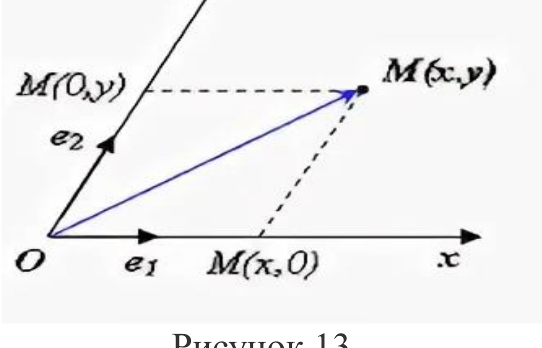


Рисунок 13

Рисунок 14

Декартова системы координат в пространстве.

Прямоугольная *декартова система координат* в пространстве определяется тремя взаимно перпендикулярными осями OX, OY и OZ, называемыми соответственно осями *абсцисс, ординат и аппликат* (рисунок 14).

2.1.2. Правило построения точек в пространстве

Для построения точки, например точки A(1; 2; 3), в пространстве по ее координатам (рисунок 15) поступают следующим образом:

– на оси OX откладывают x=1 и из этой точки проводим прямую, параллельную оси ОУ;

– на оси ОУ откладывают y=2 и из этой точки проводим прямую, параллельную оси OX;

– из точки пересечения этих прямых в плоскости XOУ восстанавливают прямую, параллельную оси OZ, ней отрезок длиной 3.

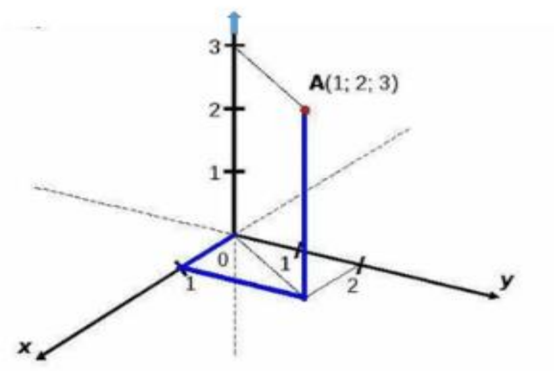


Рисунок 15

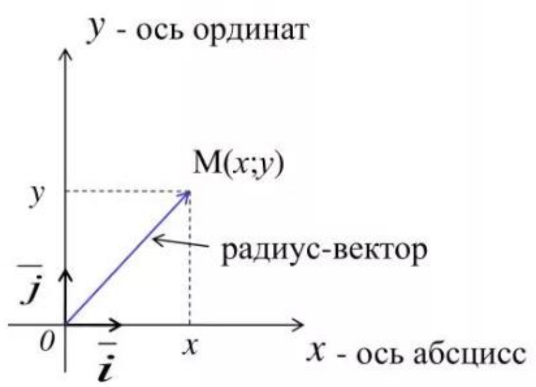


Рисунок 16

Построение вектора по координатам.

Для построения вектора на плоскости по координатам точек начала и конца вектора строят эти точки в системе координат, как обычно строят отрезок по двум точкам в декартовой системе координат. Направление вектора отмечают стрелкой в точку конца вектора.

Если вектор $\vec{a}\,(x; y)$, задан своими координатами, то для построения этого вектора строят декартову систему координат с единичными отрезками **i и j,** направленными по осям координат, и отмечают точку с координатами $(x\,; y)$ в этой системе координат.

Начало координат соединяют отрезком с точкой с координатами $(x\,; y)$. На рисунке 16 вектор OM соответствует заданному вектору $\vec{a}\,(x; y)$.

Для вектора $\overrightarrow{OM}$ ордината равна $x \cdot \vec{i}$, абсцисса равна $y \cdot \vec{j}$ (рисунок 16).

Вектор, соединяющий точку с началом координат, называют радиус-вектором.

Для построения вектора в пространстве по координатам точек начала и конца вектора строят эти две точки в системе координат, как обычно строят отрезок по двум точкам в декартовой пространственной системе координат.

Если вектор задан тремя своими координатами, то для построения вектора строят обычно декартову систему координат с единичными отрезками **i, j и k,** направленным по осям координат – ортами (рисунок 17).

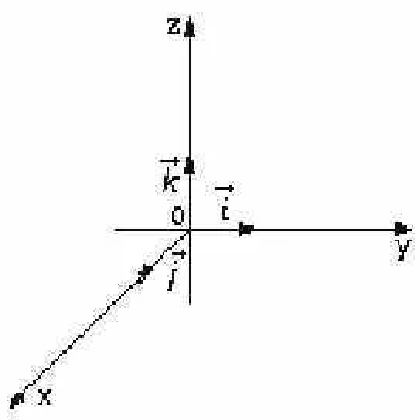


Рисунок 17

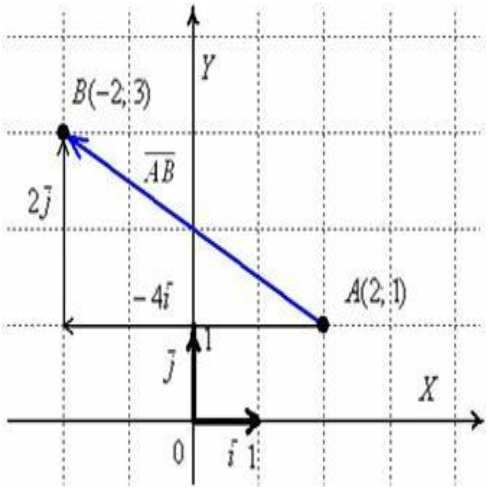


Рисунок 18

Задание 1. Построить вектор $\overrightarrow{AB}$, если известны координаты точек А(2; 1) и В(-2; 3).

Строят точку А(2; 1) и точку В(-2; 3) (рисунок 18). Соединяют точки отрезком, стрелку направляют в точку В, так как в написании $\overrightarrow{AB}$ принято считать, что точка А – начало вектора, а точка В – конец вектора. Координаты вектора вычисляются по правилу

$\overrightarrow{AB}\,(-2-2; 3-1)$; $\overrightarrow{AB}(-4; 2)$.

Этот же вектор можно записать через орты $\overrightarrow{AB} = -4\vec{i}+2\vec{j}$ (рис. 18).

На рисунке 19 построен вектор $\vec{a}(2; 3; 4)$. В этом случае вектор задан координатами.

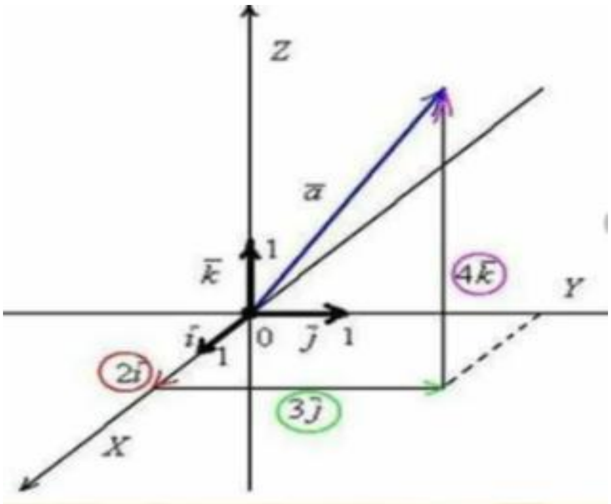


Рисунок 19

Строим точку с координатами (2; 3; 4): эта точка – конец вектора и эту точку соединяем с началом координат и получаем вектор $\vec{a}(2; 3; 4)$, стрелку направляем в точку с координатами (2; 3; 4).

2.1.3. Расстояние между двумя точками (длина отрезка)

Если известны координаты двух точек **на плоскости** $\mathrm{M}_1(\mathrm{x}_1\ ; \mathrm{y}_1)$ и $\mathrm{M}_2(\mathrm{x}_2\ ; \mathrm{y}_2)$, то **расстояние между точками** (длина отрезка) находят по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Если известны координаты двух точек **в пространстве** $M_1(\mathrm{x}_1\ ; \mathrm{y}_1; z_1)$ и $M_2(\mathrm{x}_2\ ; \mathrm{y}_2; z_2)$, то **расстояние между точками** находят по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

2.1.4. Длина вектора

Если известны координаты начала и конца вектора **на плоскости** $\mathrm{M}_1(\mathrm{x}_1\ ; \mathrm{y}_1)$ и $\mathrm{M}_2(\mathrm{x}_2\ ; \mathrm{y}_2)$, то **длину вектора** находят по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Если известны координаты начала и конца вектора **в пространстве** $M_1(\mathrm{x}_1\ ; \mathrm{y}_1; z_1)$ и $M_2(\mathrm{x}_2\ ; \mathrm{y}_2; z_2)$, то **длину вектора** находят по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

2.1.5. График линейной функции

Линейная функция задаётся уравнением y = ax+ b.

График линейной функций представляет собой **прямую**. Для того, чтобы построить прямую достаточно знать координаты любых двух точек этой прямой.

Задание 2. Построить график функции у =2х +1.

Построение. Найдём две любые точки этой прямой. Для одной из точек можно выбрать, например, х=0.

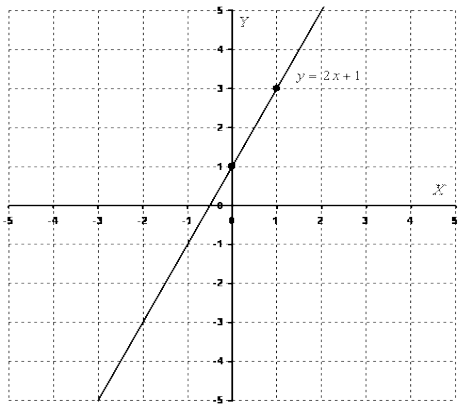


Рисунок 20

Если х=0, то значение у вычисляем у=2·0 +1 =1.

Возьмём ещё какое-нибудь значение вместо х, например, х=1. Если х=1, то у=2·1+1=3.

При оформлении заданий координаты точек обычно сводятся в таблицу:

х	0	1
у	1	3

Две точки прямой найдены, отмечаем эти две точки прямой на координатной плоскости, проводим прямую, чертёж прямой приведен на рисунке 20.

Частные случаи линейной функции

1) Линейная функция вида **у = kx** (где **k** не равно нулю) называется прямой пропорциональностью.

Например, график функции у = - $\frac{x}{2}$ изображен на рисунке 21. График прямой пропорциональности всегда проходит через начало координат. Для построение прямой $y = kx$ достаточно найти всего одну точку, принадлежащую прямой, вторая точка - всегда точка О(0; 0).

2) Уравнение вида **у = b** задаёт прямую, параллельную оси ОХ, в частности, сама ось ОХ задаётся уравнением **у = 0**. График функции у = b строится сразу, без нахождения всяких дополнительных точек.

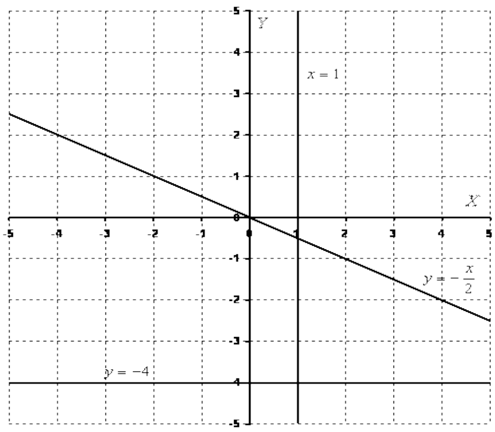


Рисунок 21

То есть, запись у = -4 следует понимать так: «игрек всегда равен –4, при любом значении икс». Прямая линия у= -4 построена на рисунке 21.

3) Уравнение вида **х =а** задаёт прямую, параллельную оси ОУ, в частности, сама ось ОУ задаётся уравнением х =0. Запись х=1 следует понимать так: «икс всегда, при любом значении игрек, равен 1» (рисунок 21).

2.1.6. Деление отрезка в заданном отношении на плоскости

Если известны координаты двух точек плоскости $A(x_A\,;y_A)$ и $B(x_B\,;y_B)$, то координаты точки $M(x_M\,;y_M)$, которая делит отрезок AB в отношении $\lambda=\frac{AM}{BM}$, выражаются формулами:

$$x_M=\frac{x_A+\lambda\cdot x_B}{1+\lambda}\quad \text{и}\quad y_M=\frac{y_A+\lambda\cdot y_B}{1+\lambda}$$

2.1.7. Деление отрезка в заданном отношении в пространстве

Если известны две точки пространства $A(x_A\,;y_A;z_A)$ $B(x_B\,;y_B;z_B)$, то координаты точки $M(x_M\,;y_M;z_M)$, которая делит отрезок AB в отношении $\lambda=\frac{AM}{BM}$, выражаются формулами:

$$x_M=\frac{x_A+\lambda\cdot x_B}{1+\lambda}\;;\; y_M=\frac{y_A+\lambda\cdot y_B}{1+\lambda}\;\text{ и }\; z_M=\frac{z_A+\lambda\cdot z_B}{1+\lambda}.$$

2.1.8. Координаты середины отрезка на плоскости

Если известны две точки плоскости $A(x_A\,;y_A)$ и $B(x_B\,;y_B)$, то координаты точки $M(x_M\,;y_M)$, которая делит отрезок AB на две равные части, то есть λ=1, выражаются формулами:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}\quad \text{и}\quad y_M=\frac{y_A+\cdot y_B}{2}.$$

2.1.9. Координаты середины отрезка в пространстве

Если даны концы отрезка $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ и $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$, то координаты точки M – его середины - выражаются формулами:

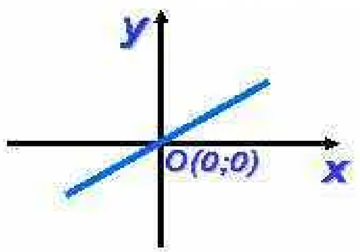
$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}\;;\; y_M=\frac{y_A+\cdot y_B}{2}\;\text{ и }\; z_M=\frac{z_A+z_B}{2}.$$

2.1.10. Общее уравнение прямой на плоскости

Уравнение вида ***Ax* + *By* +*C* = 0** с произвольными коэффициентами A; B и C такими, что A и B не равны нулю одновременно, называется *общим уравнением прямой*.

Общее уравнение прямой называется *полным*, если все коэффициенты *A*, *B*, и *C* отличны от нуля. В противном случае уравнение называется н*еполным*.

2.1.11. Прямая проходит через начало координат

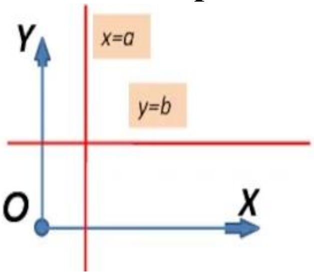


В этом случае в общем уравнении прямой Ax + By +C = 0 значение *C* = 0.

Уравнение прямой, проходящей через начало координат, имеет вид

***Ax* + *By* = 0 или y =kx.**

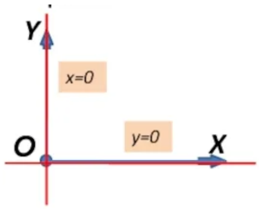
2.1.12. Уравнения прямых, параллельных осям координат



Если прямая параллельна оси ОХ, то уравнение такой прямой **y = b.**

Если прямая параллельна оси ОУ, то уравнение такой прямой **x = a.**

2.1.13. Уравнения осей координат



Уравнение оси ОХ **y= 0,**
уравнение оси ОУ **x= 0.**

2.1.14. Уравнение прямой с нормальным вектором

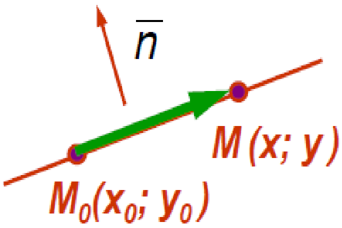
Уравнение прямой в общем виде на плоскости задаётся уравнением

$$\mathbf{A}x + \mathbf{B}y + \mathbf{C} = \mathbf{0}.$$

В этом уравнении коэффициенты при неизвестных **А** и **В** это – координаты вектора, перпендикулярного к этой прямой, его координаты $\vec{n}(A; B)$.

Вектор, перпендикулярный прямой, *называется нормальным вектором прямой*.

Уравнение прямой линии, заданной уравнением **Ax+By+C=0,** называют также *уравнением прямой с нормальным вектором.*



Если известны координаты одной из точек прямой $M(x_1; y_1)$ и координаты нормального вектора прямой $\vec{n}(A; B)$, *то уравнение прямой с нормальным вектором и известной точкой прямой имеет вид*

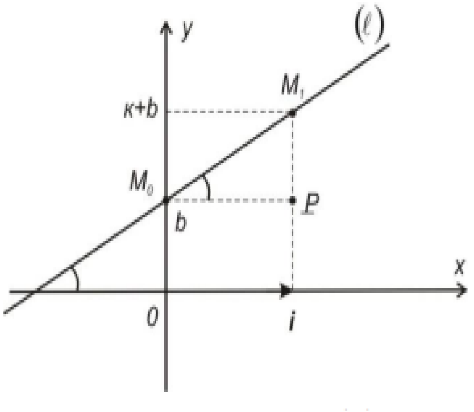
$$A \cdot (x - x_1) + B \cdot (y - y_1) = \mathbf{0}.$$

2.1.15. Уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом

Угловой коэффициент обычно обозначают **k,** *численно он равен тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси 0X.*

$$\mathbf{k} = \mathrm{tg}\alpha.$$

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку с известным угловым коэффициентом, задаётся формулой



$$\mathbf{y = kx + b}$$

Принято в уравнении **y=kx+b** коэффициент **k** называть *угловым коэффициентом*, а величину **b** называть *начальной ординатой.*

Прямая **y = kx + b** пересекает ось 0Y в точке с координатами (0; b).

Прямая $y = kx$ проходит через начало координат.

2.1.16. Уравнение прямой с угловым коэффициентом и точкой на этой прямой

Если известна точка на прямой $M_1(x_1;\ y_1)$, известен k – угловой коэффициент этой прямой, то в этом случае уравнение прямой с известным угловым коэффициентом и известной точкой на этой прямой задаётся формулой

$$\mathbf{y - y_1 = k\ (x - x_1)}$$

Уравнение $\mathbf{y - y_1 = k\ (x - x_1)}$ называют *уравнением пучка прямых*, если значение углового коэффициента не известно.

2.1.17. Уравнение прямой, проходящей перпендикулярно данной прямой

Уравнение прямой, приходящей через известную точку $M(x_0;\ y_0)$ перпендикулярно данной прямой $y = k_1x + b$, находят по формуле

$$\mathbf{y - y_1 = -\frac{1}{k_1}(x - x_0).}$$

2.1.18. Уравнение прямой, проходящей через известную точку перпендикулярно заданной прямой

Если прямая проходит через точку $M(x_0;\ y_0)$, координаты которой известны, и эта же прямая перпендикулярна к другой прямой $Ax + By + C = 0$, то в этом случае уравнение прямой находят по формуле

$$\mathbf{A(y - y_0) - B(x - x_0) = 0.}$$

2.1.19. Уравнение прямой, проходящей через две известные точки

Если известны координаты двух точек $A(x_1\,;\ y_1)$ и $B(x_2\,;\ y_2)$, принадлежащих прямой, то уравнение прямой находят по формуле

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

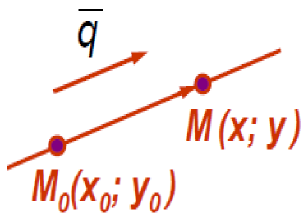
2.1.20. Угловой коэффициент прямой, если известны две точки прямой

Известны координаты двух точек прямой $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$.

Угловой коэффициент прямой в этом случае находят по формуле

$$\boldsymbol{k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}.$$

2.1.21. Каноническое уравнение прямой



Вектор, параллельный прямой, называется *направляющим вектором прямой*.

Если известна одна точка прямой $M(x_0\,;y_0)$ и координаты вектора $\vec{q}(l;m)$, параллельного данной прямой, то уравнение этой прямой записывают формулой

$$\boldsymbol{\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}}.$$

2.1.22. Угол между двумя прямыми

Если две прямые на плоскости заданы уравнениями $A_1\,x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2\,x + B_2 y + C_2 = 0$, то угол между прямыми находят по формуле

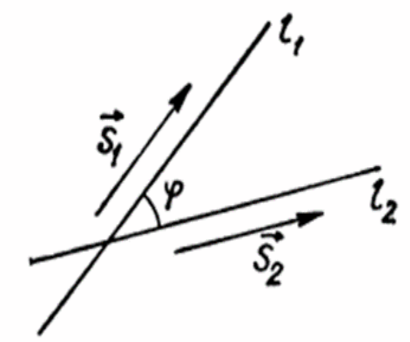
$$\boldsymbol{\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{A_1\cdot A_2 + B_1\cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}}$$

или по формуле

$$\boldsymbol{\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\cdot B_2 - A_2\cdot B_1}{A_1\cdot A_2 - B_1\cdot B_2}}$$

Если две прямые на плоскости заданы уравнениями $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$, то угол между прямыми определяют по формуле

$\boldsymbol{\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1\cdot k_2}}$ (иногда $\boldsymbol{\operatorname{tg}\varphi}$ обозначают $\boldsymbol{\tan\varphi}$).



Если две прямые на плоскости заданы каноническими уравнениями $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1}$ и $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2}$, тогда известны координаты векторов, параллельных этим прямым $\overrightarrow{s_1}(l_1; m_1)$ и $\overrightarrow{s_2}(l_2; m_2)$, и известны координаты по одной из точек на каждой из этих прямых $M_1(x_1\,;y_1)$ и $M_2(x_2\,;y_2)$.

Угол между прямыми $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}$ и $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}$ на плоскости в этом случае можно определить по формуле

$$\cos\varphi=\frac{l_1\cdot l_2+m_1\cdot m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2}}.$$

2.1.23. Условие перпендикулярности двух прямых

Если две прямые на плоскости заданы уравнениями $A_1\,x+B_1y+\ C_1=0$ и $A_2\,x+B_2y+\ C_2=\ 0$ и эти прямые взаимно перпендикулярны (угол между перпендикулярными прямыми равен 90 градусов), то условием перпендикулярности этих прямых будет:

$$\boldsymbol{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2=0}$$

Если прямые на плоскости заданы уравнениями $\mathrm{y=k_1x+b_1}$ и $\mathrm{y=k_2x+b_2}$ и эти прямые взаимно перпендикулярны, то произведение угловых коэффициентов этих прямых равно минус единице

$$\mathbf{k_1\cdot k_2=\ -1.}$$

Если две прямые на плоскости заданы каноническими уравнениями

$$\frac{\mathrm{x-x_1}}{\mathrm{l_1}}=\frac{\mathrm{y-y_1}}{\mathrm{m_1}}\quad\text{и}\quad\frac{\mathrm{x-x_2}}{\mathrm{l_2}}=\frac{\mathrm{y-y_2}}{\mathrm{m_2}}$$

и эти прямые взаимно перпендикулярны, то выполняется условие

$$\mathbf{l_1\cdot l_2+m_1\cdot m_2=0.}$$

2.1.24. Условие параллельности прямых

Если две прямые на плоскости заданы уравнениями $\mathrm{A_1\,x+B_1y+\ C_1=0}$ и $A_2\,x+B_2y+\ C_2=\ 0$ и эти прямые параллельны (угол между параллельными прямыми равен ноль градусов или 180 градусов), то условием параллельности этих прямых будет

$$\frac{\mathbf{A_1}}{\mathbf{A_2}}=\frac{\mathbf{B_1}}{\mathbf{B_2}}.$$

Если прямые заданы уравнениями $\mathrm{y=k_1x+b_1}$ и $\mathrm{y=k_2x+b_2}$ и эти прямые параллельны, то угловые коэффициенты этих прямых равны

$$\mathbf{k_1=k_2.}$$

Если две прямые на плоскости заданы каноническими уравнениями

$$\frac{\mathrm{x-x_1}}{\mathrm{l_1}}=\frac{\mathrm{y-y_1}}{\mathrm{m_1}}\quad\text{и}\quad\frac{\mathrm{x-x_2}}{\mathrm{l_2}}=\frac{\mathrm{y-y_2}}{\mathrm{m_2}}$$

и эти прямые параллельны, то выполняется условие

$$\frac{\mathbf{l_1}}{\mathbf{l_2}}=\frac{\mathbf{m_1}}{\mathbf{m_2}}.$$

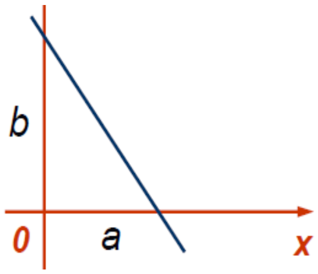
2.1.25. Параметрическое уравнение прямой на плоскости

Каноническое уравнение прямой (уравнение прямой с направляющим вектором) имеет вид $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$, где $M_0(x_0\ ;y_0)$ – известная точка на прямой, и вектор $\vec{q}(l;m)$ – направляющий вектор (параллельный данной прямой).

Если в каноническом уравнении $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\mathbf{t}$ равенство обозначить через **t** и выразить переменные x и y через t, то получаем: $x=lt+x_0$ и $y=mt+y_0$

Параметрическое уравнение записывают в виде: $\begin{cases}\mathbf{x=lt+x_0}\\ \mathbf{y=mt+y_0}\end{cases}$

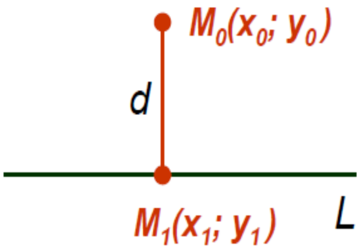
2.1.26. Уравнение прямой в отрезках



Если известны точки пересечения прямой с осями координат (а; 0) и (0; в), то уравнение прямой находят по формуле

$$\mathbf{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}$$

2.1.27. Расстояние от точки до прямой



Если уравнение прямой задано уравнением вида $\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{By}+\boldsymbol{C}=0$ и известны координаты точки $M_0(x_0\ ;y_0)$, не принадлежащей этой прямой, то расстояние **d** от точки $M_0(x_0\ ;y_0)$ до прямой ***L*** вычисляется по формуле

$$\mathbf{d=\frac{|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$

Замечание. Число ***d*** всегда положительное, потому что это расстояние (длина отрезка).

2.1.28. Расстояние между параллельными прямыми

Если две параллельные прямые заданы уравнениями $A_1\,x+B_1y+\ C_1=0$ и $A_2\,x+B_2y+\ C_2=0$, то расстояние между этими параллельными прямыми вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{d}=\frac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

2.1.29. Решение неравенств

Чтобы построить область решения неравенства Ax+By+C> 0, необходимо:

1) построить прямую линию Ax+By+C= 0;

2) вместо текущих координат x и y подставить в уравнение прямой линии

Ax+By+C=0 координаты точки O(0; 0) (или любой другой точки). Если неравенство удовлетворяется (верное неравенство), то областью решений является полуплоскость, содержащая точку O(0; 0). Если неравенство не удовлетворяется, то областью решений служит другая полуплоскость.

Область решений неравенства *Ax + By <0* строится аналогично.

Пример 1. Построить в системе декартовых координат область решений неравенства 2x+3y -6 >0.

Решение. Строим прямую 2x+3y-6=0.

Подставим в неравенство координаты точки O(0; 0): x=0 и y=0.

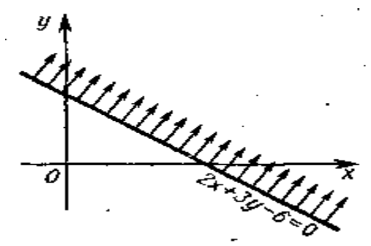


Рисунок 22

Вычисляем $2\cdot 0+3\cdot 0-6>0$, $-6>0$ получили неверное неравенство.

Следовательно, точка O(0; 0) и все точки полуплоскости, которые находятся по одну сторону от прямой 2x+3y—6=0 с точкой O(0; 0) не являются решением заданного неравенства.

Область решения неравенства 2x+3y – 6>0 на рисунке 22 показана штриховкой. Прямая линия не входит в область решений.

Пример 2. Построить область решений системы неравенств

$$\begin{cases} x+y-5>0 \\ -x+3y-7<0 \\ 3x-y<11 \end{cases}$$

Решение. Строим прямые $x+y-5=0$, $-x+3y-7=0$ и $3x-y-11=0$.

Штриховкой отмечаем области решений неравенств

$x+y-5>0$, $-x+3y-7<0$ и $3x-y<11$.

Областью решений является часть плоскости внутри треугольника, она показана на рисунке 23 штриховкой. Стороны треугольника в эту область не входят.

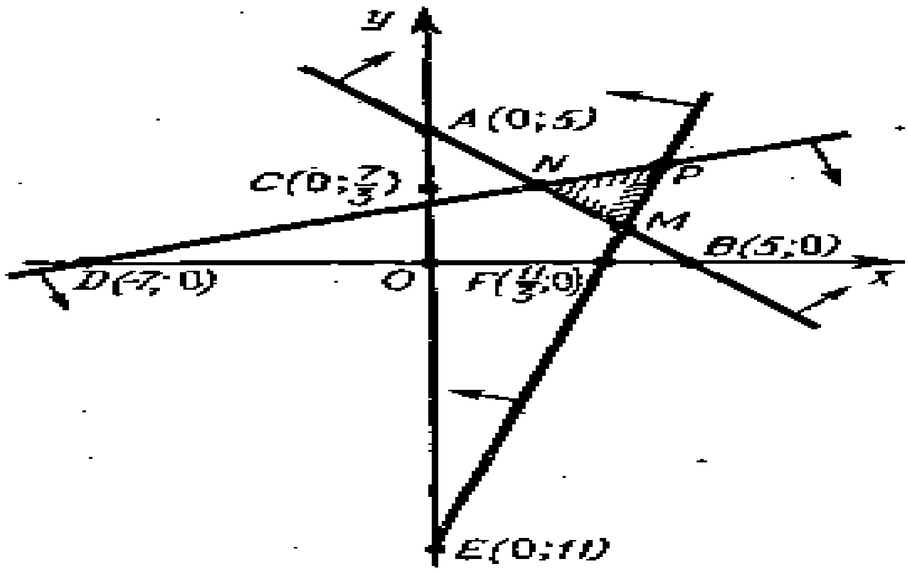
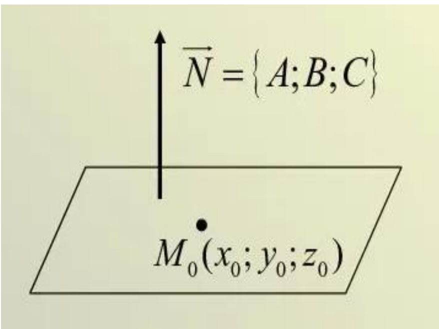


Рисунок 23

2.2. Уравнение плоскости в пространстве

2.2.1. Уравнение плоскости с нормальным вектором (общее уравнение плоскости)

Вектор, перпендикулярный к плоскости, называют *нормальным вектором этой плоскости.*



Точка M(x_0, y_0, z_0) принадлежит плоскости и эта плоскость перпендикулярна вектору $\vec{N}$(A; B; C).

Уравнение плоскости с нормальным вектором и известной точкой записывается формулой

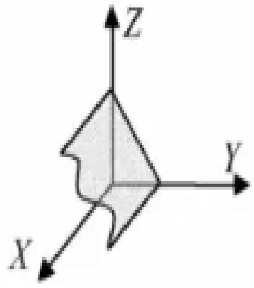
$$\mathbf{A(\ x - x_0) + B(y -\ y_0\ ) + C\ (\ z - z_0\ ) = 0}$$

Если раскрыть скобки и упростить это выражение, то полученная формула называется **общее уравнение плоскости**

Ax + By + Cz + D = 0.

2.2.2. Общее уравнение плоскости и его частные случаи

Общее уравнение плоскости записывают **Ax + By + Cz + D = 0.**



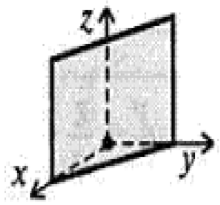
1) Плоскость параллельна оси OX

Если в уравнении плоскости Ax + By + Cz + D = 0 $\boldsymbol{A = 0}$**,** то уравнение плоскости примет вид $By + Cz + D = 0$.

Нормальный вектор плоскости, определяемой этим уравнением, имеет координаты $\boldsymbol{n}^{\to}$ $(0, B, C)$.

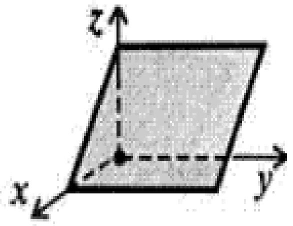
Уравнение **плоскости, параллельной оси OX**:

$$By + Cz + D = 0.$$



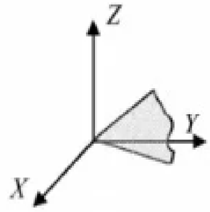
2) Уравнение плоскости, параллельной оси OZ:

$$Ax+By+D = 0.$$



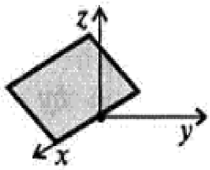
3) Уравнение плоскости, параллельной оси OY:

$$Ax + Cz + D = 0.$$



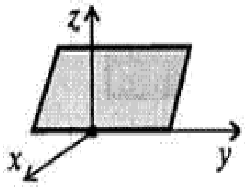
4) Уравнение плоскости, проходящей через начало координат, то есть точку O (0,0,0):

$$Ax+By+Cz = 0.$$



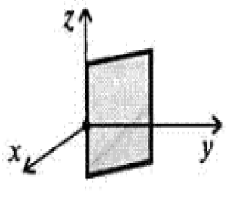
5) Уравнение плоскости, проходящей через ось OX:

$$By + Cz = 0.$$



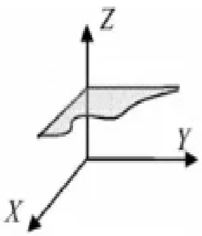
6) Уравнение плоскости, проходящей через ось OY:

$$Ax+Cz = 0.$$



7) Уравнение плоскости, проходящей через ось OZ:

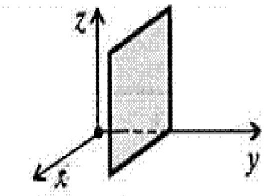
$$Ax+By = 0.$$



8) Уравнение плоскости, параллельной плоскости XOУ.

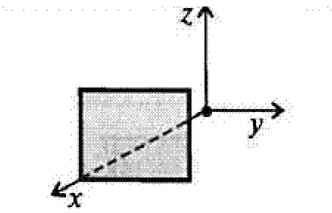
В этом случае плоскость параллельна и оси OX и оси OУ:

$$Cz + D = 0.$$



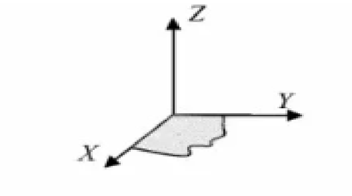
9) Уравнение плоскости, параллельной плоскости XOZ:

$$By + D = 0.$$



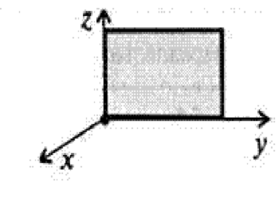
10) Уравнение плоскости, параллельной плоскости YOZ:

$$Ax + D = 0.$$



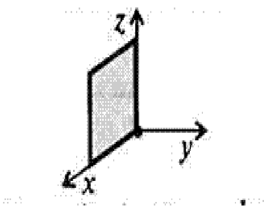
11) Уравнение плоскости XOУ:

$$Z = 0.$$



12) Уравнение плоскости YOZ:

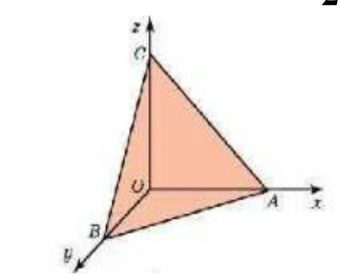
$$X=0$$



13) Уравнение плоскости XOZ:

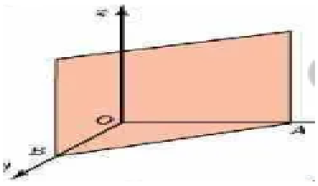
$$Y = 0.$$

2.2.3. Уравнение плоскости в отрезках



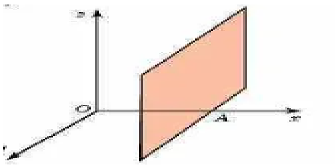
Если координаты точек, в которых плоскость пересекает оси координат, известны A(a; 0; 0) , B(0; b; 0) и C(0; 0; c). Уравнение плоскости в этом случае записывают в виде

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$



Если плоскость пересекает две оси 0x и Oy и параллельна третьей оси Oz, то уравнение плоскости в этом случае записывают в виде

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$



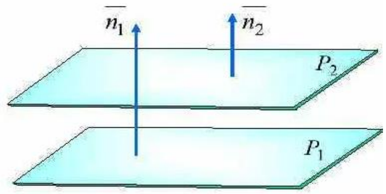
Если плоскость пересекает одну ось Ох и паралльльна двум другим осям Оу Oz, то уравнение плоскости в этом случае записывают в виде

x = a.

2.2.4. Взаимное расположение плоскостей

Пусть плоскости заданы уравнениями

$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$.

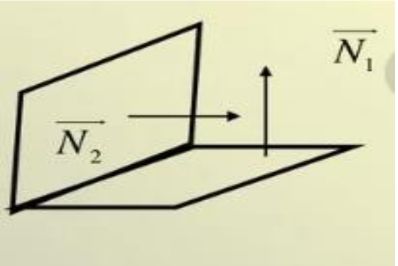


Нормальные векторы этих плоскостей $\overrightarrow{n_1}(A_1\,; B_1; C_1)$ и $\overrightarrow{n_2}(A_2\,; B_2; C_2)$ параллельны (коллинеарные), если плоскости параллельны.

Условие параллельности двух плоскостей

$$\frac{\mathbf{A_1}}{\mathbf{A_2}} = \frac{\mathbf{B_1}}{\mathbf{B_2}} = \frac{\mathbf{C_1}}{\mathbf{C_2}}$$

Пусть плоскости заданы уравнениями $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$. Нормальные векторы этих плоскостей $\overrightarrow{N_1}(A_1\,; B_1; C_1)$ и $\overrightarrow{N_2}(A_2\,; B_2; C_2)$.



Нормальные векторы $\overrightarrow{N_1}$ и $\overrightarrow{N_2}$ взаимно перпендикулярны (ортогональны), если плоскости взаимно перпендикулярны

Условие перпендикулярности двух плоскостей

$$\boldsymbol{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0.}$$

2.2.5. Угол между двумя плоскостями

Пусть плоскости заданы уравнениями

$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$.

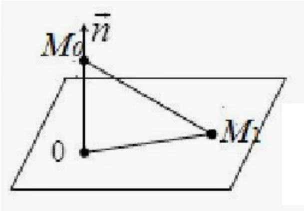
Угол между плоскостями равен наименьшему из углов между нормальными векторами этих плоскостей $\overrightarrow{n_1}(A_1\,; B_1; C_1)$ и $\overrightarrow{n_2}(A_2\,; B_2; C_2)$.

Угол между плоскостями находят по формуле

$$\cos\boldsymbol{\varphi} = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{A_1\cdot A_2 + B_1\cdot B_2 + C_1\cdot C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

2.2.6. Расстояние от точки до плоскости

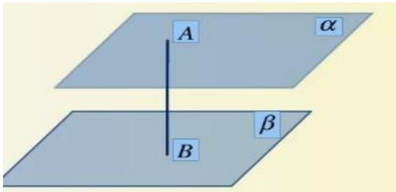
Расстояние от точки $M_0(x_0\,;y_0\,;z_0)$ до плоскости



Ax + B y + Cz + D = 0 находится по формуле

$$\mathbf{d} = \frac{|\mathbf{A}\cdot\mathbf{x_0} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{y_0} + \mathbf{C}\cdot\mathbf{z_0} + \mathbf{D}|}{\sqrt{\mathbf{A^2} + \mathbf{B^2} + \mathbf{C^2}}}.$$

2.2.7. Расстояние между параллельными плоскостями

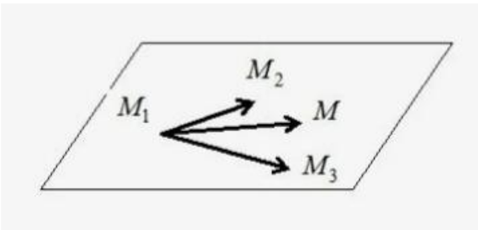


Расстояние между двумя параллельными плоскостями, заданными уравнениями $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + D_1 = 0$ и $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + D_2 = 0$, находится по формуле

$$\boldsymbol{d} = \frac{|\mathbf{D_2} - \mathbf{D_1}|}{\sqrt{\mathbf{A^2} + \mathbf{B^2} + \mathbf{C^2}}}.$$

2.2.8. Уравнение плоскости по трём известным точкам

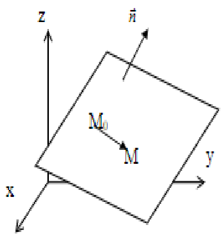
Пусть на плоскости известны координаты трех точек, не лежащих на одной прямой $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$.



Уравнение плоскости определяют формулой

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

2.2.9. Уравнение плоскости по одной точке и координатам нормального вектора



Известны координаты одной точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ на плоскости и координаты вектора $\vec{n}(A;\ B;\ C)$, перпендикулярного этой плоскости.

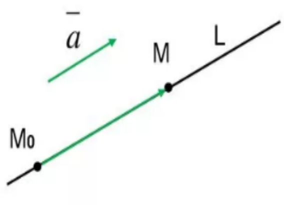
Уравнение плоскости в этом случае записывают формулой

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) + \mathbf{B}(\mathbf{y} - \mathbf{y_0}) + \mathbf{C}(\mathbf{z} - \mathbf{z_0}) = \mathbf{0}.$$

2.3. Уравнение прямой в пространстве

2.3.1. Уравнение прямой с направляющим вектором

Вектор, параллельный данной прямой, называют *направляющим вектором прямой.*



Уравнение прямой L заданной координатами точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, лежащей на этой прямой, и координатами направляющего вектора $\vec{a}$ (l; m; n) (параллельного этой прямой) называется *уравнением прямой с направляющим вектором или каноническим уравнением прямой*

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

2.3.2. Параметрическое уравнение прямой в пространстве

Каноническое уравнение прямой

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

можно преобразовать, обозначив все равенство через t (параметр) и выразив переменные x, y, z через t:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t$$

$$\frac{x-x_0}{l}=t;\ \frac{y-y_0}{m}=t;\ \frac{z-z_0}{n}=t$$

Параметрическое уравнение прямой в пространстве записывают:

$$\begin{cases} x=lt+\ x_0 \\ y=mt+\ y_0 \\ z\ =nt+z_0 \end{cases}$$

2.3.3. Уравнение прямой, проходящей через две известные точки

Известны координаты двух точек прямой $M(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$. Уравнение прямой в этом случае записывают по формуле:

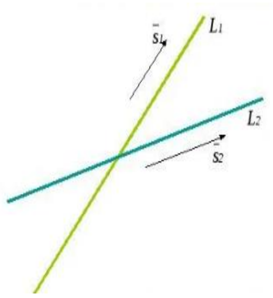
$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}.$$

2.3.4. Угол между двумя прямыми в пространстве

Пусть две прямые в пространстве заданы каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}\ \text{и}\ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

В этих уравнениях $M_1(x_1\ ;y_1;z_1)$- известная точка одной прямой, $M_2(x_2\ ;y_2;z_2)$- известная точка второй прямой.



Вектор $\overrightarrow{s_1}(l_1\,; m_1; n_1)$ – направляющий вектор первой прямой. Вектор $\overrightarrow{s_2}(l_2\,; m_2; n_2)$ – направляющий вектор второй прямой.

Угол между прямыми в пространстве определяется как угол между направляющими векторами этих прямых по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\,\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

2.3.5. Условие параллельности прямых в пространстве

Если две прямые в пространстве заданы уравнениями

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

и **параллельны,** то выполняется условие: координаты направляющих векторов этих прямых пропорциональны

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}\,\frac{n_1}{n_2}$$

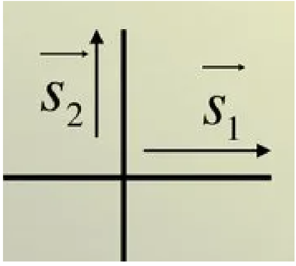
Направляющие векторы этих прямых коллинеарные.

Вектор $\overrightarrow{s_1}(l_1\,; m_1; n_1)$ – направляющий вектор первой прямой;

Вектор $\overrightarrow{s_2}(l_2\,; m_2; n_2)$ – направляющий вектор второй прямой.

2.3.6. Условие перпендикулярности прямых в пространстве

Если две прямые в пространстве заданы уравнениями



$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

и **взаимно перпендикулярны,** то выполняется условие:

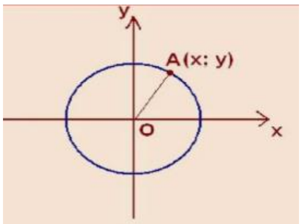
$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Скалярное произведение направляющих векторов этих прямых равно нулю.

Вектор $\overrightarrow{s_1}(l_1\,; m_1; n_1)$ – направляющий вектор первой прямой;

Вектор $\overrightarrow{s_2}(l_2\,; m_2; n_2)$ – направляющий вектор второй прямой.

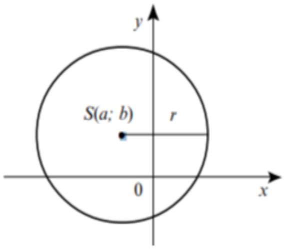
2.4. Линии второго порядка
2.4.1. Окружность. Каноническое уравнение окружности



Уравнение окружности с центром в начале координат находится по формуле:

$$\mathbf{x^2 + y^2 = R^2}$$

R – радиус окружности



Уравнение окружности радиуса r с центром в произвольной точке S(a; b) находится по формуле:

$$(x - \boldsymbol{a})^2 + (y - \mathbf{b})^2 = \mathbf{r^2}\ .$$

2.4.2. Эллипс с фокусами на оси ОХ

Каноническое уравнение эллипса:

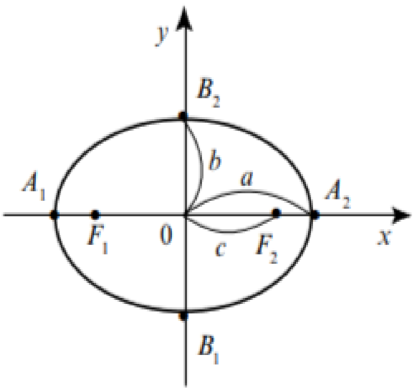
$$\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{a^2}} + \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{b^2}} = \mathbf{1}$$

Для эллипса с фокусами на оси ОХ (а > в) выполняется равенство

$$\boldsymbol{a^2 - c^2 = b^2}$$

2с – расстояние между фокусами; 2а и 2в – оси эллипса:

$A_1A_2 = 2a$ и $B_1B_2 = 2b$ (расстояние между вершинами по оси ОХ и ОУ);



Если а > b, то 2а является большой осью эллипса, 2в – малая ось эллипса.

Фокусы эллипса в случае а > b находятся в точках $F_1(-c;\ 0)$ и $F_2(c;\ 0)$, фокусы эллипса в случае а > b лежат на оси ОХ.

Вершины эллипса в точках с координатами A_1(-a; 0), A_2 (a; 0), B_2 (0; b) и B_1(0; -b).

Эксцентриситет эллипса, если 2а большая ось, равен

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - в^2}}{a}$$

Эксцентриситет эллипса всегда ε <1.

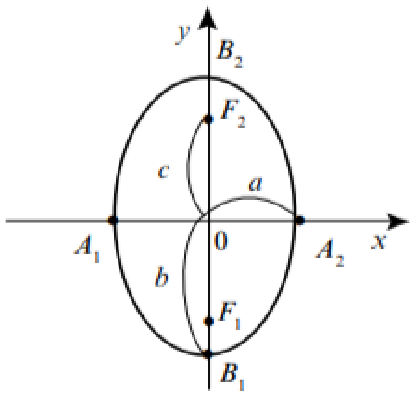
Эксцентриситет можно обозначать ε или е.

2.4.3. Эллипс с фокусами на оси ОУ

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{a^2}}+\frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{b^2}}=\mathbf{1}$$

Большая ось 2b, так как b > a, расстояние между фокусами находят по формуле



$$\mathbf{c}=\sqrt{\mathbf{b^2-a^2}}$$

Вершины эллипса в точках с координатами A_1(-a; 0), A_2 (a; 0), B_2 (0; b) и B_1(0; -b).

Фокусы лежат на оси ОУ: $F_1(0;-c)$ и $F_2(0;c)$.

Эксцентриситет эллипса в этом случае

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{b}}=\frac{\sqrt{\mathbf{b^2-a^2}}}{\mathbf{b}}$$

Эксцентриситет эллипса всегда ε <1.

2.4.4. Гипербола с фокусами на оси ОХ

Каноническое уравнение гиперболы:

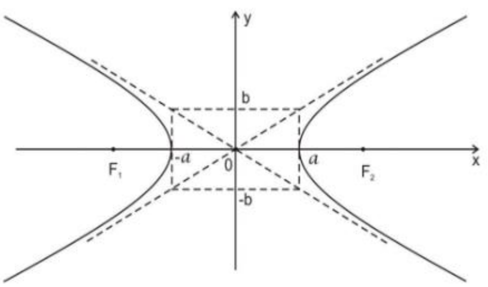
$$\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{a^2}}-\frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{b^2}}=\mathbf{1}$$

Расстояние между фокусами находят по формуле

$$\mathbf{c}=\sqrt{\mathbf{a^2+\ b^2}}$$

2a – действительная ось гиперболы (расстояние между вершинами на оси ОХ);
2в – мнимая ось гиперболы (расстояние между вершинами на оси ОУ);
2c – расстояние между фокусами.

Фокусы гиперболы находятся в точках F_1(-c; 0) и F_2(-c; 0) (на оси ох), если в правой части канонического уравнения гиперболы стоит **+1**.



Вершины гиперболы в точках с координатами (-a; 0), (a; 0), (0; b) и (0; -b).

Эксцентриситет гиперболы с фокусами на оси ОХ находят по формуле:

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}=\frac{\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathbf{b^2}}}{\mathrm{a}}$$

Эксцентриситет гиперболы всегда ε >1.

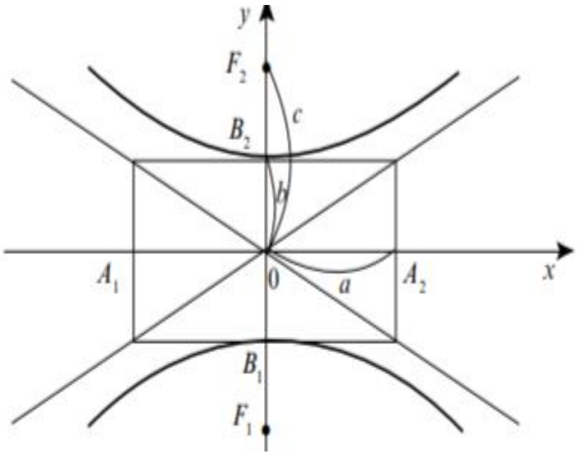
Уравнения асимптот гиперболы

$$\boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x}\ \text{ и }\ \boldsymbol{y}=-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x}.$$

2.4.5. Гипербола с фокусами на оси ОУ

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\mathbf{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1}$$



2b – действительная ось гиперболы (расстояние между вершинами на оси OY);
2a – мнимая ось гиперболы (расстояние между вершинами на оси OX);
2c – расстояние между фокусами.

$$\mathbf{c = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Фокусы гиперболы находятся на оси ОУ в точках F_1(0; -c) и F_2(0; c), если в правой части канонического уравнения гиперболы стоит **-1**.

Вершины гиперболы в точках с координатами (-a; 0), (a; 0), (0; b) и (0; -b).

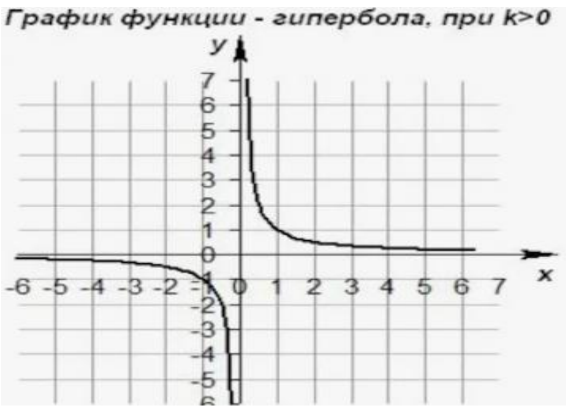
Эксцентриситет находят по формуле:

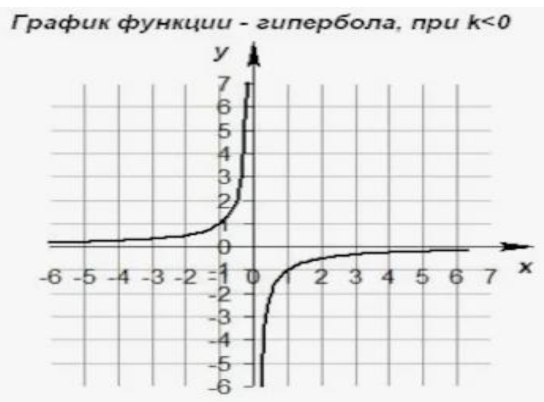
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathrm{c}}{\mathbf{b}} = \frac{\sqrt{\mathrm{a}^{\mathbf{2}} + \mathbf{b^2}}}{\mathbf{b}}$$

Эксцентриситет гиперболы всегда ε >1.

Уравнения асимптот гиперболы $\mathbf{y = \frac{b}{a}x}$ и $\mathbf{y = -\frac{b}{a}x}$.

2.4.6. Гипербола $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$

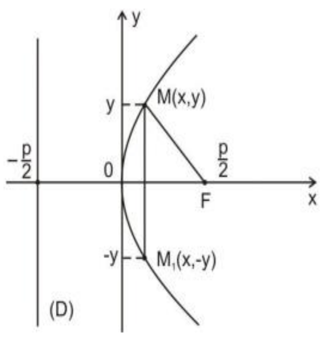




2.4.7. Парабола с фокусом на оси OX

Парабола с вершиной в начале координат и фокусом на оси OX, если ветви параболы направлены вправо, определяется уравнением

$$\mathbf{y^2 = 2\,px}$$



Параметр параболы p, где p > 0 всегда.

Расстояние от вершины до фокуса равно $\frac{p}{2}$.

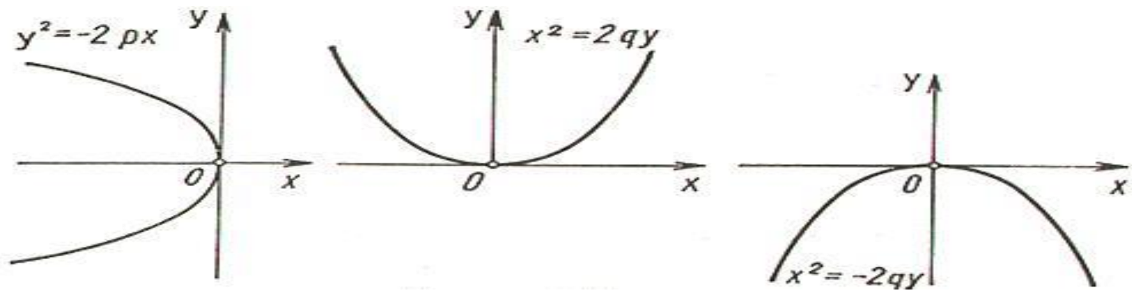
Расстояние от вершины до директрисы равно $\frac{p}{2}$.

Расстояние от директрисы до фокуса равно p.

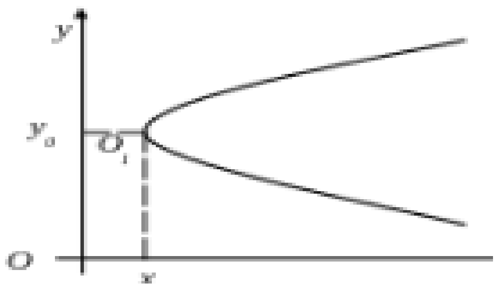
Уравнение директрисы параболы $\mathbf{x = -\frac{p}{2}}$.

Уравнение оси симметрии $\mathbf{y = 0}$.

2.4.8. Другие формы канонического уравнения параболы

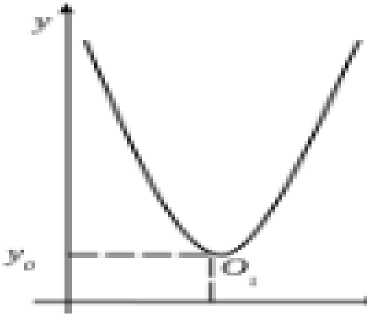


Параметр параболы p или q, где p > 0 и q > 0 всегда.



Уравнение параболы *с вершиной в произвольной точке* $O_1(x_0;\ y_0)$ и осью симметрии $y=y_0$ и направленной вправо, имеет вид:

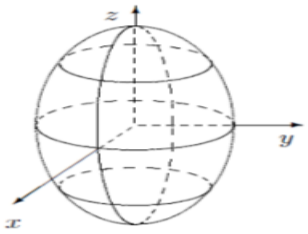
$$\mathbf{(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)}$$



Уравнение параболы с вершиной в произвольной точке $O_1(x_0;\ y_0)$ и осью симметрии $x=x_0$ и, направленной вверх, имеет вид:

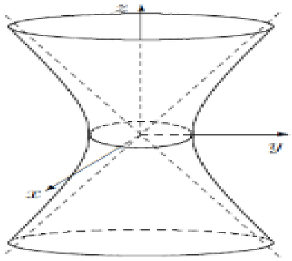
$$\mathbf{(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)}$$

2.4.9. Поверхности вращения



Эллипсоид вращения

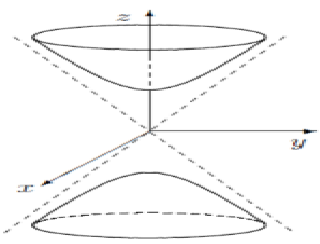
$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$



Гиперболоид вращения

Однополостной гиперболоид вращения

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



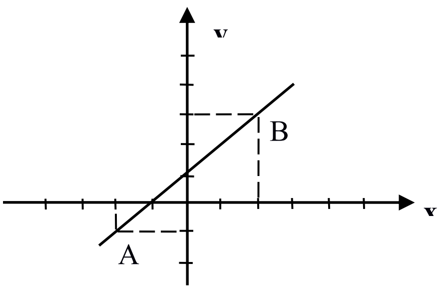
Двуполостной гиперболоид вращения

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

3. Решение типовых задач

3.1. Система координат

Задача 31. Построить прямую, проходящую через точки A(-2; -1) и B(2; 3).



Построение.

Отмечаем точки A(-2; -1) и B(2; 3) в системе координат на плоскости и проводим через эти точки прямую линию.

Задача 32. Найти расстояние между точками A(4; -5) и B(7; -1).

Решение. Расстояние между точками находим по формуле

$$d= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Обозначим координаты точки A(4; -5): $x_1 = 4$ и $y_1 = -5$.

Обозначим координаты точки $B(7; -1)$: $x_2 = 7$ и $y_2 = -1$.

Получаем

$$d = \sqrt{(7-4)^2 + (-1-(-5))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Ответ: расстояние d = 5 единиц масштаба.

Задача 33. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(3; 1; -1)$, $A_2(2; 3; 5)$, $A_3(6; 2; 3)$ и $A_4(3; 7; 2)$. Найти длину ребра A_1A_2 (длину отрезка A_1A_2).

Решение. Найдём координаты вектора $\overline{A_1A_2}$ и его модуль:

$\overline{A_1A_2} = \{2\text{-}3; 3\text{-}1; 5\text{+}1\}$; $\overline{A_1A_2} = \{-1; 2; 6\}$,

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{41}$$

Ответ: длина ребра A_1A_2 равна $\sqrt{41}$.

3.2. Нахождение уравнения прямой на плоскости по заданным условиям

Задача 34. Написать уравнение прямой, проходящей через т. А (2; - 5) и образующую с положительным направлением оси ох угол 135 градусов.

Решение. Уравнение прямой находим по формуле

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Известны координаты точки А (2; - 5), следовательно, в уравнение подставим $x_1 = 2$ и $y_1 = -5$. Угловой коэффициент **k** найдём, зная, что угловой коэффициент равен тангенсу угла наклона этой прямой $k = \text{tg}\alpha$.

$$k = \text{tg}135° = \text{tg}\alpha\,(180° - 45°) = -\text{tg}45° = -1.$$

$$k = -1.$$

Подставляем координаты точки А(2; -5) и $k = -1$ в формулу

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

$$y - (-5) = -1\,(x - 2)$$

$$y + 5 = -x + 2$$

$$x + y + 3 = 0$$

$$y = -x - 3$$

Ответ: уравнение прямой, проходящей через т. А (2; - 5) и образующую с положительным направлением оси ох угол 135 градусов будет у = - х-3.

Задача 35. Записать в параметрическом виде уравнение прямой, проходящей через точки А(-2; -1) и В(2; 3).

Решение. По формуле уравнения прямой через две точки

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

записываем уравнение прямой, проходящей через точки А(-2; -1) и В(2; 3).

$$\frac{y+1}{3+1} = \frac{x+2}{2+2}.$$

Записываем уравнение прямой в параметрическом виде, приравняв левую часть уравнения к **t**, затем правую часть уравнения к **t** и выражаем **y** и **x** через **t**.

$$\frac{y+1}{3+1} = t\,;$$

$$y + 1 = 4t;\ y = 4t - 1.$$

$$\frac{x+2}{2+2} = t;$$

$$x + 2 = 4t;\ x = 4t - 2.$$

Уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} y = 4t - 1 \\ x = 4t - 2 \end{cases}$$

Проверка: при $t = 0$ из полученных уравнений находим координаты $x = -2$ и $y = -1$. Это координаты точки A.

При $t = 1$ из полученных уравнений находим координаты $x = 2$ и $y = 3$, которые являются координатами точки B.

Ответ: Уравнение прямой в параметрическом виде: $\begin{cases} y = 4t - 1 \\ x = 4t - 2 \end{cases}$.

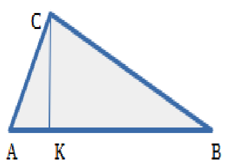
Задача 36. Даны вершины треугольника A(0; 1), B(6; 5) и C(12; -1). Найти:

1) внутренний угол A;

2) уравнение высоты треугольника, опущенной из т. C на сторону AB;

3) уравнение медианы, проведённой из вершины A.

Решение. Для нахождения угла A вычислим сначала угловые коэффициенты прямых AB и AC по формуле $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, а угол определим по



формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$$

Координаты точек известны A(0; 1) и C(12; -1):

$$k_{AC} = \frac{-1-1}{12-0} = \frac{-2}{12} = -\frac{1}{6}$$

Координаты точек A(0; 1) и B(6; 5):

$$k_{AB} = \frac{5-1}{6-0} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

При вычислении углов, обычно, стараются так подобрать угловые коэффициенты, чтобы значение тангенса внутреннего угла было положительным. В этом случае следует принять

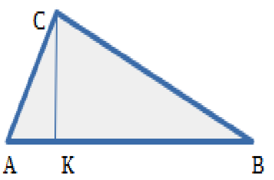
$$k_1 = k_{AB} = \frac{2}{3} \text{ и } k_2 = k_{AC} = \frac{-1}{6}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{6}\right)}{1 + \frac{-1}{6} * \frac{2}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{8}{9}} = \frac{15}{16} = 0{,}93$$

$$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}93.$$

По таблице значений тангенсов находим, что А угол А≈43 градуса.

2) Для нахождения уравнения высоты из вершины С треугольника АВС находим сначала угловой коэффициент прямой АВ.



Найдём угловой коэффициент прямой АВ, зная две точки прямой А(0; 1) и В(6; 5).

Обозначим высоту, проведённую из точки С, как СК.

Высота СК перпендикулярна прямой АВ. Произведение угловых коэффициентов этих взаимно перпендикулярных прямых равно -1.

$$k_{AB} K_{CK} = -1$$

Определим угловой коэффициент прямой $K_{CK} = \frac{-1}{K_{AB}} = \frac{-1}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$.

Подставляем координаты точки С(12; -1) и k= $-\frac{3}{2}$ в формулу

$y - y_1 = k(x - x_1)$ и получаем уравнение высоты

$$y - (-1) = = -\frac{3}{2}(x - 12)$$

$$y + 1 = = -\frac{3}{2}x + 18$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 17$$

Перепишем это уравнение в виде ax +by + c =0, получаем уравнение высоты

$$3x + 2y - 34 = 0.$$

3) Даны вершины треугольника А(0; 1), В(6; 5) и С(12; -1). Обозначим середину отрезка ВС точкой М. Медиана делит противоположную сторону на две равные части.

Для нахождения уравнения медианы, проведённой из вершины А, сначала вычислим координаты точки М – середины отрезка ВС по формулам

$$x_M = \frac{x_C + x_B}{2} \quad \text{и} \quad y_M = \frac{y_C + y_B}{2}$$

Известны координаты вершин треугольника В(6; 5) и С(12; -1),

$\lambda = \frac{BM}{CM} = 1$, λ= 1, так как находим середину отрезка ВС

$$x_M = \frac{12 + 6}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$y_M = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Координаты середины отрезка BC точки M(9; 2).

Уравнение медианы AM напишем по формуле прямой, проходящей через две точки M(9; 2) и A(0; 1): по формуле

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-2}{1-2} = \frac{x-9}{0-9}$$

$$\frac{y-2}{-1} = \frac{x-9}{-9}$$

-9(y – 2) = -1 (x -9)

9(y – 2) = x -9

x – 9 y +18 -9 = 0

x – 9y +9 =0.

Ответ: 1) величина угла A $\operatorname{tg} BAC = \frac{15}{16} = 0{,}93$, Угол A≈43 градуса;

2) 3 x + 2 y – 34 = 0 – уравнение высоты из точки C;

3) x – 9y +9 =0 – уравнение медианы из точки A.

Задача 37. Найти расстояние между параллельными прямыми

3x +4y -12 = 0 и 3x +4 y +13 =0.

Решение. Возьмем произвольную точку, принадлежащую прямой

3x +4y -12 = 0. Если x =0, то y = 3. Точка A(0; 3) – одна из точек прямой

3x +4y -12 = 0.

По формуле расстояния от точки до прямой найдём нужное расстояние от точки A(0; 3) до прямой 3x +4 y +13 =0:

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

$$d = \left|\frac{3\cdot0+4\cdot3+13}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = \frac{25}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5} = 5$$

Ответ: расстояние между параллельными прямыми равно 5.

3.3. Нахождение уравнения прямой в пространстве по заданным условиям

Задача 38. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(3;1;-1)$, $A_2(2;3;5)$, $A_3(6;2;3)$ и $A_4(3;7;2)$. Найти площадь грани $A_1A_2A_3$.

Решение. Для нахождения площади грани $A_1A_2A_3$ надо вычислить векторное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$.

Найдём координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$и $\overrightarrow{A_1A_3}$:

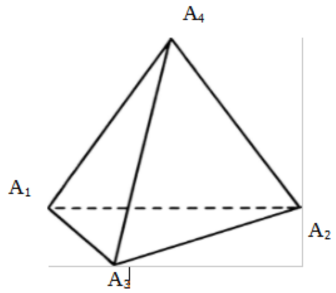
$\overrightarrow{A_1A_3}$= {6-3; 2-1; 3+1}; $\overrightarrow{A_1A_3}$= {3; 1; 4}.

$\overrightarrow{A_1A_2}$= {2-3; 3-1; 5+1}; $\overrightarrow{A_1A_2}$= {-1; 2; 6}.

Векторное произведение

$$\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{\imath}(2 \cdot 4 - 1 \cdot 6) - \bar{\jmath}(-1 \cdot 4 - 3 \cdot 6) + \bar{k}(-1 \cdot 1 - 2 \cdot 3) == 2\bar{\imath} + 22\bar{\jmath} - 7\bar{k}$$



Векторное произведение равно вектору

$\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \{2; 22; -7\}$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах, численно равна модулю (длине) вектора, равного векторному произведению.

Площадь треугольника $A_1A_2A_3$ равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$.

Следовательно,

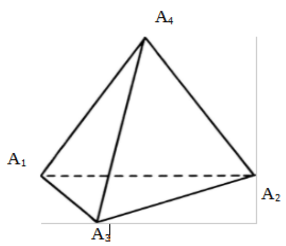
$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right| = \sqrt{2^2 + 22^2 + (-7)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 484 + 49} = \frac{1}{2}\sqrt{537}$

Ответ: Площадь грани$A_1A_2A_3$. Равна $\frac{1}{2}\sqrt{537} \approx 11{,}59$

Задача 39. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(3; 1; -1)$, $A_2(2; 3; 5)$, $A_3(6; 2; 3)$ и $A_4(3; 7; 2)$. Найти объем пирамиды.

Решение. Находим координаты трёх векторов, выходящих из одной вершины пирамиды, например, выходящими из вершины A_1 и совпадающими с рёбрами пирамиды $\overrightarrow{A_1A_2}$,$\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$.

Координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$= {-1; 2; 6}, $\overrightarrow{A_1A_3}$= {3; 1; 4}, $\overrightarrow{A_1A_4}$= {0; 6; 3}.



Объем параллелепипеда, построенного на трёх векторах, выходящих из одной точки, численно равен модулю смешанного произведения этих векторов. Вычисляем модуль определителя, составленного из координат векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$,$\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$.

$$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \times \overline{A_1A_4} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix} =$$

$=\quad$ -1$(1\cdot 3 - 6 \cdot 4) - 2(3 \cdot 3 - 4 \cdot 0) + 6(3 \cdot 6 - 1 \cdot 0)$ =-1$\cdot 21 - 2 \cdot 9 + 6 \cdot 18 = 69$

Так как объем пирамиды равен 1/6 части объёма параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$,$\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$, то V =69/6 = 11,5 (куб. ед.).

Ответ: объем пирамиды равен 11,5 (куб. ед.).

Задача 40. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ $A_1(4; 4; 10)$, $A_2(4; 10; 2)$, $A_3(\,2; 8; 4)$ и $A_4(9; 6; 4)$. Найти угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$.

Решение. Находим координаты вектора $\overline{A_1A_4}$ (5; 2; -6)

Найдём уравнение плоскости, содержащей точки A_1, A_2 и A_3 по формуле

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - 4 & y - 4 & z - 10 \\ 4 - 4 & 10 - 4 & 2 - 10 \\ 2 - 4 & 8 - 4 & 4 - 10 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - 4 & y - 4 & z - 10 \\ 0 & 6 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

(x-4)(-36+32) –(y-4)(0-16) +(z-10)(0+12) =0

-4(x-4)+16(y-4)+12(z -10) = 0

-4x +16 y +12z -168 = 0

Сократим на (-4) полученное равенство и получим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$:

$$x - 4y - 3z + 42 = 0$$

Вектор нормали к этой плоскости $A_1A_2A_3$ имеет координаты $\bar{n}(1;\ -4;\ -3)$.

Угол между плоскостью $A_1A_2A_3$ и вектором $\overline{A_1A_4}$ (5; 2; -6) равен синусу угла между этим вектором $\overline{A_1A_4}$ (5; 2; -6) и вектором нормали $\bar{n}(1;\ -4;\ -3)$ плоскости $A_1A_2A_3$:

$$\operatorname{Sin}\alpha = \frac{1\cdot 5 + (-4)\cdot 2 + (-3)\cdot(-6)}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-3)^2}\cdot\sqrt{5^2 + 2^2 + (-6)^2}} = \frac{15}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{65}} = \frac{15}{13\cdot\sqrt{10}},$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{15}{13\sqrt{10}}\right)$$

Ответ: $\alpha = \arcsin\left(\frac{15}{13\sqrt{10}}\right)$.

3.4. Нахождение уравнения линии второго порядка по заданным условиям

Задача 41. Гипербола проходит через точки $A(3;\ \frac{2\sqrt{15}}{5})$ и $B(-2\sqrt{5};\ 3)$. Найти уравнение гиперболы.

Решение. Уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ или $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$.

По условию задачи не ясно нам, на какой оси лежат фокусы гиперболы, какая из осей является действительной осью.

Рассмотрим сначала случай $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Умножим на a^2b^2 равенство $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и запишем так:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad (1)$$

Подставим в это уравнение вместо x и y координаты первой точки $A(3;\ \frac{2\sqrt{15}}{5})$, то есть подставляем x= 3, y = $\frac{2\sqrt{15}}{5}$ и получим:

$$9b^2 - \frac{12}{5}\,a^2 = a^2b^2$$

$$45b^2 - 12\,a^2 = 5a^2b^2$$

Подставляя в уравнение гиперболы $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ координаты второй точки $B(-2\sqrt{5};\ 3)$, и получим

$$20b^2 - 9\,a^2 = a^2b^2.$$

Решим систему уравнений $\begin{cases} 45b^2 - 12\,a^2 = 5a^2b^2 \\ 20b^2 - 9\,a^2 = a^2b^2 \end{cases}$

Решать можно известными со школы способами.

Умножая второе уравнение на 4, а первое на 3 и вычитая из первого уравнения второе, получим

$$55b^2 = 11a^2b^2, \text{ следовательно, } a^2 = 5.$$

Подставим $a^2 = 5$ в уравнение $20b^2 - 9\,a^2 = a^2b^2$, получим

$$20b^2 - 45 = 5b^2, \text{ откуда } b^2 = 3.$$

Подставляя найденные значения a^2 и b^2 в уравнение

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad (1),$$

получим, что искомое уравнение гиперболы имеет вид

$$3x^2 - 5y^2 = 15.$$

Разделим на 15 это равенство и запишем каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{3}=1.$$

Рассмотрели случай уравнения гиперболы с фокусами на оси ОХ (в правой части канонического уравнения гиперболы +1).

Предлагаю студенту самостоятельно рассмотреть случай, когда фокусы гиперболы лежат на оси ОУ, уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$, а гипербола проходит через точки А($3;\ \frac{2\sqrt{15}}{5}$) и В($-2\sqrt{5};\ 3$).

Задача 42. Дана равносторонняя гипербола $x^2 - y^2 = 8$. Найти уравнение эллипса, фокусы которого находятся в фокусах гиперболы, если известно, что эллипс проходит через точку $A(4;\ 6)$.

Решение. Уравнение гиперболы преобразуем к простейшему виду, разделив на 8 равенство, и получим

$$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1.$$

Следовательно, $а^2 = 8$ и $b^2 = 8$.

В соотношение $a^2 + b^2 = c^2$ подставляем $8 + 8 = c^2$ и получаем, что $c = 4$.

В правой части уравнения гиперболы $x^2 - y^2 = 8$ стоит +1, значит, координаты фокусов гиперболы $F_2(-4, 0)$ и $F_1(4, 0)$, а фокусы лежат на оси ОХ. В этих точках находятся фокусы гиперболы и фокусы эллипса по условию задачи.

Обозначим большую и малую полуоси эллипса через a_1 и b_1.

Расстояние между фокусами эллипса такое же, как и расстояние между фокусами гиперболы эллипса (фокусы эллипса находятся в фокусах гиперболы по условию задачи). Поэтому, половину этого расстояния по-прежнему обозначим через c, с =4.

У эллипса соотношение между значениями а, в и с находят по формуле $с=\sqrt{а_1^2-в_1^2}$. Подставляем с=4

$$4=\sqrt{а_1^2-в_1^2}.$$

$$16 = а_1^2 - в_1^2.$$

Для определения значений a_1 и b_1 нужно найти еще одно соотношение, связывающее a_1 и b_1.

Искомое уравнение эллипса запишется так:

$$\frac{x^2}{а_1^2}+\frac{y^2}{в_1^2}=1.$$

Поскольку точка $A(4;\ 6)$ лежит на эллипсе, ее координаты должны удовлетворять уравнению эллипса. Подставляя в уравнение эллипса координаты точки $A(4;\ 6)$ $x = 4$ и $y = 6$, получим:

$$\frac{4^2}{а_1^2} + \frac{6^2}{в_1^2} = 1$$

Умножим это равенство на $а_1^2в_1^2$, получаем $36а_1^2 + 16\,в_1^2 = \,а_1^2в_1^2$.

Составляем систему уравнений для нахождения значений $а_1^2$ и $в_1^2$:

$$\begin{cases} а_1^2 - \,в_1^2 = 16 \\ 36а_1^2 + 16\,в_1^2 = \,а_1^2в_1^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16а_1^2 - 16\,в_1^2 = 16 \cdot 16 \\ 36а_1^2 + 16\,в_1^2 = \,а_1^2в_1^2 \end{cases}$$

Решаем систему, сначала сложим две строки системы

$$52а_1^2 = 256 + а_1^2в_1^2$$

и выразим из первого равенства системы $а_1^2 = \,в_1^2 + 16$

Получили новую систему уравнений

$$\begin{cases} а_1^2 = \,в_1^2 + 16 \\ 52а_1^2 = 256\, + а_1^2в_1^2 \end{cases}$$

$$52(в_1^2 + 16) = 256 + (в_1^2 + 16)\,в_1^2$$

$$52в_1^2 + 832 = 256 + (в_1^2)^2 + 16в_1^2$$

$$(в_1^2)^2 - 36\,в_1^2 - 576 = 0$$

$$в_1^2 = 48$$

$$а_1^2 = 48 + 16$$

$$а_1^2 = 64$$

Ответ. Уравнение эллипса $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1.$

4. СБОРНИК ЗАДАЧ ПРАКТИЧЕСКОГО СОДЕРЖАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача С.32. Зависимость урожая картофеля *у* (ц/га) от фотосинтетического потенциала х (%) выражается. прямой, проходящей через начало координат и точку *А* (2; 450). Запишите уравнение зависимости.

Задача С.33. Зависимость величины общей сухой биомассы *у* (г/м^2) картофеля от нарастающей суммы испарения $x = \sum E$ (мм) выражается прямой, проходящей через точки А(160; 0) и *В* (300; 1100). Запишите уравнение прямой *(АВ).* Угловой коэффициент прямой выражает наибольший эффект орошения в период интенсивного роста картофеля.

Задача С.34. Издержки производства 100 ед. некоторого товара составляют y_1 =300 руб., а 500 единиц стоят y_2 = 600 руб. Определите функцию издержек производства и стоимость 400 единиц товара при условии, что функция линейная.

Задача С.35. После того как были убраны 12 га силосных культур, силосоуборочный комбайн продолжал работать, убирая за каждый час по 1,7 га. Определите графически, сколько гектаров силосных культур было убрано через x часов работы, запишите формулу данной зависимости.

Задача С.36. Данные о массе зерна x(г) и содержании (%) в нем жира приведены в следующей таблице:

N	x	y
1	32,5	6,85
2	42,5	6,42
3	52,5	5,00

Постройте точки и по ним приближенно определите уравнение линейной зависимости y от x.

Задача С.37. Издержки перевозки двумя средствами транспорта выражаются соответственно функциями $y_1 = 50x + 150$ и $y_2 = 25x + 250$, где x – расстояние в сотнях км, y – транспортные расходы в руб. Найдите расстояние, начиная с которого более экономичным будет второе средство. Определите наиболее экономичный вариант перевозок.

Задача С.38. Для определения калорийности молока можно использовать уравнение y = 304,8+107,$2x$, где x—процент жира в молоке; y – количество килокалорий на *1* кг молока. Постройте график уравнения, найдите калорийность 1 кг молока графически при x=3,6; 3,8; 4,0; 4,2.

Задача С.39. Средний урожай люцерны в зависимости от глубины орошения x характеризуется уравнением $y=0{,}0028x^2 + 0{,}253x + 3{,}520$, где x – в см, y – в ц/га. Постройте кривую урожайности на интервале [0; 30]. Определите по графику, при каких значениях x урожай будет наибольшим на заданном интервале.

Задача С.40. Зависимость урожая зерна кукурузы y от запасов продуктивной влаги x выражается уравнением $p= - 0{,}006x^2 +1{,}100x - 4{,}200$. Постройте соответствующую кривую. Определите приближенно (по графику), при каких значениях x урожайность равна нулю.

Задача С.41. Зависимость суточного удоя y (в литрах) от возраста коров x (лет) выражается уравнением $y= - 9{,}53 + 6{,}86x - 0{,}49x^2$. Постройте график зависимости на интервале [2; 14]. При каком возрасте коров удой максимален?

Задача С.42. Зависимость прироста высоты растений ежи сборной от исходной влажности до полива в пределах 25–60 % наименьшей влагоемкости почвы выражается уравнением

$$y = -215 + \frac{12940}{x},$$

где x – в %, y – в мм. Постройте график этого уравнения на интервале [25, 60].

Задача С.43. Зависимость величины прироста высоты растений клевера красного от исходной влажности почвы до полива (в %) в пределах от 35 до 60 % наименьшей влагоемкости выражается уравнением $y = -240 + \frac{15500}{x}$. Постройте график уравнения на интервале [25; 60] совместно с графиком предыдущей задачи. Что растет быстрее?

Задача С.44. Количество молока (в литрах), необходимое для получения 1 кг масла, выражается формулой $y = \frac{88}{x}$, где x — процент жира в молоке

$2 < x < 6$.

1) Сколько требуется молока, чтобы получить 5 кг масла при жирности x = 4,2?

2) Какова должна быть жирность молока, чтобы из 20 литров молока получился 1 кг масла?

Задача С.45. Хозяйству выделено для закупки два вида азотных удобрений: аммиачной селитры (А) не более 70 т и карбамида *(В)* не более 50 т. Содержание действующего вещества в удобрении *А* – 20 %, а в удобрении *В* – 46 %. Оптовая цена 1 т удобрения – А равна 53 руб., удобрения *В* – 80 руб. Хозяйство может выделить для закупки удобрений 3500 руб. Сколько удобрений каждого вида следует приобрести, чтобы общая масса действующего вещества была максимальной?

Задача С.46. Для кормления скота используются грубые корма и концентраты. 1 кг концентрата содержит 0,8 кг кормовых единиц и 0,09 протеина, 1 кг грубых кормов – 0,3 кг кормовых единиц и 0,05 протеина. Суточный рацион должен содержать не менее 12 кг кормовых единиц и не менее 1,5 кг кормовых единиц протеина. Составьте рацион таким образом, чтобы его стоимость была наименьшей, если 1 кг концентрата стоит 10 руб., 1 кг грубых кормов – 4 руб.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учеб. / Д. В. Беклемишев. – 13-е изд., испр. – Санкт-Петербург: Лань, 2015. – 445 с. (ЭБС Издательства «Лань»).

2. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие / П. Е. Данко [и др.]. – 7-е изд., испр. – Москва: АСТ: Мир и Образование, 2014. – 816 с.

3. Зайцев, И. А. Высшая математика: учебник / И. А. Зайцев. – 4-е изд., стер. – Москва: ДРОФА, 2005. – 398 с.

4. Клетеник, Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии: учеб. пособие для втузов / Д. В. Клетеник. – 17-е изд., перераб. – Санкт-Петербург: Изд-во «Профессия», 2001. – 200 с.

5. Ефимов, Н. В. Краткий курс аналитической геометрии: учебник / Н. В. Ефимов. – 13-е изд., стер. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 240 с.

6. Минорский, Н. С. Сборник задач по математике: учеб. пособие / Н. С. Минорский. – Москва: Интеграл-Пресс, 2002. – Т. 1. – Изд-е стер. – 415 с.

Рекомендации на просмотр видеоуроков в сети Интернета.

1. Аналитическая геометрия на плоскости. Видеоурок «Прямоугольная система координат» https://vk.com/video/@matematika96?z=video-84479151_171163258%2Fclub84479151%2Fpl_-84479151_-2

2. Аналитическая геометрия на плоскости. Видеоурок «Полярная система координат» https://vk.com/video/@matematika96?z=video-84479151_171163256%2Fclub84479151%2Fpl_-84479151_-2

3. Аналитическая геометрия на плоскости. Видеоурок «Уравнение прямой с угловым коэффициентом» https://vk.com/video/@matematika96?z=video-84479151_171163255%2Fclub84479151%2Fpl_-84479151_-2

4. Аналитическая геометрия на плоскости. Видеоурок «Угол между прямыми» https://vk.com/video/@matematika96?z=video-84479151_171163253%2Fclub84479151%2Fpl_-84479151_-2

5. Аналитическая геометрия на плоскости. Видеоурок «Общее уравнение прямой»
https://vk.com/video/@matematika96?z=video-84479151_171163250%2Fclub84479151%2Fpl_-84479151_-2

6. Аналитическая геометрия на плоскости. Видеоурок «Уравнение прямой, проходящей через две точки»
https://vk.com/video/@matematika96?z=video-84479151_171163251%2Fclub84479151%2Fpl_-84479151_-2

7. Аналитическая геометрия на плоскости. Видеоурок «Нормальное уравнение прямой» https://vk.com/video/@matematika96?z=video-84479151_171163248%2Fclub84479151%2Fpl_-84479151_-2

8. Аналитическая геометрия на плоскости. Видеоурок «Уравнение прямой в отрезках» https://vk.com/video/@matematika96?z=video-84479151_171163249%2Fclub84479151%2Fpl_-84479151_-2 .

9. Аналитическая геометрия на плоскости. Видеоурок «Расстояние от точки до прямой» https://vk.com/video/@matematika96?z=video-4479151_171163246%2Fclub84479151%2Fpl_-84479151_-2 .

10. Деление отрезка в данном отношении. https://vk.com/video/@matematika96?z=video-84479151_171596709%2Fclub84479151%2Fpl_-84479151_-2

11. Расстояние между двумя точками на плоскости и в пространстве. Длина отрезка. Видеоурок по высшей математике. https://vk.com/video/@matematika96?z=video-84479151_171596700%2Fclub84479151%2Fpl_-84479151_-2

12. Аналитическая геометрия на плоскости. Основные задачи на плоскость. Часть 1. https://vk.com/video/@matematika96?z=video-84479151_171163261%2Fclub84479151%2Fpl_-84479151_-2

13. Аналитическая геометрия на плоскости. Основные задачи на плоскость. Часть 2. (Вычисление площади треугольника). https://vk.com/video/@matematika96?z=video-84479151_171163245%2Fclub84479151%2Fpl_-84479151_-2

14. Аналитическая геометрия на плоскости. Видеоурок «Окружность» https://vk.com/video/@matematika96?z=video-84479151_171163244%2Fclub84479151%2Fpl_-84479151_-2

15. Аналитическая геометрия на плоскости. Видеоурок «Гипербола» https://vk.com/video/@matematika96?z=video-84479151_171163242%2Fclub84479151%2Fpl_-84479151_-2

16. Аналитическая геометрия на плоскости. Видеоурок «Парабола» https://vk.com/video/@matematika96?z=video-84479151_171163238%2Fclub84479151%2Fpl_-84479151_-2

ОТВЕТЫ

С.32**.** 225x – y = 0.

С.33. 55x + 7y – 8800 = 0.

С.34. $y = \frac{3}{4} \cdot x + 225$, 225

С.35. y= l,7x +12.

С.36. x = 400 км, наиболее экономичный вариант соответствует линии

$$\begin{cases} y = 50x + 150 \text{ при } 0 < ч \ \le 4 \\ y = 25\text{ ч} + 250 \text{ при } \ 4 < x \ < \infty \end{cases}$$

С.41. 12. 7 лет

С.43. Быстрее растет клевер.

С.44. 1) 104,76; 2) 4,4%.

С.45. Хозяйству необходимо приобрести 43,25 т карбамида.

Линейная форма L = 20,125 т.

С.46**.** Суточный рацион составляет 9,23 кг грубых кормов и 11,58 кг концентратов. Линейная форма

L= 1,52 руб.

Индивидуальное практическое задание. Уровень 1

Индивидуальное практическое задание (ИДЗ) студент решает по варианту. Номер варианта соответствует порядковому номеру студента в журнале учебной группы.

В обязательном порядке студент должен выполнить задачу № 1 (три задания) из таблицы 2 и задачу № 2 (три задания) из таблицы 3.

Таблица 2

Задача № 1 Даны координаты вершин треугольника ABC. Найти: 1) уравнение стороны AC; 2) уравнение высоты BH; 3) уравнение медианы BD.	
Вариант	**Вершины треугольника**
1	A(-2; 1), B(1; 5), C(9; 11)
2	A(2; 4), B(6; 7), C(-6; 2)
3	A(-4; 1), B(4; -7), C(8; -10)
4	A(5; 1), B(1; -3), C(-4, 6)

5	A(-2; 1), B(6; 7), C(-6; -9)
6	A(-3; 3), B(9; 8), C(-7; -4)
7	A(5; 2), B(-3; -4), C(2; 8)
8	A(1; -3), B(-5; 5), C(-1; 2)
9	A(-4; 1), B(4; -7), C(8; -10)
10	A(-3; 3), B(9; 8), C(-7; -4)
11	A(2; -5), B(-3; 7), C(5; 1)
12	A(-2; 1), B(1; 5), C(9; 11)
13	A(-2; 1), B(6; 7), C(-6; -9)
14	A(5; 1), B(1; -3), C(-4, 6)
15	A(-4; 1), B(4; -7), C(8; -10)
16	A(1; -3), B(-5; 5), C(-1; 2)
17	A(2; -5), B(-3; 7), C(5; 1)
18	A(-3; 3), B(9; 8), C(-7; -4)
19	A(-2; 1), B(1; 5), C(9; 11)
20	A(5; 2), B(-3; -4), C(2; 8)
21	A(-2; 1), B(6; 7), C(-6; -9)
22	A(2; 4), B(6; 7), C(-6; 2)
23	A(1; -3), B(-5; 5), C(-1; 2)
24	A(5; 1), B(1; -3), C(-4, 6)
25	A(2; -5), B(-3; 7), C(5; 1)
26	A(-2; 1), B(1; 5), C(9; 11)
27	A(-3; 3), B(9; 8), C(-7; -4)
28	A(-4; 1), B(4; -7), C(8; -10)
29	A(-2; 1), B(6; 7), C(-6; -9)
30	A(5; 1), B(1; -3), C(-4, 6)

Таблица 3

Задача № 2 По координатам вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ найти: 1) длины ребер A_1A_2 и A_1A_3; 2) уравнение прямой A_1A_2; 3) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.	
Вариант	**Вершины пирамиды**
1	$A_1(-1; 2; 1)$; $A_2(-2; 2; 5)$; $A_3(-3; 3; l)$; $A_4(-l; 4; 3)$.
2	$A_1(-2; 1; -1)$; $A_2(-3; 1; 3)$; $A_3(-4; 2; -1)$; $A_4(-2; 3; 1)$.
3	$A_1(1; 1; 2)$; $A_2(0; 1; 6)$; $A_3(-1; 2; 2)$; $A_4(1; 3; 4)$.
4	$A_1(-1; -2; 1)$; $A_2(-2; -2; 5)$; $A_3(-3; -1; 1)$; $A_4(-1; 0; 3)$
5	$A_1(2; -1; 1)$; $A_2(1; -1; 5)$; $A_3(0; 0; 1)$; $A_4(2; 1; 3)$.
6	$A_1(-1; 1; -2)$; $A_2(-2; 1; 2)$; $A_3(-3; 2; -2)$; $A_4(-1; 3; 0)$
7	$A_1(1; 2; 1)$; $A_2(0; 2; 5)$; $A_3(-1; 3; 1)$; $A_4(1; 4; 3)$
8	$A_1(-2; -1; 1)$; $A_2(-3; -1; 5)$; $A_3(-4; 0; 3)$; $A_4(-2; 1; 3)$
9	$A_1(-1; 2; 1)$; $A_2(-2; 2; 5)$; $A_3(-3; 3; l)$; $A_4(-l; 4; 3)$
10	A_1 $(l; -1; 2)$; $A_2(0; -1; 6)$; $A_3(-1; 0; 2)$; $A_4(1; 1; 4)$.
11	$A_1(l; -2; 1)$; $A_2(0; -2; 5)$; $A_3(-1; -1; 1)$; $A_4(1; 0; 3)$
12	$A_1(-1; -2; 1)$; $A_2(-2; -2; 5)$; $A_3(-3; -1; 1)$; $A_4(-1; 0; 3)$
13	$A_1(-2; 1; -1)$; $A_2(-3; 1; 3)$; $A_3(-4; 2; -1)$; $A_4(-2; 3; 1)$.
14	$A_1(1; 1; 2)$; $A_2(0; 1; 6)$; $A_3(-1; 2; 2)$; $A_4(1; 3; 4)$.
15	$A_1(l; -2; 1)$; $A_2(0; -2; 5)$; $A_3(-1; -1; 1)$; $A_4(1; 0; 3)$
16	A_1 $(l; -1; 2)$; $A_2(0; -1; 6)$; $A_3(-1; 0; 2)$; $A_4(1; 1; 4)$.
17	$A_1(-1; 1; -2)$; $A_2(-2; 1; 2)$; $A_3(-3; 2; -2)$; $A_4(-1; 3; 0)$
18	$A_1(-1; 2; 1)$; $A_2(-2; 2; 5)$; $A_3(-3; 3; l)$; $A_4(-l; 4; 3)$
19	$A_1(-2; -1; 1)$; $A_2(-3; -1; 5)$; $A_3(-4; 0; 3)$; $A_4(-2; 1; 3)$
20	$A_1(2; -1; 1)$; $A_2(1; -1; 5)$; $A_3(0; 0; 1)$; $A_4(2; 1; 3)$.
21	$A_1(-2; 1; -1)$; $A_2(-3; 1; 3)$; $A_3(-4; 2; -1)$; $A_4(-2; 3; 1)$.
22	$A_1(1; 2; 1)$; $A_2(0; 2; 5)$; $A_3(-1; 3; 1)$; $A_4(1; 4; 3)$
23	$A_1(l; -2; 1)$; $A_2(0; -2; 5)$; $A_3(-1; -1; 1)$; $A_4(1; 0; 3)$
24	A_1 $(l; -1; 2)$; $A_2(0; -1; 6)$; $A_3(-1; 0; 2)$; $A_4(1; 1; 4)$.
25	$A_1(-2; -1; 1)$; $A_2(-3; -1; 5)$; $A_3(-4; 0; 3)$; $A_4(-2; 1; 3)$
26	$A_1(1; 1; 2)$; $A_2(0; 1; 6)$; $A_3(-1; 2; 2)$; $A_4(1; 3; 4)$.
27	$A_1(2; -1; 1)$; $A_2(1; -1; 5)$; $A_3(0; 0; 1)$; $A_4(2; 1; 3)$.

28	$A_1(-1; -2; 1)$; $A_2(-2; -2; 5)$; $A_3(-3; -1; 1)$; $A_4(-1; 0; 3)$
29	A_1 (l; -1; 2); $A_2(0; -1; 6)$; $A_3(-1; 0; 2)$; $A_4(1; 1; 4)$.
30	$A_1(-2; -1; 1)$; $A_2(-3; -1; 5)$; $A_3(-4; 0; 3)$; $A_4(-2; 1; 3)$

Индивидуальное практическое задание. Уровень 2

Индивидуальное практическое задание. Уровень 2 (задача 3: два задания) из таблицы 4 студент выполняет по желанию на дополнительную оценку.

Таблица 4

Задача 3

По координатам вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ найти:

1) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3;

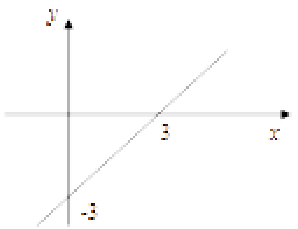
2) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$

Вариант	**Вершины пирамиды**
1	$A_1(-1; 2; 1)$; $A_2(-2; 2; 5)$; $A_3(-3; 3; l)$; $A_4(-l; 4; 3)$
2	$A_1(-2; 1; -1)$; $A_2(-3; 1; 3)$; $A_3(-4; 2; -1)$; $A_4(-2; 3; 1)$.
3	$A_1(1; 1; 2)$; $A_2(0; 1; 6)$; $A_3(-1; 2; 2)$; $A_4(1; 3; 4)$.
4	$A_1(-1; -2; 1)$; $A_2(-2; -2; 5)$; $A_3(-3; -1; 1)$; $A_4(-1; 0; 3)$
5	$A_1(2; -1; 1)$; $A_2(1; -1; 5)$; $A_3(0; 0; 1)$; $A_4(2; 1; 3)$.
6	$A_1(-1; 1; -2)$; $A_2(-2; 1; 2)$; $A_3(-3; 2; -2)$; $A_4(-1; 3; 0)$
7	$A_1(1; 2; 1)$; $A_2(0; 2; 5)$; $A_3(-1; 3; 1)$; $A_4(1; 4; 3)$
8	$A_1(-2; -1; 1)$; $A_2(-3; -1; 5)$; $A_3(-4; 0; 3)$; $A_4(-2; 1; 3)$
9	$A_1(-1; 2; 1)$; $A_2(-2; 2; 5)$; $A_3(-3; 3; l)$; $A_4(-l; 4; 3)$
10	A_1 (l; -1; 2); $A_2(0; -1; 6)$; $A_3(-1; 0; 2)$; $A_4(1; 1; 4)$.
11	A_1(l; -2; 1); $A_2(0; -2; 5)$; $A_3(-1; -1; 1)$; $A_4(1; 0; 3)$
12	$A_1(-1; -2; 1)$; $A_2(-2; -2; 5)$; $A_3(-3; -1; 1)$; $A_4(-1; 0; 3)$
13	$A_1(-2; 1; -1)$; $A_2(-3; 1; 3)$; $A_3(-4; 2; -1)$; $A_4(-2; 3; 1)$.
14	$A_1(1; 1; 2)$; $A_2(0; 1; 6)$; $A_3(-1; 2; 2)$; $A_4(1; 3; 4)$.
15	A_1(l; -2; 1); $A_2(0; -2; 5)$; $A_3(-1; -1; 1)$; $A_4(1; 0; 3)$
16	A_1 (l; -1; 2); $A_2(0; -1; 6)$; $A_3(-1; 0; 2)$; $A_4(1; 1; 4)$.
17	$A_1(-1; 1; -2)$; $A_2(-2; 1; 2)$; $A_3(-3; 2; -2)$; $A_4(-1; 3; 0)$
18	$A_1(-1; 2; 1)$; $A_2(-2; 2; 5)$; $A_3(-3; 3; l)$; $A_4(-l; 4; 3)$
19	$A_1(-2; -1; 1)$; $A_2(-3; -1; 5)$; $A_3(-4; 0; 3)$; $A_4(-2; 1; 3)$
20	$A_1(2; -1; 1)$; $A_2(1; -1; 5)$; $A_3(0; 0; 1)$; $A_4(2; 1; 3)$.

21	$A_1(-2; 1; -1)$; $A_2(-3; 1; 3)$; $A_3(-4; 2; -1)$; $A_4(-2; 3; 1)$.
22	$A_1(1; 2; 1)$; $A_2(0; 2; 5)$; $A_3(-1; 3; 1)$; $A_4(1; 4; 3)$
23	$A_1(1; -2; 1)$; $A_2(0; -2; 5)$; $A_3(-1; -1; 1)$; $A_4(1; 0; 3)$
24	$A_1(1; -1; 2)$; $A_2(0; -1; 6)$; $A_3(-1; 0; 2)$; $A_4(1; 1; 4)$.
25	$A_1(-2; -1; 1)$; $A_2(-3; -1; 5)$; $A_3(-4; 0; 3)$; $A_4(-2; 1; 3)$
26	$A_1(1; 1; 2)$; $A_2(0; 1; 6)$; $A_3(-1; 2; 2)$; $A_4(1; 3; 4)$.
27	$A_1(2; -1; 1)$; $A_2(1; -1; 5)$; $A_3(0; 0; 1)$; $A_4(2; 1; 3)$.
28	$A_1(-1; -2; 1)$; $A_2(-2; -2; 5)$; $A_3(-3; -1; 1)$; $A_4(-1; 0; 3)$
29	$A_1(1; -1; 2)$; $A_2(0; -1; 6)$; $A_3(-1; 0; 2)$; $A_4(1; 1; 4)$.
30	$A_1(-2; -1; 1)$; $A_2(-3; -1; 5)$; $A_3(-4; 0; 3)$; $A_4(-2; 1; 3)$

Проверочный тест. Примерные задания

Таблица 5

Задание	Варианты ответов
1. Острый угол между прямыми 5x +y -3 =0 и 2x +3 y -21 =0 равен:	1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{3\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{3\pi}{2}$.
2. Дан треугольник с вершинами A(1; 0), B(4; 5) и C(7; 3). Составить уравнение высоты, проведённой из вершины B	1) y= -2x +13; 2) y= 2x -3; 3) y $=\frac{1}{2}x-3$; 4) 4) y= 2x -6.
3. Две стороны квадрата лежат на прямых x -2y +2 = 0 и x -2y +5=0. Его площадь равна:	1) 5; 2) 9; 3) 49; 4) 16 .
4. Прямая, проходящая через точки A(1; 0) и B (;4 5), наклонена к оси OX под углом:	1) 5°; 2)135°; 3) 60°; 4) 30°.
4. Уравнение прямой, параллельной  данной (на рис.) прямой и проходящей через точку с координатами (2; 1), имеет вид:	1) y =-x+3; 2) y=x -1; 3) y =x -3; 4) y $=\frac{1}{2}x$.
6. Составить каноническое уравнение эллипса, если расстояние между концами большой и малой оси равно 5, а сумма длин полуосей равна 7	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$; $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$; $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=-1$; $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

7. Определить радиус и координаты центра окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 10 \cdot x + 4 \cdot y + 25 = 0$	$(x-5)^2 + (y+2)^2 = 4;$ $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 4;$ $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 4;$ $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 2.$
8. Написать формулы канонического уравнения, эксцентриситета и асимптот гиперболы	
9. Написать каноническое уравнение прямой в плоскости и в пространстве	

Локальный электронный методический материал

Надежда Петровна Зубарева

МАТЕМАТИКА:
РАЗДЕЛ АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Редактор С. Кондрашова
Корректор Т. Звада

Уч.-изд. л. 6,0. Печ. л. 5,5.

Издательство федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Калининградский государственный технический университет»
236022, Калининград, Советский проспект, 1